

## 2024 学年第一学期期末学情诊断

## 初三数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

2025.1

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中, 一定是二次函数的是 (▲)

(A)  $y = \frac{3}{4}x + m^2$  (其中  $m$  是常数); (B)  $y = ax^2 + bx + c$  (其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是常数);

(C)  $y = (2x-1)x$ ; (D)  $y = (x+4)^2 - x^2$ .

2. 已知  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $AB = 5$ , 那么下列各式中, 正确的是 (▲)

(A)  $\sin B = \frac{3}{5}$ ; (B)  $\cos B = \frac{3}{5}$ ; (C)  $\cot B = \frac{3}{5}$ ; (D)  $\tan B = \frac{3}{5}$ .

3. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于抛物线  $y = -(x-20)^2 + 25$ , 下列叙述正确的是 (▲)(A) 抛物线有最低点, 最低点的坐标是  $(20, 25)$ ;(B) 抛物线有最高点, 最高点的坐标是  $(-20, 25)$ ;(C) 抛物线有最高点, 最高点的坐标是  $(20, 25)$ ;(D) 抛物线有最低点, 最低点的坐标是  $(-20, 25)$ .

4. 下列说法中, 正确的是 (▲)

(A) 两个等腰三角形一定相似;

(B) 两个直角三角形一定相似;

(C) 含  $45^\circ$  角的两个等腰三角形一定相似; (D) 含  $105^\circ$  角的两个等腰三角形一定相似.5. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ ,  $E$  分别是边  $AB$ ,  $AC$  的中点. 下列结论中, 错误的是 (▲)

(A)  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ; (B)  $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ ;

(C)  $DE = \frac{1}{2} BC$ ; (D)  $DE \parallel BC$ .

6. 已知二次函数  $y = f(x)$  的图像是开口向上的抛物线, 抛物线的对称轴在  $y$  轴右侧. 当抛物线与  $x$  轴两交点的距离为 9 时, 若  $f(-5)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(4)$ 、 $f(7)$  这四个函数值中有且只有一个值不大于 0, 那么在这四个函数值中, 值不大于 0 是 (▲)

(A)  $f(-5)$ ; (B)  $f(-1)$ ; (C)  $f(4)$ ; (D)  $f(7)$ .

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知  $a$ 、 $b$  是不等于 0 的实数,  $7a = 5b$ , 那么  $\frac{a+b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 已知  $f(x) = 4x^2 - 1$ , 那么  $f(\sqrt{2}) = \underline{\quad\quad}$ .

9. 将二次函数  $y = x^2 - 4x + 3$  化成  $y = a(x + m)^2 + k$  的形式为  $\underline{\quad\quad}$ .

10. 第七届中国国际进口博览会(简称“进博会”)于2024年11月5日至10日在国家会展中心(上海)隆重举办,以“新时代、共享未来”为主题,是世界上首个以进口为主题的国家级博览会,小海在地图上(如图1)测量他家与国家会展中心(上海)的距离为2.6厘米,那么请帮小海计算出他家与国家会展中心(上海)的实际距离为  $\underline{\quad\quad}$  千米.



图1

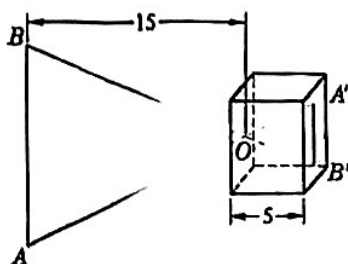


图2



图3

11. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D, E$  分别在边  $AB, AC$  上. 添加一个条件使  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  (顶点  $A, D, E$  分别与顶点  $A, C, B$  对应), 这个条件可以是  $\underline{\quad\quad}$ . (写出一种情况即可)

12. (洞孔成像) 如图2,  $AB \parallel A'B'$ , 物像  $A'B'$  所在正方体的面与平面  $A'B'AB$  垂直, 根据图中尺寸, 已知物像  $A'B'$  的长为4, 那么物  $AB$  长为  $\underline{\quad\quad}$ .

13. 已知两个相似三角形的一组对应边长分别是5厘米和2厘米, 如果这组对应边上的高的长度相差2.4厘米, 那么这两条高的长度和为  $\underline{\quad\quad}$  厘米.

14. 在  $\triangle ABC$  中, 如果  $AB = AC$ , 这个三角形的重心为点  $G$ , 设  $\overrightarrow{GB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{GA} = \vec{b}$ , 那么向量  $\overrightarrow{BC}$  用向量  $\vec{a}, \vec{b}$  表示为  $\underline{\quad\quad}$ .

15. 如图3, 一座大楼前的残疾人通道是斜坡, 用  $AB$  表示, 沿着通道走3.2米可进入楼厅, 楼厅比楼外的地面高0.4米, 那么残疾人通道的坡度为  $\underline{\quad\quad}$ . (结果保留根号的形式)

16. 某校初三数学活动小组在利用尺规把线段  $AB$  分割成两条线段.

(1) 过点  $B$  作  $BC \perp AB$ , 使  $BC = \frac{1}{2}AB$ . (2) 联结  $AC$ , 在线段  $CA$  上截取  $CD = CB$ .

(3) 在线段  $AB$  上截取  $AE = AD$ . 那么  $\frac{AE}{BE} = \underline{\quad\quad}$ .

17. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 5$ ,  $BC = 13$ , 点  $E$  在边  $DC$  上, 将矩形  $ABCD$  沿  $AE$  翻折, 点  $D$  恰好落在边  $BC$  上的点  $F$  处, 那么  $EC$  的长为  $\underline{\quad\quad}$ .

18. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 将抛物线  $l_1: y = ax^2 + bx + c$  (其中  $a, b, c$  是常数, 且  $a \neq 0$ ), 以原点为中心, 旋转  $180^\circ$  得抛物线  $l_2$ , 则称  $l_2$  是  $l_1$  的“中心对称抛物线”. 已知抛物线  $y_1 = x^2 - 3x - 4$ , 将抛物线  $y_1$  向左平移  $n$  个单位长度, 与  $x$  轴的交点从左到右依次为  $A, B$ . 将抛物线  $y_1$  的“中心对称抛物线”  $y_2$  向右也平移  $n$  个单位长度, 与  $x$  轴的交点从左到右依次为  $C, D$ . 当线段  $BC$  是线段  $AB, BD$  的比例中项时,  $n$  的值为  $\underline{\quad\quad}$ .

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (本题共 10 分)

计算:  $\frac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ} - \cot^2 30^\circ + \frac{4 \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ + \tan 45^\circ}$ .

20. (本题共 10 分, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知: 抛物线  $y = ax^2 + bx$  经过点  $A(-4, 3)$  和  $B(2, 1)$ .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若点  $C(6, m)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx$  上, 求  $\angle ACO$  的正弦值.

21. (本题共 10 分, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

如图 4, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $BC = 4$ , 对角线  $AC$ ,  $BD$  相交于点  $O$ , 点  $E$  在边  $AD$  上, 且  $\angle AEO = \angle AOE$ .

(1) 求  $AE$  的长;

(2) 求  $\tan \angle AEO$  的值.

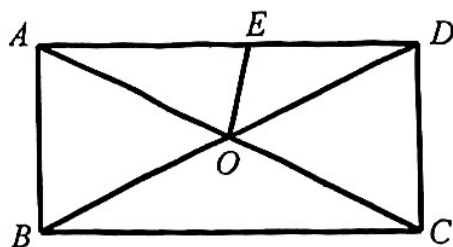


图 4

22. (本题共 10 分, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

如图 5,  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  都是直角三角形纸片,  $\angle A = \angle D = 90^\circ$  且  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  不相似. 其中  $AB = a$ ,  $AC = b$ ,  $DE = m$ ,  $DF = n$  ( $n > b > a > m$ ).

是否存在经过锐角顶点的一条直线, 能把  $\triangle ABC$  或  $\triangle DEF$  分割成两个三角形, 使分割得的两个三角形中有一个三角形 (记这个三角形的面积为  $S$ ) 与没有分割的三角形相似.

如果存在; (1) 请写出你的分割方案 (只要写出一个方案即可), 并证明方案的正确性;

(2) 按照你写出的分割方案, 求出  $S$  的值 (可以用  $a$  或  $b$  或  $m$  或  $n$  的代数式表示).

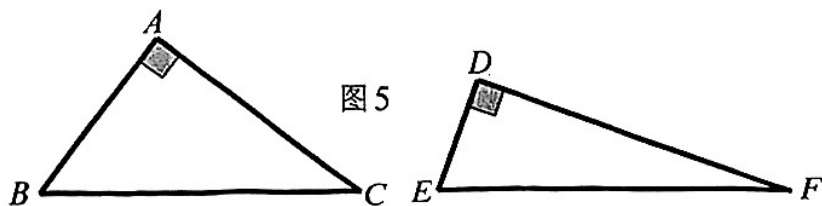


图 5

23. (本题共 12 分, 第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 6 分)

已知: 如图 6, 点  $E$  是平行四边形  $ABCD$  的对角线  $BD$  上的一点, 射线  $AE$  与  $DC$  交于点  $F$ , 与  $BC$  的延长线交于点  $H$ .

(1) 求证:  $AE^2 = EF \cdot EH$ ;

(2) 联结  $DH$ , 若  $DH = AB$ ,  $AD^2 = AE \cdot AH$ ,

求证: 四边形  $ABCD$  是菱形.

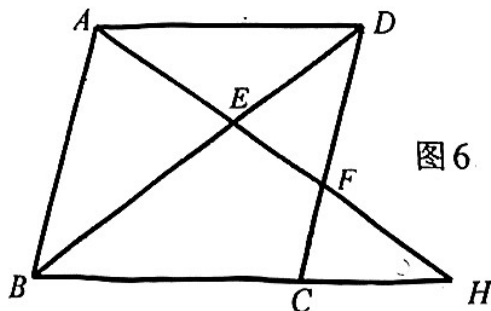


图 6

24. (本题共 12 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中 (如图 7), 已知抛物线  $f(x) = x^2 + (b+1)x + b (b < 0)$ ,  $f(x)$  的图像与  $x$  轴的两个交点分别为点  $P$ 、点  $Q$  (其中点  $P$  在点  $Q$  左侧).

(1) 若将  $f(x)$  的图像向上平移 2 个单位, 得到的新抛物线  $g(x)$  经过点  $(1, -3)$ , 求新抛物线  $g(x)$  的表达式;

(2) 若  $f(x)$  的图像在直线  $x=1$  的右侧呈上升趋势, 求  $b$  的取值范围;

(3) 在 (1) 中所求的  $g(x)$  的图像与  $y$  轴的交点记为点  $B$ , 与  $x$  轴的正半轴交点记为点  $A$ , 点  $M$  在  $g(x)$  的图像上. 当直线  $MQ$  与直线  $PB$  垂直, 且  $QP = \frac{3}{5}QA$  时, 求点  $M$  的坐标.

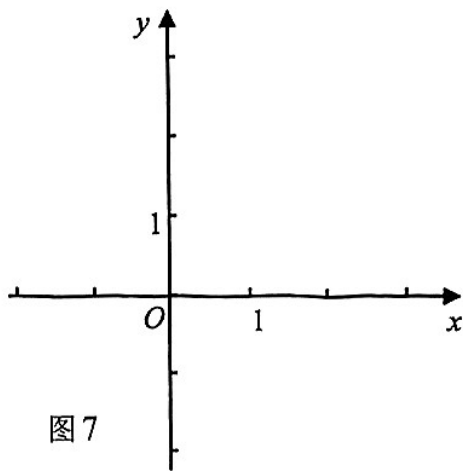


图 7

25. (本题共 14 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 5 分, 第 (3) 小题 5 分)

已知三角形  $ADE$  的顶点  $E$  在三角形  $ABC$  的内部, 点  $D$ 、点  $E$  在直线  $AC$  同侧.

(1) 如图 8, 联结  $BD$ 、 $BE$ 、 $CE$ , 若  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是等边三角形时, 点  $C$ 、点  $E$ 、点  $D$  三点共线,  $CE:DE=1:2$ , 求  $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$  的比值;

(2) 如图 9, 联结  $BD$ 、 $BE$ 、 $CE$ ,  $\angle BAC = \angle DAE = n^\circ (0 < n < 90)$ , 若  $AB = AC$ ,  $AD = AE$ , 求  $\angle BEC - \angle DBE$  的值 (用含  $n$  的代数式表示);

(3) 在等腰三角形  $ABC$  中,  $AB = BC = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $BH \perp AC$ , 点  $E$  在高  $BH$  上, 点  $D$  在  $HB$  的延长线上, 联结  $AE$  并延长交边  $BC$  于点  $F$ , 联结  $DF$ ,  $DA$ , 若  $\angle DAE = \angle ABH$ ,  $\triangle ABD$  与  $\triangle BDF$  相似时, 求  $EH$  的长.

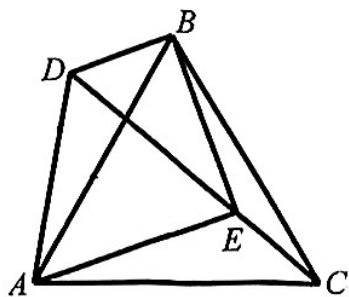


图 8

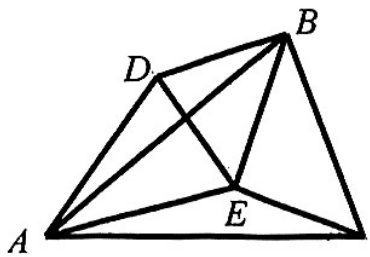
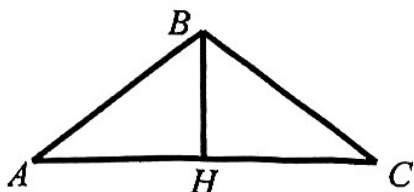


图 9



备用图