

2024 学年第一学期期末考试九年级数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分150分. 考试时间100分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在比例尺为 $1:500$ 的图纸上, 量得一座塔的高是 2.2 厘米, 那么它实际的高度是 (▲)
 (A) 11 米; (B) 110 米; (C) 22 米; (D) 220 米.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\sin A = \frac{1}{2}$, 那么 $\cos B$ 的值是 (▲)

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (D) $\sqrt{3}$.

3. 下列图形, 相似的一组是 (▲)

- (A) 两个直角三角形; (B) 两个等腰三角形;
 (C) 有一个内角为 80° 的两个菱形; (D) 边长分别是 2 厘米和 3 厘米的两个菱形.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如果点 $(\frac{1}{3}, a)$ 、 $(\frac{3}{2}, b)$ 、 $(2, c)$ 都在抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2$ 上,

那么 (▲)

- (A) $a < b < c$; (B) $c < a < b$; (C) $b < c < a$; (D) $b < a < c$.

5. 如图 1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD = AD$, $\angle B = 60^\circ$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

用向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的线性组合表示向量 \overrightarrow{DC} , 结果正确的是 (▲)

- (A) $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b}$; (B) $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$;
 (C) $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; (D) $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

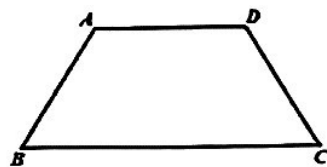


图 1

6. 如图 2, 已知 $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2AC$, 延长 AC 至点 D , 使 $AD = AB$, 以 CD 为边作正方形 $CDEF$, 联结 BD 、 BE , BD 交 EF 于点 G . 某同学得到以下两个结论:

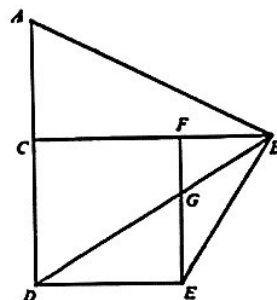


图 2

① G 是线段 EF 的黄金分割点: ② $\frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle BEO}}$.

关于结论①和②, 下列说法正确的是 (▲)

(A) ①正确②错误: (B) ①错误②正确: (C) ①和②都错误: (D) ①和②都正确.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, 那么 $\frac{2a+b}{c}$ 的值是 ▲.

8. 计算: $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) =$ ▲.

9. 计算: $\sin^2 45^\circ - \frac{2\sin 60^\circ}{\cot 30^\circ} + \sin 30^\circ =$ ▲.

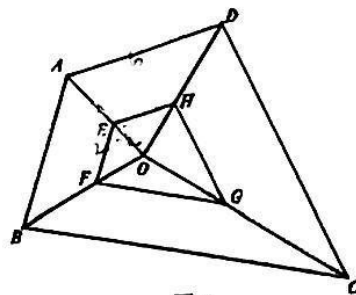


图 3

10. 如果二次函数 $y = (m-1)x^2 + m$ 的图像开口向下, 那么 m 的取值范围是 ▲.

11. 如图 3, O 是四边形 $ABCD$ 内一点, 点 E, F, G, H 分别在线段 AO, BO, CO, DO 上, 如果 $EF \parallel AB, FG \parallel BC, GH \parallel CD$, 且 $EF = 2, AB = 5, AD = 6$, 那么 EH 的长是 ▲.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 关于 y 轴对称的抛物线的表达式为 ▲.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y = a(x-m)^2 + k$ 先向左平移 3 个单位, 再向上平移 4 个单位, 所得到的新抛物线的对称轴方程是 $x = -1$, 那么原抛物线的顶点的横坐标是 ▲.

14. 如图 4, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D, E 分别是边 AB, AC 的中点, 如果 $BC = 4$, $\triangle ADE$ 的面积是 5, 那么 $\angle ACD$ 的正切值是 ▲.

15. 如图 5, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6, \tan B = \frac{3}{4}$, D 是斜边 AB 上任意一点, 联结 CD , 点 E, F 分别是 $\triangle ACD, \triangle BCD$ 的重心, 那么四边形 $CEDF$ 的面积是 ▲.

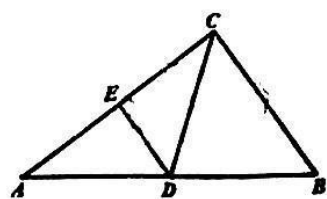


图 4

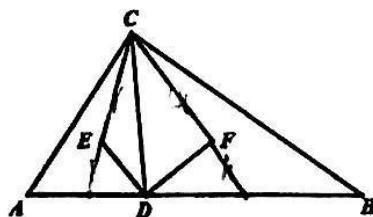


图 5

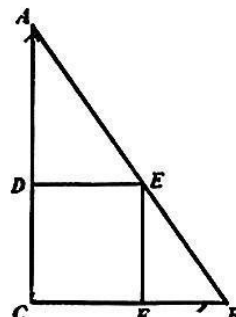


图 6

16. 在数学活动课上，需要用三角形纸片裁剪出一张正方形纸片，如图6，现有三角形纸片（ $\triangle ABC$ ），已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 40\text{cm}$ ， $BC = 30\text{cm}$ 。裁剪出的正方形 $CDEF$ 的一个顶点是直角顶点 C ，其余三个顶点 D 、 E 、 F 分别在边 AC 、 AB 、 BC 上，那么正方形的边长是 ▲ cm 。

17. 一个二次函数的图像经过点 $(t, 0)$ ，则称 t 的值是这个函数的“零点”。例如：二次函数 $y = a(x-3)(x+2)$ ($a \neq 0$)，无论 a 取何值，这个函数的图像总经过点 $(3, 0)$ 和点 $(-2, 0)$ ，所以 3 和 -2 是这个函数的“零点”。如果一个二次函数有且只有一个“零点” -1，那么这个二次函数的解析式可以是 ▲ 。（写出一个符合要求的函数解析式即可）

18. 如图7，已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC = 4$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， D 是边 BC 的中点，线段 AB 绕点 D 顺时针旋转得到对应线段 $A'B'$ ，线段 $A'B'$ 与边 AC 、 BC 分别交于点 E 、 F 。如果 $\triangle EFC$ 是直角三角形，那么 AE 的长是 ▲ 。

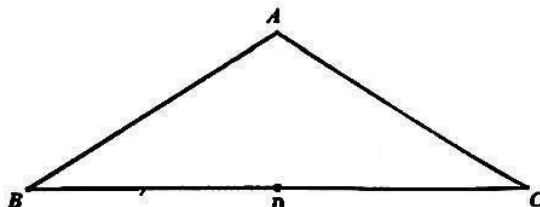


图7

三、解答题（本大题共7题，满分78分）

19. （本题满分10分，第(1)小题满分3分，第(2)小题满分7分）

一副三角尺由两块直角三角尺组成，其中一块是含 30° 角的直角三角形，另一块是含 45° 角的直角三角形。用这两块三角尺可以拼成一个四边形 $ABCD$ （如图8），设 $AB = a$ 。

(1) 用含 a 的代数式直接表示： $AD =$ ▲ ；

(2) 求 $\angle BDC$ 的正切值。

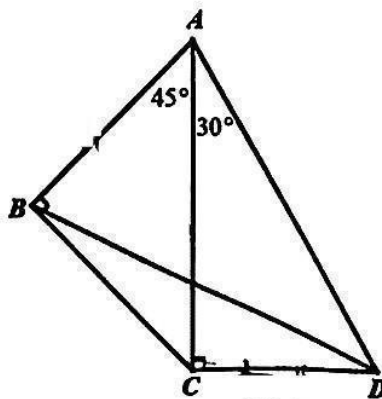


图8

20. (本题满分 10 分, 第(1)小题满分 7 分, 第(2)小题满分 3 分)

为了方便居民出入小区, 小区业委会决定对大门口的一段斜坡进行改造. 原坡面是矩形 $ABCD$ (如图 9), $AB = 4$ 米, $AD = 2$ 米, 斜坡 AB 的坡角为 30° . 计划将斜坡 AB 改造成坡比为 $1:2.5$ 的斜坡 AE (如图 10 所示), 坡面的宽度 AD 不变.

(1) 求改造后斜面底部延伸出来的部分 (BE) 的长度;

(2) 改建这条斜坡需要多少立方米的混凝土材料?

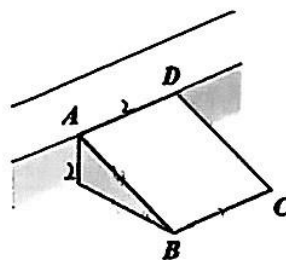


图 9

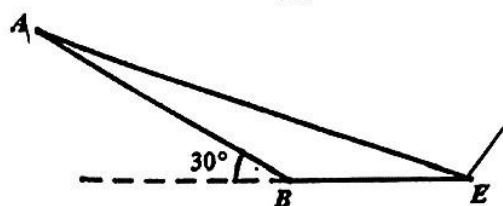


图 10

21. (本题满分 10 分, 第(1)小题满分 2 分, 第(2)小题满分 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(-1, n)$, $B(5, n)$ 是抛物线 $y = a(x-m)^2 + k (a > 0)$ 上的两点.

(1) $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$;

(2) 如果该抛物线与 x 轴交于点 C 、 D (点 C 在点 D 的右侧), 且 $CD = 4$, 四边形 $ABCD$ 的面积是 25, 求这个抛物线的表达式.

22. (本题满分 10 分, 第(1)小题满分 4 分, 第(2)小题满分 6 分)

如图 11, 正方形 $ABCD$ 的边长是 3, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上, $\angle EBF = 45^\circ$, BE 、 BF 分别与对角线 AC 交于点 G 、 H .

(1) 当 $\angle ABE = \triangle$ $^\circ$ 时, $AG = CH$, 先补全条件, 再说明理由:

(2) 如果 $CH = \sqrt{2}$, 求 BG 的长.

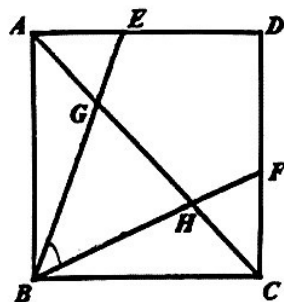


图 11

23. (本题满分 12 分, 每小题满分各 6 分)

学完“相似三角形”之后, 小明和同学尝试探索相似四边形的判定与性质, 以下是他们的思考, 请你和他们一起完成探究过程.

【定义】如果两个四边形的四个角对应相等, 四条边对应成比例, 那么这两个四边形相似.

两个相似四边形的对应边的比, 叫做这两个四边形的相似比.

【思考】类比相似三角形, 对相似四边形的判定与性质提出了许多猜测, 如:

- ① 四条边对应成比例, 且有一组角对应相等的两个四边形相似;
- ② 四个角对应相等, 且有两组相邻的边对应成比例的两个四边形相似;
- ③ 相似四边形的面积的比等于相似比的平方.

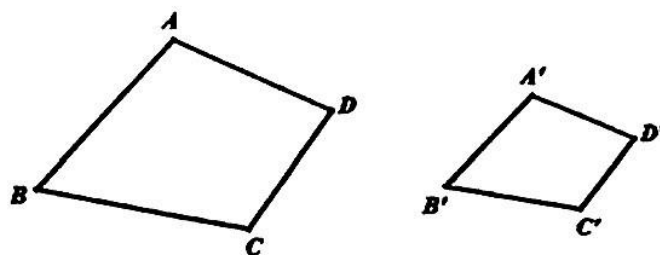
.....

【探究】请完成上述猜测中第③个结论的证明.

已知：如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，点 A 、 B 、 C 、 D 分别与点 A' 、 B' 、 C' 、 D' 对应，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的相似比为 k 。

求证： $\frac{S_{\text{四边形}ABCD}}{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}} = k^2$ 。

证明：



【运用】同学们通过讨论，证明了上述猜测都是正确的。试运用这些结论，解决问题：

如图 12，已知矩形 $ABCD$ ， E 、 F 分别是边 AD 、 AB 上的点， $AE = \frac{1}{2}AB$ ， $AF = \frac{1}{2}AD$ ，联结 BE 、 DF 交于点 G ，试求 $\frac{S_{\text{四边形}AEGF}}{S_{\text{四边形}CDGB}}$ 的值。

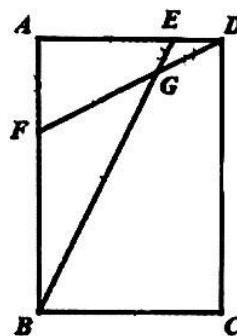


图 12

24. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 4 分, 第(2)①小题满分 4 分, 第(2)②小题满分 4 分)

如图 13, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + 4$ 的顶点为 D , 点 A 、 B 在抛物线上, 且都在 y 轴右侧, 横坐标分别是 m 、 $m+1$.

(1) 联结 AD 、 BD , 求 $\cot \angle ODA - \cot \angle ODB$ 的值 (结果用含 a 的代数式表示);

(2) 如果 y 轴上存在点 C , 使得 $AC \perp BC$, 且 $AC = BC$,

① 求抛物线的表达式;

② 若 $AB = \sqrt{10}$, 点 E 在 y 轴上, 且 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 E 的坐标.

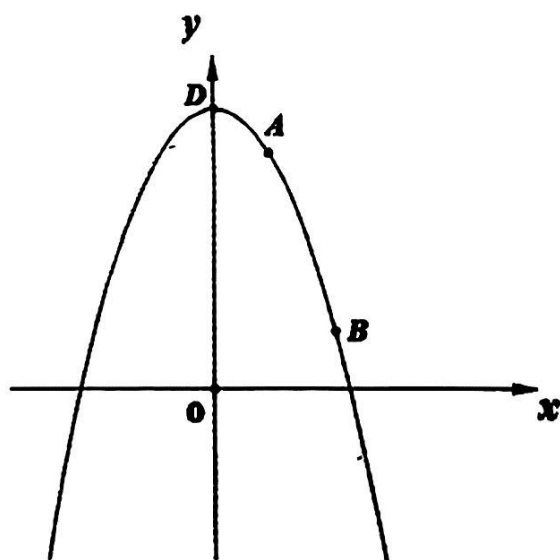
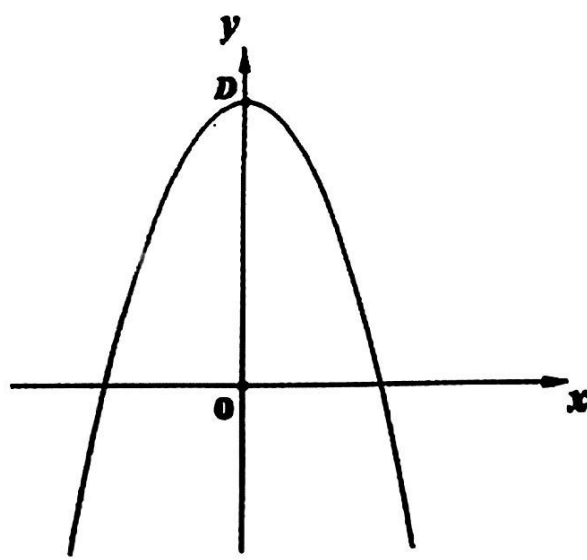


图 13



备用图

25. (本题满分 14 分, 第(1)小题满分 4 分, 第(2)小题满分 4 分, 第(3)小题满分 6 分)

如图 14, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$, $AC = 3$, 点 E 、 F 分别在边 AC 、 AB 上 (不与端点重合), $BE \perp CF$, 垂足为点 D .

- (1) 当 $CE = 1$ 时, 求 AF 的长;
- (2) 当 $BE = CF$ 时, 求 $\tan \angle CBE$ 值;
- (3) 联结 EF , 如果 $\triangle AEF$ 是直角三角形, 求这时四边形 $BCEF$ 的面积.

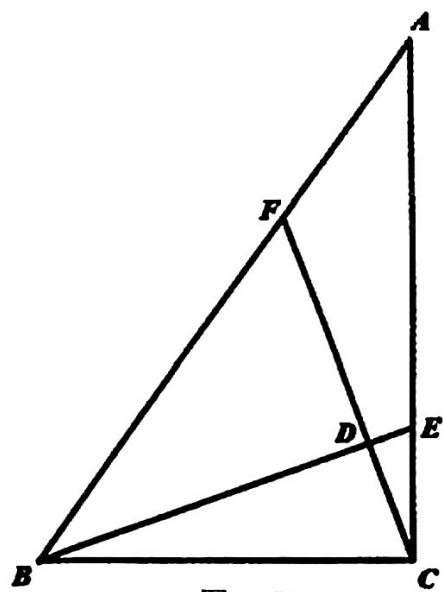
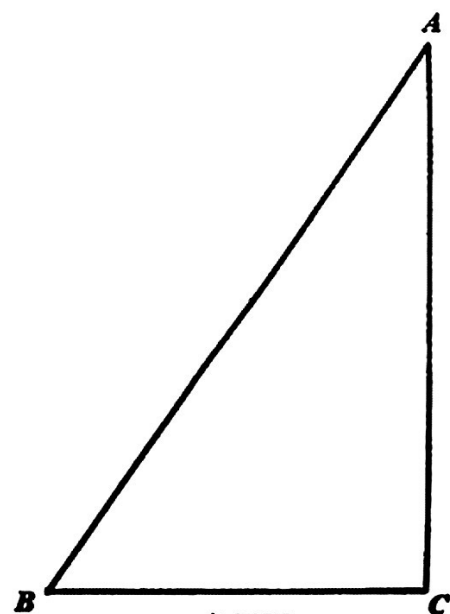


图 14



备用图