2024学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷

初三数学　试卷

2025.1

（时间100分钟　满分150分）

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共25题；答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（本大题共6题，每题4分，满分24分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. 抛物线$y=2(x-1)^2+3$的对称轴是直线

（A）$x=-1$；　（B）$x=1$；　（C）$x=2$；　（D）$x=3$.

2. 在$Rt\Delta ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，那么$\tan A$的值是

（A）$\frac{3}{5}$；　（B）$\frac{3}{4}$　；　（C）$\frac{4}{3}$；　（D）$\frac{5}{3}$.

3. 下列两个图形一定相似的是

（A）两个矩形；　（B）两个菱形；　（C）两个等腰三角形；（D）两个正方形.

4. 已知：在ΔABC中，点D、E分别是边AB、AC上的点，那么下列条件中，不能判断$DE\parallel BC$的是

（A）$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$；　（B）$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$；（C）$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$；　（D）$\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$.

5. 如果一传送带和地面所成斜坡的坡度为$1:3$，它把物体从传送带最低A处送到离地面3米高的B处，那么物体从A到B所经过的路程是

（A）9米；　（B）$\sqrt{10}$米；　（C）$2\sqrt{10}$米；　（D）$3\sqrt{10}$米.

6. “数形结合”是研究函数的重要思想方法，如果抛物线$y=x^2+2x+m+5$只经过两个象限，那么m的取值范围是

（A）$m\geq -4$；　（B）$m<-4$；　（C）$m<-5$；　（D）$m\geq -5$.

二、填空题（本大题共12题，每题4分，满分48分）

7. 已知$\Delta ABC\backsim\Delta DEF$，它们对应中线的比$AM:DN=2:3$，那么它们的周长比是▲.

8. 如图，在ΔODC中，点A、B分别在边CO、DO延长线上，$AB\parallel CD$，如果$DO=6$，$AO:CO=2:3$，，那么BO的长是▲.

9. 已知点$A(0,m)$和$B(-1,n)$都在抛物线$y=x^2-4x+c$（c是常数）上，那么m ▲ n（填“>”、“=”、“<”）.

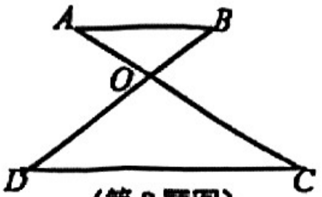
10. 已知点P是线段AB的黄金分割点$(AP>BP)$，如果$AB=1$，那么BP的长是▲.

11. 上海与杭州的实际距离约200千米，在比例尺为$1:5000000$的地图上，上海与杭州的图上距离约▲厘米.

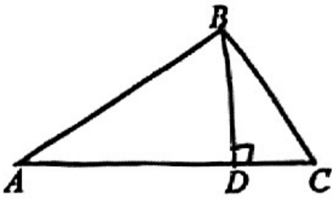
12. 如图，在$Rt\Delta ABC$中，$\angle ABC=90°$，$BD\perp AC$于D，如果$\cot A=\frac{4}{3}$，那么$\cos\angle CBD$的值是▲.

13．如图，$AB // CD // EF$，如果$\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{3}{2}$，$AB=7$，$EF=9$，那么$CD$的长是_▲_.

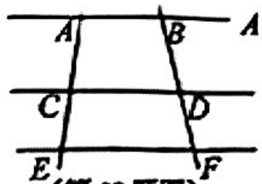
14．如图，货船A在灯塔P的北偏西$60°$方向，客船B在灯塔P的东北方向，客船B在货船A的正东方向，如果货船A与客船B相距50千米，那么客船B与灯塔P的距离约是_▲_千米（结果保留根号）.



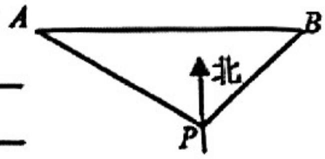
（第8题图）



（第12题图）



（第13题图）



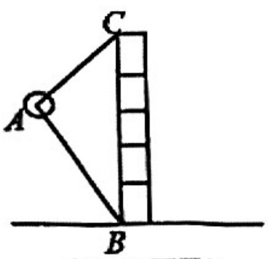
（第14题图）

15．如图，热气球探测器显示，从热气球A处测得一栋楼顶部C处的仰角是$37°$，测得这栋楼的底部B处的俯角是$60°$，热气球与这栋楼的水平距离是30米，那么这栋楼的高度是_▲_米（精确到0.1米）.（参考数据：$\sin 37° \approx 0.60$，$\cos 37° \approx 0.80$，$\tan 37° \approx 0.75$，$\sqrt{3} \approx 1.7$）

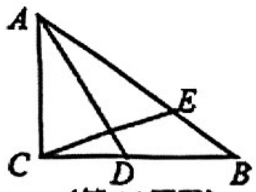
16．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，点E、D分别在边AB、BC上，$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{4}{3}$，如果$\angle CAD=\angle B$，那么$BE$的长是_▲_.

17．如图，$l_1 // l_2 // l_3$，且l_1和l_2之间的距离是1，l_2和l_3之间的距离是2，$\triangle ABC$的三个顶点分别在l_1、l_2、l_3上，AC与l_2交于点D，如果$BC \perp AC$，$\tan\angle BAC=\dfrac{1}{3}$，那么$BD$的长是_▲_.

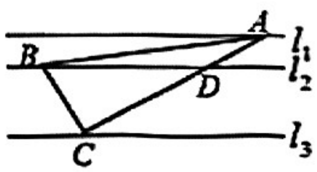
18．如图，四边形$ABCD$中，$AC \perp AB$，$BD \perp CD$，$BD=CD$，如果$AB=m$，$AC=n$，且$m<n$，那么AD的长是_▲_（用含m、n的式子表示）.



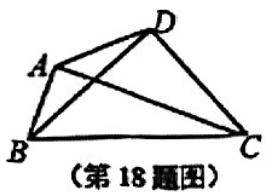
（第15题图）



（第16题图）



（第17题图）



（第18题图）

三、（本大题共7题，第19—22题每题10分；第23、24题每题12分；第25题14分；满分78分）

19．（本题满分10分）

已知：$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{5}$．（1）求代数式$\dfrac{2a+3b-5c}{a-2b+3c}$的值；

（2）当$2a+b+3c=44$时，求a、b、c的值.

20.（本题满分 10 分）

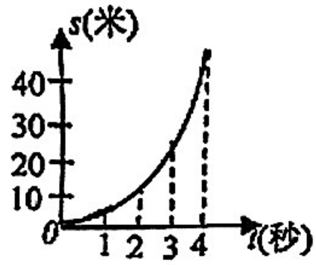
“2022 年北京冬奥会”的召开，冰雪运动在中国大地蓬勃发展．滑雪爱好者小楠从山坡滑下，为了得出滑行距离s（单位：米）与滑行时间t（单位：秒）之间的关系式，测得一些数据（如下表）：

滑行时间（秒）	0	1	2	3	4
滑行距离（米）	0	4.5	14	28.5	48

为观察s与t的之间的关系，以t为横轴，s为纵轴建立坐标系，描出与上表中数据对应的 5 个点，并用平滑的曲线连接它们（如图所示），小楠观察发现这条曲线近似抛物线的一部分．

（1）由上述信息，设这条曲线的表达式为$s=at^2+bt+c(a\neq 0)$，求s与t的函数关系式；

（2）若将抛物线$s=at^2+bt+c(a\neq 0)$先向右平移2个单位，再向上平移20个单位，求平移后所得抛物线的表达式．



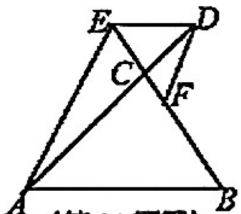
（第 20 题图）

21.（本题满分 10 分）

如图，AD与BE相交于点C，$DE\parallel AB$，点F在线段BC上，且$EC^2=CF\cdot BC$，联结DF、EA．

（1）求证：$DF\parallel EA$；

（2）设$\overrightarrow{AB}=\overline{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overline{b}$，当$BC=2EC$时，求向量$\overline{CD}$（用向量$\overline{a}$、$\overline{b}$表示）．



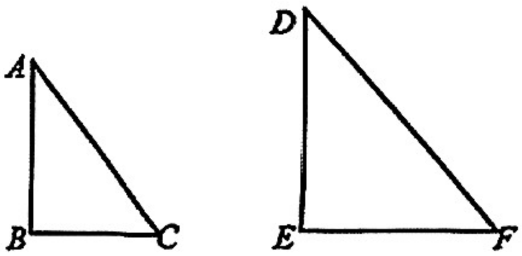
（第 21 题图）

22.（本题满分 10 分）

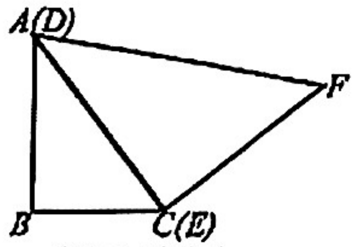
小杰在学习了“特殊锐角的三角比”后，认为$30°$、$45°$、$60°$的三角比不必死记硬背，只需利用一副三角板就可推导出$30°$、$45°$、$60°$的三角比，相信大家都有这个共识；小杰在这个认识的基础上，他利用一副特制的三角板，研究推导出了$15°$、$75°$的三角比．

（1）计算：$\dfrac{\cot 30°-\cot 45°}{\tan 60°+2\sin 30°}$；

（2）小杰的一副特制的三角板，如图 1，在$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle DEF$中，$\angle B=\angle E=90°$，$\angle A=30°$，$\angle D=45°$，$DE=AC=2$；小杰的想法是：将$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle DEF$的边DE和AC重合，拼接成如图 2 所示的四边形$ABCF$．请利用图 2，求$\sin 15°$和$\tan 75°$的值．



（第 22 题图 1）



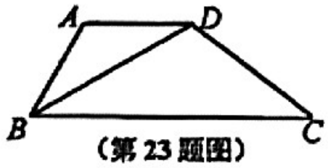
（第 22 题图 2）

23．（本题满分 12 分）

如图，在梯形$ABCD$中，$AD // BC$，BD是梯形$ABCD$对角线，$BD^2 = AD \cdot BC$．

（1）求证：$AD \cdot CD = AB \cdot BD$；

（2）以CD为一边作$\angle CDE = \angle ADB$，DE交边BC于点E，求证：$\dfrac{CD^2}{BD^2} = \dfrac{CE}{AD}$．



（第 23 题图）

24．（本题满分 12 分）

通过二次函数的学习，小杰知道形如$y = ax^2 (a \neq 0)$的函数，其图像始终经过点（0,0），也即抛物线$y = ax^2 (a \neq 0)$经过定点（0,0）．于是他进一步探究了形如$y = ax^2 - ax + 2(a \neq 0)$的函数图像，发现抛物线$y = ax^2 - ax + 2(a \neq 0)$经过定点（0,2）与（1,2）．他探究的思路是：设法找到x的某些取值，使表达式中含a的各项之和为 0．

具体的解法如下：

含a的各项之和：$ax^2 - ax = a(x^2 - x)$，令$x^2 - x = 0$，解得$x_1 = 0$，$x_2 = 1$．

当$x = 0$时，$y = 2$，得到定点（0,2）；当$x = 1$时，$y = 2$，得到定点（1,2）．

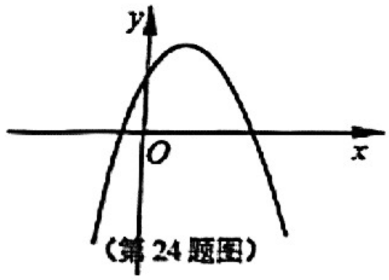
小杰还探究了抛物线$y = ax^2 + (1-a)x - 2a + 1 (a \neq 0)$，发现它也经过两个定点，其中一个位于$x$轴上，可记作点$A$，另一个位于第一象限内，可记作点$B$．

（1）求点A、B的坐标；

（2）当$a < 0$时（如图），抛物线$y = ax^2 + (1-a)x - 2a + 1$的顶点为$D$，与$x$轴的另一个交点为$C$．

① 如果$\angle ABC = 90°$，求a的值；

② 当$\angle ADB = 90°$时，求a的值．



（第 24 题图）

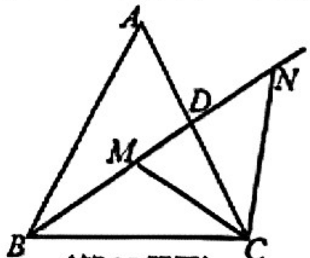
25．（本题满分 14 分）

如图，在ΔABC中，$AB = AC = \sqrt{5}$，$BC = 2$，点D是边AC的中点，点M、N是射线BD上的动点（点M在左边），以CM为一边作$\angle MCN = \angle ABC$．

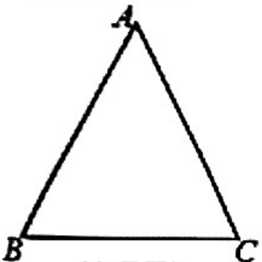
（1）求BD的长；

（2）当点M是ΔABC的重心时，求$CN : BN$的值；

（3）如果ΔMCN是以MN为腰的等腰三角形，求BM的长．



（第 25 题图）



（备用图）