

# 2024 学年第一学期九年级质量调研

## 数学样卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列  $y$  关于  $x$  的函数中, 一定是二次函数的是 (▲)

(A)  $y = ax^2 + bx + c$ ;

(B)  $y = (x-5)^2 - x^2$ ;

(C)  $y = x^2 + 1$ ;

(D)  $y = \frac{2}{x^2}$ .

2. 抛物线  $y = x^2 + x$  一定经过点 (▲)



(A) (1,0);

(B) (-1,0);

(C) (2,4);

(D) (-2,-4).

3. 下列两个三角形一定相似的是 (▲)

(A) 两个直角三角形;

(B) 有一个内角为  $40^\circ$  的两个直角三角形;

(C) 两个等腰三角形;

(D) 有一个内角是  $40^\circ$  的两个等腰三角形.

4. 如图 1, 在直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle D = 90^\circ$ ,

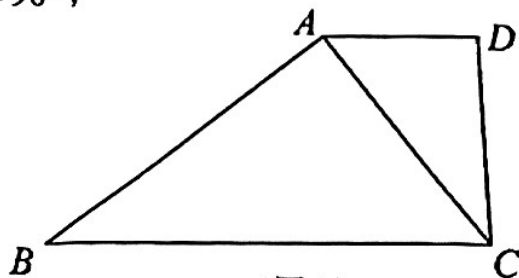
如果对角线  $AC \perp AB$ , 那么  $\frac{CD}{AC}$  的值是 (▲)

(A)  $\sin B$ ;

(B)  $\cos B$ ;

(C)  $\tan B$ ;

(D)  $\cot B$ .



(图 1)

5. 下列命题正确的是 (▲)

(A) 如果  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 那么  $\vec{a} = \vec{b}$ ;

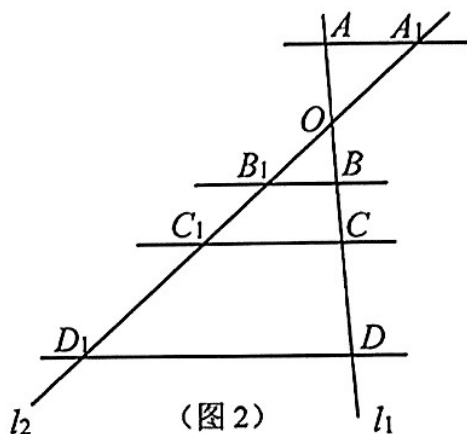
(B) 如果  $a$  和  $b$  都是单位向量, 那么  $\vec{a} = \vec{b}$ ;

(C)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ ;

(D) 如果  $\vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$ , 那么  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

6. 如图 2, 两条不平行的直线  $l_1$  与直线  $l_2$  相交于点  $O$ , 四条平行线分别交直线  $l_1$  于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 分别交直线  $l_2$  于点  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$ , 则有  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ . 如果  $A_1O = 3$ ,  $OB_1 = B_1C_1 = 2$ ,  $C_1D_1 = 4$ , 那么在下列结果中, 线段之差最大的是 (▲)

- (A)  $BD - AB$ ; (B)  $OC - OA$ ;  
(C)  $OC - CD$ ; (D)  $CD - OB$ .



## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 已知  $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ , 那么  $\frac{x-y}{y} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

8. 如果抛物线  $y = (2-a)x^2 + x - 1$  的开口向下, 那么  $a$  的取值范围是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

9. 将抛物线  $y = -(x-1)^2$  向右平移 3 个单位, 得到新抛物线的顶点坐标是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

10. 已知点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  在函数  $y = -x^2 + 2x + 1$  的图像上, 如果  $x_1 > x_2 > 1$ , 那么

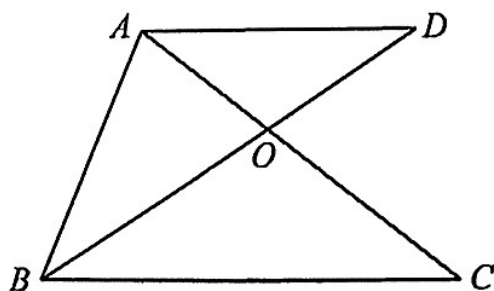
$y_1 \underline{\quad \blacktriangle \quad} y_2$ . (填 “>”、“=”、“<”)

11. 已知某二次函数一部分自变量  $x$  和函数值  $y$  的对应情况如右表所示, 根据表中信息可知这个函数图像的对称轴是直线  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

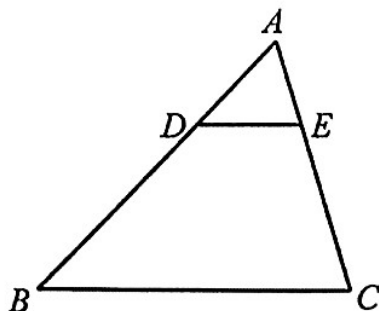
$x$	...	-4	-2	1	2	4	...
$y$	...	11	-5	1	11	43	...

12. 如图 3,  $AD \parallel BC$ ,  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ , 如果  $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = 2 : 3$ , 那么  $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC}$  的值是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

13. 如图 4, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上, 且  $BD = 2AD$ ,  $EC = 2AE$ , 联结  $DE$ , 如果  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , 那么  $\overrightarrow{DE} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ . (用含向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的式子表示)



(图 3)

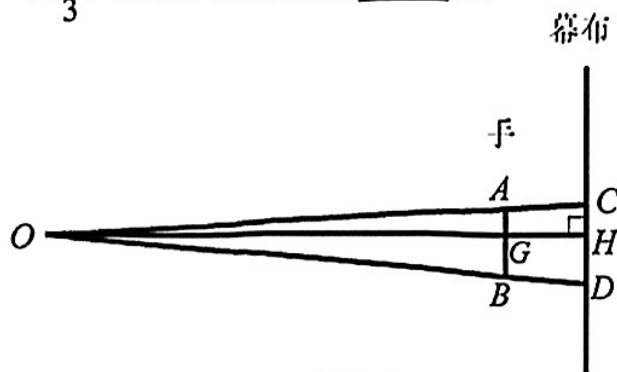


(图 4)

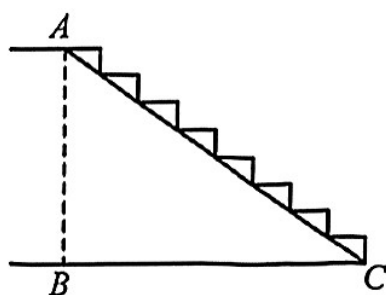
14. 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AB = AC$ , 如果  $AB:BC = 3:2$ , 那么  $\sin \angle BAC$  的值是 ▲.

15. 手影戏是一种独特的艺术形式, 它通过手势和光影创造出生动的形象. 它的原理是利用光的直线传播, 将手影投射到幕布上形成各种影像. 如图 5, 为了投影出一个动物造型  $CD$ , 手  $AB$  的长度是 15 厘米,  $AB \parallel CD$ , 光源  $O$  到手  $AB$  的距离  $OG$  是 100 厘米, 手  $AB$  到幕布的距离  $GH$  是 20 厘米. 此时  $CD$  的长度是 ▲ 厘米.

16. 某商场开业, 要为一段楼梯铺上红地毯. 如图 6, 已知楼梯高  $AB = 6$  米, 坡面  $AC$  的坡度  $i = 1:\frac{4}{3}$ , 则至少需要红地毯 ▲ 米.



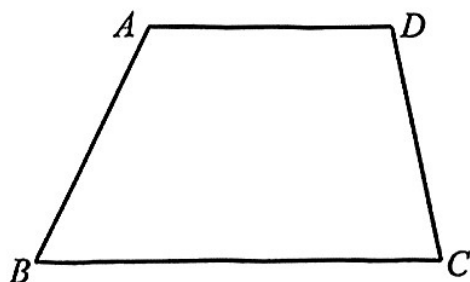
(图 5)



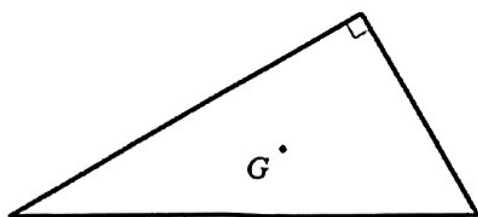
(图 6)

17. 平行于梯形两底的直线截梯形的两腰, 当两交点分别是两腰的黄金分割点时, 我们称这条线段是梯形的“黄金分割线”. 如图 7, 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = 6$ ,  $BC = 10$ , 点  $E$ 、 $F$  分别在边  $AB$ 、 $CD$  上 ( $AE > BE$ ), 如果  $EF$  是梯形  $ABCD$  的“黄金分割线”, 那么  $EF =$  ▲.

18. 如图 8, 将一块含  $30^\circ$  角的实心的直角三角板放置在桌面上, 在桌面所在平面内绕着它的重心  $G$  逆时针旋转  $180^\circ$ . 如果这块三角板的斜边长 12 厘米, 那么运动前后两个三角形重叠部分的面积为 ▲ 平方厘米.



(图 7)



(图 8)

### 三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

计算:  $\sin^2 45^\circ - \frac{2 \cos 60^\circ}{\cot 30^\circ - \tan 45^\circ}$ .

20. (本题满分 10 分, 其中第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 4 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$  的顶点为  $D$ ,

(1) 为了确定这条抛物线, 需要再添加一个条件, 请从以下两个条件中选择一个:

①它与  $y$  轴交点的坐标是  $(0, -1)$ ; ②顶点  $D$  的坐标为  $(1, \frac{4}{3})$ .

你选择的条件是     ▲     (填写编号), 并求  $b$ 、 $c$  的值.

(2) 由 (1) 确定的抛物线与  $x$  轴正半轴交于点  $A$ , 求  $\tan \angle DAO$  的值.

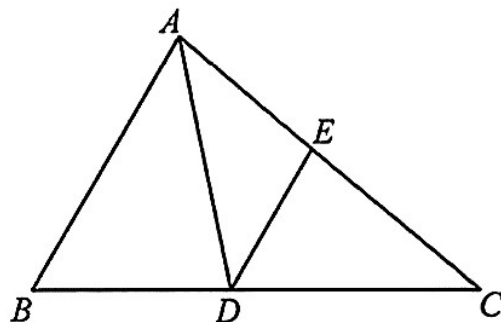
21. (本题满分 10 分, 其中第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

如图 9, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $BC$ 、 $AC$  上,  $BD = 12$ ,  $CD = 15$ , 且  $\angle BAD = \angle C$ .

(1) 求线段  $AB$  的长;

(2) 当  $\angle ADE = \angle C$ ,  $\angle B = 60^\circ$  时,

求  $\triangle EDC$  的面积.



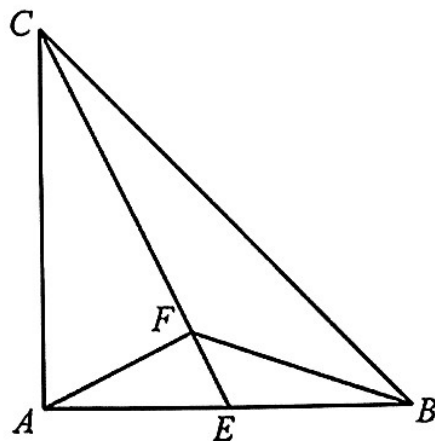
(图 9)

22. (本题满分 12 分, 其中第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 6 分)

如图 10, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ , 点  $E$  是边  $AB$  的中点, 联结  $CE$ , 作  $AF \perp CE$ , 垂足为点  $F$ , 联结  $BF$ .

(1) 求证:  $\triangle EFB \sim \triangle EBC$ ;

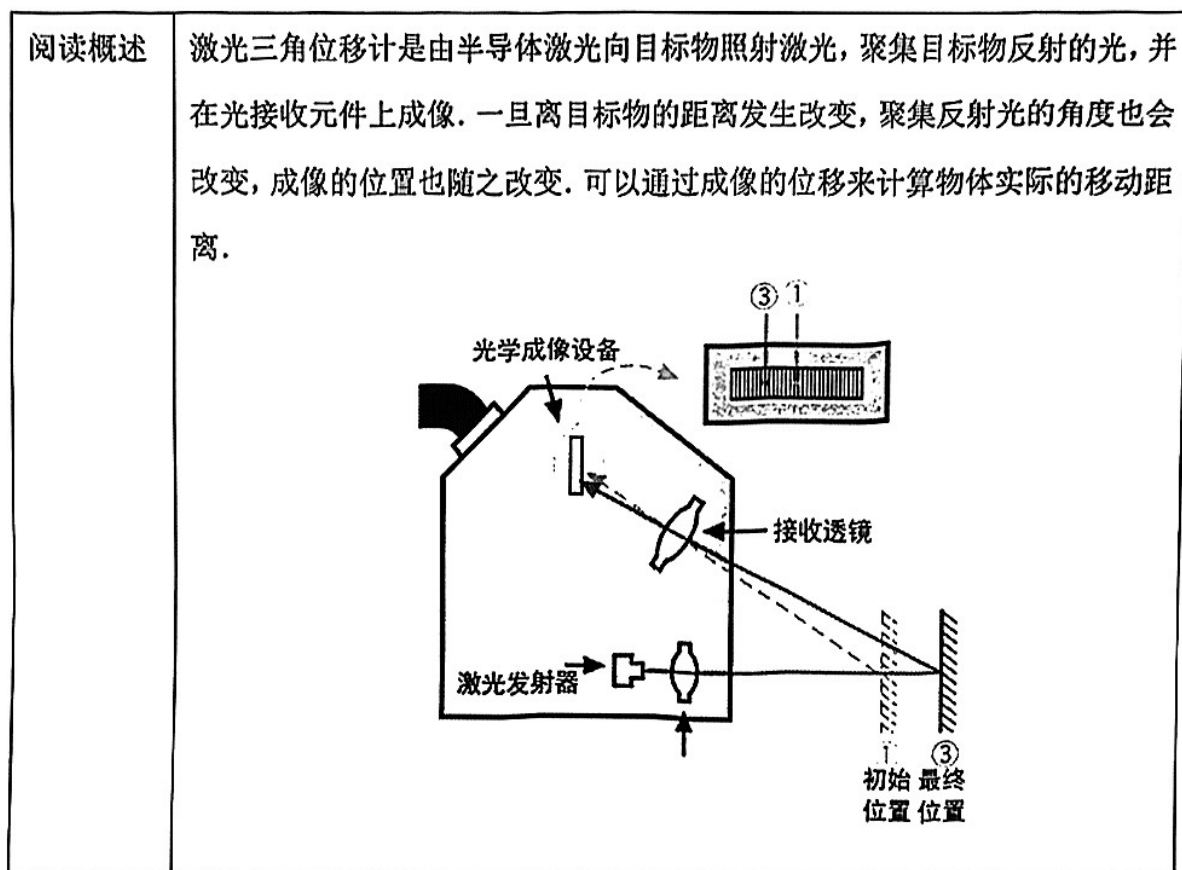
(2) 取  $BC$  边的中点  $D$ , 联结  $DF$ , 求证:  $\frac{DF}{EF} = \sqrt{2}$ .

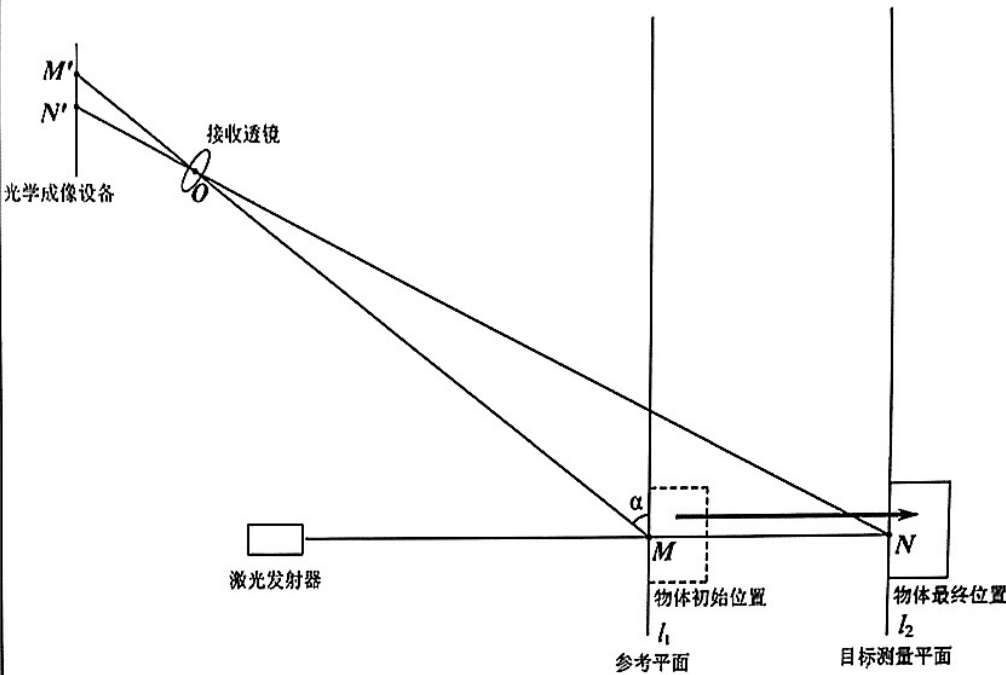
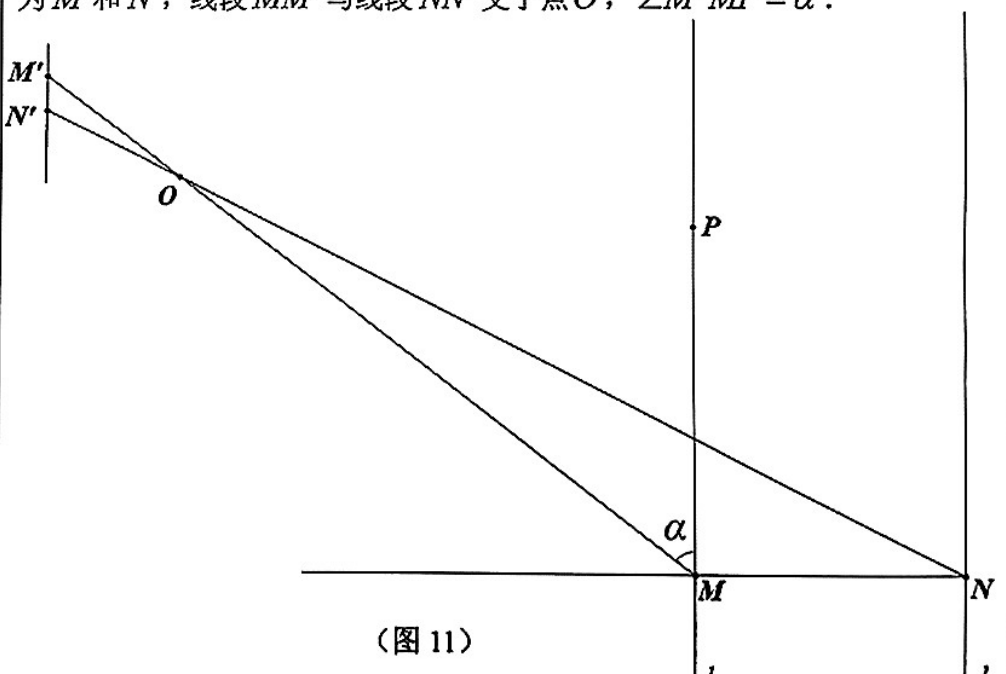


(图 10)

23. (本题满分 10 分, 其中第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 6 分)

火车作为我国重要的交通运输形式之一, 其轨道的平顺性和稳定性直接影响列车的运行安全. 我国目前轨道检测的主要方法是机械检测, 通过使用机械传感器和无损检测设备 (包括激光三角位移传感器、超声波传感器等) 来测量轨道的各种参数 (几何尺寸、轨距、高差和曲率), 从而判断轨道是否有损伤或缺陷. 某校科创活动小组率先就“激光三角位移计”这一设备开展了学习与探究:



发现原理	<p>被测量物体从初始位置移动到最终位置，需要测量的是参考平面与目标测量平面的距离，也就是图中点 <math>M</math> 与点 <math>N</math> 之间的距离。假设激光通过接收透镜后仍按照原直线方向传播，最后在光学成像设备上成像。</p> 
建立模型	<p>如图 11，直线 <math>M'N' \parallel</math> 直线 <math>l_1 \parallel</math> 直线 <math>l_2</math>，直线 <math>MN</math> 垂直于 <math>l_1</math> 和 <math>l_2</math>，垂足分别为 <math>M</math> 和 <math>N</math>，线段 <math>MM'</math> 与线段 <math>NN'</math> 交于点 <math>O</math>，<math>\angle M'MP = \alpha</math>。</p>  <p>(图 11)</p>
探究 (1)	<p>设 <math>MN = m</math>，请用含 <math>m</math> 和 <math>\alpha</math> 的式子表示点 <math>N</math> 到直线 <math>MM'</math> 的距离。</p>
探究 (2)	<p>已知 <math>M'N' = 5</math>，<math>OM' = 23</math>，<math>OM = 132</math>，求 <math>MN</math> 的长度。（结果精确到个位，<math>\sin \alpha \approx 0.8</math>，<math>\cos \alpha \approx 0.6</math>，<math>\cot \alpha \approx 0.75</math>）</p>

24. (本题满分 12 分, 其中第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = ax^2 + bx - 1$  经过点  $(2, 3)$  和点  $(-4, 3)$ .

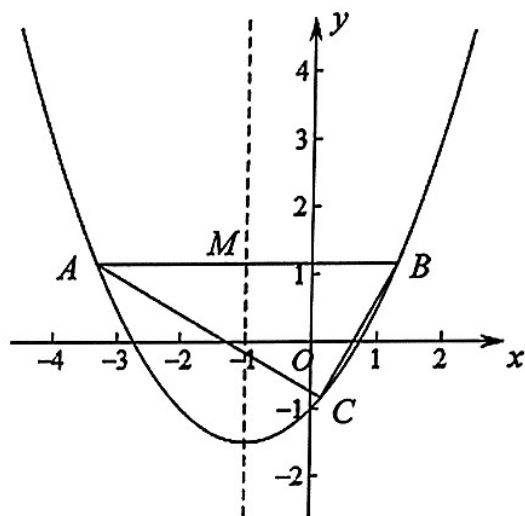
(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 如图 12, 该抛物线上有三个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ,  
 $AB \parallel x$  轴,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  
 $AB$  与抛物线的对称轴交于点  $M$ . (点  $A$   
 在对称轴的左侧)

① 如果点  $C$  到抛物线对称轴的距离为  $t$ ,

请用含  $t$  的代数式表示点  $B$  的横坐标;

② 求点  $C$  的横坐标.



(图 12)

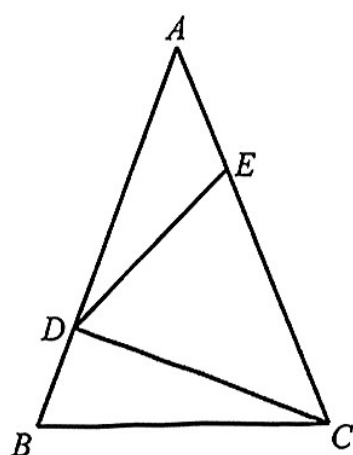
25. (本题满分 14 分, 其中第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分, 第 (3) 小题 4 分)

如图 13, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ , 过点  $C$  作  $CD \perp AB$ , 垂足为点  $D$ , 点  $D$  在  $AB$  边上 (不与点  $A$  重合), 点  $E$  是边  $AC$  上的点, 且满足  $CD = CE$ , 设  $k = \tan B$ .

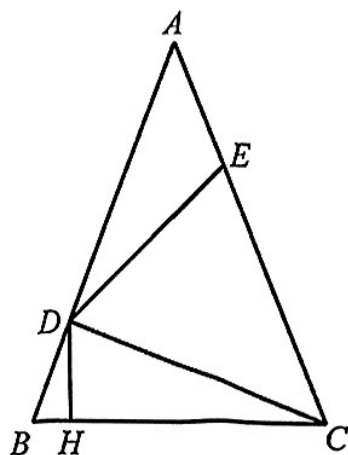
(1) 求证:  $\angle CDE = \angle BCD + 45^\circ$ ;

(2) 如图 14, 过点  $D$  作  $DH \perp BC$ , 垂足为点  $H$ , 求证:  $DE = \sqrt{2}(CH - DH)$ ;

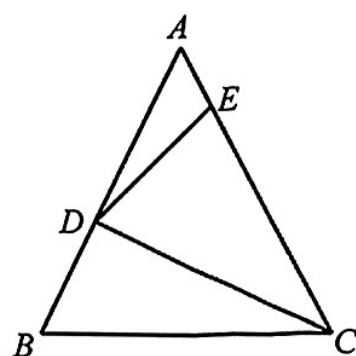
(3) 设点  $F$  是  $CD$  的中点, 联结  $EF$  并延长交边  $BC$  于点  $G$ , 当  $\triangle CFG$  与  $\triangle BCD$  相似时, 求  $k$  的值.



(图 13)



(图 14)



(备用图)