

《有限元法基础》编程训练大作业

——STAPpp程序研发报告

姓名：唐铖 学号：2022013265

1 引言

基于原本的 STAPpp 程序，我添加了平面 T3 单元，并实现了对应的位移、应力输出。此外，还额外添加了用于 Tecplot 绘图的数据输出、对非零本质边界条件的支持和节点力的计算。最后，通过一系列的算例，我分析了 T3 单元的位移收敛率，进行了分片实验并通过和商业软件 Abaqus 对比，验证了程序的正确和有效性。

Github 库链接

2 算法说明

对于 T3 单元 [1]

$$B^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

在单元内为常数，故单元刚度阵为

$$K^e = A^e t^e B^{eT} D^e B^e \quad (2)$$

单元边界力列阵为

$$f_{\Gamma}^e = \frac{lt^e}{6} \begin{bmatrix} 2t_{x1} + t_{x2} \\ 2t_{y1} + t_{y2} \\ t_{x1} + 2t_{x2} \\ t_{y1} + 2t_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

将单元矩阵拼接后，可以得到以下的分块矩阵方程

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xu} \\ K_{ux} & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_u \end{bmatrix} \quad (4)$$

上式中, d_x 为无位移约束的节点自由度, d_u 为本质边界条件约束的节点自由度。为了解出 d_x , 需要对方程进行缩减, 即

$$K_{xx}d_x = \hat{f}_x = f_x - K_{xu}d_u \quad (5)$$

因此待解的位移为

$$d_x = K_{xx}^{-1}(f_x - K_{xu}d_u) \quad (6)$$

3 实现方案

3.1 CT3和CT3Material

区别于 Bar 单元, T3 单元是平面单元, 弹性矩阵是平面应力或者平面应变的形式。因此, 在读取材料性质时, 需要 `E`, `nu`, `t`, `PlaneStress` 四个参数, 分别表示杨氏模量, 泊松比, 材料厚度和是否是平面应力。

读取了材料性质后, `CT3Material` 类会调用 `ComputeElasticityMatrix()` 方法, 计算并存储弹性矩阵 `D`[3][3]。

在计算单元刚度阵时, `CT3::ElementStiffness()` 方法首先利用节点坐标计算 `a`, `b`, `c`, 构建 `B`[3][6] 矩阵, 然后计算 `BDB` 即单元刚度阵的值。

3.2 非零本质边界条件支持和节点力输出

为了减少对原本代码的影响, 仅仅对最后解方程时的力向量 `Force` 进行修改。刚度阵和 `LDLT` 分解的代码都保持不变。

因此原有的 `bcode` 逻辑予以保留, 另外增加了 `gbcode`, 其在 `CalculateEquationNumber()` 时采用先编号无约束自由度, 然后编号本质边界条件自由度的做法。

随后, 利用 `gbcode` 生成 `GlobalLocationMatrix`。读取所有非零的本质边界条件, 储存在类 `CEBData` 中, 并生成本质边界条件位移向量 `EssentialBoundary`。

利用 `GlobalLocationMatrix`, 独立生成全局刚度阵 `GlobalStiffnessMatrix`, 取其中的右上分块与本质边界条件位移向量相乘, 并通过 `SubstituteEssentialBoundary()` 方法与 `Force` 向量作差, 得到修改后的力向量。此后的刚度阵分解和回代求解与原本代码流程一致。

在解出了无约束自由度的位移后, `ConcatGlobalDisplacement()` 会拼接得到包括本质边界条件约束的节点位移。随后 `ComputeNodalForce()` 将全局刚度阵与全局节点位移向量相乘, 得到节点力向量 `GlobalNodalForce`。

3.3 Tecplot 云图数据输出

Tecplot 输入数据 `.dat`, 对于 T3 单元, 输入数据可以是如下格式

```
Title = ""
Variables = "X" "Y" "U" "V" "FX" "FY"
```

```

Zone N=NUN E=NEL F=FEPOINT ET=TRIANGLE
x_1^1 x_2^1 u_1^1 u_2^1 f_1^1 f_2^1
...
x_1^N x_2^N u_1^N u_2^N f_1^N f_2^N
n_1^1 n_2^1 n_3^1
...
n_1^E n_2^E n_3^E

```

其中N为节点数，E为单元个数，F=FEPOINT表示按照逐点输入，ET=TRIANGLE表示为三角形单元。随后共 N 行，每行 6 个数据分别表示节点的”X” ”Y” ”U” ”V” ”FX” ”FY” 数据，然后是 E 行，每行 3 个数表示该单元包含的节点。

因此，仿照COutputter类，构造CTecplot类，在完成了全部计算后创造输出流将上述数据输出到输出文件中。输出文件的命名格式为input_tecplot.dat，其中input.dat为输入文件的命名。

Tecplot 程序可以快速绘制位移云图，将以下数据公式输入，然后将横纵坐标轴分别设置为X_和Y_即可得到变形后的图形。其中factor为变形放大系数。

```

{X_} = {X} + factor*{U}
{Y_} = {Y} + factor*{V}

```

4 使用方法

使用方法与STAPpp相同

```
stap++ file.dat
```

其中file.dat的格式为

```

Title
NUMNP  NUMEG  NLCASE  MODEX
Node_Number      bcode_1      bcode_2      bcode_3      X      Y      Z
Num_NoneZeroEssentialBoundary
Node_Number      Direction_Number      Displacement
LoadCase_Number      Num_Loads
Node_Number      Direction_Number      Magnitude
ElementType      Num_Element      Num_Material
Materail_Number      E      nu      t      PlaneStress
Element_Number      Node_Number      Node_Number      Node_Number

```

对于 T3 单元，ElementType=3。若为平面应力单元，PlaneStress=1。此外与原文件中的 bcode 定义不同，bcode=0表示自由节点，bcode=1为忽略的自由度（在本单元中为 z 轴），bcode=2表示本质边界条件上的自由度。

教材例题 4-4 的输入文件如下

```

example 4-4 of T3 element
4  1  1  1
1  2  2  1  0  0  0
2  2  2  1  0  1  0
3  0  0  1  2  0.5  0
4  0  0  1  2  1  0
0
1  2
2  2  -20
4  2  -20
3  2  1
1  3e7  0.3  1  1
1  2  1  3  1
2  2  3  4  1

```

更多示例输入文件可以参考后续验证部分。总体来说，与原本输入文件的区别在于增添了非零本质边界条件和材料属性，其余输入格式一致。

5 程序验证与确认

5.1 分片实验

输入文件在data/patchtest文件夹内，基于教材例题 4-5[1] 修改，网格如下。

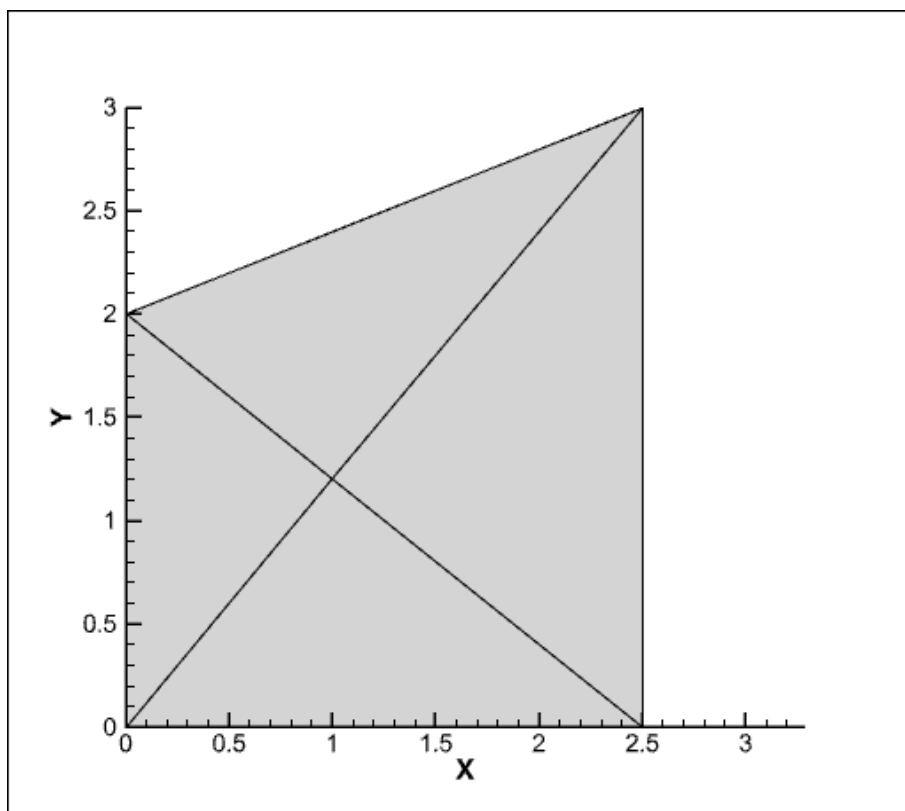


Figure 1: 分片实验网格

各节点的坐标、位移和载荷按照人工位移 $u_x(x, y) = 0.01x$, $u_y(x, y) = -0.003y$ 计算如下表

Table 1: 各节点坐标、位移及载荷

节点号 I	x_I	y_I	u_I	v_I	F_{xI}	F_{yI}
1	0	0	0	0	-10	0
2	2.5	0	0.025	0	15	0
3	2.5	3	0.025	-0.009	10	0
4	0	2	0	-0.006	-15	0
5	1	1.2	0.01	-0.0036	0	0

5.1.1 A

实验 A 要求将所有点位移给定，判断内部节点是否平衡，即节点力是否为零。输出结果如下

N O D A L F O R C E			
NODE	FX	FY	FZ
1	-1.00000e+01	8.88178e-16	0.00000e+00
2	1.50000e+01	-4.44089e-16	0.00000e+00
3	1.00000e+01	1.77636e-15	0.00000e+00

4	-1.50000e+01	8.88178e-16	0.00000e+00
5	-1.55431e-15	-3.55271e-15	0.00000e+00

内部节点节点 5 的节点力大小数量级为 10^{-15} ，在误差范围内，可视为达到平衡，通过实验 A。

5.1.2 B

实验 B 要求给定所有边界节点位移，计算内部节点位移是否与人工解相同。输出结果如下

D I S P L A C E M E N T S			
NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
2	2.50000e-02	0.00000e+00	0.00000e+00
3	2.50000e-02	-9.00000e-03	0.00000e+00
4	0.00000e+00	-6.00000e-03	0.00000e+00
5	1.00000e-02	-3.60000e-03	0.00000e+00

可见节点 5 的位移大小与人工解完全吻合。故通过分片实验 B。

5.1.3 C

实验 C 仅仅施加最小限度的本质边界条件，同时再边界施加力条件，计算各个节点的解是否与人工解相同。输出位移结果如下

D I S P L A C E M E N T S			
NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
2	2.50000e-02	0.00000e+00	0.00000e+00
3	2.50000e-02	-9.00000e-03	0.00000e+00
4	0.00000e+00	-6.00000e-03	0.00000e+00
5	1.00000e-02	-3.60000e-03	0.00000e+00

与人工解一致。实验 C 通过。

5.2 收敛率分析

参考教材习题 4.12[1]，构造一个 $L = 10, h = 2, b = 1$ 的矩形截面悬臂梁，右端受力偶作用，且泊松比为零，模拟一维应力状态。该情况下的解析解为

$$u(x) = \frac{Fh}{EI}xy, \quad v(x) = -\frac{Fh}{2EI}x^2 \quad (7)$$

取 $F = 1, E = 10000$ 。基础的网格划分如下图，即分成 $N \times 5N$ 个方形，每个方形斜向切分为两个三角形单元。

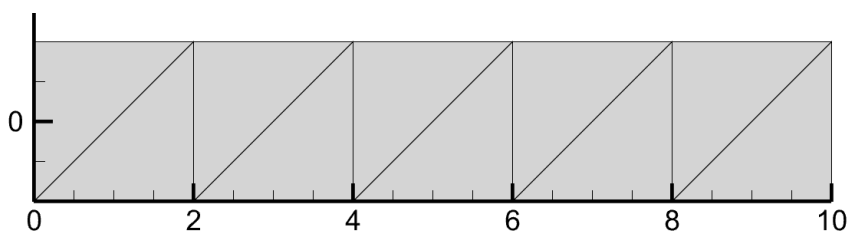


Figure 2: 收敛率分析的基础网格

以此类推，取 $N = 1, 2, 4, 8$ ，分别计算解出单元的位移。其中 $N = 8$ 时利用 Tecplot 绘制的位移云图如下

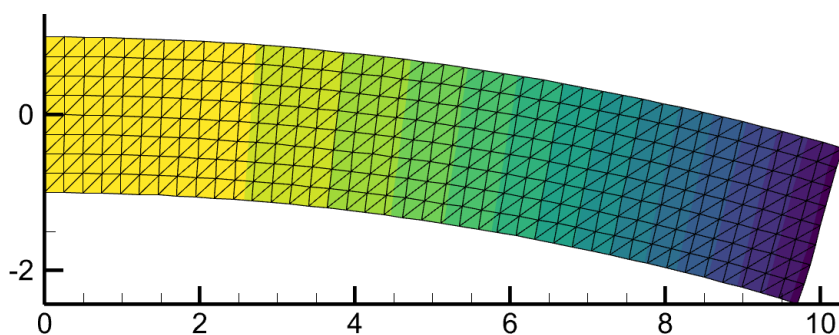


Figure 3: $N = 8$ 时的变形位移云图

对每一个 N 计算 L_2 误差范数。得到误差范数与单元尺寸双对数图如下

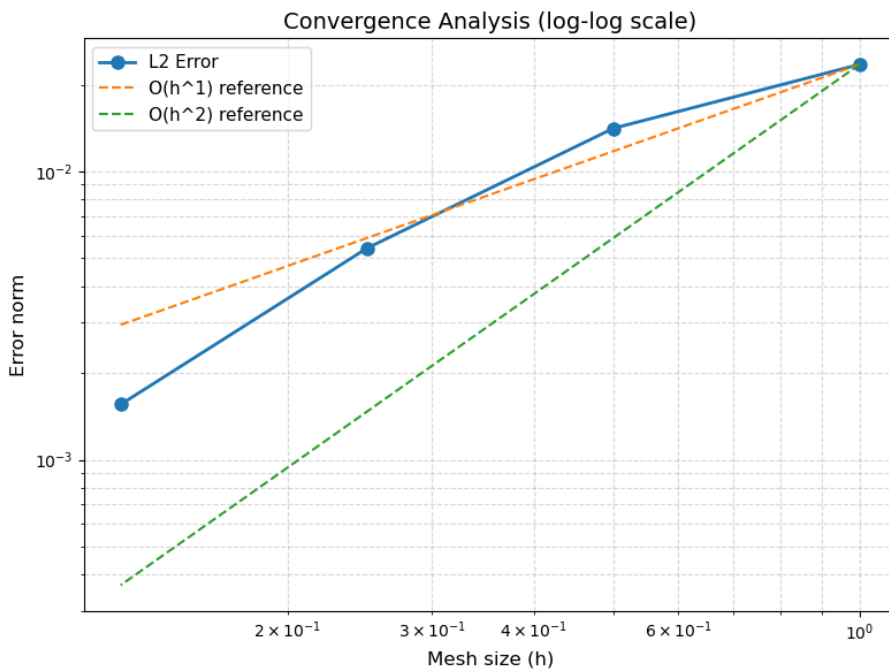


Figure 4: 位移的 L_2 误差范数与单元尺寸的双对数图

在单元尺寸较大时，因为此时的绝对误差大，故收敛速度慢；但是随着单元的加密，误差的收敛速度渐进于 $O(h^2)$ ，与理论分析吻合。

5.3 验证算例

此算例修改自教材习题 4.12[1]。在上表面施加均匀载荷 $q = 5000\text{Pa}$ ，单元的弹性模量和泊松比为 $E = 70\text{GPa}$ ， $\nu = 0.3$ 。

为了验证代码正确性和便于划分网格，在 Abaqus 软件上进行建模计算。然后将 Abaqus 的inp文件中的网格信息导出并用脚本修改作为STAPpp的输入文件。该方法可以快速得到精密且复杂的网格，省去了手动计算划分的时间，并保证 Abaqus 内的网格和验证计算文件的网格完全一致。

为了比较两者的结果，绘制拱桥右斜边的坐标—— X 位移曲线如下

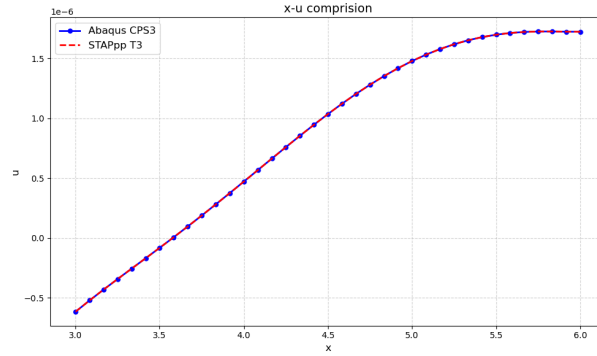
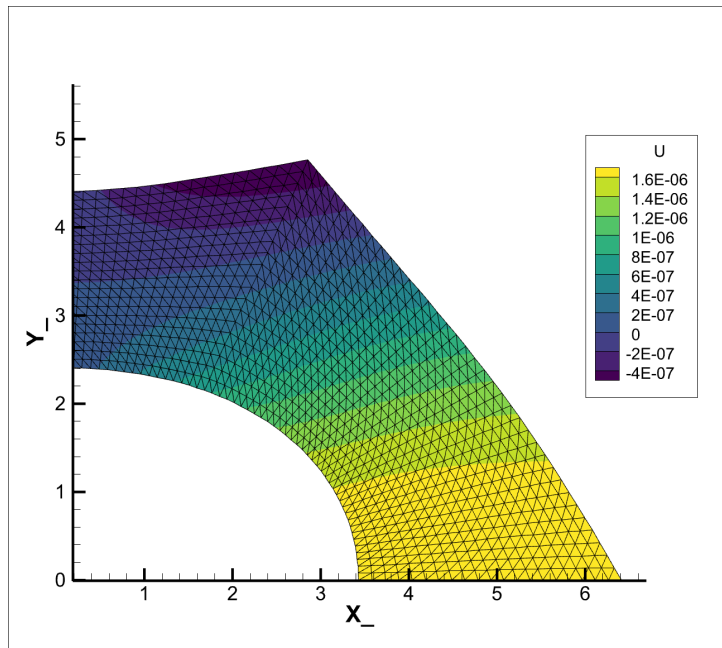


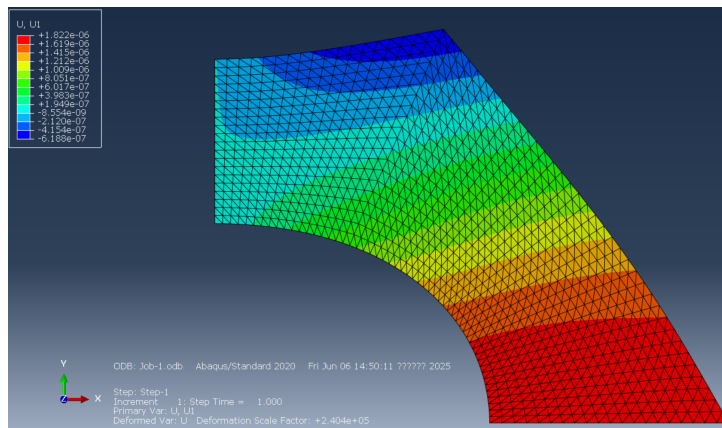
Figure 5: 拱桥算例的右斜边结果对比

两者的计算结果完全吻合，说明STAPpp的 T3 单元精度与 Abaqus 的 CPS3 单元一致。

为了更加直观的观察形变结果，绘制位移云图如下



(a) STAPpp 结果



(b) Abaqus 结果

Figure 6: STAPpp 位移云图与 Abaqus 位移云图对比（形变缩放比相同）

6 任务分工与合作

此次大作业由我独立完成。

7 结论

改进后的STAPpp程序能够正确计算 T3 单元的位移、节点力和单元应力，通过分片实验、收敛分析和验证算例，证明了其分析平面应力问题的有效性和正确性。

References

- [1] 张雄. 有限元法基础. 北京: 高等教育出版社, 2023.