MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

21 de agosto de 2023

1 Prova por redução ao absurdo

2 Perguntas, observações, comentários?

Prova por redução ao absurdo

Visão geral

Se fizermos uma hipótese H e, a partir dela, derivarmos uma conclusão que é claramente falsa. O que podemos dizer sobre H?

Visão geral

Se fizermos uma hipótese H e, a partir dela, derivarmos uma conclusão que é claramente falsa. O que podemos dizer sobre H? Nessa situação, se H vale, então temos um absurdo ou uma *contradição*.

Visão geral

Se fizermos uma hipótese H e, a partir dela, derivarmos uma conclusão que é claramente falsa. O que podemos dizer sobre H? Nessa situação, se H vale, então temos um absurdo ou uma *contradição*.

- Você assume que a Terra é plana, mas isso implica em você poder ver a costa da África da costa brasileira...

Se fizermos uma hipótese H e, a partir dela, derivarmos uma conclusão que é claramente falsa. O que podemos dizer sobre H? Nessa situação, se H vale, então temos um absurdo ou uma *contradição*.

- Você assume que a Terra é plana, mas isso implica em você poder ver a costa da África da costa brasileira...
- Você "prova" que um algoritmo você inventou tem complexidade sublinear. Mas, mais tarde, percebe que, usando esse algoritmo, é possível criar um algoritmo que multiplica duas matrizes $n \times n$ em tempo $O(n^{1.5})$...

Visão geral

Se fizermos uma hipótese H e, a partir dela, derivarmos uma conclusão que é claramente falsa. O que podemos dizer sobre H? Nessa situação, se H vale, então temos um absurdo ou uma *contradição*.

- Você assume que a Terra é plana, mas isso implica em você poder ver a costa da África da costa brasileira...
- Você "prova" que um algoritmo você inventou tem complexidade sublinear. Mas, mais tarde, percebe que, usando esse algoritmo, é possível criar um algoritmo que multiplica duas matrizes $n \times n$ em tempo $O(n^{1.5})$...

Nesses casos, podemos concluir que a hipótese é falsa.

Matematicamente:

- Lembrem-se da tabela verdade de $p \to q$.
- Assuma $\neg q$ e chegue em F. Ou seja, $\neg q \to F$ é verdade.
- Logo, $\neg q = F$, portanto, $q = V$.

Visão geral

Matematicamente:

- Lembrem-se da tabela verdade de $p \rightarrow q$.
- Assuma $\neg q$ e chegue em F. Ou seja, $\neg q \rightarrow F$ é verdade.
- Logo, $\neg q = F$, portanto, $q = V$.
- Precisamente,

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow F$$

Matematicamente:

- Lembrem-se da tabela verdade de $p \to q$.
- Assuma $\neg q$ e chegue em F. Ou seja, $\neg q \to F$ é verdade.
- Logo, $\neg q = F$, portanto, $q = V$.
- Precisamente,

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to F$$

Ou seja, para provar $H \Rightarrow C$

- assumimos H (normal nesse tipo de prova);
- assumimos $\neg C$ (buscando uma contradição);
- tentamos chegar numa expressão falsa (contradição)

O famoso exemplo do aluno que quase passou

Suponha que $4,99 = 5$.

O famoso exemplo do aluno que quase passou

Suponha que $4,99 = 5$.

$$\begin{aligned} 4,99 &= 5 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0,01 \\ \Leftrightarrow 0 &= 10 \end{aligned}$$

Exemplo: uma prova simples por contradição

Teorema

Se x e y são números reais positivos, então $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Segundo exemplo de prova por contradição

Teorema

Não existem números inteiros x e y tais que $x^2 + 8 \cdot y = 2$

Números racionais:

- $\mathbb{Q} = \{n/d : (n, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$
- n é o numerador e d é o denominador
- Equivalente a $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Podemos sempre assumir que se um deles é par, o outro é ímpar
  - $\frac{n}{d} = \frac{2n'}{2d'} = \frac{n'}{d'}$

Números racionais:

- $\mathbb{Q} = \{n/d : (n, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$
- n é o numerador e d é o denominador
- Equivalente a $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Podemos sempre assumir que se um deles é par, o outro é ímpar
  - $\frac{n}{d} = \frac{2n'}{2d'} = \frac{n'}{d'}$
- Na verdade, é mais geral: nunca há fator em comum (além do 1)
  - $\frac{n}{d} = \frac{pn'}{pd'} = \frac{n'}{d'}$

Números racionais:

- $\mathbb{Q} = \{n/d : (n, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$
- n é o numerador e d é o denominador
- Equivalente a $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Podemos sempre assumir que se um deles é par, o outro é ímpar
  - $\frac{n}{d} = \frac{2n'}{2d'} = \frac{n'}{d'}$
- Na verdade, é mais geral: nunca há fator em comum (além do 1)
  - $\frac{n}{d} = \frac{pn'}{pd'} = \frac{n'}{d'}$

Números irracionais: números reais que não são racionais

$$\mathbb{I} = \{r \in \mathbb{R} : r \notin \mathbb{Q}\}$$

Terceiro exemplo de prova por contradição

Teorema

A soma de um número racional com um número irracional é também irracional.

Quarto exemplo de prova por contradição

Teorema

A raíz quadrada de dois é irracional.

Perguntas, observações, comentários?