MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 04

IC - Unicamp

2023

1. Seja n um inteiro maior que ou igual a 2. Considere a operação de soma sobre $\mathbb{Z}_n$ definida como
$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n.$$
Prove que essa operação é bem definida (ou seja, prove que se $a \equiv x \pmod{n}$ e $b \equiv y \pmod{n}$, então $a + b \equiv x + y \pmod{n}$).

2. Usando operações modulares, prove as seguintes afirmações:
   (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 5^n$ é par.
   (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $6|(n^3 - n)$.

3. Encontre o inverso multiplicativo de 17 módulo 72 no intervalo $\{0, 1, \cdots, 71\}$. (**Dica:** Use o algoritmo de Euclides estendido.)

4. Prove que a equação $14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$ não possui solução (x, y) inteira.

5. Prove, usando congruências, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

6. Prove que se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções injetoras, então $g \circ f$ também é injetora.

7. Considere a função $f(x) = x/(3 + x)$, onde $\mathsf{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
   (a) Determine $\mathsf{Img}(f)$ e diga se f é sobrejetora ou não.
   (b) f é injetora?

8. A função *piso* associa a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lfloor x \rfloor$. Observe que $\lfloor 1/3 \rfloor = \lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -1/3 \rfloor = \lfloor -2/3 \rfloor = -1$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

   A função *teto* associa a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lceil x \rceil$. Observe que $\lceil 5/4 \rceil = \lceil 7/4 \rceil = 2$, $\lceil -1/4 \rceil = \lceil -3/4 \rceil = 0$ e $\lceil 4 \rceil = 4$.

   Tanto o *piso* quanto o *teto* são funções do conjunto $\mathbb{R}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, as seguintes propriedades valem:

   - $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $n \leq x < n + 1$.
   - $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $x - 1 < n \leq x$.
   - $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $n - 1 < x \leq n$.

- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $x \leq n < x + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
- $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

Prove, ou dê um contra exemplo para as seguintes afirmações

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + y$ e $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$.

(b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + y$ e $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$.

9. Seja ε um número real positivo. Considere a relação $\mathcal{R}_\varepsilon$ sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$(x, y) \in \mathcal{R}_\varepsilon \Leftrightarrow \lfloor x/\varepsilon \rfloor = \lfloor y/\varepsilon \rfloor$$

para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$. Esta é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, descreva suas classes de equivalência.