DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB — 24 / 11 / 23

Nome: Marcos Borges Pedroso RA: 202693

MC358 - 2S 2023 - 5ª Lista de Exercícios

① Encontre constantes c e n_0 que provam que $\log((4n^3+5n^2+10)^2) \in O(\log n)$

* Para mostrar que $\log((4n^3+5n^2+10)^2) \in O(\log n)$ precisamos encontrar constantes positivas c e n_0 tais que: $\log((4n^3+5n^2+10)^2) \leq c \cdot \log n$.
* Vamos simplificar a expressão do lado esquerdo.
$\log((4n^3+5n^2+10)^2) = 2 \cdot \log(4n^3+5n^2+10)$
* Agora, observe que $4n^3+5n^2+10$ crescerá mais rapidamente do que n à medida que n aumenta. Para simplificar, podemos ignorar os termos de menor ordem e considerar apenas o termo $4n^3$.
* Então, temos: $2 \cdot \log(4n^3+5n^2+10) \leq 2 \cdot \log(4n^3)$
* Agora, podemos simplificar ainda mais:
$2 \cdot \log(4n^3) = 2(\log 4 + \log n^3) = 2 \cdot (\log 4 + 3\log n) = 2\log 4 + 6 \cdot \log n$
* Podemos considerar $c = 8$ para simplificar, então
$2 \cdot \log(4n^3+5n^2+10) \leq 8 \log n$
* Agora, escolhemos n_0 como algum valor suficientemente grande para garantir que a desigualdade seja verdadeira. Portanto, temos uma constante $c = 8$ e n_0 pode ser o valor mínimo 1, por exemplo.
* Logo, concluímos que $\log((4n^3+5n^2+10)^2) \in O(\log n)$.

② Seja $f(n) = 4^n - n$.

a) Encontre constantes c e n_0 que provam que $f(n) \in \Omega(2^n)$

* Para mostrar que $f(n) \in \Omega(2^n)$, precisamos encontrar constantes positivas c e n_0 tais que: $f(n) \geq c \cdot 2^n$ para todo $n \geq n_0$.
* Considere $c = 1$ e $n_0 = 1$. Então, precisamos mostrar que $1 \cdot (4^n - n) \geq 2^n$
$(4^n - n) \geq 2^n$ para $n \geq 1$.
* Reorganizando os termos, obtemos: $4^n \geq 2^n + n$
* Esta desigualdade vale, pois 4^n cresce mais rápido do que $2^n + n$, especialmente para $n \geq 1$. Portanto, $f(n) = 4^n - n \in \Omega(2^n)$ com $c = n_0 = 1$.

24 | 11 | 23

(b) Prove que $f(n) \notin \Theta(2^n)$

Para mostrar que $f(n) \notin \Theta(2^n)$, precisamos mostrar que $f(n)$ não está assintoticamente restrito superior e inferiormente por 2^n com constantes positivas.

Suponha, por absurdo, que $f(n) \in \Theta(2^n)$. Isso implicaria que existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que:

$c_1 \cdot 2^n \leq f(n) \leq c_2 \cdot 2^n$

No entanto, sabemos que $f(n) = 4^n - n$, e não existe uma constante c_2 tal que $4^n - n \leq c_2 \cdot 2^n$ para todo n suficientemente grandes. Logo, podemos concluir que $f(n) \notin \Theta(2^n)$.

3) Considere as seguintes funções: n, $\log n$, 2^n, $\sqrt{n}$, 2^{n^2}, 3^n, $\log(\log n)$, $(\log n)^2$. Ordene-as, na tabela a seguir em ordem crescente assintótica, ou seja, de tal forma que $O(f_i(n))$ esteja contido em $O(f_{i+1}(n))$.

Para ordenar as funções em ordem crescente assintótica, [illegible] analisar o crescimento relativo à medida que n se aproxima do ∞.

i) Primeiro, [illegible] o crescimento de cada função:

- n: crescimento linear
- $\log n$: crescimento logarítmico
- 2^n: crescimento exponencial
- $\sqrt{n}$: crescimento sublinear
- 2^{n^2}: crescimento superexponencial
- 3^n: crescimento exponencial
- $\log(\log n)$: crescimento log. do log
- $(\log n)^2$: crescimento log. ao quadrado

ii) Agora, vamos analisar o crescimento relativo:

- Funções logarítmicas crescem mais devagar que funções lineares.
- Funções exponenciais crescem mais rápido que funções lineares e logarítmicas.
- Funções polinomiais, de grau superior, crescem mais rápido que logarítmicas.

iii) Por fim, vamos ordenar com base no crescimento relativo:

1) $\log(\log n)$ é a mais lenta
2) $\log n$ vem após $\log(\log n)$
3) $(\log n)^2$ é mais [illegible] que $\log n$
4) n é linear e aparece após [illegible]
5) $\sqrt{n}$ vem após a função n
6) 2^n é exponencial, após $\sqrt{n}$ [illegible] mais rápido que [illegible]
7) 2^{n^2} cresce mais rápido que 2^n
8) 3^n é [illegible]

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
$\log(\log n)$	$\log n$	$(\log n)^2$	$\sqrt{n}$	n	2^n	3^n	2^{n^2}

4) Seja $k \in \mathbb{N}$ uma constante maior que 1.

a) Prove que se $f_i(n) \in O(g_i(n))$ para $1 \leq i \leq k$, então $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O(\prod_{i=1}^{k} g_i(n))$

* Dada a condição $f_i(n) \in O(g_i(n))$ para $1 \leq i \leq k$, isso significa que existem constantes positivas c_i e n_{0i} tais que para $n \geq n_{0i}$, temos $f_i(n) \leq c_i \cdot g_i(n)$.
* Agora, podemos multiplicar todas as desigualdades:

$f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot (\ldots) \cdot f_k(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot (\ldots) \cdot c_k \cdot g_1(n) \cdot g_2(n) \cdot \ldots \cdot g_k(n)$

* Vamos definir $c = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_k$ e $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}, \ldots, n_{0k}\}$.
* Então, para $n \geq n_0$, temos: $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq c \cdot \prod_{i=1}^{k} g_i(n)$
* Assim, vemos que $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O(\prod_{i=1}^{k} g_i(n))$

b) Prove que $f_1(n), \ldots, f_k(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O((g(n))^k)$

* Suponha que $f_i(n) \in O(g(n))$ para $1 \leq i \leq k$. Isso significa que existem constantes positivas c_i e n_{0i} tais que para $n \geq n_{0i}$, temos $f_i(n) \leq c_i \cdot g(n)$.
* Agora, podemos multiplicar as desigualdades:

$f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot (\ldots) \cdot f_k(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot (\ldots) \cdot c_k \cdot g(n) \cdot g(n) \cdot (\ldots) \cdot g(n)$

$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq (c_1 \cdot c_2 \cdot (\ldots) \cdot c_k) \cdot (g(n))^k$

* Vamos definir $c = c_1 \cdot c_2 \cdot (\ldots) \cdot c_k$ e $n_0 = \max(n_{01}, n_{02}, \ldots, n_{0k})$
* Então, para $n \geq n_0$, temos que: $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq c \cdot (g(n))^k$
* Logo, isso mostra que $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O((g(n))^k)$.

5) Indique para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo se a função A é O, o, Ω, ω ou Θ da função B. Assuma que $k \geq 1$ e $0 < \epsilon < 1 < c$ são constantes. Considere $\log^k n := \log \log \ldots \log n$. Na linha (v), m é um número inteiro positivo.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(i)	$\log^k n$	n^ϵ	N	N	S	S	N
(ii)	n^k	c^n	S	S	N	N	N
(iii)	$\sqrt{n}$	$n^{\operatorname{sen} n}$	N	N	N	N	N
(iv)	2^n	$2^{n/2}$	N	N	S	S	N
(v)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	S	N	N	N	N
(vi)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$	S	N	N	N	N

25 | 11 | 23

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

⑥ O Teorema Mestre é um método utilizado na análise de algoritmos para determinar a complexidade temporal de recorrências que surgem frequentemente em algoritmos recursivos, especialmente aqueles que utilizam a técnica de divisão e conquista. A forma geral do Teorema Mestre para recorrências é expressa como: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, onde:

- $T(n)$ é o tempo de execução do algoritmo para um problema de tamanho n.
- a é o número de subproblemas em cada nível de recursão.
- $\frac{n}{b}$ é o tamanho de cada subproblema (aqui supõe-se que todos os subproblemas têm mesmo tamanho)
- $f(n)$ é o custo de dividir o problema e combinar os resultados dos subproblemas

O Teorema Mestre fornece soluções para $T(n)$ em três casos, dependendo da relação entre $f(n)$ e $n^{\log_b a}$:

a) Caso 1: Se $f(n) = O(n^c)$ onde $c < \log_b a$, então: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

b) Caso 2: Se $f(n) = \Theta(n^c)$ onde $c = \log_b a$, então: $T(n) = \Theta(n^c \log n)$

c) Caso 3: Se $f(n) = \Omega(n^c)$ onde $c > \log_b a$ e se $a f(\frac{n}{b}) \leq k f(n)$ para alguma constante $k < 1$ e suficientemente grande n, então: $T(n) = \Theta(f(n))$

Essas expressões fornecem uma maneira de determinar a complexidade de tempo de algoritmos recursivos dividindo e conquistando, com base na comparação do trabalho feito em cada nível da árvore de recursão (representado por $f(n)$) com o número de subproblemas e seu tamanho

⑦ O tempo de execução de um algoritmo A é descrito pela recorrência $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$. Um algoritmo A' tem um tempo de execução descrito pela recorrência $T'(n) = aT'(\frac{n}{4}) + n^2$. Qual é o maior valor inteiro de a tal que A' é assintoticamente mais rápido que A? (Dica: Use o Teorema Mestre para avaliar $T(n)$ e $T'(n)$).

Vamos aplicar o Teorema Mestre para as recorrências $T(n)$ e $T'(n)$.

* Para $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$: $a = 7$, $b = 2$, e $f(n) = n^2$

* Comparando $f(n) = n^2$ com $n^{(\log_b a)} = n^{(\log_2 7)}$, temos que $f(n)$ é assintoticamente menor que $n^{(\log_2 7)}$ porque 2 é menor que $\log_2 7$. Portanto, estamos no Caso 1 do Teorema Mestre.

Pelo Caso 1, obtemos: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})$

* Para $T'(n) = a.T'(\frac{n}{4}) + n^2$: $b = 4$, $f(n) = n^2$ e a é o valor procurado
↳ Comparando $f(n) = n^2$ com $n^{(\log_b a)} = n^{(\log_4 a)}$, queremos encontrar o maior valor inteiro de a tal que $f(n)$ seja assintoticamente menor que $n^{(\log_4 a)}$.
↳ Neste caso, $f(n)$ é n^2 e $n^{(\log_4 a)}$ é $n^{(\log_4 a)}$. Logo, não importa qual seja o valor de a, $f(n)$ sempre será menor que $n^{(\log_4 a)}$
↳ Portanto, qualquer valor inteiro de a serve para que $T'(n)$ seja assintoticamente mais rápido que $T(n)$. Em resumo, o valor maior inteiro de a é arbitrariamente grande, e o algoritmo A' será assintoticamente mais rápido que A independentemente do valor escolhido para a.

(7) Determine a fórmula fechada das seguintes relações de recorrência:
a) $a_n = 3a_{(n-1)} - n.3^{(n-1)}$, $n \geq 2$, n natural, sendo $a_1 = -1$.
* Para resolver essa relação de recorrência, precisamos primeiro encontrar a solução homogênea e a solução particular.
* Solução Homogênea: $a_n^{(h)} = 3a_{(n-1)}^{(h)}$. Esta é uma sequência geométrica com razão 3. A solução homogênea é da forma $C.3^n$, onde C é uma constante a ser determinada.
* Solução Particular: A parte não homogênea é $-n.3^{(n-1)}$. Suponha uma solução particular da forma $a_n^{(p)} = A.n.B^n$, onde A e B são constantes.
↳ Substituímos isso na equação original: $A.n.B^n = 3.A(n-1)B^{(n-1)} - n.3^{(n-1)}$
↳ Simplificamos e resolvemos para A e B. Solução particular: $a_n^{(p)} = -\frac{1}{4}n.3^n$
* Solução Geral é a soma da solução homogênea e particular
$a_n = C.3^n - \frac{1}{4}n3^n$, dado que $S_H = C.3^n$ e $S_P = -\frac{1}{4}.n.3^n$
* Utilizamos a condição inicial $a_1 = -1$ para encontrar C:
$-1 = C.3 - \frac{1}{4}.13 \Rightarrow -1 = 3C - \frac{13}{4} \Rightarrow -1 + \frac{13}{4} = 3C \Rightarrow$
$\frac{-4+13}{4} = 3C \Rightarrow \frac{9}{4} = 3C \Rightarrow C = \frac{\cancel{3}}{4}.\frac{1}{\cancel{3}} \Rightarrow C = \frac{3}{4}$
* Então, a fórmula fechada é dada por
$a_n = -\frac{3}{4}.3^n - \frac{1}{4}.n.3^n$

25 11 23

b) $a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 2^{(n-1)}$, sendo $a_0 = 2$.

* Esta é uma relação linear homogênea com coeficiente não homogêneo constante.
* Solução Homogênea: $a_n^{(h)} = a_{(n-1)}^{(h)}$. É da forma C, onde C é constante.
* Solução Particular: A parte não homogênea é $3 \cdot 2^{(n-1)}$.

Suponha uma solução particular constante $a_n^{(p)} = A$, onde A é constante.

↳ Substituindo isso na equação original: $A = A + 3 \cdot 2^{(n-1)}$

↳ Simplificamos e encontramos que $A = 2^n$.

* Solução Geral: é a soma da solução homogênea e da particular:

$a_n = C + 2^n$, dado que $S_H = C$ e $S_P = 2^n$

↳ Utilizamos a condição inicial $a_0 = 2$ para encontrar C:

$2 = C + 1 \Rightarrow C = 2 - 1 \Rightarrow C = 1$

↳ Então, a fórmula fechada é: $a_n = 1 + 2^n$.

8) Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando o experimento termina.

a) Seja a_n o número de experimentos que terminam no n-ésimo lançamento ou antes. Encontre uma relação de recorrência para a_n. Justifique.

Observe por exemplo, que a_3 é o número de experimentos que terminam no segundo ou terceiro lançamento, ou seja, é a soma de cc, cCc e Ccc, onde c significa 'cara' e C 'coroa'.

* Vamos analisar o problema. O experimento termina quando aparecem duas caras consecutivas. Isso significa que o último lançamento deve ser uma cara (c) e o lançamento anterior pode ser qualquer combinação de caras e coroas que não termine em duas caras consecutivas.
* Para encontrar a_n, vamos considerar dois casos:

i) Caso 1 (Cara no último lançamento):

• Se o último lançamento é uma cara, então o experimento pode ter terminado em $(n-1)$ lançamentos sem a ocorrência de duas caras consecutivas.

• Há $a_{(n-1)}$ maneiras de terminar o experimento.

ii) Caso 2 (Duas caras consecutivas no último lançamento):
* Se as duas caras consecutivas ocorrem no último lançamento, então o lançamento anterior deve ser uma coroa (C).
* Há $a_{(n-2)}$ maneiras de terminar o experimento.
* Portanto, a relação de recorrência é: $a_n = a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$ com condições iniciais $a_0 = 1$ (já que o experimento termina no primeiro lançamento) e $a_1 = 2$ (já que o experimento pode terminar no segundo lançamento de duas maneiras: CC ou Cc).

b) Calcule a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique.
* Podemos resolver a relação de recorrência usando o método das raízes características. A equação característica associada é dada por: $r^2 = r + 1$.
* As soluções desta equação são $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Portanto, a solução geral é: $a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
* Utilizamos as condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$ para encontrar os valores de A e B. Isso resultará na fórmula fechada específica para a_n.
* A justificativa para a escolha das condições iniciais é que o experimento termina no primeiro lançamento com probabilidade 1 e pode terminar no segundo lançamento de duas maneiras distintas: CC ou Cc.

9) Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Jaden tomou emprestados 1000 reais, e deve pagar prestações fixas de 100 reais (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo).

a) Encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para a dívida de Jaden ao final do n-ésimo mês. Justifique.
* Denominando por D_n a dívida de Jaden ao final do n-ésimo mês, como inicialmente, Jaden tomou emprestado 1000 reais por mês além disso, o banco cobra 5% de juros ao mês. Portanto, a relação de recorrência para a dívida pode ser expressa como: $D_n = 1{,}05 \cdot D_{(n-1)} - 100$

26 | 11 | 23 — DOM ~~X~~

* A justificativa para isso é que a dívida no n-ésimo mês é a dívida acumulada do mês anterior multiplicada por 1,05 (devido aos juros) e depois subtraímos 100 (a prestação fixa que Jadey paga todos os meses).
* As condições iniciais são $D_0 = 1000$ (a quantia emprestada) e $D_1 = 1,05 \cdot D_0 - 100$ (a dívida ao final do primeiro mês).
* Portanto, temos a seguinte relação de recorrência:

$D_n = 1,05 \cdot D_{(n-1)} - 100$, dadas as condições: $D_0 = 1000$ e $D_1 = 1,05\, D_0 - 100$

2) Resolva esta relação, justifique.

* Podemos resolver essa relação de recorrência usando método algébrico. Vamos primeiro simplificar a relação: $D_n = 1,05\, D_{(n-1)} - 100$
* A característica da equação é $r = 1,05$. A solução geral da parte homogênea é $D_n^{(h)} = A \cdot (1,05)^n$.
* Para encontrar uma solução particular para a relação não homogênea, tentamos uma solução constante $D_n^{(p)} = B$. Substituindo isso na relação original, obtemos: $B = \frac{-100}{(1-1,05)}$
* Portanto, a solução geral é a soma da solução homogênea e particular:

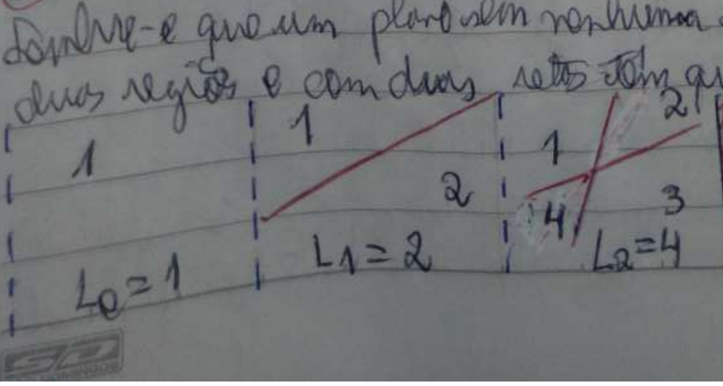
$D_n = A \cdot (1,05)^n - \frac{100}{(1-1,05)}$, onde $D_n^{(h)} = A \cdot (1,05)^n$ e $D_n^{(p)} = \frac{-100}{(1-1,05)}$

* Utilizamos as condições iniciais $D_0 = 1000$ para achar A:

$$D_0 = A \cdot \cancel{(1,05)^0}^{\,1} - \frac{100}{(1-1,05)} \Rightarrow 1000 = A - \frac{100}{(-0,05)} \Rightarrow A = 1000 + 2000 = 3000$$

* Então, a fórmula fechada para a dívida do Jadey ao final do n-ésimo mês é: $D_n = 3000 \cdot (1,05)^n - 100/(1-1,05)$

10) Qual é o número máximo de regiões L_n determinado por n retas no plano? Lembre-se que um plano sem nenhuma reta tem uma região, com uma reta tem duas regiões e com duas retas têm quatro regiões conforme ilustrado abaixo:



Faça uma modelagem usando funções de recorrência para encontrar a fórmula fechada para L_n e depois prove usando indução matemática.

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

26 | 11 | 23

Para encontrar a fórmula fechada para L_n, o número máximo de regiões determinadas por n retas no plano, podemos estabelecer uma relação de recorrência. A cada nova reta adicionada, ela pode cruzar as retas existentes em pontos distintos, aumentando o número de regiões. A fórmula para o número máximo de regiões L_n com n retas pode ser expressa em termos de $L_{(n-1)}$ (o número máximo de regiões com $(n-1)$ retas) da seguinte forma: $L_n = L_{(n-1)} + n$

* A justificativa para isso é que ao adicionar a n-ésima reta, ela pode cortar todas as $(n-1)$ retas anteriores e, então, cria n novas regiões.

* Prova por Indução Matemática:

i) Base da Indução $(n=0)$: $L_0 = 1$, sendo esta a condição inicial pois não há retas, então há apenas uma região.

ii) Hipótese de Indução: Assumimos que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja, $L_k = 1 + k(k+1)/2$.

iii) Passo Indutivo $(n = k+1)$: Queremos mostrar que a fórmula é válida para $n = k+1$: $L_{(k+1)} = L_k + (k+1)$

↳ Pela hipótese de indução, sabemos que:

$$L_k = 1 + k\left[\frac{(k+1)}{2}\right] \Rightarrow L_{(k+1)} = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

↳ Isso é igual a $1 + (k+1)(k+2)/2$, que é a fórmula para L_{k+1}. Portanto, a relação de recorrência é válida por indução.

↳ Concluímos que a fórmula fechada para L_n é: $L_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

11) O número de comparações no pior caso de uma execução de um algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

26 | 11 | 23

a) Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

* Vamos provar a desigualdade $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Base da Indução ($n = 1$): Para $n = 1$, temos $T(1) = T^-(1) = T^+(1) = 0$, então a base da indução é verdadeira.

ii) Hipótese de Indução: Assumimos que a desigualdade é verdadeira para algum $k \geq 1$, ou seja, $T^-(k) \leq T(k) \leq T^+(k)$.

iii) Passo Indutivo: Queremos provar a desigualdade para $k+1$:

$T^-(k+1) \leq T(k+1) \leq T^+(k+1)$

iv) Prova: $T(k+1) = T\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + (k+1) - 1$

$= T\left(\frac{k}{2}\right) + T\left(\frac{k}{2}\right) + k$

$\leq 2T(k) + k$ (Pela hipótese de indução)

$\leq 2T(k) + k + 1$ (adicionamos 1 mantendo a desigualdade)

$= T^+(k+1)$ (definição de $T^+(k+1)$)

Similarmente: $T(k+1) \geq 2T\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + (k+1) - 1$

$= 2T\left(\frac{k}{2}\right) + k$

$\geq 2T(k) + k$ (Pela hipótese de indução)

$\geq T^-(k+1)$ (definição de $T^-(k+1)$).

* Portanto, a desigualdade é válida para $k+1$ e assim, por indução, temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.