# MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

13 de setembro de 2023

1 Relações

2 Relação de ordem

3 Perguntas, observações, comentários?

# Relações

# Relações: intuição

Conjuntos servem, entre outras coisas, para agrupar elementos que têm algo em comum.
Muitas vezes, é possível definir alguma propriedade que elementos de dois conjuntos satisfazem.
Por exemplo:

1. Para cada $z \in \mathbb{Z}$, queremos os divisores positivos (i.e., em $\mathbb{N}$) de $z$.
2. Para cada polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$, queremos as raízes complexas (i.e., em $\mathbb{C}$) de $p(X)$.

# Relações: intuição

Conjuntos servem, entre outras coisas, para agrupar elementos que têm algo em comum.

Muitas vezes, é possível definir alguma propriedade que elementos de dois conjuntos satisfazem.

Por exemplo:

1. Para cada $z \in \mathbb{Z}$, queremos os divisores positivos (i.e., em $\mathbb{N}$) de $z$.
2. Para cada polinômio $p(X) \in \mathbb{R}[X]$, queremos as raízes complexas (i.e., em $\mathbb{C}$) de $p(X)$.

Esse tipo de situação define como elementos de dois conjuntos se relacionam, ou seja, define uma relação.

# Relações: intuição

Mas como representar essa relação?
Nosso primeiro exemplo: Para cada $z \in \mathbb{Z}$, queremos os divisores positivos (i.e., em $\mathbb{N}$) de $z$.

- $-1 \mapsto 1$
- $-10 \mapsto \{1, 2, 5, 10\}$
- $9 \mapsto \{1, 3, 9\}$
- ...

# Relações: intuição

Mas como representar essa relação?
Nosso primeiro exemplo: Para cada $z \in \mathbb{Z}$, queremos os divisores positivos (i.e., em $\mathbb{N}$) de $z$.

- $-1 \mapsto 1$
- $-10 \mapsto \{1, 2, 5, 10\}$
- $9 \mapsto \{1, 3, 9\}$
- ...

Representamos uma relação usando pares ordenados:

- $(-1, 1)$
- $(-10, 1), (-10, 2), (-10, 5), (-10, 10)$
- $(9, 1), (9, 3), (9, 9)$
- ...

Neste exemplo, um conjunto $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : b \mid a\}$.

Uma relação (binária) $\mathcal{R}$ de um conjunto $A$ para um conjunto $B$ é um subconjunto de $A \times B$.
Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, dizemos que $a$ se relaciona com $b$ e denotamos $a\mathcal{R}b$.
Se $A = B$, podemos dizer que $\mathcal{R}$ é uma relação em $A$ ou sobre $A$.

Considere $A = \{0, 3, 8, 10\}$ e $B = \{-3, 1, 5\}$

- A relação "é coprimo" de $A$ para $B$ é

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(3,1),(3,5),(8,-3),(8,1),(8,5),(10,-3),(10,1)\}$$

Assim, $3\mathcal{R}5$, significa "3 e 5 são coprimos".

# Primeiros exemplos

Considere $A = \{0, 3, 8, 10\}$ e $B = \{-3, 1, 5\}$

- A relação "é coprimo" de $A$ para $B$ é

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(3,1),(3,5),(8,-3),(8,1),(8,5),(10,-3),(10,1)\}$$

  Assim, $3\mathcal{R}5$, significa "3 e 5 são coprimos".

- A relação "menor que" de $A$ para $B$ é

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(0,5),(3,5)\}$$

  Neste caso, preferimos usar $a < b$ em vez de $a\mathcal{R}b$.

Considere $A = \{0, 3, 8, 10\}$ e $B = \{-3, 1, 5\}$

- A relação "é coprimo" de $A$ para $B$ é

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(3,1),(3,5),(8,-3),(8,1),(8,5),(10,-3),(10,1)\}$$

Assim, $3\mathcal{R}5$, significa "3 e 5 são coprimos".

- A relação "menor que" de $A$ para $B$ é

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(0,5),(3,5)\}$$

Neste caso, preferimos usar $a < b$ em vez de $a\mathcal{R}b$.

- A relação a seguir sem propriedade evidente:

$$\mathcal{R} = \{(0,1),(3,1),(8,1),(10,1)\}$$

# Definições relacionadas com relação

O domínio de uma relação é definido como

$$\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists b \in B\,(a, b) \in \mathcal{R}\}$$

A imagem de uma relação é definida como

$$\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A\,(a, b) \in \mathcal{R}\}$$

# Definições relacionadas com relação

O domínio de uma relação é definido como

$$\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists b \in B\,(a, b) \in \mathcal{R}\}$$

A imagem de uma relação é definida como

$$\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A\,(a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Exemplos: na lousa.

# Relação inversa

Para qualquer relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, definimos a relação inversa como

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

# Relação inversa

Para qualquer relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, definimos a relação inversa como

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Exemplos na lousa.

# Relação inversa

Para qualquer relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, definimos a relação inversa como

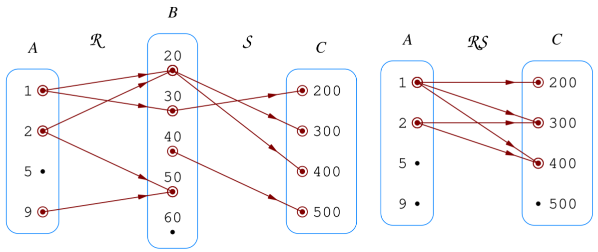
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Exemplos na lousa.

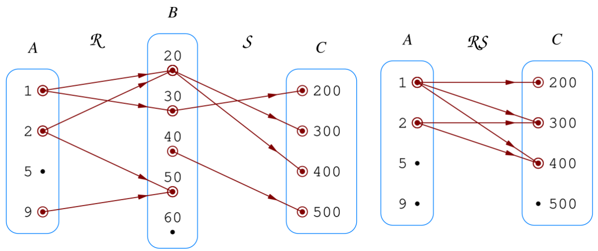
É fácil ver que a inversa da inversa é a própria relação. Isto é

$$(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$$

Se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{S} \subseteq B \times C$, podemos olhar para os pares $(a, b) \in \mathcal{R}$ tais que $b \in \text{dom}(\mathcal{S})$, ou seja, tais que existe $(b, c) \in \mathcal{S}$, e então considerar os pares $(a, c)$.



Se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{S} \subseteq B \times C$, podemos olhar para os pares $(a, b) \in \mathcal{R}$ tais que $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$, ou seja, tais que existe $(b, c) \in \mathcal{S}$, e então considerar os pares $(a, c)$.




## Definição:

Sejam $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ e $\mathcal{S} \subseteq B \times C$. A composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists (a, b) \in \mathcal{R} \wedge \exists (b, c) \in \mathcal{S}\}$$

# Exemplo de composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em $\mathbb{Z}$ definidas como $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 3 \cdot a$ e $a\mathcal{S}b \Leftrightarrow b = a + 5$.
Por exemplo, temos

- $(-2, -6), (0, 0), (1, 3), (5, 15) \in \mathcal{R}$
- $(-3, 2), (-1, 4), (0, 5), (5, 10) \in \mathcal{S}$

# Exemplo de composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em $\mathbb{Z}$ definidas como $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 3 \cdot a$ e $a\mathcal{S}b \Leftrightarrow b = a + 5$.
Por exemplo, temos

- $(-2, -6), (0, 0), (1, 3), (5, 15) \in \mathcal{R}$
- $(-3, 2), (-1, 4), (0, 5), (5, 10) \in \mathcal{S}$

Como fica a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$?

# Exemplo de composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em $\mathbb{Z}$ definidas como $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 3 \cdot a$ e $a\mathcal{S}b \Leftrightarrow b = a + 5$.
Por exemplo, temos

- $(-2, -6), (0, 0), (1, 3), (5, 15) \in \mathcal{R}$
- $(-3, 2), (-1, 4), (0, 5), (5, 10) \in \mathcal{S}$

Como fica a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$?

Pela definição da composição, temos

$$(a, c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} : b = 3a \wedge c = b + 5$$

Como $a \in \mathbb{Z}$, então $3a \in \mathbb{Z}$ e tal $b$ sempre existe. Logo, temos

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, 3a + 5) : a \in \mathbb{Z}\}$$

# Exemplo de composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em $\mathbb{Z}$ definidas como $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = 3 \cdot a$ e $a\mathcal{S}b \Leftrightarrow b = a + 5$.
Por exemplo, temos

- $(-2, -6), (0, 0), (1, 3), (5, 15) \in \mathcal{R}$
- $(-3, 2), (-1, 4), (0, 5), (5, 10) \in \mathcal{S}$

Como fica a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$?

Pela definição da composição, temos

$$(a, c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z} : b = 3a \wedge c = b + 5$$

Como $a \in \mathbb{Z}$, então $3a \in \mathbb{Z}$ e tal $b$ sempre existe. Logo, temos

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, 3a + 5) : a \in \mathbb{Z}\}$$

E a composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$?

# Relação identidade e composição com inversa

A relação identidade em um conjunto $A$ é definida como

$$\mathcal{I}_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

Notamos que compor com a identidade não muda a relação, ou seja, se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, então

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$$

# Relação identidade e composição com inversa

A relação identidade em um conjunto $A$ é definida como

$$\mathcal{I}_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

Notamos que compor com a identidade não muda a relação, ou seja, se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, então

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$$

No entanto, compor com a inversa nem sempre nos dá a identidade. Por exemplo:

- $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subset A \times A$.
- Então $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ e $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
- Mas $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
- E $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

Note que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ são diferentes entre si e ambas diferentes de $\mathcal{I}_A$

# Inversa da composição

Podemos ver que para quaisquer relações $\mathcal{R} \in A \times B$ e $\mathcal{S} \in B \times A$, temos

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$$

(Prova na lousa)

# Relação de ordem

# Relação de ordem

Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem* se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

*Ou uma relação de ordem parcial

# Relação de ordem

Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem* se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

- Reflexividade: $\forall x \in A \ (x, x) \in \mathcal{R}$
- Antissimetria: $\forall (x, y) \in A \ ((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R}) \Rightarrow x = y)$
- Transitividade: $\forall x, y, z \in A \ ((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R})$

Neste caso, dizemos que $A$ é um conjunto (parcialmente) ordenado.

*Ou uma relação de ordem parcial

A relação "é subconjunto" é uma relação de ordem.
Por exemplo: seja $A = \{0, 1, 2\}$ e considere o conjunto das partes de $A$, isto é: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
Então temos a seguinte relação em $P(A)$:

$$\mathcal{R} = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\}$$

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é subconjunto" é uma relação de ordem.
Por exemplo: seja $A = \{0, 1, 2\}$ e considere o conjunto das partes de $A$, isto é: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
Então temos a seguinte relação em $P(A)$:

$$\mathcal{R} = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\}$$

- Reflexividade: Como $X \subseteq X$ para qualquer conjunto, temos que $(X, X) \in \mathcal{R}$.

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é subconjunto" é uma relação de ordem.
Por exemplo: seja $A = \{0, 1, 2\}$ e considere o conjunto das partes de $A$, isto é: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
Então temos a seguinte relação em $P(A)$:

$$\mathcal{R} = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\}$$

- Reflexividade: Como $X \subseteq X$ para qualquer conjunto, temos que $(X, X) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, então sabemos que $X = Y$.

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é subconjunto" é uma relação de ordem.
Por exemplo: seja $A = \{0, 1, 2\}$ e considere o conjunto das partes de $A$, isto é: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
Então temos a seguinte relação em $P(A)$:

$$\mathcal{R} = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\}$$

- Reflexividade: Como $X \subseteq X$ para qualquer conjunto, temos que $(X, X) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, então sabemos que $X = Y$.
- Transitividade: Sabemos que se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, então $X \subseteq Z$.

# Diagrama de Hasse

É uma representação visual de uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em um conjunto finito $F$.

# Diagrama de Hasse

É uma representação visual de uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em um conjunto finito $F$.

- Cada elemento do dom($\mathcal{R}$) é um nó
- Arestas entre nós $a$ e $b$ indicam que $(a, b) \in \mathcal{R}$.
- Elementos "menores" na parte inferior: se $(a, b) \in \mathcal{R}$, desenhamos $a$ um nível abaixo de $b$.
- Ignoramos a reflexibilidade: não desenhamos arestas para laços, i.e., arestas para $(a, a)$.
- Ignoramos a transitividade: desenhamos arestas entre nós $a$ e $b$ se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e não existe $c$ tal que $(c, b) \in \mathcal{R}$.

# Diagrama de Hasse

É uma representação visual de uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em um conjunto finito $F$.

- Cada elemento do dom($\mathcal{R}$) é um nó
- Arestas entre nós $a$ e $b$ indicam que $(a, b) \in \mathcal{R}$.
- Elementos "menores" na parte inferior: se $(a, b) \in \mathcal{R}$, desenhamos $a$ um nível abaixo de $b$.
- Ignoramos a reflexibilidade: não desenhamos arestas para laços, i.e., arestas para $(a, a)$.
- Ignoramos a transitividade: desenhamos arestas entre nós $a$ e $b$ se $(a, b) \in \mathcal{R}$ e não existe $c$ tal que $(c, b) \in \mathcal{R}$.

Considerando o exemplo anterior, com $A = \{0, 1, 2\}$, $F = P(A)$ e $\mathcal{R}$ a relação "é subconjunto", temos o seguinte diagrama:
(Desenho na lousa).

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

- Reflexividade: Como $x \mid x$ para qualquer inteiro (lembre-se de que 0 é divisível por 0 segundo nossa definição), temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

- Reflexividade: Como $x \mid x$ para qualquer inteiro (lembre-se de que 0 é divisível por 0 segundo nossa definição), temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Menos óbvia... Como mostrar que $(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$?

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

- Reflexividade: Como $x \mid x$ para qualquer inteiro (lembre-se de que 0 é divisível por 0 segundo nossa definição), temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Menos óbvia... Como mostrar que $(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$?
- Transitividade: Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então, $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tais que $b = ra$ e $c = sb$, logo

  $$c = sb = sra$$

  então $a \mid c$.

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

- Reflexividade: Como $x \mid x$ para qualquer inteiro (lembre-se de que 0 é divisível por 0 segundo nossa definição), temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Menos óbvia... Como mostrar que $(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$?
- Transitividade: Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então, $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tais que $b = ra$ e $c = sb$, logo

  $$c = sb = sra$$

  então $a \mid c$.

# Exemplos de relação de ordem

A relação "é divisível" é uma relação de ordem.
Neste caso, temos $A \subseteq \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A : x \mid y\}$$

- Reflexividade: Como $x \mid x$ para qualquer inteiro (lembre-se de que 0 é divisível por 0 segundo nossa definição), temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Menos óbvia... Como mostrar que $(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$?
- Transitividade: Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então, $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tais que $b = ra$ e $c = sb$, logo

  $$c = sb = sra$$

  então $a \mid c$.

Vamos desenhar o diagrama de Hasse considerando $A = [0, 10] \cap \mathbb{N}$.

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
- Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então, sabemos que $x \leq z$.

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
- Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então, sabemos que $x \leq z$.

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
- Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então, sabemos que $x \leq z$.

Vamos desenhar o diagrama de Hasse com $A = \{-1, 0, \pi, 3, 8\}$...

# Terceiro exemplo de relação de ordem

O exemplo mais clássico de relação de ordem é o da relação "*menor que ou igual a*".
Neste caso, $A \subset \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$$

- Reflexividade: Como $x \leq x$ para qualquer número real, temos que $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- Antissimetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
- Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então, sabemos que $x \leq z$.

Vamos desenhar o diagrama de Hasse com $A = \{-1, 0, \pi, 3, 8\}$...

Note que o diagrama tem uma única ramificação. Isso acontece porque todos os elementos são comparáveis entre si... Ou seja, a relação é <u>total</u>.

# Relação de ordem total

## Definição

Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total (ou linear) se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem (i.e., é reflexiva, antissimétrica e transitiva) e também é total, ou seja,

$$\forall (a, b) \in A \times A \ \ ((a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R})$$

## Definição

Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total (ou linear) se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem (i.e., é reflexiva, antissimétrica e transitiva) e também é total, ou seja,

$$\forall (a, b) \in A \times A \ \ ((a, b) \in \mathcal{R} \vee (b, a) \in \mathcal{R})$$

Note que o diagrama de Hasse não tem ramificações nesse caso.

# Perguntas, observações, comentários?