MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

18 de setembro de 2023

Mínimo, minimal, máximo...

Como definir um "menor" elemento?

Uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em A nos permite comparar elementos de A.

Se $(a, b) \in \mathcal{R}$, podemos, informalmente, dizer que a é menor que ou igual a b.

Assim, podemos definir o "menor" elemento com respeito a $\mathcal{R}$? Se sim, como?

Como definir um "menor" elemento?

Duas opções:

1. (Mínimo) $a \in A$ tal que a é "menor" que todos os outros elementos.

$$a = \mathtt{min}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\forall b \in A\ (a, b) \in \mathcal{R})$$

Como definir um "menor" elemento?

Duas opções:

1. (Mínimo) $a \in A$ tal que a é "menor" que todos os outros elementos.

$$a = \texttt{min}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\forall b \in A\ (a, b) \in \mathcal{R})$$

2. (Minimal) $a \in A$ tal que nenhum outro elemento é "menor" que a.

$$a = \texttt{minimal}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\nexists b \in A \setminus \{a\}\ (b, a) \in \mathcal{R})$$

Como definir um "menor" elemento?

Duas opções:

1. (Mínimo) $a \in A$ tal que a é "menor" que todos os outros elementos.

$$a = \mathtt{min}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\forall b \in A\ (a, b) \in \mathcal{R})$$

2. (Minimal) $a \in A$ tal que nenhum outro elemento é "menor" que a.

$$a = \mathtt{minimal}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\nexists b \in A \setminus \{a\}\ (b, a) \in \mathcal{R})$$

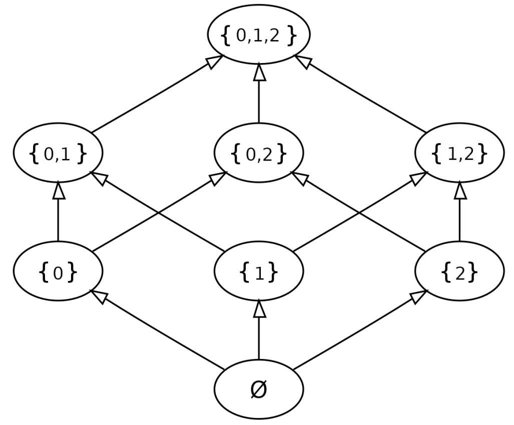
Note que

- O mínimo é comparável a todos os elementos.
- O mínimo é único.
- Pode haver mais que um elemento minimal.
- O mínimo é minimal, mas a recíproca não é verdadeira sempre.
- Um minimal pode ser diferente do mínimo se ele não for comparável a algum elemento.
- Numa ordem total (ou linear), o minimal é o mínimo.

Exemplos de mínimo e minimais

A relação "é subconjunto" vista anteriormente:

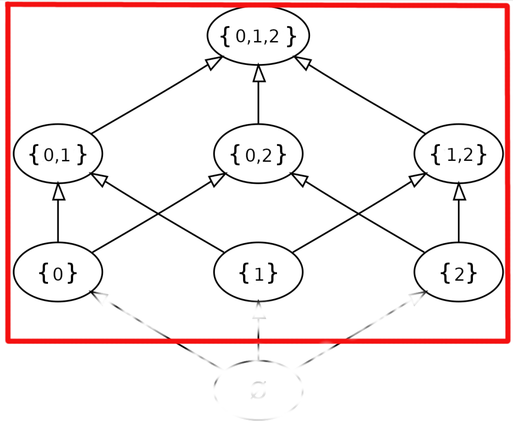
Identifique o mínimo e o(s) minimal(is):



Exemplos de mínimo e minimais

A relação "é subconjunto" vista anteriormente:

Sem o conjunto vazio, identifique o mínimo e o(s) minimal(is), se existirem:



Máximo e maximal

São definidos de forma análoga ao mínimo e ao minimal:
Considere uma relação de ordem $\mathcal{R}$ em A:

1. (Máximo)

$$a = \mathtt{max}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \land (\forall b \in A\ (b, a) \in \mathcal{R})$$

2. (Máximal)

$$a = \mathtt{maximal}_{\mathcal{R}}(A) \Leftrightarrow a \in A \land (\nexists b \in A \setminus \{a\}\ (a, b) \in \mathcal{R})$$

Princípio da boa ordenação

Um axioma natural sobre os números naturais...

Considerando a relação de ordem total usual, "menor que ou igual a", o conjunto dos números naturais tem um mínimo, a saber, o zero.

Imagine agora um subconjunto não vazio, $A \subseteq \mathbb{N}$. É possível que A não tenha um mínimo?

- Se $0 \in A$, então $0 = \min(A)$.
- Senão, se $1 \in A$, então $1 = \min(A)$.
- Senão, se $2 \in A$, então $2 = \min(A)$.
- ...

Um axioma natural sobre os números naturais...

Considerando a relação de ordem total usual, "menor que ou igual a", o conjunto dos números naturais tem um mínimo, a saber, o zero.

Imagine agora um subconjunto não vazio, $A \subseteq \mathbb{N}$. É possível que A não tenha um mínimo?

- Se $0 \in A$, então $0 = \min(A)$.
- Senão, se $1 \in A$, então $1 = \min(A)$.
- Senão, se $2 \in A$, então $2 = \min(A)$.
- ...

Parece lógico A tenha um mínimo. Então podemos postular o seguinte

Princípio da boa ordenação (PBO)

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$, então $\exists \min(A)$.

Princípio da boa ordenação (PBO)

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$, então $\exists \min(A)$.

Mas para provar o PBO, precisamos usar indução matemática, ou seja

$$\text{PIM} \Rightarrow \text{PBO}$$

Princípio da boa ordenação (PBO)

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$, então $\exists \min(A)$.

Mas para provar o PBO, precisamos usar indução matemática, ou seja

$$\text{PIM} \Rightarrow \text{PBO}$$

Além disso, mostraremos que o PBO implica a indução completa, i.e.,

$$\text{PBO} \Rightarrow \text{PIC}$$

PBO implica em PIC

Ideias principais:

PIC diz que podemos concluir $P(n)$ para todo natural n se provarmos

- Caso base: $P(0)$
- Passo indutivo: $H \Rightarrow P(k+1)$ onde H é a seguinte hipótese de indução:

$$\exists k \geq 0 : (\forall i \in \mathbb{N}\ i \leq k \Rightarrow P(i))$$

Ou seja, podemos escrever o PIC como

$$\underbrace{(P(0) \wedge (H \Rightarrow P(k+1)))}_{\text{Nossa hipótese } H'} \Rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}_{\text{Nossa conclusão } C}$$

PBO implica em PIC

Ideias principais:

PIC diz que podemos concluir $P(n)$ para todo natural n se provarmos

- Caso base: $P(0)$
- Passo indutivo: $H \Rightarrow P(k+1)$ onde H é a seguinte hipótese de indução:

$$\exists k \geq 0 : (\forall i \in \mathbb{N}\ i \leq k \Rightarrow P(i))$$

Ou seja, podemos escrever o PIC como

$$\underbrace{(P(0) \wedge (H \Rightarrow P(k+1)))}_{\text{Nossa hipótese } H'} \Rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}_{\text{Nossa conclusão } C}$$

Para provar o PIC, usamos a técnica da redução ao absurdo. Então, supomos que $H' \Rightarrow C$ é falso, ou seja, que H' é verdadeiro e que C é falso.

Se C é falso, existe algum ℓ tal que $P(\ell)$ é falso.

Então, defina o conjunto $F = \{j \in \mathbb{N} : \neg P(j)\}$

Se C é falso, existe algum ℓ tal que $P(\ell)$ é falso.

Então, defina o conjunto $F = \{j \in \mathbb{N} : \neg P(j)\}$

Como $\ell \in F$, temos $F \neq \emptyset$. Portanto, pelo PBO, existe $m = \min(F)$.

Se C é falso, existe algum ℓ tal que $P(\ell)$ é falso.

Então, defina o conjunto $F = \{j \in \mathbb{N} : \neg P(j)\}$

Como $\ell \in F$, temos $F \neq \emptyset$. Portanto, pelo PBO, existe $m = \min(F)$.

Como $P(0)$ é verdadeiro (pois assumimos H'), sabemos que $m \neq 0$, logo $m \geq 1$.

Então, seja $k = m - 1 \geq 0$.

Se C é falso, existe algum ℓ tal que $P(\ell)$ é falso.

Então, defina o conjunto $F = \{j \in \mathbb{N} : \neg P(j)\}$

Como $\ell \in F$, temos $F \neq \emptyset$. Portanto, pelo PBO, existe $m = \min(F)$.

Como $P(0)$ é verdadeiro (pois assumimos H'), sabemos que $m \neq 0$, logo $m \geq 1$.

Então, seja $k = m - 1 \geq 0$.

Vemos que $\forall i \in \mathbb{N}\ i \leq k \Rightarrow P(i)$ (caso contrário, temos o absurdo $i \in F \wedge i < \min(F)$).

Se C é falso, existe algum ℓ tal que $P(\ell)$ é falso.

Então, defina o conjunto $F = \{j \in \mathbb{N} : \neg P(j)\}$

Como $\ell \in F$, temos $F \neq \emptyset$. Portanto, pelo PBO, existe $m = \min(F)$.

Como $P(0)$ é verdadeiro (pois assumimos H'), sabemos que $m \neq 0$, logo $m \geq 1$.

Então, seja $k = m - 1 \geq 0$.

Vemos que $\forall i \in \mathbb{N}\ i \leq k \Rightarrow P(i)$ (caso contrário, temos o absurdo $i \in F \wedge i < \min(F)$).

Portanto, pela hipótese H', concluímos que $P(k+1)$ vale. Mas $k + 1 = m$, então $P(m)$ vale.

Absurdo!!! Pois $P(m)$ é falso.

PBO equivalente ao PIC

Vimos que é possível usar PBO para provar PIC, então, concluímos que

$$\text{PBO} \Rightarrow \text{PIC}$$

Além disso, é fácil provar que

$$\text{PIC} \Rightarrow \text{PIM} \quad \text{e} \quad \text{PIM} \Rightarrow \text{PBO}$$

Portanto, os princípios da boa ordenação e das induções matemática e completa são equivalentes!

$$\text{PBO} \Leftrightarrow \text{PIM} \Leftrightarrow \text{PIC}$$

Logo, podemos tomar qualquer um dos três como axioma!