MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

22 de novembro de 2023

Instituto de computação

UNICAMP

1. Estimativas assintóticas para relações de recorrência

2. Perguntas, observações, comentários?

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Mas, e se só estivermos interessados em achar uma estimativa assintótica?

Então, achar uma fórmula fechada pode ser desnecessariamente trabalhoso...

Já vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1 \in O(2^n)$.

Então, é natural achar que $g(n) = 2g(n-1) - 1 \in O(2^n)$.

Como podemos provar isso?

Considere $g(0) = 1$.

Exemplo com passo multiplicativo

Em vez de definirmos a relação de recorrência em função de um passo $n - k$, vamos considerar n/k.

Por exemplo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n/2) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar g tal que $f(n) \in O(g(n))$.

Exemplo com passo multiplicativo

Agora considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n/2) + 3n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese supondo algo como $f(k) \leq cg(n) + d$ e depois ajustamos d para obtermos o que queremos.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese supondo algo como $f(k) \leq cg(n) + d$ e depois ajustamos d para obtermos o que queremos.

Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} 10 & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n^2)$.

Um exemplo onde estimativa assintótica é claramente mais fácil que fórmula fechada

Considere a função

$$f(n) = f(n/3) + f(2n/3) + n$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Perguntas, observações, comentários?