MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

02 de agosto de 2023

1 Conectivos e proposições

2 Tabela verdade

3 Equivalência lógica

4 Formas normais e conectivos universais

5 Perguntas, observações, comentários?

Conectivos e proposições

Proposição

Proposições: afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas

- Pelé marcou mais de mil gols em partidas oficiais
- A Unicamp tem 34,655 alunos matriculados
- Aniara é o título de um filme e Aniara é o título de um poema

Proposição

Proposições: afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas

- Pelé marcou mais de mil gols em partidas oficiais
- A Unicamp tem 34,655 alunos matriculados
- Aniara é o título de um filme e Aniara é o título de um poema

Na última proposição, é possível identificar subproposições, chamadas de *proposições atômicas*.

Conectivos

São operadores usados para conectar proposições.
Alguns exemplos:

- conjunção: $a \wedge b$ (a e b)
- disjunção: $a \vee b$ (a ou b)
- negação: $\neg a$ (não a)

Conectivos

São operadores usados para conectar proposições.
Alguns exemplos:

- conjunção: $a \wedge b$ (a e b)
- disjunção: $a \vee b$ (a ou b)
- negação: $\neg a$ (não a)
- condicional: $a \rightarrow b$ (a implica b, ou "se a, então b")
- bicondicional: $a \leftrightarrow b$ (a se, e somente se b)

Tabela verdade

É uma forma de representar e analisar uma proposição...
As primeiras colunas correspondem às proposições atômicas e as demais às proposições compostas.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

É uma forma de representar e analisar uma proposição...
As primeiras colunas correspondem às proposições atômicas e as demais às proposições compostas.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemplos na lousa: $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $(p \wedge q) \vee \neg r$

Proposições triviais

Tautologia

- sempre verdadeira
- última coluna da tabela verdade só tem V
- e.g., $p \lor \neg p$

Contradição

- sempre falsa
- última coluna da tabela verdade só tem F
- e.g., $p \land \neg p$

Verificação de sono...

Acessem `slido.com` e usem o código *2514023* para acessar o quiz...

Equivalência lógica

Proposições equivalentes

Dizemos que $P(x_1, ..., x_n)$ e $Q(x_1, ..., x_n)$ são equivalentes se $P(x_1, ..., x_n) = Q(x_1, ..., x_n)$ para qualquer atribuição de valores.

Escrevemos $P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$.

Proposições equivalentes

Dizemos que $P(x_1, ..., x_n)$ e $Q(x_1, ..., x_n)$ são equivalentes se $P(x_1, ..., x_n) = Q(x_1, ..., x_n)$ para qualquer atribuição de valores.

Escrevemos $P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$.

- Exemplo: Contrapositiva:

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

Proposições equivalentes

Dizemos que $P(x_1, ..., x_n)$ e $Q(x_1, ..., x_n)$ são equivalentes se $P(x_1, ..., x_n) = Q(x_1, ..., x_n)$ para qualquer atribuição de valores.

Escrevemos $P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$.

- Exemplo: Contrapositiva:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

- Exemplo de fórmulas não equivalentes:

Proposições equivalentes

Dizemos que $P(x_1, ..., x_n)$ e $Q(x_1, ..., x_n)$ são equivalentes se $P(x_1, ..., x_n) = Q(x_1, ..., x_n)$ para qualquer atribuição de valores.

Escrevemos $P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$.

- Exemplo: Contrapositiva:

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

- Exemplo de fórmulas não equivalentes:
  - Recíproca

$$(p \to q) \not\Leftrightarrow (q \to p)$$

Proposições equivalentes

Dizemos que $P(x_1, ..., x_n)$ e $Q(x_1, ..., x_n)$ são equivalentes se $P(x_1, ..., x_n) = Q(x_1, ..., x_n)$ para qualquer atribuição de valores.

Escrevemos $P(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, ..., x_n)$.

- Exemplo: Contrapositiva:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

- Exemplo de fórmulas não equivalentes:
  - Recíproca

$$(p \rightarrow q) \not\Leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

  - Inversa

$$(p \rightarrow q) \not\Leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. Leis de dominação: $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ e $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. Leis de dominação: $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ e $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
5. Comutatividade: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ e $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. Leis de dominação: $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ e $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
5. Comutatividade: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ e $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
6. Associatividade: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$, etc

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. Leis de dominação: $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ e $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
5. Comutatividade: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ e $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
6. Associatividade: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$, etc
7. Distributividade:

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \quad \texttt{e} \quad (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

Alguns exemplos de proposições equivalentes:

1. Elemento identidade: $(p \wedge V) \Leftrightarrow (p \vee F) \Leftrightarrow p$
2. Dupla negação: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. Idempotência: $(p \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. Leis de dominação: $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ e $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
5. Comutatividade: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ e $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
6. Associatividade: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$, etc
7. Distributividade:

   $$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \;\; \text{e} \;\; (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

8. De Morgan:

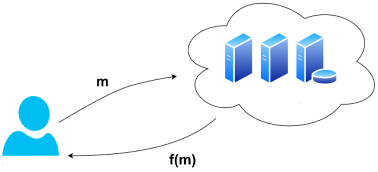
   $$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \;\; \text{e} \;\; \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Formas normais e conectivos universais

Como obter um circuito que implementa uma função?

Uma empresa tem um modelo valioso (uma função) e você quer "conhecer" o modelo...

Você envia uma entrada m e recebe $f(m)$.



Como obter uma implementação de f?

Problema: dada a tabela verdade, como obter uma fórmula?

Desafio: escreva f em função de p e q

p	q	f
F	F	V
F	V	F
V	F	V
V	V	F

Forma normal disjuntiva (FND)

Considere f como uma função das variáveis $x_1, ..., x_n$.

Digamos que há m linhas terminando com V.

Para $1 \leq i \leq m$, considere a linha $L_i = (c_1, ..., c_n, V)$ onde $c_i \in \{V, F\}$.

Construa a proposição $p_i = (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_n)$ onde $y_j = x_j$ se $c_i = V$ e $y_j = \neg x_j$ se $c_i = F$.

Finalmente,

$$f = p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_m$$

Mas se a tabela tiver muito mais linhas terminando com V do que terminando com F?

p	q	r	f
F	F	F	V
F	F	V	V
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V

Mas se a tabela tiver muito mais linhas terminando com V do que terminando com F?

p	q	r	f	$\neg f$
F	F	F	V	F
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	V	V	F
V	V	F	V	F
V	V	V	V	F

Mas se a tabela tiver muito mais linhas terminando com V do que terminando com F?

p	q	r	f	$\neg f$
F	F	F	V	F
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	V	V	F
V	V	F	V	F
V	V	V	V	F

Construímos FND para $\neg f$ e negamos para obter $\neg(\neg f) = f$.
O resultado se chama *forma normal conjuntiva*.

Forma normal conjuntiva

- Construída negando variáveis das linhas terminadas em F.

- Conecta proposições usando conjunção ($\wedge$) em vez de disjunção ($\vee$).

- Ou seja,

$$f = p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_m$$

em vez de

$$f = p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_m$$

Forma normal conjuntiva

- Construída negando variáveis das linhas terminadas em F.

- Conecta proposições usando conjunção ($\wedge$) em vez de disjunção ($\vee$).

- Ou seja,

$$f = p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_m$$

em vez de

$$f = p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_m$$

- Além disso, cada p_i usa $\vee$ em vez de $\wedge$.

- Por exemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$$

Conectivos universais

Forma normal disjuntiva implica que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ é um conjunto de conectivos universais.

Conectivos universais

Forma normal disjuntiva implica que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ é um conjunto de conectivos universais.

Além disso, usando dupla negação e de Morgan, temos que $\wedge$ e $\neg$ sozinhos já formam um conjunto universal de conectivos.

Como mostrar que um conjunto de conectivos é universal?

Considere um conjunto $\mathcal{C}$ de conectivos.

Podemos tentar "refazer" todo esse trabalho e mostrar que qualquer tabela verdade pode ser implementada pelos conectivos dados...

Como mostrar que um conjunto de conectivos é universal?

Considere um conjunto $\mathcal{C}$ de conectivos.

Podemos tentar "refazer" todo esse trabalho e mostrar que qualquer tabela verdade pode ser implementada pelos conectivos dados...

Ou, como dito na primeira aula: podemos usar resultados anteriores:

- Agora já sabemos que $\wedge$ e $\neg$ são universais.
- Basta escrever $\wedge$ usando conectivos em $\mathcal{C}$.
- E escrever $\neg$ usando conectivos em $\mathcal{C}$.

Perguntas, observações, comentários?