05 12 23

Nome: Marcos Revejes Pedroso RA: 202693

6ª Lista de Exercícios - MC358 - 2S.2023

① Encontre constantes c e n_0 que provam que $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \in \Omega(2^{n^2})$

* Para mostrar que $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \in \Omega(2^{n^2})$, precisamos encontrar constantes positivas c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, a seguinte desigualdade seja satisfeita: $|2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10}| \geq c \cdot 2^{n^2}$

* Vamos analisar a expressão $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10}$: $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} = 2^{n^2} \cdot 2^{n^3 - n^2} - 5^{n^2} + 2^{10}$.

* Agora, podemos ignorar os termos menores e focar no termo dominante $2^{n^2} \cdot 2^{n^3 - n^2}$. Podemos reescrever isso como $2^{n^2 + n^3 - n^2} = 2^{n^3}$.

* Portanto, a expressão dada é assintoticamente maior ou igual a 2^{n^3} para n suficientemente grande. Agora, queremos comparar isso com $c \cdot 2^{n^2}$

* Podemos escolher $c = 1$ e $n_0 = 1$, pois 2^{n^3} cresce mais rapidamente que 2^{n^2}.

* Assim, para $n \geq 1$, temos: $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \geq 2^{n^3} \geq 2^{n^2}$.

* Portanto, $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \in \Omega(2^{n^2})$ com $c = 1$ e $n_0 = 1$.

② Encontre uma fórmula fechada para $f(n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n = 1 \\ 10f(n-1) - 25f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$

* Para encontrar uma fórmula fechada para a função $f(n)$ definida recursivamente, precisamos primeiro resolver a equação de recorrência dada. Vamos expressar a solução de recorrência em termos de uma equação característica e usar esse resultado para encontrar a solução.

* Dada a solução $f(n)$, vamos definir $f(2) = a$ e $f(3) = b$ a fim de determinar a equação característica.

* Substituindo esses valores na relação de recorrência, obtemos:

$f(2) = 10f(1) - 25f(0)$
$a = 10 \cdot 0 - 25 \cdot 2$
$a = -50$

$f(3) = 10f(2) - 25f(1)$
$b = 10(-50) - 25 \cdot 0$
$b = -500$

* Agora, podemos escrever a equação característica associada: $r^2 = 10r - 25$

* Resolvendo esta equação, obtemos duas soluções reais: $f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

05 | 12 | 23

$(r-5)(r-5) = r^2 - 10r + 25$

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

*Agora, vamos resolver a equação característica:

$r^2 - 10r + 25 = 0 \Rightarrow (r-5)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 5$

*A solução geral da equação é, então: $f(n) = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot 5^n$

*Agora, vamos usar os valores iniciais para determinar c_1 e c_2:

i) $n = 0$: $f(0) = c_1 + c_2 = 2$ | ii) $n = 1$: $f(1) = 5c_1 + 5c_2 = 0$.

*A partir da Equação ii), podemos escrever $c_1 = -c_2$. Substituindo isso na Equação i), obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$.

*Portanto, a fórmula fechada para $f(n)$ é: $f(n) = 5^n - 5^n = 0$

*Logo, a solução é $f(n) = 0$ para todos os valores de n.

3) A função $\lceil \lg n \rceil!$ é limitada polinomialmente? A função $\lceil \lg \lg n \rceil!$ é limitada polinomialmente? (Dizemos que uma função $f(n)$ é limitada polinomialmente se $f(n) = O(n^k)$ para alguma constante k.)

*A função $\lceil \log n \rceil!$ é limitada polinomialmente porque o fatorial de $\lceil \log n \rceil$ é uma função que cresce de forma razoável em comparação com potências polinomiais. A função $\lceil \log n \rceil$ cresce lentamente em comparação com n e o fatorial aumenta ainda mais lentamente.

*Podemos mostrar isso formalmente: $\lceil \log n \rceil! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\ldots) \cdot \lceil \log n \rceil$

*Para qualquer n, $\lceil \log n \rceil$ é uma quantidade relativamente pequena. Seja $k = \lceil \log n \rceil$, então o fatorial $\lceil \log n \rceil!$ é limitado superiormente por k^k. Isso ocorre pois em cada termo do fatorial, estamos multiplicando por $\lceil \log n \rceil$, que é menor ou igual a k.

*Então, temos: $\lceil \log n \rceil! \leq k^k$. Assim, a função $\lceil \log n \rceil!$ é limitada polinomialmente. Similarmente, para a função $\lceil \log \log n \rceil!$, podemos aplicar o mesmo raciocínio. A quantidade $\lceil \log \log n \rceil$ é ainda menor do que $\lceil \log n \rceil$, e portanto $\lceil \log \log n \rceil!$ é limitada superiormente por $(\lceil \log n \rceil)^{\lceil \log n \rceil}$, o que é uma expressão polinomial.

*Portanto, ambas as funções $\lceil \log n \rceil!$ e $\lceil \log \log n \rceil!$ são limitadas polinomialmente.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB 05 12 23

4) A solução para a recorrência $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^2$ acaba sendo $T(n) = O(n^3)$. Mostre que uma prova de substituição com a suposição $T(n) \leq c.n^3$ falha. Em seguida, mostre como somar um termo de ordem inferior d para fazer uma prova de substituição funcionar.

* Vamos começar mostrando por que a prova de substituição direta com $T(n) \leq c.n^3$ falha para a recorrência $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^2$.

1) Prova de Substituição Direta: Assumimos que $T(n) \leq c.n^3$ para algum $c > 0$. Queremos mostrar que $T(n) = O(n^3)$.

Logo: $T(n) \leq 8 \cdot (\frac{c}{2^3}) \cdot n^3 + n^2 \Rightarrow T(n) \leq \frac{c}{4} \cdot n^3 + n^2$

* Agora, precisamos mostrar que existe uma constante c' tal que $T(n) \leq c'.n^3$: $T(n) \leq \frac{c}{4} \cdot n^3 + n^2$

* Aqui, a prova de substituição direta falha porque o termo n^2 não é coberto pela suposição de que $T(n) \leq c.n^3$. Portanto, não podemos concluir que $T(n) = O(n^3)$ apenas com a hipótese $T(n) \leq c.n^3$.

* Agora, para corrigir isso vamos adicionar um termo de ordem inferior d à suposição e mostrar como isso resolve o problema.

2) Prova de Substituição com Termo Adicional: Assumimos que $T(n) \leq c.n^3 + d.n^2$ para algum $c > 0$ e $d > 0$:

$T(n) \leq 8 \cdot \frac{c}{2^3} \cdot n^3 + n^2 \Rightarrow T(n) \leq \frac{c}{4} \cdot n^3 + n^2$

* Agora, queremos mostrar que existe uma constante c' tal que $T(n) \leq c' \cdot n^3$: $T(n) \leq \frac{c}{4} n^3 + n^2 \leq \frac{c}{4} \cdot n^3 + \frac{c}{4} \cdot n^3 = \frac{c}{2} \cdot n^3$

* Portanto, podemos escolher $c' = \frac{c}{2}$ e assim mostramos que $T(n) = O(n^3)$ com a adição do termo dn^2 à suposição.

5) Encontre o resto da divisão de $2^{7^{(2002)}}$ por 352. (Dica: Use o Teorema Chinês do Resto).

1) Devemos primeiro encontrar $7^{(2002)}$ mod 10 pelo Teorema de Euler.

• O Teorema de Euler, uma generalização do Pequeno Teorema de Fermat, estabelece que para a e n inteiros positivos coprimos (ou seja, a e n não têm primos comuns), então $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$, onde $\varphi(n)$ é a função totiente de Euler, que conta o número de inteiros positivos menores que n e coprimos com n.

05 | 12 | 23

$2002 \mid 2$
$1001 \mid 7$
$143 \mid 11$
$13 \mid 13$
1

77, 1001

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ } 512

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

- A cada quatro potências de 7, o resultado se repete devido ao ciclo de Euler-Fermat. Portanto, $7^4 \equiv 1 \bmod 10$, e
$7^{2002} \equiv (7^4)^{505} \cdot 7^2 \equiv 1^{505} \cdot 49 \equiv 9 \bmod 10$

2) Usemos a variável para representar o resto de 7^{2002} dividido por 10. Logo: $2^{7^{(2002)}} \equiv 2^k \bmod 11$, neste caso, $k=9$.

3) Agora, devemos calcular 2^9 mod mod 11.
$2^9 = 512 \equiv 7 \bmod 11$. Portanto, $2^{7^{(2002)}} \equiv 7 \bmod 11$

4) Por fim, vamos usar o Teorema Chinês do Resto para combinar os resultados.
Queremos encontrar x tal que $x \equiv 7 \bmod 11$ e $x \equiv 2 \bmod 32$

i) Devemos buscar os módulos correspondentes para as equações. No nosso caso, esses valores são 11 e 32.

- Módulo 11: Encontramos um número y_1 tal que $y_1 \equiv 1 \bmod 11$ e $y_1 \equiv 0 \bmod 32$. Uma solução é $y_1 = 3$, porque $3 \equiv 1 \bmod 11$ e $3 \equiv 3 \bmod 32$

- Módulo 32: Encontramos um número y_2 tal que $y_2 \equiv 0 \bmod 11$ e $y_2 \equiv 1 \bmod 32$. Uma solução é $y_2 = 17$, pois $17 \equiv 6 \bmod 11$ e $17 \equiv 1 \bmod 32$

5) Calcular as partes correspondentes é o próximo passo:
$a_1 = 7 \cdot y_1 \cdot (y_1^{-1} \bmod 11)$
$a_2 = 16 \cdot y_2 \cdot (y_2^{-1} \bmod 32)$
Note que y_1^{-1} é o inverso multiplicativo de y_1 em relação a 11 e y_2^{-1} é o inverso multiplicativo do y_2 em relação a 32

- Módulo 11: $y_1^{-1} \bmod 11 = 4$ (pois $3 \cdot 4 \equiv 1 \bmod 11$)
$a_1 = 7 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 1 \bmod 11$

- Módulo 32: $y_2^{-1} \bmod 32 = 1$ (pois $17 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 32$)
$a_2 = 16 \cdot 17 \cdot 1 \equiv 16 \bmod 32$

6) Por fim, devemos somar as partes correspondentes:
$x \equiv a_1 + a_2 \bmod 352 \equiv 1 + 16 \bmod 352 \equiv 17 \bmod 352$

* Logo, a solução para o sistema de congruências é 17 mod 352 que é equivalente a $x \equiv 17 + 352k$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Porém, queremos um número no intervalo de 0 a 351, então a solução específica é $x = 17$.

* Portanto, o resto da divisão de $2^{7^{(2002)}}$ por 352 (ou por 11 e 32) é $x = 17$.

(6) Encontre x inteiro tal que: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$

Podemos usar o Teorema Chinês do Resto para encontrar um x que satisfaça as congruências dadas.

i) Escrever as congruências:

$x \equiv 1 \bmod 11$ | $x \equiv 2 \bmod 7$ | $x \equiv 4 \bmod 5$

ii) Encontrar os módulos correspondentes para as congruências no nosso caso, estes valores são 11, 7 e 5.

• Módulo 11: Encontramos um número y_1 tal que $y_1 \equiv 1 \bmod 11$ e $y_1 \equiv 0 \bmod 35$ (produto de 7 e 5). Uma solução é $y_1 = 6$ porque $6 \equiv 1 \bmod 11$ e $6 \equiv 6 \bmod 35$.

• Módulo 7: Encontramos um número y_2 tal que $y_2 \equiv 0 \bmod 11$ e $y_2 \equiv 1 \bmod 5$. Uma solução é $y_2 = 3$ porque $3 \equiv 1 \bmod 5$.

• Módulo 5: Encontramos um número y_3 tal que $y_3 \equiv 0 \bmod 77$ (produto de 11 e 7) e $y_3 \equiv 1 \bmod 5$. Uma solução é $y_3 = 18$, pois $18 \equiv 4 \bmod 77$ e $18 \equiv 1 \bmod 5$.

iii) Agora, devemos calcular as partes correspondentes:

$a_1 = 1 \cdot y_1 \cdot (y_1^{-1} \bmod 11)$

$a_2 = 2 \cdot y_2 \cdot (y_2^{-1} \bmod 7)$

$a_3 = 4 \cdot y_3 \cdot (y_3^{-1} \bmod 5)$

• Módulo 11: $y_1^{-1} \bmod 11 = 6$ (pois $6 \times 6 \equiv 1 \bmod 11$)

$a_1 = 1 \cdot 6 \cdot 6 \equiv 3 \bmod 11$

• Módulo 7: $y_2^{-1} \bmod 7 = 5$ (pois $3 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 7$)

$a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \equiv 6 \bmod 7$

• Módulo 5: $y_3^{-1} \bmod 5 = 1$ (pois $18 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 5$)

$a_3 = 4 \cdot 18 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 5$

iv) Agora seguimos somando as partes correspondentes:

$x \equiv a_1 + a_2 + a_3 \bmod 385$

$x \equiv 3 + 6 + 2 \bmod 385$

$x \equiv 11 \bmod 385$

Logo, a solução para o sistema de congruências é $x \equiv 11 \bmod 385$, que é equivalente a $x = 11 + 385k$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, a solução específica no intervalo de 0 a 384 é $x = 11$.

(7) Lembre-se de que uma matriz quadrada tem inversa se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. Além disso, o determinante tem as seguintes propriedades:

(1) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ (2) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Seja $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} ; \det(A) \neq 0\}$, ou seja, o conjunto de matrizes quadradas, com n linhas e n colunas, com entradas reais, e que possuem inversa. Seja $\mathbb{H} = \{A \in \mathbb{Z}^{n \times n} ; \det(A) = 1\}$, isto é, o conjunto de matrizes inteiras, $n \times n$, com determinante igual a um. Note que $\mathbb{H} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Considere a relação $R = \{(A, B) \in GL_n(\mathbb{R})^2 : A.B^{-1} \in \mathbb{H}\}$. Prove que R é uma relação de equivalência, descreva as classes de equivalência e encontre o quociente $[GL_n(\mathbb{R})^2]/R$.

* Vamos provar que R é uma relação de equivalência e descrever as classes de equivalência. Além disso, vamos encontrar o quociente $[GL_n(\mathbb{R})^2]/R$.

* Prova de que R é uma relação de equivalência:

1) Reflexividade: Para mostrar que R é reflexiva, precisamos verificar que para cada matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A.A^{-1} = I$ (onde I é a matriz identidade) pertence a $\mathbb{H}$. Como $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$, e como $\det(A.A^{-1}) = \det(I) = 1$, isso implica que $A.A^{-1} \in \mathbb{H}$. Logo, R é reflexiva.

2) Simetria: Se $(A, B) \in R$, então $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$. Isso implica que $\det(A . B^{-1}) = 1$. No entanto, $\det(B^{-1}. A^{-1}) = \det((A \cdot B^{-1})^{-1})$, e como a inversa de uma matriz com determinante não nulo também tem determinante não nulo, temos que $\det(B^{-1}. A^{-1}) = \det(B^{-1}. A^{-1}) \neq 0$. Portanto, $B . A^{-1} \in \mathbb{H}$ e assim $(B, A) \in R$. Isso mostra que R é simétrica.

3) Se $(A, B) \in R$ e $(B, C) \in R$, então $A.B^{-1} \in \mathbb{H}$ e $B.C^{-1} \in \mathbb{H}$. Multiplicando essas duas equações, obtemos $A \cdot B^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} = A.C^{-1} \in \mathbb{H}$. Isso mostra que $(A, C) \in R$, e portanto R é transitiva.

Assim, R é uma relação de equivalência.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

06 12 23

* Descrição das Classes de Equivalência:

Dado um elemento $A \in GL_n(\mathbb{R})$, a classe de equivalência de A é o conjunto de todas as matrizes $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tais que $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$. Portanto, a classe de equivalência de A é dada por:

$[A] = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}\}$

* Quociente $[GL_n(\mathbb{R})^2]/\mathcal{R}$:

No contexto da relação $\mathcal{R}$ definida anteriormente, o quociente $[GL_n(\mathbb{R})^2]/\mathcal{R}$ consiste em classes de equivalência. Cada classe de equivalência é formada por pares de matrizes (A, B) que são equivalentes de acordo com $\mathcal{R}$, ou seja, $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$.

Este é um conjunto de classes de equivalência, com o objetivo de capturar a ideia de "equivalência sob inversão multiplicativa" entre matrizes em $GL_n(\mathbb{R})$. Segue um passo a passo:

i) Escolha uma Matriz Representativa: Para cada classe de equivalência em $[GL_n(\mathbb{R})^2]/\mathcal{R}$, escolhemos uma matriz representativa (A, B) onde $A \cdot B^{-1}$ está na mesma classe de equivalência de acordo com $\mathcal{R}$.

ii) Inversão Multiplicativa equivalente a Matrizes Equivalentes: Duas matrizes A e B são consideradas equivalentes sob $\mathcal{R}$ se $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$. Isso implica que a inversão multiplicativa B^{-1} é equivalente a multiplicar por uma matriz inteira $\mathbb{H}$.

iii) Classe de Equivalência em $[GL_n(\mathbb{R})^2]/\mathcal{R}$: Cada classe em $[GL_n(\mathbb{R})^2]/\mathcal{R}$ consiste em pares de matrizes (A, B) que são equivalentes sob $\mathcal{R}$. Isso significa que $A \cdot B^{-1}$ está na mesma classe de equivalência.

iv) Significado da Equivalência do Quociente: Matrizes na mesma classe de equivalência são "equivalentes sob inversão multiplicativa". Isso implica que, ao multiplicar uma matriz pela inversa de outra, obtemos uma matriz equivalente sob $\mathbb{H}$.

v) Ação do $\mathbb{R}$ no Conjunto de Pares de Matrizes: A relação $\mathcal{R}$ age no conjunto de pares de matrizes em $GL_n(\mathbb{R})^2$ e agrupa estes pares em classes de equivalência com base na propriedade de inversão multiplicativa.

06 12 23

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

8) De quantas maneiras podemos dispor 8 torres de xadrez idênticas, num tabuleiro com 8×8 casas de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna. E se as torres tiverem 8 cores diferentes?

* Para resolver este problema, usaremos o Princípio de Inclusão e Exclusão (PIE).

1) Sem restrição de cores:

Sem a restrição de cores, o número de maneiras de dispor as torres é simplesmente o número de permutações de 8 torres em 8 colunas. Isso é representado por 8!, logo $P(8) = 8!$

2) Com restrição de cores:

Se as torres têm cores diferentes, podemos usar o Princípio de Inclusão e Exclusão para contar as disposições. A contribuição de duas cores é $P(8,2)$, onde $P(n,k)$ denota a permutação de n objetos tomados k de cada vez. Generalizando para 8 cores, obtemos: $P(8) - \binom{8}{1}P(8,2) + \binom{8}{2}P(8,3) - (\ldots) + (-1)^7\binom{8}{7}P(8,8)$

3) Resultado final:

Para calcular o número total de maneiras, somamos as duas partes: $8! - \binom{8}{1}P(8,2) - \binom{8}{2}P(8,3) + (\ldots) + (-1)^7\binom{8}{7}P(8,8)$

* Agora, calcularemos cada termo da expressão

- $P(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 8.7 = 56$
- $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8.7.6 = 56.6 = 336$
- $\binom{8}{1}P(8,2) = 8 . 56 = 448$
- $\binom{8}{2}P(8,3) = \binom{8}{2} . 336 = 28 . 336 = 9408$
- $(-1)^3\binom{8}{3}P(8,3) = (-1) . 56 . 336 = -18816$

* Por fim, aplicamos esses resultados na fórmula:

$8! - \binom{8}{1}P(8,2) + \binom{8}{2}P(8,3) - \binom{8}{3}P(8,3) + (\ldots) + (-1)^7\binom{8}{7}P(8,8) =$

$8! - 448 + 9408 - 18816 + 1792 - 112 + 448 - 8 =$

$40320 - 20136 = 20.184$

* Portanto, há 20.184 maneiras de dispor as 8 torres nas condições, considerando as cores diferentes para cada torre

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

06 | 12 | 23

(9) Sejam X e Y conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetoras $F: X \to Y$ existem?

* Uma função sobrejetora é uma função que mapeia todos os elementos do conjunto de origem para o conjunto de destino, ou seja, nenhum elemento do conjunto de destino é omitido.
* Para contar o número de funções sobrejetoras $F: X \to Y$ onde X tem m elementos e Y tem n elementos, podemos usar o Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE). A ideia é considerar todas as funções de X para Y e subtrair aquelas que não são sobrejetoras, lidando com casos especiais para garantir que a sobrejetividade seja satisfeita.
* Número total de funções: n^m.
* Subtraindo funções que não são sobrejetoras:
  - Para cada subconjunto S de Y com K elementos, consideramos as funções que omitem os elementos de S. O número de funções que omitem pelo menos um elemento de S é $(n-k)^m$, pois para cada elemento em S, temos $(n-k)$ escolhas para o valor da função.
  - Usando o P.I.E, subtraímos o número de funções que omitem pelo menos um elemento de ao menos um dos subconjuntos S. O número total de subconjuntos S é dado por $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (n-k)^m$
* Número de funções sobrejetoras:

$$n^m - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{(n-k)} (n-k)^m$$

  - Esta fórmula representa o número de funções sobrejetoras de X para Y. Note que esta expressão pode ser computada eficientemente usando técnicas computacionais, pois envolve somar muitos termos binomiais e exponenciais.

(10) De um baralho completo (com 52 cartas) são retiradas 3 cartas e colocadas em fileira na mesa. A carta mais à esquerda não é um ás, e a carta mais à direita não é de copas. Quantas configurações assim existem?

* Vamos resolver este problema usando o Princípio da Contagem. A ideia é contar o número de configurações onde a carta mais à esquerda não é um ás e a carta mais à direita não é de copas.

* Número total de configurações: Existem 52 escolhas para a 1ª carta, 51 para a 2ª carta (já que a 1ª já foi escolhida) e 50 para a terceira. Portanto, o total de configurações é $(52 \cdot 51 \cdot 50)$.

* Restrição da carta mais à esquerda não ser um ás: Há 48 cartas que não são ás ~~no~~ mesmo naipe (pois há 4 naipes e $4 \cdot 4 = 16$ são ases). Portanto, o número de configurações em que a carta mais à esquerda não é um ás é: $(48 \cdot 51 \cdot 50)$.

* Restrição da carta mais à direita não ser de copas: Há 39 cartas que não são de copas (pois há 13 cartas de copas no baralho). Logo, o número de configurações em que a carta mais à direita não é de copas é $(52 \cdot 51 \cdot 39)$

* Aplicação do Princípio da Contagem: Usando o PCI, subtrai-se as configurações que não atendem:

Configuração desejada = Total − Restrição Ás − Restrição Copas

Configuração desejada $= (52 \cdot 51 \cdot 50) - (48 \cdot 51 \cdot 50) - (52 \cdot 51 \cdot 39)$

Configuração desejada $= 50 \cdot 51 (52 - 48) - (52 \cdot 51 \cdot 39)$

Configuração desejada $= 50 \cdot 51 \cdot 4 - 52 \cdot 51 \cdot 39$

Configuração desejada $= 10.200 - 10.188$

Configuração desejada $= 12$

* Logo, chegamos que existem 12 configurações desta [illegible].

(11) Sejam n e m dois inteiros naturais quaisquer. Quantas sequências de n números naturais, todos menores que m, possuem pelo menos dois elementos iguais?

* Vamos abordar essa questão considerando as sequências de n números naturais, todos menores que m, que possuem pelo menos dois elementos iguais. Podemos considerar as sequências onde todos os n elementos são distintos e subtrair esse número do total de sequências possíveis.

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

06 12 23

* Número total de sequências possíveis:
Para cada posição na sequência, temos m opções (números naturais menores que m). Então o número total de sequências é m^n.
* Número de sequências com todos os elementos distintos:
Para a primeira posição, temos m escolhas. Para a segunda posição, excluímos o número escolhido para a primeira posição, então temos $(m-1)$ escolhas. Continuando assim, para a n-ésima posição, temos $m-(n-1)$ escolhas. Portanto, o número de sequências com todos os elementos distintos é $m.(m-1).(m-2).(...).(m-(n-1))$
* Número de sequências com pelo menos dois elementos iguais:
Subtraindo o número de sequências com todos os elementos distintos do número total de sequências possíveis:
• Sequências 2 números iguais $= m^n - [m(m-1)(m-2).(...).(m-(n-1))]$
• Esta expressão representa o número de sequências [illegible]