MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 01

IC - Unicamp

10 de agosto 2023

1. Mostre que as seguintes expressões são equivalentes (essas equivalências são conhecidas como De Morgan).
   (a) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
   (b) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
2. Prove que $p \rightarrow q$ é equivalente à proposição $\neg p \vee q$.
3. Considere uma proposição f que depende de 5 proposições atômicas $x_1, ..., x_5$ e cuja tabela verdade tem apenas as seguintes linhas terminadas com falso, i.e., F:

$$(F, V, F, F, V, F)$$
$$(F, V, F, V, V, F)$$
$$(V, V, V, V, F, F)$$

   Encontre uma expressão para f usando $x_1, ..., x_5$ e quaisquer conectivos. Mostre como a expressão foi encontrada.
4. Sejam $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os professores (que já ministraram aula), $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os alunos e $P(x, y)$ o predicado "x já deu aula para y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras? Justifique.
   (a) $\forall x \in \mathcal{P}(\forall y \in \mathcal{A}\, P(x, y))$
   (b) $\forall x \in \mathcal{P}(\exists y \in \mathcal{A}\, P(x, y))$
   (c) $\exists x \in \mathcal{P}(\exists y \in \mathcal{A}\, \neg P(x, y))$
   (d) $\neg(\exists x \in \mathcal{P}(\forall y \in \mathcal{A}\, P(x, y)))$
   (e) $\exists x \in \mathcal{A}(\exists y \in \mathcal{P}\, P(x, y))$
   (f) $\exists! x \in \mathcal{P}(\exists y \in \mathcal{A}\, P(x, y))$
5. Mostre que a distributividade do quantificador existêncial sobre a disjunção segue da distributividade do quantificador universal sobre a conjunção. Isto é, usando

$$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$$

   prove que

$$\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x)).$$

6. Considere a seguinte afirmação em lógica de primeira ordem:

$$(\forall x.(K(x) \leftrightarrow \forall z.\neg A(x,z))) \wedge (\forall x.(H(x) \rightarrow \exists y.(B(x,y) \wedge D(x,y))))$$

   Dê uma afirmação em lógica de primeira ordem que seja a **negação** desta afirmação. Sua fórmula final não deve conter nenhuma negação, exceto as negações diretas dos predicados (por exemplo, pode conter $\neg H(x)$, mas não pode conter $\neg(B(x,y) \wedge D(x,y))$, já que esta negação se aplica também a um conectivo). Não introduza nenhum predicado, função ou constante nova.

7. Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C:

   (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

   Provando através de uma sequência de equivalências, começando com x pertencente à primeira parte da igualdade (lado esquerdo) e terminando com x pertencente ao segundo lado da igualdade (lado direito).

8. Lembre-se de que a diferença simétrica é associativa; em outras palavras, para todos os conjuntos A, B e C, $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. Você também pode achar útil notar neste problema que a diferença simétrica é claramente comutativa; em outras palavras, para todos os conjuntos A e B, $A\Delta B = B\Delta A$.

   (a) Prove que existe um único elemento identidade para a diferença simétrica. Em outras palavras, existe um conjunto único X tal que, para cada conjunto A, $A\Delta X = A$.

   (b) Prove que cada conjunto tem um inverso único para a operação de diferença simétrica. Em outras palavras, para cada conjunto A, existe um conjunto único B tal que $A\Delta B = X$, onde X é o elemento identidade da parte (a).

   (c) Prove que, para quaisquer conjuntos A e B, existe um conjunto único C tal que $A\Delta C = B$.

9. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos se seus elementos são todos conjuntos. Neste caso, definimos $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A\ (A \in \mathcal{F}\ \wedge\ x \in A)\}$. Suponha que definimos um novo conjunto $\bigcup! \mathcal{F}$ pela fórmula $\bigcup! \mathcal{F} = \{x \mid \exists! A(A \in \mathcal{F}\ \wedge\ x \in A)\}$.

   (a) Prove que, para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$, $\bigcup! \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

   (b) Uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ é dita disjunta dois a dois se cada par de elementos distintos de F são disjuntos; ou seja, $\forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F}\ (A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset)$. Prove que, para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$, $\bigcup! \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}$ se e somente se $\mathcal{F}$ é disjunta dois a dois.

10. Prove que se a, b e c são inteiros ímpares, então $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais. Embora você provavelmente esteja tentado a usar a fórmula quadrática aqui, recomendamos que não faça isso. Em vez disso, observe o que acontece se você substituir $x = \frac{p}{q}$ na fórmula $ax^2 + bx + c = 0$, e considere as possíveis paridades de p e q (a **paridade** de um número é se ele é par ou ímpar).

11. Considere o seguinte lema:

    Lema: *Se m e n são inteiros onde mn é par, então pelo menos um entre m e n é par.*

Você agora usará esse lema para provar o seguinte teorema:

Teorema: *Se n é um número natural ímpar, então $\sqrt{2n}$ é irracional.*

Prove esse teorema **usando uma prova por contradição**.

Algumas dicas:

- Pode ser útil estruturar essa prova de maneira semelhante à prova de que $\sqrt{2}$ é irracional.
- Lembre-se de que, se r é um número racional, é sempre possível escrever r como $\frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros, $q \neq 0$, e p e q não têm fatores comuns além de $+1$ e -1.

12. Suponha que $w^2 + x^2 + y^2 = z^2$, onde w, x, y e z denotam sempre inteiros positivos. Prove a proposição: z é par se, e somente se, w, x e y são pares. (Dica: Pode ser útil representar inteiros pares como $2u$ e inteiros ímpares como $2v + 1$, onde $u, v \in \mathbb{Z}$).