MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 02

IC - Unicamp

25 de agosto 2023

1. Mostre que para todo par de inteiros m e n, a diferença $m - n$ é par se, e somente se, ambos m e n têm a mesma paridade.

2. Mostre que para todo par de inteiros m e n, a diferença $m^3 - n^3$ é ímpar se, e somente se, $m - n$ é ímpar.

3. Encontre contraexemplos para as seguintes afirmações:

   (a) $\forall x \in \mathbb{Z}\, x^3 + x^2 + 2x$ é par $\Leftrightarrow x$ é par

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\, x^3 + x^2 y - xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2$ ou $y = -2x$

   (c) Qualquer inteiro n, se $n + 1$ é divisível por 3 então n^3 é divisível por 3.

   (d) Não existe nenhum conjunto X tal que $\mathbb{Z} \in X$ e $\{\sqrt{p} : p$ é primo maior que $2\} \subseteq X$

4. Seja $G_0 = 1$, $G_1 = 3$, $G_2 = 9$ e defina

$$G_n = G_{n-1} + 3G_{n-2} + 3G_{n-3}$$

   para $n \geq 3$. Mostre por indução que $G_n \leq 3^n$ para todo $n \geq 0$.

5. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, a seguinte identidade é válida:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. Prove ou encontre um contraexemplo para as seguintes afirmações:

   (a) $\forall a \in \mathbb{Z},\ 4 \nmid a^2 \Rightarrow a$ é ímpar

   (b) Se $a^3 - a \geq 0$, então $a > 2$.

   (c) $\forall a \in \mathbb{Z},\ 3 \nmid a^2 \Rightarrow 3 \nmid a$

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3 | (n^2 + n + 1)$.

7. Para qualquer conjunto A, definimos o conjunto das partes de A como $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$, ou seja, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Prove o seguinte por indução completa sobre $n \in \mathbb{N}$:

   (a) Prove que para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

   (b) Se A é um conjunto, defina $\mathcal{P}_2(A)$ como o conjunto de todos os subconjuntos de A que têm exatamente dois elementos. Prove que para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}_2(A)$ tem $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos.

8. Sejam α, β, γ números reais. Demonstre que pelo menos um deles é maior ou igual à média aritmética dos três.

9. Seja P um polígono no plano. *Triangular* um polígono significa dividir seu interior traçando diagonais que não se cruzam até que todas as regiões obtidas sejam triângulos. Neste caso, dizemos que o polígono P é *triangulado*. Um triângulo T de um polígono triangulado P é *exterior* se dois dos lados de T são lados do polígono P. Na figura abaixo, os triângulos T_1 e T_2 são exteriores.

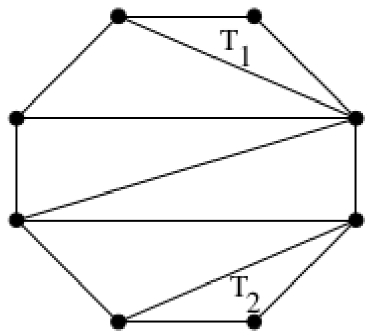

Figura 1: Polígono triangulado

Prove, usando indução matemática, que um polígono triangulado P com quatro ou mais lados possui pelo menos dois triângulos exteriores.

10. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2|(n^2 + n)$.