MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

06 de novembro de 2023

1. Notação assintótica para funções

2. Perguntas, observações, comentários?

Notação assintótica para funções

Último exemplo da última aula

Para cada $f(n)$ e $g(n)$, prove ou refute que $f(n) \in \Omega(g(n))$.

1. $f(n) = 4n^2 + 2n + 100$ e $g(n) = n^2$
2. $f(n) = n^2/4 - 2n - 100$ e $g(n) = n^2$
3. $f(n) = 2^n$ e $g(n) = n^{1000}$
4. $f(n) = \sqrt{n}$ e $g(n) = \log n$.
5. $f(n) = n^\epsilon$, onde $\epsilon \in]0, 1[$, e $g(n) = \log n$.
6. $f(n) = n$ e $g(n) = n \log n$.

Uma observação trivial sobre O e Ω

Teorema

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$$

Assintoticamente iguais, ou Θ

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce na mesma velocidade que } f(n)\}$$

Assintoticamente iguais, ou Θ

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce na mesma velocidade que } f(n)\}$$

Definição formal:

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) : \exists(n_0, c_0, c_1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}\ (\forall n \geq n_0,\ c_0\cdot f(n) \leq g(n) \leq c_1\cdot f(n))\}$$

Assintoticamente iguais, ou Θ

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce na mesma velocidade que } f(n)\}$$

Definição formal:

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) : \exists(n_0, c_0, c_1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}\ (\forall n \geq n_0,\ c_0\cdot f(n) \leq g(n) \leq c_1\cdot f(n))\}$$

Teorema

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n)) \wedge g(n) \in \Omega(f(n))$$

Resumo

Informalmente, apenas para nos ajudar a memorizar:

- $f(n) \in O(g(n))$ parece $f(n) \leq g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ parece $f(n) \geq g(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ parece $f(n) = g(n)$

Funções típicas ordenadas assintoticamente

- Constante: $O(1)$
- Logarítmica: $O(\log n)$
- Polilogarítmica: $O(\log^k n)$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ é constante
- Sublinear: $O(n^\epsilon)$, onde $\epsilon \in]0,1[$ é constante
- Linear: $O(n)$
- Linearítmica: $O(n \log n)$
- Polinômial*: $O(n^k)$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ é constante
- Exponencial: $O(2^n)$
- Fatorial: $O(n!)$

*Cada conjunto está contido no próximo, mas para o caso polinômial há um detalhe, para $k = 1$, $O(n^k) \subset O(n \log n)$. Para $k \geq 2$, $O(n \log n) \subset O(n^k)$.

Exemplo

Determine quais afirmações são verdadeiras.

1. $n^2/100 - (5/2)n + 99 \in \Theta(n^2)$
2. $10^{999}n^2 \in \Theta(n^2)$
3. $9999n^3 \in \Theta(n^3)$
4. $n^2/\log n \in \Theta(n)$
5. $\log(n+1) \in \Theta(\log n)$
6. $\log(n \log n) \in \Theta(\log n)$

Teorema

Seja k uma constante e $f_0(n), ..., f_k(n) \in O(g(n))$. Então,

$$f_0(n) + f_1(n) + ... + f_k(n) \in O(g(n))$$

Teorema

Seja k uma constante e $f_0(n), ..., f_k(n) \in O(g(n))$. Então,

$$f_0(n) + f_1(n) + ... + f_k(n) \in O(g(n))$$

Com esse teorema, podemos simplificar a análise assintótica:

$$\underbrace{\underbrace{20n^3}_{O(n^3)} + \underbrace{n \log n}_{O(n^3)} + \underbrace{(\log n)^2}_{O(n^3)}}_{3 \text{ termos}} \in O(n^3)$$

Somas na notação assintótica

O que acontece quando o número de termos não é constante? Por exemplo, se $f_i(n) \in O(g(n))$, a seguinte afirmação vale?

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(n) \in O(g(n))$$

Somas na notação assintótica

O que acontece quando o número de termos não é constante? Por exemplo, se $f_i(n) \in O(g(n))$, a seguinte afirmação vale?

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(n) \in O(g(n))$$

Depende de $g(n)$ e de $f_0(n), ..., f_n(n)$.
Exemplos na lousa.

Assintoticamente estritamente menor, ou ozinho

$o(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce estritamente mais devagar que } f(n)\}$

Assintoticamente estritamente menor, ou ozinho

$o(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce estritamente mais devagar que } f(n)\}$

Definição formal:

$$o(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N}\, (\forall n \geq n_0\, g(n) < c \cdot f(n))\}$$

Compare com

$$O(f(n)) = \{g(n) : \exists (n_0, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{>0}\ (\forall n \geq n_0\ g(n) \leq c \cdot f(n))\}$$

Assintoticamente estritamente menor, ou ozinho

$$o(f(n)) = \{g(n) : g(n) \text{ cresce estritamente mais devagar que } f(n)\}$$

Definição formal:

$$o(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N}\, (\forall n \geq n_0\, g(n) < c \cdot f(n))\}$$

Compare com

$$O(f(n)) = \{g(n) : \exists(n_0, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{>0}\ (\forall n \geq n_0\ g(n) \leq c \cdot f(n))\}$$

Exemplos:

- $n^{2.99}, n^2 \log n, n^2, n, n \log n \in o(n^3)$
- $n^3 \in O(n^3)$, mas $n^3 \notin o(n^3)$

Exemplos

Para cada $f(n)$ e $g(n)$, determine se $f(n) \in o(g(n))$ e se $f(n) \in O(g(n))$.

1. $f(n) = 4n^2 + 2n$ e $g(n) = n^2$
2. $f(n) = n^2/4 - 2n - 100$ e $g(n) = n^2$
3. $f(n) = 2^n$ e $g(n) = 4^n$
4. $f(n) = 4^n$ e $g(n) = 2^n$
5. $f(n) = \sqrt{n}$ e $g(n) = \log n$.
6. $f(n) = n$ e $g(n) = n \log n$.

Assintoticamente estritamente maior, ou omegazinho

$\omega(f(n)) = \{g(n) : g(n)$ cresce estritamente mais rapidamente que $f(n)\}$

Assintoticamente estritamente maior, ou omegazinho

$\omega(f(n)) = \{g(n) : g(n)$ cresce estritamente mais rapidamente que $f(n)\}$

Definição formal:

$$\omega(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N}\, (\forall n \geq n_0\; g(n) > c \cdot f(n))\}$$

Está para $\Omega(f(n))$ como $o(f(n))$ está para $O(f(n))$.

Assintoticamente estritamente maior, ou omegazinho

$\omega(f(n)) = \{g(n) : g(n)$ cresce estritamente mais rapidamente que $f(n)\}$

Definição formal:

$$\omega(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N}\, (\forall n \geq n_0\; g(n) > c \cdot f(n))\}$$

Está para $\Omega(f(n))$ como $o(f(n))$ está para $O(f(n))$.

Teorema

$g(n) \in \omega(f(n)) \Leftrightarrow f(n) \in o(g(n))$

Resumo atualizado

Informalmente, apenas para nos ajudar a memorizar:

- $f(n) \in O(g(n))$ parece $f(n) \leq g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ parece $f(n) \geq g(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ parece $f(n) = g(n)$
- $f(n) \in o(g(n))$ parece $f(n) < g(n)$
- $f(n) \in \omega(g(n))$ parece $f(n) > g(n)$
- Não existe "teta minuscúlo", $\theta(g(n))$, pois isso seria como $f(n) < g(n)$ e $g(n) < f(n)$.

Um exemplo interessante: log do fatorial

Sabendo que $\log(x) \leq x$, podemos achar o seguinte limitante superior

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i) \leq \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ou seja, é trivial que $\log(n!) \in O(n^2)$.
Mas podemos achar uma estimativa mais justa?

Sabendo que $\log(x) \leq x$, podemos achar o seguinte limitante superior

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i) \leq \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ou seja, é trivial que $\log(n!) \in O(n^2)$.
Mas podemos achar uma estimativa mais justa?

Teorema

$$\log(n!) \in \Theta(n \log n)$$

Perguntas, observações, comentários?