MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

27 de novembro de 2023

Instituto de computação

UNICAMP

1. Estimativas assintóticas para relações de recorrência

2. Conceitos básicos de contagem

3. Perguntas, observações, comentários?

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Exemplo visto na última aula

Considere a função

$$f(n) = f(n/3) + f(2n/3) + n$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Conceitos básicos de contagem

Princípio básico da multiplicação

Se $D_1, ..., D_n$ são conjuntos finitos, então existem

$$|D_1| \times ... \times |D_n|$$

tuplas em $D_1 \times ... \times D_n$

Princípio básico da multiplicação

Se $D_1, ..., D_n$ são conjuntos finitos, então existem

$$|D_1| \times ... \times |D_n|$$

tuplas em $D_1 \times ... \times D_n$

Exemplos:

- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde cada caracter é uma letra minúscula ou maiúscula, ou um dígito (0 a 9).

Princípio básico da multiplicação

Se $D_1, ..., D_n$ são conjuntos finitos, então existem

$$|D_1| \times ... \times |D_n|$$

tuplas em $D_1 \times ... \times D_n$

Exemplos:

- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde cada caracter é uma letra minúscula ou maiúscula, ou um dígito (0 a 9).
- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde o primeiro caracter é um dígito e os demais caracteres são letras minúsculas ou maiúsculas, ou um dígito.

Princípio da inclusão-exclusão

Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Princípio da inclusão-exclusão

Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemplos:

- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde o primeiro caracter é $ ou & e os demais são alfanuméricos.

Princípio da inclusão-exclusão

Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemplos:

- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde o primeiro caracter é \$ ou & e os demais são alfanuméricos.
- Número de senhas com exatamente 10 caracteres, onde o primeiro caracter é \$ ou o último caracter é &, mas os demais são alfanuméricos.

Princípio do complemento

A cardinalidade do conjunto E, que você quer contar, não é tão fácil de determinar...
Você pode definir um conjunto U que contém E e cuja cardinalidade é fácil de determinar.
Além disso, considere que o complemento de E em U, isto é, $\bar{E} = U \setminus E$, também é fácil de contar. Como $|\bar{E}| = |U| - |E|$, temos

$$|E| = |U| - |\bar{E}|$$

Princípio do complemento

A cardinalidade do conjunto E, que você quer contar, não é tão fácil de determinar...
Você pode definir um conjunto U que contém E e cuja cardinalidade é fácil de determinar.
Além disso, considere que o complemento de E em U, isto é, $\bar{E} = U \setminus E$, também é fácil de contar. Como $|\bar{E}| = |U| - |E|$, temos

$$|E| = |U| - |\bar{E}|$$

Exemplo:

- Senhas com n caracteres alfanuméricos e com ao menos 1 número.

Permutações, ou combinações sem repetições (ou arranjos)

Se $D_1 = \{d_1, ..., d_n\}$, $D_2 = D_1 \setminus \{d_{i_1}\}$, $D_3 = D_2 \setminus \{d_{i_2}\}$, ..., $D_r = D_{r-1} \setminus \{d_{i_{r-1}}\}$ então

$$|D_1 \times D_2 \times ... \times D_r| = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutações, ou combinações sem repetições (ou arranjos)

Se $D_1 = \{d_1, ..., d_n\}$, $D_2 = D_1 \setminus \{d_{i_1}\}$, $D_3 = D_2 \setminus \{d_{i_2}\}$, ..., $D_r = D_{r-1} \setminus \{d_{i_{r-1}}\}$ então

$$|D_1 \times D_2 \times ... \times D_r| = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplos:

- Numa sala com 30 alunos, o professor passa um projeto para ser feito em grupos de exatamente 3 alunos, onde 1 aluno implementará os testes, 1 aluno implementará o *backend* e o terceiro implementará o *frontend*. Existem quantos grupos possíveis?
- Num jogo de cartas em que o baralho tem 10 cartas diferentes, 4 jogadores recebem uma carta cada no começo do jogo. Há quantas configurações possíveis para o início do jogo?

Combinações, ou número de subconjuntos com k elementos

Considere um conjunto $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Um subconjunto com k elementos é qualquer $B = \{x_1, ..., x_k : x_i \in A\}$.
Denotamos o número de tais subconjuntos B por $\binom{n}{k}$

Combinações, ou número de subconjuntos com k elementos

Considere um conjunto $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Um subconjunto com k elementos é qualquer $B = \{x_1, ..., x_k : x_i \in A\}$.
Denotamos o número de tais subconjuntos B por $\binom{n}{k}$

- Conjuntos não têm elementos repetidos...
- Considere $R = \{(x_1, ..., x_k) : x_i \in A \wedge (i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)\}$.
- Então $|R| = n!/(n-k)!$.
- Tente mapear cada tupla $(x_1, ..., x_k)$ em um subconjunto $\{x_1, ..., x_k\}$.
- Cada permutação da tupla gera o mesmo subconjunto...
- Então,

$$\binom{n}{k} = \frac{|R|}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

´

Combinações, ou número de subconjuntos com k elementos

Exemplos:

- Numa sala com 30 alunos, o professor passa um projeto para ser feito em grupos de exatamente 3 alunos. Existem quantos grupos possíveis?
- Imagine um plano em que existem 10 pontos $p_1, ..., p_{10}$ desenhados. É possível desenhar quantos triângulos tendo esses pontos como vértices?

Algumas propriedades de combinações

- Existe apenas uma forma de escolher o conjunto vazio: $\binom{n}{0} = 1$
- Existe apenas uma forma de escolher o conjunto completo: $\binom{n}{n} = 1$
- Existem n formas de escolher subconjuntos com apenas um elemento: $\binom{n}{1} = n$
- Subconjuntos com k e com $n-k$ elementos: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Subconjuntos com k elementos podem ser separados fixando um elemento particular (identidade de Pascal): $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binômio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

Exemplo: quantidade de desordenações

Considere o conjunto $X = \{1, 2, ..., n\}$.

Dizemos que uma tupla $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ é uma *desordenação* se ela satisfaz duas propriedades:

1. $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$
2. $x_i \neq i$ para $1 \leq i \leq n$.

Exemplo: quantidade de desordenações

Considere o conjunto $X = \{1, 2, ..., n\}$.

Dizemos que uma tupla $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ é uma *desordenação* se ela satisfaz duas propriedades:

1. $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$
2. $x_i \neq i$ para $1 \leq i \leq n$.

Por exemplo, para $n = 4$, as tuplas $(2, 1, 4, 3)$ e $(3, 1, 4, 2)$ são desordenações.

Já a tupla $(2, 4, 3, 1)$ não é, pois 3 aparece na terceira posição.

Exemplo: quantidade de desordenações

Considere o conjunto $X = \{1, 2, ..., n\}$.

Dizemos que uma tupla $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ é uma *desordenação* se ela satisfaz duas propriedades:

1. $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$
2. $x_i \neq i$ para $1 \leq i \leq n$.

Por exemplo, para $n = 4$, as tuplas $(2, 1, 4, 3)$ e $(3, 1, 4, 2)$ são desordenações.

Já a tupla $(2, 4, 3, 1)$ não é, pois 3 aparece na terceira posição.

Considere $n = 3$. Quantas desordenações existem?

Perguntas, observações, comentários?