MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

07 de agosto de 2023

Instituto de computação

UNICAMP

Predicados

Predicados

- São funções cuja imagem é $\{V, F\}$.

- Informalmente: proposições que dependem de uma ou mais variáveis.

- Exemplos:

Predicados

- São funções cuja imagem é $\{V, F\}$.

- Informalmente: proposições que dependem de uma ou mais variáveis.

- Exemplos:

  - $P(x)$: x é um quadrado perfeito.

- Ao substituir as variáveis por valores, temos proposições.

Predicados

- São funções cuja imagem é $\{V, F\}$.

- Informalmente: proposições que dependem de uma ou mais variáveis.

- Exemplos:

  - $P(x)$: x é um quadrado perfeito.
  - $Q(x, y)$: o mdc de x e y é igual a 1.

- Ao substituir as variáveis por valores, temos proposições.

Predicados

- São funções cuja imagem é $\{V, F\}$.

- Informalmente: proposições que dependem de uma ou mais variáveis.

- Exemplos:

  - $P(x)$: x é um quadrado perfeito.
  - $Q(x, y)$: o mdc de x e y é igual a 1.
  - $R(x, y)$: x e y são irmãos.

- Ao substituir as variáveis por valores, temos proposições.

Quantificador existencial

Expressa a noção de que $P(x)$ é válido para pelo menos um elemento x de um domínio de quantificação D

$$\exists x \in D, P(x)$$

Quantificador existencial

Expressa a noção de que $P(x)$ é válido para pelo menos um elemento x de um domínio de quantificação D

$$\exists x \in D, P(x)$$

$(\exists x \in D, P(x))$ é falsa se $D = \emptyset$ ou se $P(d) = F$ para todos os elementos d de D.

Quantificador existencial

Expressa a noção de que $P(x)$ é válido para pelo menos um elemento x de um domínio de quantificação D

$$\exists x \in D, P(x)$$

$(\exists x \in D, P(x))$ é falsa se $D = \emptyset$ ou se $P(d) = F$ para todos os elementos d de D.

Equivalente a (1) ou (2)?

$$\exists x(x \in D \to P(x)) \tag{1}$$

$$\exists x(x \in D \land P(x)) \tag{2}$$

Quantificador universal

Expressa a noção de que $P(x)$ é válido para cada elemento x em um domínio de quantificação D

$$\forall x \in D, P(x)$$

Quantificador universal

Expressa a noção de que $P(x)$ é válido para cada elemento x em um domínio de quantificação D

$$\forall x \in D, P(x)$$

Equivalente a (1) ou a (2)?

$$\forall x(x \in D \to P(x)) \qquad (1)$$

$$\forall x(x \in D \land P(x)) \qquad (2)$$

Quantificador universal

Se D é finito: $D := \{d_1, ..., d_n\}$, então, temos

$$\forall x \in D, P(x) \Leftrightarrow P(d_1) \wedge P(d_2) \wedge ... \wedge P(d_n)$$

Por isso, dizemos que $\forall x \in D, P(x)$ é verdadeira se $P(d) = V$ para todos os elementos $d \in D$ e falsa se $P(d)$ for falsa para ao menos um elemento $d \in D$.

Quantificador de existência e unicidade

Expressa a frase "existe um único x (no domínio de quantificação) tal que $P(x)$".

$$\exists! x \in D \; P(x)$$

Quantificador de existência e unicidade

Expressa a frase "existe um único x (no domínio de quantificação) tal que $P(x)$".

$$\exists ! x \in D \, P(x)$$

É equivalente a qual sentença?

1. $\forall (x, y) \in D \times D \, ((P(x) \land P(y)) \to x = y)$

Quantificador de existência e unicidade

Expressa a frase "existe um único x (no domínio de quantificação) tal que $P(x)$".

$$\exists! x \in D\, P(x)$$

É equivalente a qual sentença?

1. $\forall (x, y) \in D \times D\, ((P(x) \land P(y)) \to x = y)$
2. $\exists x \in D\, (P(x) \land (\forall y \in D\, (P(y) \to x \neq y)))$

Quantificador de existência e unicidade

Expressa a frase "existe um único x (no domínio de quantificação) tal que $P(x)$".

$$\exists! x \in D \, P(x)$$

É equivalente a qual sentença?

1. $\forall (x, y) \in D \times D \, ((P(x) \land P(y)) \rightarrow x = y)$
2. $\exists x \in D \, (P(x) \land (\forall y \in D \, (P(y) \rightarrow x \neq y)))$
3. $\exists x \in D \, (P(x) \land (\forall y \in D \, (P(y) \rightarrow x = y)))$

Exemplos em português

Considere

- $\mathcal{H}$: conjunto de todos os seres humanos
- $\mathcal{C}$: conjunto de todos os cientistas
- $N(x)$: x já ganhou um prêmio Nobel
- $P(x)$: x é um professor universitário
- $T(x)$: x trabalha numa universidade

Escreva as seguintes sentenças em português e diga se são verdadeiras.

1. $\forall x \in \mathcal{H} \, (N(x) \to x \in \mathcal{C})$
2. $\exists x \in \mathcal{H} \, (x \in \mathcal{C} \wedge N(x) \wedge P(x))$
3. $\forall x \in \mathcal{C} \, (T(x) \to P(x))$

Domínio de quantificação implícito

Quando D está claro do contexto, às vezes se escreve

$$\forall x\, P(X) \;\text{ ou }\; \exists x\, P(X)$$

em vez de

$$\forall x \in D\, P(X) \;\text{ ou }\; \exists x\, P(X)$$

Principalmente quando há vários quantificadores encadeados, todos com mesmo domínio de quantificação.

Domínio de quantificação implícito – Exemplo

Definição de limite no livro *Um Curso de Cálculo. Volume 1*, do H. L. Guidorizzi.

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ \qquad\qquad 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Múltiplos quantificadores

Encadeando quantificadores do mesmo tipo

Quando todos os quantificadores são do mesmo tipo, é fácil simplificar a expressão:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in C, P(a, b, c) \Leftrightarrow \forall (a, b, c) \in A \times B \times C \; P(a, b, c)$$

e

$$\exists a \in A, \exists b \in B, \exists c \in C, P(a, b, c) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in A \times B \times C \; P(a, b, c)$$

Encadeando quantificadores do mesmo tipo

Quando todos os quantificadores são do mesmo tipo, é fácil simplificar a expressão:

$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in C, P(a, b, c) \Leftrightarrow \forall (a, b, c) \in A \times B \times C\ P(a, b, c)$

e

$\exists a \in A, \exists b \in B, \exists c \in C, P(a, b, c) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in A \times B \times C\ P(a, b, c)$

Normalmente, quando $A = B = C$, abreviamos como

$$\forall a, b, c \in A,\ P(a, b, c) \ \text{ e } \ \exists a, b, c \in A,\ P(a, b, c)$$

Encadeando quantificadores diferentes

É preciso atenção ao encadear $\forall$ e $\exists$.

- Eles não comutam: $\forall x (\exists y\, P(x, y)) \neq \exists x (\forall y\, P(x, y))$
- $\forall x (\exists y\, P(x, y))$ significa que y existe em função de x

Encadeando quantificadores diferentes

É preciso atenção ao encadear $\forall$ e $\exists$.

- Eles não comutam: $\forall x (\exists y \, P(x,y)) \neq \exists x (\forall y \, P(x,y))$
- $\forall x (\exists y \, P(x,y))$ significa que y existe em função de x

Exemplo: Definição de função contínua no volume 1 do livro de cálculo do Guidorizzi.

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ (} \delta \text{ dependendo de } \epsilon \text{), tal} \\ \text{que, para todo } x \in D_f, \\ \qquad p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \end{cases}$$

Negação de quantificadores e vacuidade

Negação de quantificadores

Negar um "para todo" significa que existe um contra-exemplo.

$$\neg(\forall x \in D\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D\, \neg P(x)$$

Negação de quantificadores

Negar um "para todo" significa que existe um contra-exemplo.

$$\neg(\forall x \in D\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D\, \neg P(x)$$

Negar um "existe" significa que a propriedade não pode ser satisfeita.

$$\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$$

Vacuidade

Como interpretar $\exists x \in D\, P(x)$ quando $D = \emptyset$?

Vacuidade

Como interpretar $\exists x \in D\, P(x)$ quando $D = \emptyset$?

Essa interpretação "nos obriga" a interpretar

$$\forall x \in \emptyset\, P(x)$$

como verdadeira, pois

$$\neg(\exists x\, \neg P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \emptyset\, (\neg(\neg P(x))) \Leftrightarrow \forall x \in \emptyset\, P(x)$$

Distributividade dos quantificadores

Distributividade do "para todo"

$$\forall x \in D\,(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in D\, P(x)) \land (\forall x \in D\, Q(x))$$

Distributividade do "para todo"

$$\forall x \in D\,(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in D\, P(x)) \wedge (\forall x \in D\, Q(x))$$

Lembre-se que "para todo" é a conjunção em todo o domínio de quantificação.
Por exemplo, considere $D = \{d_1, d_2, d_3\}$. Então

$$\begin{aligned}
\forall x \in D\,(P(x) \wedge Q(x)) &\Leftrightarrow (P(d_1) \wedge Q(d_1)) \wedge (P(d_2) \wedge Q(d_2)) \wedge (P(d_3) \wedge Q(d_3)) \\
&\Leftrightarrow (P(d_1) \wedge P(d_2) \wedge P(d_3)) \wedge (Q(d_1) \wedge Q(d_2) \wedge Q(d_3)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in D\, P(x)) \wedge (\forall x \in D\, Q(x))
\end{aligned}$$

Distributividade do "existe"

$$\exists x \in D\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in D\; P(x)) \vee (\exists x \in D\; Q(x))$$

Distributividade do "existe"

$$\exists x \in D\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in D\,P(x)) \vee (\exists x \in D\,Q(x))$$

Segue da distributividade do $\forall$.

Distributividade do "existe"

$$\exists x \in D\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in D\, P(x)) \vee (\exists x \in D\, Q(x))$$

Segue da distributividade do $\forall$.

Note que

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow (\exists x \in D\, P(x)) \wedge (\exists x \in D\, Q(x))$$

Exemplos para fixação

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
2. $\exists x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
2. $\exists x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
3. $\forall x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
2. $\exists x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
3. $\forall x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
4. $\exists x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
2. $\exists x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
3. $\forall x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
4. $\exists x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
5. $\neg(\exists x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y)))$

Sejam $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos, $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cachorros e $P(x, y)$ o predicado "x já mordeu y". Como descrever as seguintes afirmações em português? Elas são verdadeiras?

1. $\forall x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
2. $\exists x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
3. $\forall x \in \mathcal{C}(\exists y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
4. $\exists x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y))$
5. $\neg(\exists x \in \mathcal{C}(\forall y \in \mathcal{H}\, P(x, y)))$
6. $\exists x \in \mathcal{H}(\exists y \in \mathcal{C}\, P(x, y))$

Mostre que $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Perguntas, observações, comentários?