MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

25 de setembro de 2023

1 Exercícios

2 Perguntas, observações, comentários?

Exercícios

Numa aula, vimos um resultado, conhecido como Identidade de Bézout, que diz

$$\mathtt{mdc}(a, b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ d = u \cdot a + v \cdot b.$$

1. A recíproca é verdadeira? Ou seja, se existem $d, u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $d = u \cdot a + v \cdot b$, então $d = \mathtt{mdc}(a, b)$? Prove ou refute.
2. E para o caso $d = 1$? É verdade que $\exists u, v \in \mathbb{Z},\ 1 = u \cdot a + v \cdot b \Rightarrow \mathtt{mdc}(a, b) = 1$? Prove ou refute.

Demonstre as seguintes afirmações sobre o máximo divisor comum e sobre divisibilidade:

1. Prove que se $\texttt{mdc}(a, n) = 1$ e $n \mid (ab)$, então $n \mid b$.
2. Prove que $\texttt{mdc}(a, b) = 1$, se, e somente se, $\texttt{mdc}(a, b^n) = 1$ para todo natural $n \geq 1$.
3. Conclua que $\texttt{mdc}(a, n) = 1$ e $n \mid (a^k b)$, para algum inteiro $k \geq 1$, então $n \mid b$.

Determine se cada equivalência a seguir é verdadeira ou falsa e apresente uma prova de sua validade ou de sua falsidade.

1. $((\exists x \in A\, P(x)) \vee (\exists x \in B\, P(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in A \cap B\, P(x))$
2. $((\exists x \in A\, P(x)) \vee (\exists x \in B\, P(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B\, P(x))$

1. Prove que, para todo n natural, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Encontre uma fórmula para $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$, para $n \in \mathbb{N}$, e prove que sua fórmula está correta.

1. Prove que, para todo n natural, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Encontre uma fórmula para $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$, para $n \in \mathbb{N}$, e prove que sua fórmula está correta.

Lembrem-se de que já provamos

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Definimos a sequência de Fibonacci como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$.
Prove que, para todo n natural,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = Fn \cdot F_{n+1}$$

Perguntas, observações, comentários?