MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 06

IC - Unicamp

2023

1. Encontre constantes c e n_0 que provam que $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \in \Omega(2^{n^2})$.

2. Encontre uma fórmula fechada para $f(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n = 1 \\ 10f(n-1) - 25f(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$

3. A função $\lceil lg\ n \rceil!$ é limitada polinomialmente? A função $\lceil lg\ lg\ n \rceil!$ é limitada polinomialmente? (Dizemos que uma função $f(n)$ é limitada polinomialmente se $f(n) = O(n^k)$ para alguma constante k.)

4. A solução para a recorrência $T(n) = 8T(n/2) + n^2$ acaba sendo $T(n) = O(n^3)$. Mostre que uma prova de substituição com a suposição $T(n) \leq cn^3$ falha. Em seguida, mostre como somar um termo de ordem inferior d para fazer uma prova de substituição funcionar.

5. Encontre o resto da divisão de $2^{7^{2002}}$ por 352. (Dica: Use o *Teorema Chinês do Resto*).

6. Encontre x inteiro tal que:
$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \pmod{11} \\ x & \equiv & 2 \pmod{7} \\ x & \equiv & 4 \pmod{5} \end{cases} \tag{1}$$

7. Lembre-se de que uma matriz quadrada tem inversa se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. Além disso, o determinante tem as sequintes propriedades:

   (1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ e (2) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

   Seja $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$, ou seja, o conjunto de matrizes quadradas, com n linhas e n colunas, com entradas reais, e que possuem inversas. Seja $\mathbb{H} = \{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$, isot é, o conjunto de matrizes inteiras, $n \times n$, com determinante igual a um. Note que $\mathbb{H} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

   Considere a relação
$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in GL_n(\mathbb{R})^2 : A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}\}$$

   Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, descreva as classes de equivalência e encontre o quociente $GL_n(\mathbb{R})^2/\mathcal{R}$.

8. De quantas maneiras podemos dispor 8 torres de xadrez, idênticas, num tabuleiro com 8×8 casas, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres tiverem 8 cores diferentes?

9. Sejam X e Y conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetoras $\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$ existem?

10. De um baralho completo (com 52 cartas) são retiradas 3 cartas e colocadas em fileira na mesa. A carta mais à esquerda não é um ás, e a carta mais à direita não é de copas Quantas configurações assim existem?

11. Sejam n e m dois números naturais quaisquer. Quantas sequências de n números naturais, todos menores que m, possuem pelo menos dois elementos iguais?