MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

23 de agosto de 2023

Instituto de computação
UNICAMP

1 Provas para proposições existenciais

2 Demonstração de existência e unicidade

3 Perguntas, observações, comentários?

Provas para proposições existenciais

Considere uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$

À primeira vista, a forma mais óbvia de prová-la é encontrando um valor x tal que $P(x)$ é verdadeira.

Neste caso, temos uma prova construtiva.

Considere uma proposição da forma $\exists x\, P(x)$

À primeira vista, a forma mais óbvia de prová-la é encontrando um valor x tal que $P(x)$ é verdadeira.

Neste caso, temos uma prova construtiva.

Mas também pode ser possível provar sem mostrar x explicitamente.

Neste caso, temos uma prova não construtiva.

Exemplo

Teorema

Para todo inteiro positivo n, existe uma sequência de n inteiros consecutivos que não são primos.

Exemplo

Teorema

Para todo inteiro positivo n, existe uma sequência de n inteiros consecutivos que não são primos.

Considere $x = (n+1)!$. Mostre que $k | (x + k)$ para $2 \leq k \leq n+1$.

Segundo exemplo

Teorema

$$\exists a, b \in \mathbb{I} : a^b \in \mathbb{Q}$$

Segundo exemplo

Teorema

$$\exists a, b \in \mathbb{I} : a^b \in \mathbb{Q}$$

Considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$...

Segundo exemplo

Teorema

$$\exists a, b \in \mathbb{I} : a^b \in \mathbb{Q}$$

Considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$...

Essa prova é construtiva?

Demonstração de existência e unicidade

Existe e é único

Muitas vezes, além de provar a existência de algum elemento que satisfaz uma proposição P, ou seja, $\exists v\, P(v)$, queremos também provar que tal v é único!

- Existência: $P(v)$
  - Bom... Temos que provar $\exists v\, P(v)$

Existe e é único

Muitas vezes, além de provar a existência de algum elemento que satisfaz uma proposição P, ou seja, $\exists v\, P(v)$, queremos também provar que tal v é único!

- Existência: $P(v)$
  - Bom... Temos que provar $\exists v\, P(v)$
- Unicidade: $\forall x, y\,, x \neq y \to (\neg P(x) \vee \neg P(y))$
- Unicidade (por contrapositiva): $P(x) \wedge P(y) \to x = y$

Existe e é único

Muitas vezes, além de provar a existência de algum elemento que satisfaz uma proposição P, ou seja, $\exists v\, P(v)$, queremos também provar que tal v é único!

- Existência: $P(v)$
  - Bom... Temos que provar $\exists v\, P(v)$
- Unicidade: $\forall x, y\,, x \neq y \rightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y))$
- Unicidade (por contrapositiva): $P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y$
  - Supomos que existem x e y tais que $P(x) = P(y) = V$
  - Mostramos que isso implica $x = y$

Teorema

Para todo $a, b \in \mathbb{N}^*$, existe um único par $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tal que $a = b \cdot q + r$ e $0 \leq r < b$.

Perguntas, observações, comentários?