Gabarito Lista 6

16 de dezembro de 2023

Ex.1

Para provar que $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \in \Omega(2^{n^2})$, precisamos encontrar constantes c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \geq c \cdot 2^{n^2}$$

Vamos analisar cada termo da expressão:

- 2^{n^3} cresce exponencialmente mais rápido que 2^{n^2}.
- -5^{n^2} é subtraído, mas como 2^{n^3} cresce muito mais rapidamente, para valores suficientemente grandes de n, o impacto desse termo se torna irrelevante.
- $+2^{10}$ é uma constante e também se torna irrelevante para valores grandes de n.

Dado que 2^{n^3} domina a expressão para valores grandes de n, podemos ignorar os outros termos para a análise assintótica. Então, precisamos encontrar c e n_0 tais que:

$$2^{n^3} \geq c \cdot 2^{n^2}$$

Para simplificar, podemos tomar $c = 1$, o que nos leva a:

$$2^{n^3} \geq 2^{n^2}$$

Isso é verdade para qualquer $n \geq 1$, pois n^3 é sempre maior ou igual a n^2 para $n \geq 1$. A desigualdade original

$$2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10} \geq 1 \cdot 2^{n^2}$$

é satisfeita para $c = 1$ e $n_0 = 1$. Isso significa que, já para $n = 1$, a expressão $2^{n^3} - 5^{n^2} + 2^{10}$ é maior ou igual a 2^{n^2}. Portanto, podemos afirmar que a expressão está em $\Omega(2^{n^2})$ com essas constantes específicas.

Ex.2

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n = 1, \\ 10f(n-1) - 25f(n-2) & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

A equação de recorrência para $n \geq 2$ é $f(n) = 10f(n-1) - 25f(n-2)$. A equação característica associada é:

$$r^2 = 10r - 25$$

. As raízes da equação característica $r^2 - 10r + 25 = 0$ são $r = 5$, uma raiz dupla. Para uma raiz dupla r, a solução geral da equação de recorrência é da forma:

$$f(n) = (A + Bn) \cdot r^n$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Usando as condições iniciais para determinar A e B:

- Para $n = 0$, $f(0) = 2$:
$$2 = (A + B \cdot 0) \cdot 5^0$$
$$2 = A$$

- Para $n = 1$, $f(1) = 0$:
$$0 = (A + B \cdot 1) \cdot 5^1$$
$$0 = (2 + B) \cdot 5$$
$$B = -2$$

Substituindo $A = 2$ e $B = -2$ na fórmula geral, obtemos a fórmula fechada:

$$f(n) = (2 - 2n) \cdot 5^n$$

Esta é a fórmula fechada para a função $f(n)$ definida pela equação de recorrência.

Ex.3

Parte 1.

Para determinar se as funções $\lceil \log_2 n \rceil!$ e $\lceil \log_2 \log_2 n \rceil!$ são limitadas polinomialmente, precisamos verificar se elas podem ser expressas na forma $O(n^k)$ para alguma constante k.

Sem perda de generalidade considerando $n = 2^m$, temos $\lceil \log_2 n \rceil = m$. Então, a função $\lceil \log_2 n \rceil!$ se torna $m!$. A desigualdade que precisamos considerar para verificar se $m!$ é limitada polinomialmente em termos de n seria:

$$m! \leq C \cdot 2^{mk}$$

onde C e k são constantes e estamos avaliando para $n = 2^m$.

A dificuldade aqui reside no fato de que o fatorial cresce muito mais rapidamente do que qualquer função polinomial ou mesmo exponencial de m. A comparação entre $m!$ e 2^{mk} para diferentes valores de m e k revela o seguinte:

- Para valores menores de m, $m!$ é menor ou igual a 2^{mk} para vários valores de k. Isso é esperado, pois para pequenos valores de m, o fatorial $m!$ ainda não cresceu suficientemente rápido para ultrapassar 2^{mk}.
- No entanto, à medida que m aumenta, $m!$ começa a crescer muito mais rapidamente do que 2^{mk} para valores menores de k. Por exemplo, para $m = 9$ e $k = 2$, $m!$ é maior do que 2^{mk}, indicando que $k = 2$ não é suficiente para manter a desigualdade.
- Apenas para valores maiores de k (como $k = 3$), a desigualdade $m! \leq 2^{mk}$ é mantida para m até 10.

Esses resultados sugerem que não existe um único valor de k que possa satisfazer a desigualdade $m! \leq C \cdot 2^{mk}$ para todos os valores de m à medida que m cresce indefinidamente. Isso é consistente com o fato de que o crescimento de $m!$ é superexponencial em relação a m, e portanto, não é limitado polinomialmente. Portanto, a função $\lceil \log_2 n \rceil!$ não é limitada polinomialmente em termos de n quando expressa na forma $m!$ com $n = 2^m$.

Parte 2.

Para determinar a ordem do polinômio para o qual a função $\lceil \log_2 \log_2 n \rceil!$ é limitada polinomialmente, precisamos encontrar um valor de k tal que exista uma constante C para a qual:

$$\lceil \log_2 \log_2 n \rceil! \leq C \cdot n^k$$

para todos os n suficientemente grandes. O desafio aqui é que estamos lidando com o crescimento de um fatorial de um logaritmo duplo, que é um comportamento complexo. Para facilitar a análise, vamos considerar n na forma 2^{2^m}, onde $m = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil$. Então, a desigualdade torna-se:

$$m! \leq C \cdot (2^{2^m})^k$$

Para provar que $\lceil \log_2 \log_2 n \rceil!$ é limitada por um polinômio de n usando análise assintótica, precisamos considerar a desigualdade $m! \leq C \cdot n^k$ onde $n = 2^{2^m}$ e $m = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil$. Vamos seguir uma abordagem de análise assintótica para determinar um valor adequado de k.

Para $n = 2^{2^m}$, o logaritmo duplo de n é aproximadamente m, portanto, temos $m = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil$. A fórmula de Stirling nos fornece uma boa aproximação para $m!$:

$$m! \approx \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

Precisamos comparar o crescimento de $m!$ com $C \cdot 2^{2^{mk}}$. A desigualdade torna-se:

$$\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \leq C \cdot 2^{2^{mk}}$$

Para simplificar a comparação, tomamos o logaritmo de ambos os lados. O logaritmo transforma o produto e a exponenciação em soma e produto, respectivamente, facilitando a comparação assintótica:

$$\log(\sqrt{2\pi m}) + m \log\left(\frac{m}{e}\right) \leq \log(C) + 2^{mk} \log(2)$$

Para valores grandes de m, o termo $m \log\left(\frac{m}{e}\right)$ é dominante no lado esquerdo, enquanto $2^{mk} \log(2)$ é o termo dominante no lado direito. Então podemos analisar apenas

$$m \log\left(\frac{m}{e}\right) \leq 2^{mk} \log(2)$$

Precisamos, portanto, determinar um valor de k para o qual a desigualdade seja satisfeita para valores grandes de m. Para que a desigualdade seja satisfeita para grandes m, o termo $2^{mk} \log(2)$ deve crescer mais rapidamente ou pelo menos na mesma taxa que $m \log\left(\frac{m}{e}\right)$. Como 2^{mk} cresce exponencialmente com m, mesmo para valores pequenos de k, é provável que exista um k que satisfaça essa condição. Portanto, a função $\lceil \log_2 \log_2 n \rceil!$ é limitada polinomialmente.

Ex.5

Para encontrar o resto da divisão de $2^{7^{2002}}$ por 352, usaremos o Teorema Chinês do Resto (TCR). Primeiro, vamos fatorar 352 e depois encontrar os restos da divisão de $2^{7^{2002}}$ por cada fator. Por fim, usaremos o TCR para combinar esses restos em um único resto que será o resultado da divisão de $2^{7^{2002}}$ por 352. O número 352 pode ser fatorado como $352 = 2^5 \times 11$. Assim, precisamos encontrar os restos da divisão de $2^{7^{2002}}$ por 2^5 (que é 32) e por 11.

Todo número da forma 2^k com $k \geq 5$ é divisível por 32. Assim, o resto da divisão de $2^{7^{2002}}$ por 32 é 0.

Agora vamos calcular $2^{7^{2002}} \pmod{11}$. Para fazer isso, usaremos o Pequeno Teorema de Fermat, que nos permite simplificar grandes potências quando trabalhamos com módulos de números primos. Vamos quebrar isso em duas partes:

- Calcular $7^{2002} \pmod{10}$: Primeiro, precisamos entender como as potências de 7 se comportam quando tomamos o módulo 10. Isso é importante porque, ao calcular 7^{2002}, estamos interessados apenas no último dígito desse número (que é o que o módulo 10 nos dá), pois isso determinará o expoente em $2^{7^{2002}}$. Observamos que as potências de 7 seguem um padrão cíclico:

$$
\begin{aligned}
7^1 &\equiv 7 \pmod{10} \\
7^2 &\equiv 49 \equiv 9 \pmod{10} \\
7^3 &\equiv 343 \equiv 3 \pmod{10} \\
7^4 &\equiv 2401 \equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

  E depois disso, o padrão se repete a cada 4. Então, para encontrar o último dígito de 7^{2002}, precisamos ver onde 2002 se encaixa neste ciclo de 4.

- Calcular $2^{7^{2002}} \pmod{11}$: Agora, aplicamos o Pequeno Teorema de Fermat, que diz que para um número primo p, se a não é divisível por p, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. No nosso caso, $p = 11$ e $a = 2$, então $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Isso significa que qualquer potência de 2 elevada a um múltiplo de 10 será equivalente a 1 quando tomamos o módulo 11. Portanto, estamos interessados no resto de 7^{2002} dividido por 10 (que determinará o expoente de 2), e como isso afeta o cálculo de $2^{7^{2002}} \pmod{11}$.

Vamos analisar os cálculos:

$7^{2002} \pmod{10}$: O cálculo do resto de 2002 dividido por 4 dá 2. Isso significa que o último dígito de 7^{2002} é o mesmo que o último dígito de 7^2 quando consideramos o módulo 10. Como $7^2 \equiv 9 \pmod{10}$, isso nos diz que o último dígito de 7^{2002} é 9.

$2^{7^{2002}} \pmod{11}$: Agora, aplicamos esse conhecimento ao calcular $2^{7^{2002}} \pmod{11}$. Já que 7^{2002} é equivalente a 7^2 em termos do seu efeito no módulo 11 (por causa do Pequeno Teorema de Fermat), e 7^2 é 9, então $2^{7^{2002}}$ é equivalente a 2^9 nesse cálculo de módulo. O cálculo de $2^9 \pmod{11}$ resulta em 6. Portanto, o resultado final de $2^{7^{2002}} \pmod{11}$ é 6.

Então agora precisamos resolver o sistema de congruências:

$$
\begin{cases}
x \equiv 0 \pmod{32} \\
x \equiv 6 \pmod{11}
\end{cases}
$$

Para isso usaremos o Teorema Chinês do Resto (TCR).
1. Valores de N_1 e N_2: $N_1 = 352/32 = 11$ e $N_2 = 352/11 = 32$
2. Inversos Multiplicativos: O inverso de $N_1 = 11$ módulo 32 é 3 e o inverso de $N_2 = 32$ módulo 11 é 10.
3. Construindo a Solução: Usamos a fórmula:

$$
x = (resto_1 \times N_1 \times \text{Inverso de } N_1 \pmod{m_1} + resto_2 \times N_2 \times \text{Inverso de } N_2 \pmod{m_2}) \pmod{352}
$$

Substituindo os valores, temos: $x = (0 \times 11 \times 3 + 6 \times 32 \times 10) \pmod{352}$. Isso resulta em $x \equiv 1920 \pmod{352}$. Portanto, $x = 160$.

Ex.6

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Para resolver este sistema, usamos o Teorema Chinês do Resto. As etapas são as seguintes:

1. Calculamos o produto dos módulos (11, 7, 5): $N = 11 \times 7 \times 5 = 385$

2. Divida o Produto Total por Cada Módulo para Encontrar os Valores de N_i:

$$N_1 = 385/11 = 7 \cdot 5 = 35$$

$$N_2 = 385/7 = 11 \cdot 5 = 55$$

$$N_3 = 385/5 = 11 \cdot 7 = 77$$

3. Encontre os Inversos Multiplicativos de N_i Modulo m_i: Precisamos encontrar os inversos de N_1 modulo 11, N_2 modulo 7 e N_3 modulo 5. Ou seja, encontrar x_i tal que: $N_i \cdot x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Calculando os inversos:

$$x_1 \equiv 35^{-1} \pmod{11} = 6$$

$$x_2 \equiv 55^{-1} \pmod{7} = 6$$

$$x_3 \equiv 77^{-1} \pmod{5} = 3$$

4. Construa a Solução: A solução é dada por:

$$x = (a_1 \cdot N_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot N_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot N_3 \cdot x_3) \pmod{N}$$

onde a_i são os restos das congruências originais.

$$x = (1 \cdot 35 \cdot 6 + 2 \cdot 55 \cdot 6 + 4 \cdot 77 \cdot 3) \pmod{385}$$

$$x = 1794 \pmod{385}$$

$$x = 254$$

Isso significa que $x = 254$ é a menor solução inteira positiva que satisfaz todas as três congruências e que qualquer número da forma $254 + 385k$, onde k é um inteiro, é uma solução para o sistema dado.

Ex.7

Para provar que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $GL_n(\mathbb{R})^2$ e descrever as classes de equivalência e o quociente $GL_n(\mathbb{R})^2/\mathcal{R}$, precisamos verificar se $\mathcal{R}$ satisfaz as três propriedades de uma relação de equivalência: reflexividade, simetria e transitividade.

Reflexividade: Uma relação $\mathcal{R}$ é reflexiva se $(A, A) \in \mathcal{R}$ para todo $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Para qualquer $A \in GL_n(\mathbb{R})$, temos $A \cdot A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade. Como $\det(I) = 1$ e I tem entradas inteiras, $I \in \mathbb{H}$. Portanto, $(A, A) \in \mathcal{R}$ para todo $A \in GL_n(\mathbb{R})$, satisfazendo a reflexividade.

Simetria: Uma relação $\mathcal{R}$ é simétrica se $(A, B) \in \mathcal{R}$ implica $(B, A) \in \mathcal{R}$. Se $(A, B) \in \mathcal{R}$, então $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$, o que significa que $\det(A \cdot B^{-1}) = 1$. Usando a propriedade $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ e $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, temos $\det(A \cdot B^{-1}) = \det(A) \cdot 1/\det(B) = 1$. Agora, se rearranjarmos os termos desta equação, obtemos:

$$\det(A) = \frac{1}{\det(B^{-1})}$$

$$\det(A) = \det(B)$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação $\det(A) = \det(B)$ por $1/\det(A)$ pela direita, obtemos:

$$1 = \det(B) \cdot \frac{1}{\det(A)}$$

Esta é a relação que procurávamos. Pois $\det(B) \cdot \frac{1}{\det(A)} = \det(B \cdot A^{-1}) = 1$, logo $B \cdot A^{-1} \in \mathbb{H}$, e $(B, A) \in \mathcal{R}$.

Transitividade: Uma relação $\mathcal{R}$ é transitiva se, sempre que $(A, B) \in \mathcal{R}$ e $(B, C) \in \mathcal{R}$, então $(A, C) \in \mathcal{R}$.

Se $(A, B) \in \mathcal{R}$ e $(B, C) \in \mathcal{R}$, então $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}$ e $B \cdot C^{-1} \in \mathbb{H}$. Isso implica que $\det(A \cdot B^{-1}) = 1$ e $\det(B \cdot C^{-1}) = 1$. Vimos anteriormente que isso implica em $\det(A) = \det(B)$ e $\det(B) = \det(C)$, logo $\det(A) = \det(C)$. Agora, multiplicando ambos os lados da equação $\det(A) = \det(C)$ por $1/\det(C)$ pela direita, obtemos:

$$\det(A) \cdot \frac{1}{\det(C)} = 1$$

Portanto, $A \cdot C^{-1} \in \mathbb{H}$, e $(A, C) \in \mathcal{R}$.

Uma classe de equivalência em $GL_n(\mathbb{R})^2$ sob a relação $\mathcal{R}$ é um conjunto de matrizes que possuem o mesmo determinante. Para um dado determinante d, a classe de equivalência $[B]$ para uma matriz $B \in GL_n(\mathbb{R})$ com $\det(B) = d$ é:

$$[B] = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = \det(B)\}$$

Assim, cada classe de equivalência é formada por todas as matrizes em $GL_n(\mathbb{R})$ que têm o mesmo determinante d.

O conjunto quociente $GL_n(\mathbb{R})^2/\mathcal{R}$ é o conjunto de todas essas classes de equivalência. Cada classe de equivalência é representada por um determinante específico. Matematicamente, o quociente pode ser representado como:

$$GL_n(\mathbb{R})^2/\mathcal{R} = \{[B] \mid B \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

Onde $[B]$ é a classe de equivalência de matrizes com determinante igual a $\det(B)$. Dado que o determinante de uma matriz invertível pode ser qualquer número real não-zero, este conjunto quociente é isomórfico ao conjunto dos números reais não-zero, $\mathbb{R}^*$, onde cada número real não-zero representa uma classe de determinante único.

Ex.8

Para resolver essas questões, precisamos compreender o problema de disposição das torres em um tabuleiro de xadrez de 8×8 casas.

1. Torre de Xadrez Idênticas: A condição é que não haja duas torres na mesma linha ou coluna. Isso é, na verdade, um problema de permutação, pois precisamos colocar cada torre em uma linha diferente e em uma coluna diferente.

- No tabuleiro de xadrez, temos 8 linhas e 8 colunas.
- A primeira torre pode ser colocada em qualquer uma das 8 colunas na primeira linha.
- A segunda torre pode ser colocada em qualquer uma das 7 colunas restantes na segunda linha (uma coluna já está ocupada pela primeira torre).
- Continuando esse raciocínio, a terceira torre tem 6 opções, a quarta tem 5, e assim por diante.

Portanto, o número total de maneiras de dispor as 8 torres idênticas é dado pelo fatorial de 8, que é $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

2. Torre de Xadrez de Cores Diferentes: Se as torres tiverem cores diferentes, precisamos considerar as permutações das cores das torres, além de suas posições no tabuleiro. Primeiro, dispomos as 8 torres idênticas no tabuleiro, o que pode ser feito de $8!$ maneiras, como calculado anteriormente. Agora, cada arranjo de torres pode ser colorido de $8!$ maneiras diferentes (uma permutação das 8 cores diferentes para as 8 torres). Portanto, o número total de maneiras de dispor as 8 torres de cores diferentes é $8! \times 8!$.

Ex.9

1. Caso $m < n$ (Menos Elementos em X do que em Y): Neste caso, não é possível criar uma função sobrejetora. Isso ocorre porque, para ser sobrejetora, cada elemento de Y deve ser mapeado por pelo menos um elemento de X. Se $m < n$, não há elementos suficientes em X para cobrir todos os elementos em Y. Portanto, o número de funções sobrejetoras é zero.

2. Caso $m = n$ (Mesmo Número de Elementos em X e Y): Quando $m = n$, a situação é equivalente à de encontrar permutações de n elementos, pois cada elemento em X deve ser mapeado de forma única para um elemento em Y, sem repetições. Isso é justamente a definição de uma função bijetora, que é, por definição, também sobrejetora. O número de maneiras de permutar n elementos é simplesmente $n!$. Portanto, o número de funções sobrejetoras é $n!$ neste caso.

3. Caso $m > n$ (Mais Elementos em X do que em Y): Vamos resolver este problema usando o Princípio da Inclusão-Exclusão. Seguem os passos:

- Número Total de Funções: Para cada um dos m elementos em X, há n escolhas em Y. Assim, o número total de funções (não necessariamente sobrejetoras) é n^m.
- Excluindo Funções que não são Sobrejetoras: Para que uma função não seja sobrejetora, pelo menos um elemento de Y não é mapeado. Precisamos subtrair o número de funções que mapeiam X em um subconjunto de Y com menos de n elementos. Para um subconjunto específico de Y com $n-1$ elementos, existem $(n-1)^m$ funções de X para esse subconjunto. Há $\binom{n}{n-1}$ tais subconjuntos em Y. Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão, subtraímos o número de funções que deixam de fora cada subconjunto de $n-1$, $n-2$, ..., 1 elementos de Y.
- Princípio da Inclusão-Exclusão: A fórmula é:

  $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m$$

  Onde $\binom{n}{k}$ é o número de maneiras de escolher k elementos de n, e $(n-k)^m$ é o número de funções de X para um subconjunto de Y com $n-k$ elementos.

Obs: O Princípio da Inclusão-Exclusão é utilizado para corrigir a contagem de funções sobrejetoras, subtraindo as funções que não mapeiam todos os elementos de Y (ou seja, funções que não são sobrejetoras) e, em seguida, adicionando de volta as funções que foram subtraídas mais de uma vez, e assim por diante. A expressão $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$ considera todas essas sobreposições e subtrações, alternando os sinais para cada termo, para chegar ao número correto de funções sobrejetoras.

Ex.10

Seguindo o Princípio da Inclusão-Exclusão, o total de combinações possíveis, considerando que a carta mais à esquerda não é um ás e a carta mais à direita não é de copas, é de 90.524 maneiras distintas. Este método garante que todas as restrições sejam consideradas adequadamente, contabilizando as sobreposições de restrições. Aqui está o passo a passo detalhado:

1. Configuração Total Sem Restrições: Calculamos o total de combinações de três cartas sem restrições, que é $52 \times 51 \times 50$.

2. Configurações com um Ás na Primeira Posição: Calculamos as combinações onde a primeira carta é um ás: $4 \times 51 \times 50$.

3. Configurações com uma Carta de Copas na Terceira Posição: Calculamos as combinações onde a terceira carta é de copas: $52 \times 51 \times 13$.

4. Configurações com um Ás na Primeira Posição e uma Carta de Copas na Terceira Posição: Calculamos as combinações onde a primeira carta é um ás e a terceira é de copas: $4 \times 50 \times 13$.

5. Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão: Aplicamos a fórmula:

$$\text{Total} = (52 \times 51 \times 50) - (4 \times 51 \times 50 + 52 \times 51 \times 13) + (4 \times 50 \times 13)$$

Ex.11

Para resolver esse problema, usaremos o Princípio da Inclusão-Exclusão. Vamos primeiro calcular o número total de sequências possíveis de n números naturais, todos menores que m, e depois subtrair o número de sequências onde todos os elementos são distintos. A diferença nos dará o número de sequências que têm pelo menos dois elementos iguais.

Caso $m > n$:

- **Número Total de Sequências:** Cada número na sequência pode ser qualquer um dos m números naturais (de 0 a $m-1$). Portanto, para cada uma das n posições na sequência, temos m escolhas. O número total de sequências é, então, m^n.
- **Número de Sequências com Todos os Elementos Distintos:** Se todos os elementos devem ser distintos, estamos essencialmente escolhendo n números distintos dentre m possíveis, sem repetição. Isso é análogo a permutações de m elementos tomados n de cada vez. O número de tais sequências é dado por:

$$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- **Número de Sequências com pelo Menos Dois Elementos Iguais:** Agora, subtraindo o número de sequências com todos os elementos distintos do número total de sequências, obtemos o número de sequências que têm pelo menos dois elementos iguais:

$$m^n - \frac{m!}{(m-n)!}$$

Caso $m = n$:

- **Número Total de Sequências:** Como antes, há $m^n = n^n$ sequências possíveis.
- **Número de Sequências com Todos os Elementos Distintos:** Neste caso, é possível ter todas as sequências distintas, que são permutações dos n elementos. Portanto, o número de sequências distintas é $n!$.
- **Número de Sequências com pelo Menos Dois Elementos Iguais:** A fórmula se mantém como $n^n - n!$.

Caso $m < n$:

- **Número Total de Sequências:** Há m^n sequências possíveis.
- **Número de Sequências com Todos os Elementos Distintos:** Isso é impossível, pois temos mais posições do que números distintos. Portanto, o número de sequências distintas é 0.
- **Número de Sequências com pelo Menos Dois Elementos Iguais:** Todas as m^n sequências possíveis terão pelo menos uma repetição, então m^n.