MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 05

IC - Unicamp

2023

1. Encontre constantes c e n_0 que provam que $\log\left((4n^3 + 5n^2 + 10)^2\right) \in O(\log n)$.

2. Seja $f(n) = 4^n - n$.

   (a) Encontre constantes c e n_0 que provam que $f(n) \in \Omega(2^n)$.

   (b) Prove que $f(n) \notin \Theta(2^n)$.

3. Considere as seguintes funções:

$$n,\ \log n,\ 2^n,\ \sqrt{n},\ 2^{n^2},\ 3^n,\ \log(\log n),\ (\log n)^2$$

   Ordene-as, na tabela a seguir, em ordem crescente assintótica, ou seja, de tal forma que $O(f_i(n))$ esteja contido em $O(f_{i+1}(n))$.

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7

4. Seja $k \in \mathbb{N}$ uma constante maior que 1.

   (a) Prove que se $f_i(n) \in O(g_i(n))$ para $1 \le i \le k$, então $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O\left(\prod_{i=1}^{k} g_i(n)\right)$.

   (b) Prove que

$$f_1(n), ..., f_k(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O((g(n))^k)$$

5. Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo, se a função A é O, o, Ω, ω ou Θ da função B. Assuma que $k \ge 1$ e $0 < \epsilon < 1 < c$ são constantes. Sua resposta deve ser da forma S para sim ou N para não.

   Considere $\log^k n := \underbrace{\log\log\cdots\log n}_{\log \text{ aplicado } k \text{ vezes}}$. Na linha (V), m é um número inteiro positivo.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(i)	$\log^k n$	n^ϵ					
(ii)	n^k	c^n					
(iii)	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
(iv)	2^n	$2^{n/2}$					
(v)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
(vi)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

6. O Teorema Mestre é um método utilizado na análise de algoritmos para determinar a complexidade temporal de recorrências que surgem frequentemente em algoritmos recursivos, especialmente aqueles que utilizam a técnica de divisão e conquista. A forma geral do Teorema Mestre para recorrências é expressa como:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde:

- $T(n)$ é o tempo de execução do algoritmo para um problema de tamanho n.
- a é o número de subproblemas em cada nível de recursão.
- $\frac{n}{b}$ é o tamanho de cada subproblema. (Aqui, supõe-se que todos os subproblemas têm o mesmo tamanho.)
- $f(n)$ é o custo de dividir o problema e combinar os resultados dos subproblemas.

O Teorema Mestre fornece soluções para $T(n)$ em três casos, dependendo da relação entre $f(n)$ e $n^{\log_b a}$:

(a) **Caso 1:** Se $f(n) = O(n^c)$ onde $c < \log_b a$, então:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

(b) **Caso 2:** Se $f(n) = \Theta(n^c)$ onde $c = \log_b a$, então:

$$T(n) = \Theta(n^c \log n)$$

(c) **Caso 3:** Se $f(n) = \Omega(n^c)$ onde $c > \log_b a$ e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq kf(n)$ para alguma constante $k < 1$ e suficientemente grande n, então:

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Essas expressões fornecem uma maneira de determinar a complexidade de tempo de algoritmos recursivos dividindo e conquistando, com base na comparação do trabalho feito em cada nível da árvore de recursão (representado por $f(n)$) com o número de subproblemas e seu tamanho.

Questão:

O tempo de execução de um algoritmo A é descrito pela recorrência

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Um outro algoritmo A' tem um tempo de execução descrito pela recorrência

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

Qual é o maior valor inteiro de a tal que A' é assintoticamente mais rápido que A? (Dica: use o Teorema Mestre para avaliar $T(n)$ e $T'(n)$.)

7. Determine a fórmula fechada das seguintes relações de recorrência.

(a) $a_n = 3a_{n-1} - n3^{n-1}, \quad n \geq 2,\ n$ natural, sendo $\quad a_1 = -1$.

(b) $a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$, sendo $a_0 = 2$.

8. Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando o experimento termina.

   (a) Seja a_n o número de experimentos que terminam no n-'ésimo lançamento ou antes. Encontre uma relação de recorrência para a_n. Justifique.

   Observe por exemplo, que a_3 é o número de experimentos que terminam no segundo ou terceiro lançamento, ou seja, é a soma de cc, cCc e Ccc onde c significa 'cara' e C 'coroa'.

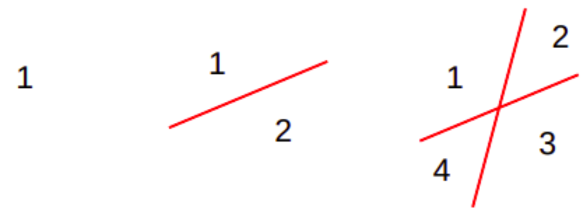
   (b) Calcule a fórmula fechada da relação de recorrência. Justifique

9. Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Tadeu tomou emprestados 1000 reais, e deve pagar prestações mensais fixas de 100 reais (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo).

   (a) Encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para a dívida de Tadeu ao final do n-ésimo mês. Justifique.

   (b) Resolva esta relação. Justifique.

10. Qual é o número máximo de regiões L_n determinado por n retas no plano? Lembre-se que um plano sem nenhuma reta tem uma região, com uma reta tem duas regiões e com duas retas têm quatro regiões, conforme ilustrado abaixo.



$L_0 = 1$ $\quad$ $L_1 = 2$ $\quad$ $L_2 = 4$

Faça uma modelagem usando funções de recorrência para encontrar a fórmula fechada para L_n e depois prove usando indução matemática.

11. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo **MergeSort** para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Resolva as recorrências.

(c) Use as soluções obtidas para provar que $T^{-}(n) \approx n \log n$ e $T^{+}(n) = n \log n$. Conclua que $T(n) \approx n \log n$.

12. Encontre uma fórmula fechada para $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 2 & \text{se } n = 1 \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$