Gabarito Lista 5

2 de dezembro de 2023

Ex.1

Para encontrar constantes c e n_0 que provam que

$$\log\left((4n^3 + 5n^2 + 10)^2\right) \in O(\log n),$$

precisamos mostrar que existe um $c > 0$ e um n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, temos

$$\log\left((4n^3 + 5n^2 + 10)^2\right) \leq c \log n.$$

Vamos começar simplificando a expressão do lado esquerdo da inequação:

$$\log\left((4n^3 + 5n^2 + 10)^2\right) = 2\log\left(4n^3 + 5n^2 + 10\right).$$

Como $4n^3$ é o termo dominante para grandes valores de n, podemos limitar o polinômio por uma expressão mais simples que ainda cresce mais rápido ou tão rápido quanto o polinômio original:

$$4n^3 + 5n^2 + 10 \leq 4n^3 + 5n^3 + 10n^3 = 19n^3 \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Então, temos

$$2\log\left(4n^3 + 5n^2 + 10\right) \leq 2\log(19n^3).$$

Usando a propriedade $\log(ab) = \log a + \log b$, temos

$$2\log(19n^3) = 2\left(\log 19 + 3\log n\right) = 2\log 19 + 6\log n.$$

Agora, queremos que isso seja menor ou igual a $c \log n$. Como $2\log 19$ é uma constante, podemos absorvê-la escolhendo um c suficientemente grande. Por exemplo, escolher $c = 7$ garantiria que a constante também seja coberta, desde que n seja suficientemente grande. Assim, a inequação se tornaria $2\log(19n^3) \leq 7\log n$ para um n_0 adequado.

Para encontrar o n_0 adequado para a inequação $2\log(19n^3) \leq 7\log n$, precisamos primeiro entender a natureza dessa inequação. A dificuldade está na constante $2\log 19$, que precisamos garantir que seja coberta pela diferença entre $7\log n$ e $6\log n$. A inequação pode ser reescrita como:

$$2\log 19 + 6\log n \leq 7\log n$$

$$2\log 19 \leq \log n$$

$$\log 19^2 \leq \log n$$

$$19^2 \leq n$$

Agora, vamos calcular 19^2 e escolher o n_0 com base nesse valor. O n_0 deve ser pelo menos esse valor para garantir que a inequação seja verdadeira para todos os $n \geq n_0$.

O valor de 19^2 é 361. Portanto, o n_0 adequado para a inequação $2\log(19n^3) \leq 7\log n$ seria $n_0 = 361$. Isso garante que para todo $n \geq 361$, a inequação se mantém verdadeira, satisfazendo as condições para provar que $\log\left((4n^3 + 5n^2 + 10)^2\right) \in O(\log n)$.

Ex.2

Ex.2 (a)

Vamos encontrar um c que satisfaça a condição para todos os n maiores que um certo n_0. A condição a ser satisfeita é:

$$4^n - n \geq c \cdot 2^n$$

Vamos começar simplificando a desigualdade e, em seguida, encontrar um valor para c e n_0 que a satisfaça.

$$4^n - n \geq c \cdot 2^n$$
$$(2^2)^n - n \geq c \cdot 2^n$$
$$2^{2n} - n \geq c \cdot 2^n$$

Para que a inequação seja verdadeira, o termo $-n$ deve se tornar insignificante em comparação com o crescimento exponencial de 2^{2n} e 2^n. Vamos assumir que para valores suficientemente grandes de n, $-n$ é muito pequeno em comparação com 2^{2n}, permitindo-nos concentrar na relação entre 2^{2n} e 2^n.

$$2^{2n} \approx c \cdot 2^n$$
$$2^n \approx c$$

Precisamos encontrar um c tal que, para um n_0 suficientemente grande, 2^n seja sempre maior que c. Vamos escolher um c pequeno, como $c = 1$, e verificar se a inequação se mantém verdadeira para esse c e para um n_0 razoável. Para $c = 1$, a inequação torna-se

$$2^{2n} - n \geq 2^n$$

Precisamos encontrar um n_0 onde isso se torna verdadeiro. Vamos verificar a partir de qual n_0 a inequação $2^{2n} - n \geq 2^n$ se mantém verdadeira. A inequação se mantém verdadeira a partir de $n = 1$. Portanto, o n_0 adequado para a demonstração com $c = 1$ é $n_0 = 1$. Isso significa que, para todo $n \geq 1$, a expressão $4^n - n$ é de fato maior ou igual a 2^n, satisfazendo a condição de que $f(n) = 4^n - n \in \Omega(2^n)$ com as constantes $c = 1$ e $n_0 = 1$.

Ex.2 (b)

Para provar que $f(n) = 4^n - n \notin \Theta(2^n)$, precisamos mostrar que não existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que para todo $n \geq n_0$,

$$c_1 \cdot 2^n \leq 4^n - n \leq c_2 \cdot 2^n.$$

A condição $f(n) \in \Theta(2^n)$ exige que $f(n)$ seja tanto limitada inferiormente quanto superiormente por 2^n multiplicado por constantes positivas. Vamos analisar ambas as partes dessa inequação:

Parte Inferior da Inequação ($c_1 \cdot 2^n \leq 4^n - n$): A função 4^n cresce exponencialmente mais rápido do que 2^n. Isso significa que, para valores suficientemente altos de n, 4^n será muito maior do que qualquer múltiplo constante de 2^n. O termo $-n$ se torna insignificante em comparação com o crescimento exponencial de 4^n. Portanto, para n grande o suficiente, $4^n - n$ será sempre maior do que $c_1 \cdot 2^n$ para qualquer c_1 positivo. Isso significa que sempre podemos encontrar um n_0 tal que $4^n - n$ é maior do que $c_1 \cdot 2^n$ para todo $n \geq n_0$.

Parte Superior da Inequação ($4^n - n \leq c_2 \cdot 2^n$): Não importa quão grande escolhemos c_2, eventualmente 4^n será muito maior do que $c_2 \cdot 2^n$ devido à taxa de crescimento exponencialmente mais rápida de 4^n comparada a 2^n. Matematicamente, não existe um c_2 tal que $4^n - n$ seja sempre menor ou igual a $c_2 \cdot 2^n$ para todos os n suficientemente grandes. Isso ocorre porque $\frac{4^n}{2^n} = 2^n$ cresce sem limites à medida que n aumenta, tornando impossível limitar superiormente $4^n - n$ por um múltiplo constante de 2^n.

Portanto, podemos concluir que não é possível satisfazer ambas as condições necessárias para que $f(n)$ esteja em $\Theta(2^n)$. Especificamente, a condição de limitação superior não pode ser satisfeita, o que prova que $f(n) \notin \Theta(2^n)$.

Ex.3

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$\log(\log n)$	$\log n$	$(\log n)^2$	$\sqrt{n}$	n	2^n	3^n	2^{n^2}

Ex.4

Ex.4 (a)

Temos como hipótese: $f_i(n) \in O(g_i(n))$ para $1 \leq i \leq k$. Isso significa que, para cada $f_i(n)$, existem constantes $c_i > 0$ e n_{0i} tais que para todo $n \geq n_{0i}$, temos $f_i(n) \leq c_i g_i(n)$.

Nosso objetivo é provar que $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq C \prod_{i=1}^{k} g_i(n)$ para alguma constante $C > 0$ e para todos os n maiores que um certo n_0.

Como $f_i(n) \leq c_i g_i(n)$, multiplicamos estas inequações para todos os i de 1 a k:

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq \prod_{i=1}^{k} c_i g_i(n)$$

Defina $C = \prod_{i=1}^{k} c_i$. Note que C é uma constante positiva, pois cada c_i é positivo.

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq C \prod_{i=1}^{k} g_i(n)$$

Escolha n_0 como o maior dentre todos os n_{0i}, garantindo que a desigualdade se mantenha para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O\left(\prod_{i=1}^{k} g_i(n)\right)$.

Ex.4 (b)

Por hipótese: $f_1(n), ..., f_k(n) \in O(g(n))$. Isso significa que, para cada $f_i(n)$, existem constantes $c_i > 0$ e n_{0i} tais que para todo $n \geq n_{0i}$, temos $f_i(n) \leq c_i g(n)$.

Nosso objetivo é provar que $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq C(g(n))^k$ para alguma constante $C > 0$ e para todos os n maiores que um certo n_0.

Como $f_i(n) \leq c_i g(n)$, multiplicamos estas inequações para todos os i de 1 a k:

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq \prod_{i=1}^{k} c_i g(n)$$

Defina $C = \prod_{i=1}^{k} c_i$. Note que C é uma constante positiva.

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \leq C(g(n))^k$$

Escolha n_0 como o maior dentre todos os n_{0i}. Portanto, $\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \in O((g(n))^k)$.

Ex.5

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
(i)	$\log^k n$	n^ϵ	S	S	N	N	N
(ii)	n^k	c^n	S	S	N	N	N
(iii)	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	N	N	N	N	N
(iv)	2^n	$2^{n/2}$	N	N	S	S	N
(v)	$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	S	N	S	N	S
(vi)	$\log(n!)$	$\log(n^n)$	S	N	S	N	S

Ex.6

Para o algoritmo A' ser assintoticamente mais rápido que A, $T'(n)$ deve ter uma taxa de crescimento menor que $T(n)$. Vamos avaliar se o Teorema Mestre pode ser utilizado para a obtenção dos valores de $T'(n)$ e $T(n)$.

Vamos resolver $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Temos $a = 7$, $b = 2$, $f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b\ a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b\ a} \\ n^2 & : & n^{\log_2\ 7} \\ n^2 & : & n^{2{,}807\ldots} \end{array}$$

A função $n^{\log_b\ a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial aproximado de $n^{0{,}807}$. Assim, de fato podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e temos que $T(n) = \Theta(n^{2{,}807})$.

Vamos resolver $T(n) = aT(n/4) + n^2$. Temos $a = a$, $b = 4$, $f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b\ a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b\ a} \\ n^2 & : & n^{\log_4\ a} \end{array}$$

Para A' ser assintoticamente mais rápido que A, devemos ter o expoente $log_4\ a$ menor que $\log_2\ 7$ (os dois expoentes da função $n^{\log_b\ a}$ para a resolução de T' e T, respectivamente), ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \log_4\ a & < & \log_2\ 7 \\ \dfrac{\log_2\ a}{\log_2\ 4} & < & \log_2\ 7 \\ \log_2\ a & < & 2\log_2\ 7 \\ \log_2\ a & < & \log_2\ 49 \end{array}$$

Assim, a constante $a = 48$ é o menor inteiro menor que 49.

Vamos resolver $T(n) = 48T(n/4) + n^2$. Temos $a = 48$, $b = 4$, $f(n) = n^2$. Devemos comparar a função $f(n)$ com a função $n^{\log_b\ a}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & : & n^{\log_b\ a} \\ n^2 & : & n^{\log_4\ 48} \\ n^2 & : & n^{2{,}792\ldots} \end{array}$$

Novamente temos que a função $n^{\log_b\ a}$ domina a função $f(n)$ por um fator polinomial aproximado de $n^{0{,}792}$. Assim, de fato podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e temos que $T'(n) = \Theta(n^{2{,}792})$.

Finalmente podemos afirmar que o algoritmo A', que é $\Theta(n^{2{,}792})$, é assintoticamente mais rápido que o algoritmo A, que é $\Theta(n^{2{,}807})$.

Ex.7

Ex.7 (a)

Utilizando o Método da Substituição Regressiva, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3\underbrace{\left(3a_{n-2} - (n-1)3^{n-2}\right)}_{a_{n-1}} - n3^{n-1} \\
&= 3^2a_{n-2} - (n-1)3^{n-1} - n3^{n-1} \\
&= 3^2a_{n-2} - [(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= 3^2\underbrace{\left(3a_{n-3} - (n-2)3^{n-3}\right)}_{a_{n-2}} - [(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= 3^3a_{n-3} - (n-2)3^{n-1}) - [(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= 3^3a_{n-3} - [(n-2)+(n-1)+n]3^{n-1} \\
&\vdots \\
&= 3^ia_{n-i} - [(n-i+1)+\cdots+(n-1)+n]3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n - i = 1$ e sabendo que $a_1 = -1$, temos que $i = n - 1$ e:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3^{n-1}a_1 - [2+\cdots+(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= 3^{n-1}(-1) - [2+\cdots+(n-1)+n]3^{n-1} \\
&= -3^{n-1} \qquad \underbrace{[1+2+\cdots+n]}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos de uma P.A.}} \\
&= -\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência é

$$
a_n = -\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)3^{n-1}, \ n \geq 2, \ a_1 = -1.
$$

Ex.7 (b)

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&= a_{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&= a_{n-3} + 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + 3 \cdot 2^{n-i} + \cdots + 3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&= a_{n-i} + \sum_{k=1}^{i} 3 \cdot 2^{n-k}
\end{aligned}
$$

Fazendo $i = n$ temos $n - i = 0$ e então,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^{i} 3 \cdot 2^{n-k} \\
&= a_0 + 3\sum_{k=1}^{i} 2^{n-k} \\
&= a_0 + 3\underbrace{[2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 2^0]}_{\text{Soma PG de razão 2}} \\
&= a_0 + 3\left[\frac{2^0(2^n-1)}{2-1}\right] \\
&= a_0 + 3[2^n - 1] \\
&= 2 + 3 \cdot 2^n - 3 \\
&= 3 \cdot 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Portanto, a fórmula fechada para a relação de recorrência em questão é dada por $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$.

Ex.8

Ex.8 (a)

Os experimentos contados em a_n dividem-se em dois conjuntos disjuntos, experimentos onde as duas caras foram obtidas até o $(n-1)$-ésimo lançamento, onde existem a_{n-1} experimentos deste tipo, e experimentos onde a segunda cara foi obtida no n-ésimo lançamento, e nestes experimentos só foi obtida uma cara até o $(n-1)$-ésimo lançamento, logo existem $n-1$ experimentos deste tipo.

Pelo princípio aditivo, temos que $a_n = a_{n-1} + n - 1$.

Observe que $a_1 = 0$. Portanto, a relação de recorrência para a_n é:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n - 1, & \text{para } n \geq 2. \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Ex.8 (b)

Temos que $a_n = a_{n-1} + n - 1$, logo:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n - 1 \\
&= a_{n-2} + (n-2) + (n-1) \\
&= a_{n-2} + 2n - (2+1) \\
&= a_{n-3} + (n-3) + 2n - (2+1) \\
&= a_{n-3} + 3n - (3+2+1) \\
&= a_{n-4} + (n-4) + 3n - (3+2+1) \\
&= a_{n-4} + 4n - (4+3+2+1) \\
&\vdots \\
&= a_{n-i} + in - (i + (i-1) + (i-2) + \cdots + 3 + 2 + 1) \\
&= a_{n-i} + in - \sum_{k=1}^{i} k
\end{aligned}$$

Tomando $n - i = 1$, temos $i = n - 1$. Logo,

$$a_n = a_1 + (n-1)n - \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Como $\sum_{k=1}^{i} k = \frac{n(n+1)}{2}$, então

$$a_n = a_1 + n(n-1) - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_n = 0 + \frac{2n(n-1) - n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ex.9

Ex.9 (a)

Seja M_i a quantia que Tadeu deve ao banco no final do i-ésimo mês, para $i \geq 1$. A cada mês o banco cobra $t = 5\%$ de juros e subtrai o valor da prestação paga por Tadeu no valor de $c = 100,00$. Portanto:

$$\begin{array}{rcl} M_0 & = & 1000 \\ M_1 & = & M_0 + 0,05M_0 - 100 \\ & = & (1+0,05)M_0 - 100 \\ & = & 1,05M_0 - 100 \\ M_2 & = & M_1 + 0,05M_1 - 100 \\ & = & (1+0,05)M_1 - 100 \\ & = & 1,05M_1 - 100 \\ & \vdots & \\ M_i & = & M_{i-1} + 0,05M_{i-1} - 100 \\ M_i & = & 1,05M_{i-1} - 100 \end{array}$$

Temos portanto a seguinte relação de recorrência para M_i:

$$\begin{cases} M_0 = 100 \\ M_i = 1,05M_{i-1} - 100, \quad \text{para } i \geq 1. \end{cases}$$

Ex.9 (b)

Dado $i \geq 1$, temos:

$$\begin{array}{rcl} M_i & = & 1,05M_{i-1} - 100 \\ & = & 1,05[1,05M_{i-2} - 100] - 100 \\ & = & 1,05^2M_{i-2} - 1,05 \times 100 - 100 \\ & = & 1,05^2M_{i-2} - 100[1,05+1] \\ & = & 1,05^2[1,05M_{i-3} - 100] - 100[1,05+1] \\ & = & 1,05^3M_{i-3} - 100[1,05^2 + 1,05 + 1] \\ & = & 1,05^3[1,05M_{i-4} - 100] - 1,05[1,05^2 + 1,05 + 1] \\ & = & 1,05^4M_{i-4} - 100[1,05^3 + 1,05^2 + 1,05 + 1] \\ & \vdots & \\ & = & 1,05^kM_{i-k} - 100[1,05^{k-1} + 1,05^{k-2} + \cdots + 1,05^1 + 1,05^0] \\ & = & 1,05^kM_{i-k} - 100\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} 1,05^j \end{array}$$

Como o valor inicial é $M_0 = 1000$, então para escrever M_i em termos de M_0 devemos tomar $i - k = 0$, isto é, $k = i$. Desta maneira, obtemos a seguinte fórmula fechada para M_i:

$$\begin{array}{rcl} M_i & = & 1,05^kM_0 - 100\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} 1,05^j \\ & = & 1,05^i1000 - 100\left(\dfrac{1,05^0[1,05^i - 1]}{1,05-1}\right) \\ & = & 1,05^i1000 - 100\left(\dfrac{1,05^i - 1}{1,05-1}\right) \end{array}$$

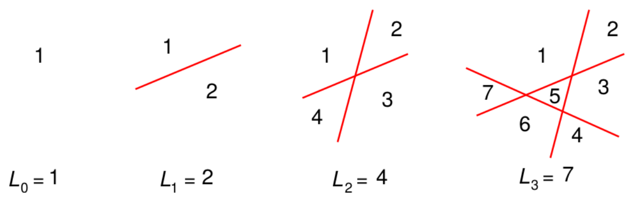
Pois, $\sum_{j=0}^{i-1} 1,05^j$ são os primeiros i termos de uma progressão geométrica de razão $1,05$. Logo:

$$\begin{array}{rcl} M_i & = & 1,05^i1000 - 2000 \times [1,05^i - 1] \\ & = & 1,05^i1000 - 2000 \times 1,05^i - 2000 \\ & = & 2000 - 1,05^i1000 \end{array}$$

Ex.10

$$\begin{aligned}
L_0 &= 1 \\
L_1 &= 2 \\
L_2 &= 4 \\
L_3 &= 7 \\
\vdots &= \vdots \\
L_n &= L_{n-1} + n
\end{aligned}$$

Com três retas, o número máximo de regiões é sete. Observe que se traçarmos a terceira reta sobre a interseção das duas anteriores teremos seis regiões. Assim, quando acrescentamos a n-ésima reta, criamos mais n regiões que são obtidas com a interseção com as $n-1$ retas já existentes. A fórmula fechada para L_n pode ser obtida



a partir da observação que L_n vale a soma de 0 a n mais 1, ou seja,

$$L_n = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Prova por Indução Matemática:

Passo base: $P(n_0) = P(0)$. Para $n = 0$ temos que $L_0 = \frac{0(0+1)}{2} + 1 = 1$, que é o valor presente na equação de recorrência.

Passo indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \to P(k+1)$.

Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e.,

$$P(k) : L_k = \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

para algum inteiro $k \geq 1$.[Hipótese indutiva]. Deve-se mostrar que

$$P(k+1) : L_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
L_{k+1} &= L_k + k \quad \text{[Pela definição da equação de recorrência]} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + 1 + k \quad \text{[Pela hipótese indutiva]} \\
&= \frac{k^2 + 3k + 1}{2} + 1 \\
&= \frac{(k+1) + (k+2)}{2} + 1 \quad \text{[O que devia ser provado]}
\end{aligned}$$

Ex.11

Ex.11 (a)

Para provar que $T^{-}(n) \leq T(n) \leq T^{+}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos utilizar o princípio da indução matemática.

Passo Base: Para $n < 2$, todas as três funções retornam 0, ou seja, $T^{-}(n) = T(n) = T^{+}(n) = 0$.

Passo de Indução: Agora, suponhamos que para algum $k \geq 2$, a afirmação $T^{-}(k) \leq T(k) \leq T^{+}(k)$ seja verdadeira. Precisamos mostrar que isso implica $T^{-}(k+1) \leq T(k+1) \leq T^{+}(k+1)$.

- Para $T(n)$, temos: $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1$.
- Para $T^{-}(n)$, temos: $T^{-}(n) = 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1$.
- Para $T^{+}(n)$, temos: $T^{+}(n) = 2T^{+}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1$.

Vamos provar que $T^{-}(k+1) \leq T(k+1) \leq T^{+}(k+1)$ usando a hipótese de indução:

Para $T^{-}(k+1)$: A recorrência para $T^{-}(n)$ é:

$$T^{-}(n) = 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1$$

Substituindo n por $k+1$, temos:

$$T^{-}(k+1) = 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + k + 1 - 1$$

Agora, aplicamos nossa hipótese de indução. Por hipótese, sabemos que para qualquer valor m, $T^{-}(m) \leq T(m)$. Portanto, para $m = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$, temos:

$$T^{-}\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) \leq T\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right)$$

Multiplicando ambos os lados por 2 e somando k (pois precisamos de $k + 1 - 1 = k$), obtemos:

$$2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + k \leq 2T\left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor\right) + k$$

Comparando com a fórmula de $T^{-}(k+1)$ e $T(k+1)$, concluímos que:

$$T^{-}(k+1) \leq T(k+1)$$

.

Demosntração segue de forma análoga para $T^{+}(k+1)$: Similarmente, $T\left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right) \leq T^{+}\left(\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right)$. Multiplicando ambos os lados por 2 e adicionando k, obtemos $T(k+1) \leq T^{+}(k+1)$. Portanto, usando o princípio da indução matemática, mostramos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^{-}(n) \leq T(n) \leq T^{+}(n)$.

Ex.11 (b)

A recorrência para $T^{-}(n)$ é dada por:

$$T^{-}(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 2, \\ 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Essa recorrência é semelhante à recorrência clássica do MergeSort, mas simplificada, pois considera duas vezes a metade inferior do vetor para a divisão. Para resolver essa recorrência, consideramos o caso $n \geq 2$ e assumimos que n é uma potência de 2 para simplificar a análise. Neste caso, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$. Então a recorrência se torna:

$$T^{-}(n) = 2T^{-}\left(\frac{n}{2}\right) + n - 1.$$

Agora, expandimos essa recorrência:

$$T^{-}(n) = 2\left[2T^{-}\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2} - 1\right] + n - 1 = 4T^{-}\left(\frac{n}{4}\right) + 2n - 3.$$

Continuamos expandindo até atingirmos o caso base ($T^{-}(1) = 0$):

$$T^{-}(n) = 4\left[2T^{-}\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4} - 1\right] + 2n - 3 = 8T^{-}\left(\frac{n}{8}\right) + 3n - 7,$$

e assim por diante. Podemos observar um padrão se formando aqui. Em cada etapa, multiplicamos o número de termos T^- por 2 e adicionamos n com um termo constante decrescente. Se continuarmos esse processo k vezes até atingirmos $T^-(1)$, teremos:

$$T^-(n) = 2^k T^-\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn - (2^k - 1),$$

onde $2^k = n$ (pois assumimos que n é uma potência de 2). Portanto, $k = \log_2(n)$. Substituindo k na expressão, obtemos:

$$T^-(n) = nT^-(1) + n\log_2(n) - (n-1) = n\log_2(n) - (n-1).$$

Portanto, para n sendo uma potência de 2, a solução da recorrência $T^-(n)$ é:

$$T^-(n) = n\log_2(n) - (n-1).$$

A abordagem para $T^+(n)$ é semelhante à de $T^-(n)$, mas aqui consideramos a metade superior do vetor. A recorrência é:

$$T^+(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Para simplificar, novamente assumimos que n é uma potência de 2, de modo que $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$. Assim, a recorrência se torna idêntica à $T^-(n)$ e a solução será a mesma:

$$T^+(n) = n\log_2(n) - (n-1).$$

Essas soluções são válidas sob a suposição de que n é uma potência de 2. Para valores de n que não são potências de 2, a análise seria mais complexa, pois os termos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ não seriam iguais. No entanto, para muitos propósitos práticos, essa análise simplificada oferece uma boa aproximação.

Ex.11 (c)

Para provar que $T^-(n) \approx n\log n$, $T^+(n) \approx n\log n$ e concluir que $T(n) \approx n\log n$, vamos utilizar as soluções encontradas anteriormente para $T^-(n)$ e $T^+(n)$. Nós já determinamos que, sob a suposição de que n é uma potência de 2, tanto $T^-(n)$ quanto $T^+(n)$ são iguais a $n\log_2(n) - (n-1)$.

Para o caso geral de n, podemos aproximar essa expressão como $n\log n$. A razão para esta aproximação é que o termo $-(n-1)$ é linear e, portanto, é dominado pelo termo $n\log_2(n)$ para valores grandes de n. Além disso, a base do logaritmo (2 ou e) não afeta a ordem de crescimento da função, pois a mudança de base do logaritmo é uma constante multiplicativa e, em análises de complexidade, constantes multiplicativas são geralmente ignoradas. Então, para valores grandes de n,

$$T^-(n) \approx n\log n \quad \text{e} \quad T^+(n) \approx n\log n.$$

A recorrência original do MergeSort, $T(n)$, está entre $T^-(n)$ e $T^+(n)$, pois divide o vetor em duas partes quase iguais, ao contrário de sempre tomar a metade inferior ou superior. Portanto, como ambas $T^-(n)$ e $T^+(n)$ se aproximam de $n\log n$, a mesma aproximação se aplica a $T(n)$:

$$T(n) \approx n\log n.$$

Ex.12

Para encontrar uma fórmula fechada para a sequência recursiva definida por:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 2 & \text{se } n = 1 \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Precisamos resolver a equação característica associada à parte recursiva da definição. A equação característica é obtida ao substituir $f(n)$ por r^n na relação recursiva, o que nos dá a seguinte equação:

$$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$$

Dividindo ambos os lados por r^{n-2} (considerando $r \neq 0$), obtemos:

$$r^2 = 5r - 6$$

As raízes da equação característica são $r = 2$ e $r = 3$. Como as raízes são distintas, a fórmula fechada para a sequência $f(n)$ será uma combinação linear dessas raízes elevadas a n. Assim, a fórmula geral para $f(n)$ é:

$$f(n) = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

Onde A e B são constantes que devem ser determinadas com base nas condições iniciais da sequência. Para $f(n)$, as condições iniciais são $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$. Vamos usar essas condições para encontrar os valores de A e B.

- Para $n = 0$: $f(0) = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = A + B = 0$
- Para $n = 1$: $f(1) = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 2A + 3B = 2$

Resolvendo o sistema temos que as constantes encontradas são $A = -2$ e $B = 2$. Portanto, a fórmula fechada para a sequência $f(n)$ é:

$$f(n) = -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n.$$