MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

18 de setembro de 2023

Revisão de relações de ordem

Definições

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Definições

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).
  - Pode haver zero, um ou mais minimais dependendo da relação e do conjunto A.

Definições

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).
  - Pode haver zero, um ou mais minimais dependendo da relação e do conjunto A.
- O mínimo de A (com respeito a $\mathcal{R}$) é um elemento de A que é "menor" que todos os outros ($\forall b \in A, (\min(A), b) \in \mathcal{R}$).

Definições

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).
    - Pode haver zero, um ou mais minimais dependendo da relação e do conjunto A.
- O mínimo de A (com respeito a $\mathcal{R}$) é um elemento de A que é "menor" que todos os outros ($\forall b \in A, (\min(A), b) \in \mathcal{R}$).
    - O mínimo é sempre um minimal.

Definições

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).
  - Pode haver zero, um ou mais minimais dependendo da relação e do conjunto A.
- O mínimo de A (com respeito a $\mathcal{R}$) é um elemento de A que é "menor" que todos os outros ($\forall b \in A, (\min(A), b) \in \mathcal{R}$).
  - O mínimo é sempre um minimal.
  - Se $\min_{\mathcal{R}}(A)$ existir, ele é único.

- Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
- Um elemento $m \in A$ é minimal (com respeito a $\mathcal{R}$) se nenhum outro elemento é "menor" que ele ($\nexists x \in A \setminus \{m\} : (x, m) \in \mathcal{R}$).
  - Pode haver zero, um ou mais minimais dependendo da relação e do conjunto A.
- O mínimo de A (com respeito a $\mathcal{R}$) é um elemento de A que é "menor" que todos os outros ($\forall b \in A, (\min(A), b) \in \mathcal{R}$).
  - O mínimo é sempre um minimal.
  - Se $\min_{\mathcal{R}}(A)$ existir, ele é único.
- Máximo e maximal são definidos de forma análoga.

Mínimo, máximo, minimal, máximal da relação de divisão

Seja $A = \{0, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ e considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A : a \mid b\}$$

Numa aula anterior, vimos que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem. Vamos desenhar o diagrama de Hasse e identificar o mínimo, o máximo, o(s) minimais e o(s) máximais.

Exemplo de relação de ordem com matrizes

Seja M o conjunto de matrizes 2×2 com entradas reais. Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in M : \det(A) \leq \det(B)\}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva, mas não é antissimétrica.

Exemplo de relação de ordem com matrizes

Seja M o conjunto de matrizes 2×2 com entradas reais. Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in M : \det(A) \leq \det(B)\}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva, mas não é antissimétrica.

Vamos mostrar que alterando ligeiramente $\mathcal{R}$, obtemos uma relação de ordem:

$$\mathcal{S} = \{(A, B) \in M : A = B \vee \det(A) < \det(B)\}$$

Exemplo de relação de ordem com matrizes

Seja M o conjunto de matrizes 2×2 com entradas reais. Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in M : \det(A) \leq \det(B)\}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva, mas não é antissimétrica.

Vamos mostrar que alterando ligeiramente $\mathcal{R}$, obtemos uma relação de ordem:

$$\mathcal{S} = \{(A, B) \in M : A = B \vee \det(A) < \det(B)\}$$

Vamos desenhar o diagrama de Hasse restringindo M ao seguinte conjunto:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Relações de equivalência

Às vezes, não estamos interessados em elementos particulares de um conjunto, mas em classes de elementos que satisfazem uma mesma propriedade.

Por exemplo, se tivermos uma tabela com dados de pessoas e quisermos agrupar pela idade...

Não estamos interessados em cada pessoa em particular, mas em "classes de pessoas", como

$$P_k = \{\text{pessoas que têm } k \text{ anos}\}$$

De certa forma, todas as pessoas num mesmo conjunto P_k são equivalentes (para essa aplicação).

Definição

Se quisermos uma relação (binária) $\mathcal{E}$ que imita a igualdade e nos permite agrupar elementos que são considerados equivalentes, o que precisamos?

Definição

Se quisermos uma relação (binária) $\mathcal{E}$ que imita a igualdade e nos permite agrupar elementos que são considerados equivalentes, o que precisamos?

- Um elemento deve ser equivalente a si mesmo:
  - Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{E}$

Definição

Se quisermos uma relação (binária) $\mathcal{E}$ que imita a igualdade e nos permite agrupar elementos que são considerados equivalentes, o que precisamos?

- Um elemento deve ser equivalente a si mesmo:
  - Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{E}$
- Se x é equivalente a y, então y deve ser equivalente a x:
  - Simetria: $(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{E}$

Definição

Se quisermos uma relação (binária) $\mathcal{E}$ que imita a igualdade e nos permite agrupar elementos que são considerados equivalentes, o que precisamos?

- Um elemento deve ser equivalente a si mesmo:
  - Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{E}$
- Se x é equivalente a y, então y deve ser equivalente a x:
  - Simetria: $(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{E}$
- Se x é equivalente a y e y equivalente a z, então x deve ser equivalente a z:
  - Transitividade: $(x, y) \in \mathcal{E} \wedge (y, z) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{E}$

Definição

Se quisermos uma relação (binária) $\mathcal{E}$ que imita a igualdade e nos permite agrupar elementos que são considerados equivalentes, o que precisamos?

- Um elemento deve ser equivalente a si mesmo:
  - Reflexividade: $(x, x) \in \mathcal{E}$
- Se x é equivalente a y, então y deve ser equivalente a x:
  - Simetria: $(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{E}$
- Se x é equivalente a y e y equivalente a z, então x deve ser equivalente a z:
  - Transitividade: $(x, y) \in \mathcal{E} \wedge (y, z) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{E}$

Definição

Dizemos que $\mathcal{E} \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência em A se $\mathcal{E}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo de relação de equivalência

Seja A o conjunto de todas as pessoas e
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$.

Exemplo de relação de equivalência

Seja A o conjunto de todas as pessoas e
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$.

- Reflexividade: uma pessoa sempre nasce no mesmo mês que ela mesma.
- Simetria: Claramente, se $(x, y) \in \mathcal{E}$, então $(y, x) \in \mathcal{E}$
- Transitividade: se x nasceu no mesmo mês que y e y no mesmo mês que z, então x e z nasceram no mesmo mês.

Note que a transitividade nos permite agrupar as pessoas em conjuntos, chamados de classes de equivalência:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$$

i.e., $[x]_{\mathcal{R}}$ tem todas as pessoas que nasceram no mesmo mês que x.

Note que a transitividade nos permite agrupar as pessoas em conjuntos, chamados de classes de equivalência:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$$

i.e., $[x]_{\mathcal{R}}$ tem todas as pessoas que nasceram no mesmo mês que x.

- Pela reflexividade, nenhuma classe de equivalência é vazia: ao menos $x \in [x]_{\mathcal{R}}$.

Note que a transitividade nos permite agrupar as pessoas em conjuntos, chamados de classes de equivalência:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$$

i.e., $[x]_{\mathcal{R}}$ tem todas as pessoas que nasceram no mesmo mês que x.

- Pela reflexividade, nenhuma classe de equivalência é vazia: ao menos $x \in [x]_{\mathcal{R}}$.
- Se x nasceu no mesmo mês que y, então $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.

Note que a transitividade nos permite agrupar as pessoas em conjuntos, chamados de classes de equivalência:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : x \text{ nasceu no mesmo mês que } y\}$$

i.e., $[x]_{\mathcal{R}}$ tem todas as pessoas que nasceram no mesmo mês que x.

- Pela reflexividade, nenhuma classe de equivalência é vazia: ao menos $x \in [x]_{\mathcal{R}}$.
- Se x nasceu no mesmo mês que y, então $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.
- Se x não nasceu no mesmo mês que y, então $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Definimos o conjunto de todas as classes de equivalência como

$$A/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}$$

(lê-se “A quociente R”).

Note que, geralmente, várias classes de equivalência são iguais, então a cardinalidade de $A/\mathcal{R}$ é, geralmente, muito menor que a cardinalidade de A.

Definimos o conjunto de todas as classes de equivalência como

$$A/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}$$

(lê-se "A quociente R").

Note que, geralmente, várias classes de equivalência são iguais, então a cardinalidade de $A/\mathcal{R}$ é, geralmente, muito menor que a cardinalidade de A.

No nosso exemplo, as classes de equivalência são

$$P_k = \{\text{pessoas que nasceram no } k\text{-ésimo mês}\}$$

para $1 \leq k \leq 12$.
Assim,

$$A/\mathcal{R} = \{P_1, P_2, ..., P_{12}\}$$

Algumas propriedades básicas de classes de equivalência

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A.
Se dois elementos a e b de A são equivalentes (i.e., $(a, b) \in \mathcal{R}$), escrevemos $a \equiv b$.

1. A classe é independente de seu representante: $a \in [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$
2. Duas classes são iguais ou totalmente diferentes:
   2.1 $a \equiv b \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$
   2.2 $a \not\equiv b \Leftrightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$
3. $A/\mathcal{R}$ é uma partição de A:
   3.1 $\cup_{X \in A/\mathcal{R}} X = A$
   3.2 $(X, Y \in A \wedge X \neq Y) \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
4. Se A é finito, podemos escrever $A/\mathcal{R} = \{X_1, ..., X_\ell\}$ para algum ℓ e temos

$$|A| = \sum_{i=1}^{\ell} |X_i|$$

Um exemplo de relação de equivalência

Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}$$

Como mostrar que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência?

- Reflexividade: trivial... $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$.
- Simétrica: $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$?
- Transitiva: $x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$?

Em geral, qualquer número real x pode ser escrito como $x = z + d$ com $z = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $d = x - z \in [0, 1[$.

Então $x \equiv y$ se x e y têm a mesma parte decimal (i.e., $x = z + d$ e $y = z' + d$).

Então, as classes de equivalência são, para todo $d \in [0, 1[$,

$$E_d = \{\text{números reais com parte decimal } d\}$$

Logo, $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{E_d : d \in [0, 1[\ \}$.

Ou seja, podemos interpretar o quociente $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ como o intervalo semiaberto $[0, 1[$.

Perguntas, observações, comentários?