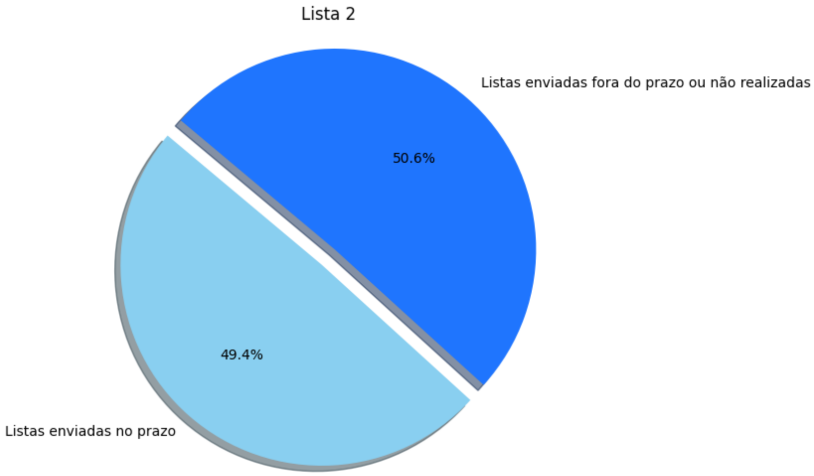
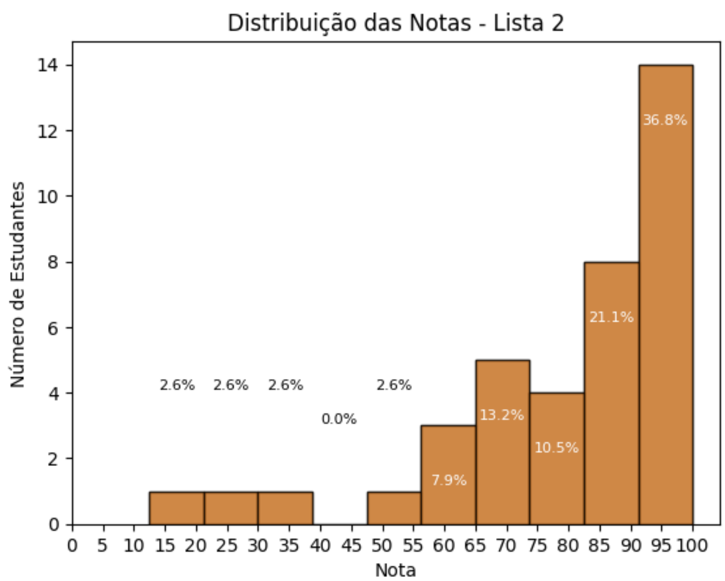
Estatísticas da Lista 2





Para a lista 2, quatro exercícios aleatórios foram sorteados para correção. Os exercícios são: Ex.2, Ex.4, Ex.5 e Ex.6. A nota final da lista 2 é a média aritmética simples dos quatro exercícios.

Lista 2 - Estatísticas					
	Ex.2	Ex.4	Ex.5	Ex.6	Nota Final
Mínimo	0	0	0	0	12.5
Máximo	100	100	100	100	100
Média	77	76	85	81	80
Mediana	100	90	100	100	87.5
Moda	100	90	100	100	100

Gabarito da Lista 2

Ex.1) Afirmação: Para todo par de inteiros m e n, a diferença $m - n$ é par se, e somente se, ambos m e n têm a mesma paridade.

Proof. Primeiramente, vamos provar que se m e n têm a mesma paridade, então $m - n$ é par.

Método 1: Usando definições de números pares e ímpares. Se ambos m e n são pares, então existem inteiros k e l tais que $m = 2k$ e $n = 2l$. Assim:

$$m - n = 2k - 2l = 2(k - l)$$

Como $(k - l)$ é um inteiro, então $m - n$ é um número par. Se ambos m e n são ímpares, então existem inteiros k e l tais que $m = 2k + 1$ e $n = 2l + 1$. Assim:

$$m - n = (2k + 1) - (2l + 1) = 2k - 2l = 2(k - l)$$

Novamente, $(k - l)$ é um inteiro, então $m - n$ é um número par. Portanto, se m e n têm a mesma paridade, $m - n$ é par.

Método 2: Usando propriedades de paridade. Se ambos m e n são pares ou ambos são ímpares, então m e n têm o mesmo "resto" quando divididos por 2. Afirmamos então que a diferença $m-n$ também será divisível por 2, e portanto, será par. Isso se deve ao fato de que:

Sejam a e b dois números inteiros que têm o mesmo resto quando divididos por 2. Isso significa que existem números inteiros q_1 e q_2 tais que $a = 2q_1 + r$ e $b = 2q_2 + r$, onde r é o resto e $0 \leq r < 2$. Portanto, r pode ser 0 ou 1. Segue que a diferença entre a e b:

$$\begin{aligned} a - b &= (2q_1 + r) - (2q_2 + r) \\ a - b &= 2q_1 - 2q_2 \\ a - b &= 2(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

A diferença $a - b$ é claramente divisível por 2, pois é um múltiplo de 2.

Agora, vamos provar a recíproca: se $m - n$ é par, então m e n têm a mesma paridade. Suponha que $m - n$ seja par. Existem quatro possíveis combinações de paridades para m e n: (1) m par e n par; (2) m par e n ímpar; (3) m ímpar e n par; (4) m ímpar e n ímpar. Nos casos 1 e 4, m e n têm a mesma paridade, o que é consistente com nossa suposição. No caso 2, $m - n$ é ímpar, porque a diferença entre um número par e um ímpar é ímpar. Isso contradiz nossa suposição de que $m - n$ é par. No caso 3, $m - n$ é novamente ímpar, porque a diferença entre um número ímpar e um par é ímpar. Isso também contradiz nossa suposição. Portanto, os únicos casos possíveis são os casos 1 e 4, onde m e n têm a mesma paridade.

Conclusão: Demonstramos que para todo par de inteiros m e n, a diferença $m - n$ é par se, e somente se, ambos m e n têm a mesma paridade. $\square$

Ex.2) Afirmação: Para todo par de inteiros m e n, a diferença $m^3 - n^3$ é ímpar se, e somente se, $m - n$ é ímpar.

Proof. Seja $m - n$ ímpar. Isso significa que um dos números é par e o outro é ímpar, pois a diferença de dois números de mesma paridade é par (conforme o exercício anterior). Sem perda de generalidade, suponhamos que m seja ímpar e n seja par. Então, podemos escrever $m = 2a + 1$ e $n = 2b$, onde a e b são inteiros. Agora, vamos calcular $m^3 - n^3$:

$$m^3 - n^3 = (2a + 1)^3 - (2b)^3$$
$$m^3 - n^3 = (8a^3 + 12a^2 + 6a + 1) - 8b^3$$
$$m^3 - n^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 - 8b^3$$

Observe que todos os termos, exceto $+1$, são divisíveis por 2. Portanto, $m^3 - n^3$ é ímpar.

Agora, vamos provar a outra direção. Suponha que $m^3 - n^3$ seja ímpar. Pelo exercício 1, se $m - n$ fosse par, então m e n teriam a mesma paridade. Mas isso contradiz o fato de que $m^3 - n^3$ é ímpar, pois a diferença de dois cubos de mesma paridade é par. Portanto, $m - n$ deve ser ímpar.

Assim, provamos que para todo par de inteiros m e n, a diferença $m^3 - n^3$ é ímpar se, e somente se, $m - n$ é ímpar. $\square$

Ex.3) Contraexemplos para as afirmações:

1. Para a afirmação $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^3 + x^2 + 2x$ é par $\Leftrightarrow x$ é par:

   Escolhendo $x = 1$ (que é ímpar), obtemos $x^3 + x^2 + 2x = 4$, que é par. Portanto, a afirmação é verdadeira para $x = 1$.

2. Para a afirmação $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^3 + x^2y - xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2$ ou $y = -2x$:

   Tomando $x = 1$ e $y = 1$, obtemos $x^3 + x^2y - xy - y^2 = 0$. No entanto, y não é nem $2x^2$ nem $-2x$. Portanto, a afirmação é falsa para $x = 1$ e $y = 1$.

3. Para a afirmação "Para qualquer inteiro n, se $n+1$ é divisível por 3, então n^3 é divisível por 3":

   Escolhendo $n = 2$, $n+1 = 3$ é divisível por 3, mas $n^3 = 8$ não é. Portanto, a afirmação é falsa para $n = 2$.

4. Para a afirmação "Não existe nenhum conjunto X tal que $\mathbb{Z} \in X$ e $\{\sqrt{p} : p \text{ é primo maior que } 2\} \subseteq X$":

   Podemos construir um conjunto X que satisfaça ambas as condições. Um exemplo seria:

   $$X = \{\mathbb{Z}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots\}$$

   Portanto, temos um contraexemplo para a afirmação.

Ex.4) Afirmação: Para todo $n \geq 0$, $G_n \leq 3^n$.

Proof. **Base da Indução:**

Para $n = 0$: $G_0 = 1 \leq 3^0 = 1$.
Para $n = 1$: $G_1 = 3 \leq 3^1 = 3$.
Para $n = 2$: $G_2 = 9 \leq 3^2 = 9$.
Para $n = 3$: $G_3 = G_2 + 3G_1 + 3G_0 = 9 + 9 + 3 = 21 \leq 27 = 3^3$.
Os casos base são verdadeiros.

Passo de Indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum $k > 3$, ou seja, suponha que:

$$G_k \leq 3^k, \quad G_{k-1} \leq 3^{k-1}, \quad G_{k-2} \leq 3^{k-2}$$

Queremos mostrar que:

$$G_{k+1} \leq 3^{k+1}$$

Usando a definição dada:

$$G_{k+1} = G_k + 3G_{k-1} + 3G_{k-2}$$

Substituindo pelas nossas suposições:

$$G_{k+1} \leq 3^k + 3 \times 3^{k-1} + 3 \times 3^{k-2}$$

$$G_{k+1} \leq 3^k + 3^k + 3^{k-1}$$

$$G_{k+1} \leq 2 \times 3^k + 3^{k-1}$$

Como $3^k > 3^{k-1}$, então:

$$G_{k+1} \leq 2 \times 3^k + 3^{k-1} \leq 2 \times 3^k + 3^k \leq 3 \times 3^k \leq 3^{k+1}.$$

Após simplificar a desigualdade, encontramos que ela é sempre verdadeira para todo $k > 3$. Portanto $G_{k+1} \leq 3^{k+1}$. Isso conclui o passo de indução. Portanto, por indução matemática, provamos que $G_n \leq 3^n$ para todo $n \geq 0$. □

Ex.5) Afirmação: Para todo $n \in \mathbb{N}$, a seguinte identidade é válida:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Proof. **Base da Indução:**

Para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Passo de Indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum $\mathbb{N} \ni k > 1$, ou seja, suponha que:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Queremos mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

Usando a hipótese de indução:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Após expandir a expressão do lado direto da igualdade anterior, obtemos:

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k^2 + 2k + 1)}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

As duas expressões são idênticas, portanto a identidade é válida para $n = k + 1$ se for válida para $n = k$.

Conclusão: Pela base da indução e pelo passo de indução, a identidade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ex.6) Solução:

1. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $4 \nmid a^2 \Rightarrow a$ é ímpar

   Proof. Se a for par, então $a = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $a^2 = 4k^2$ é divisível por 4. Portanto, se 4 não divide a^2, então a não pode ser par, o que implica que a é ímpar. □

2. Se $a^3 - a \geq 0$, então $a > 2$.

   Contraexemplo: Considere $a = 0$. Temos que $a^3 - a = 0 \geq 0$, mas a não é maior que 2.

3. $\forall a \in \mathbb{Z},\ 3 \not| a^2 \Rightarrow 3 \not| a$

   Proof. Se 3 divide a, então $a = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $a^2 = 9k^2$ é divisível por 3. Portanto, se 3 não divide a^2, então 3 não pode dividir a. □

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3|(n^2 + n + 1)$

   Contraexemplo: Ao verificar para os primeiros valores de n:

$$\begin{aligned} n = 1 : &\quad n^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 3 \\ n = 2 : &\quad n^2 + n + 1 \equiv 1 \mod 3 \\ n = 3 : &\quad n^2 + n + 1 \equiv 1 \mod 3 \\ n = 4 : &\quad n^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 3 \\ n = 5 : &\quad n^2 + n + 1 \equiv 1 \mod 3 \end{aligned}$$

   Como podemos ver, para $n = 2, 3$, e 5, $n^2 + n + 1$ não é divisível por 3. Portanto, temos um contraexemplo para a afirmação.

Ex.7 (a) Prove que para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Proof. **Prova por indução em n:**

Base da indução: Para $n = 0$. Se A tem 0 elementos, então $A = \emptyset$. O conjunto das partes de $\emptyset$ é $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, que tem 1 elemento, que é 2^0. Portanto, a afirmação é verdadeira para $n = 0$.

Passo de indução: Suponha que para todo conjunto A com n elementos, $P(A)$ tenha 2^n elementos. Agora suponha que A tenha $n + 1$ elementos. Seja a qualquer elemento de A, e seja $A' = A \setminus \{a\}$. Então A' tem n elementos, então pela hipótese de indução $P(A')$ tem 2^n elementos. Existem dois tipos de subconjuntos de A: aqueles que contêm a como um elemento e aqueles que não contêm. Os subconjuntos que não contêm a são apenas os subconjuntos de A', e existem 2^n destes. Aqueles que contêm a são os conjuntos da forma $X \cup \{a\}$, onde $X \in P(A')$, e também existem 2^n escolhas possíveis para X. Assim, o número total de elementos de $P(A)$ é $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Conclusão: Por indução, para todo conjunto A com n elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos. □

Ex.7 (b) Se A é um conjunto, defina $\mathcal{P}_2(A)$ como o conjunto de todos os subconjuntos de A que têm exatamente dois elementos. Prove que para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}_2(A)$ tem $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos.

Proof. Dado um conjunto A com n elementos, para formar um subconjunto com exatamente dois elementos, podemos escolher o primeiro elemento de A de n maneiras e o segundo elemento de $n-1$ maneiras (pois não podemos repetir a escolha). Assim, o total de maneiras de escolher 2 elementos de A é $n(n-1)$. No entanto, cada par foi contado duas vezes (uma vez para cada ordem dos dois elementos). Portanto, o número de subconjuntos de A com exatamente dois elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$.

Conclusão: Para todo conjunto A com n elementos, $\mathcal{P}_2(A)$ tem $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos. □

Ex.8) Afirmação: Pelo menos um dos números α, β, γ é maior ou igual à média aritmética dos três.

Proof. Considere M como a média aritmética dos três números. Assim,

$$M = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

Suponha, por absurdo, que nenhum dos números α, β, γ seja maior ou igual a M. Isso implica que todos eles são menores que M. Então, $\alpha, \beta, \gamma < M$. Somando os três número obtemos $\alpha + \beta + \gamma < 3M$. Mas, substituindo M pela média, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma < 3 \times \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \alpha + \beta + \gamma.$$

Isso é um absurdo lógico. Assim, a suposição inicial estava errada. Portanto, pelo menos um dos números α, β, γ deve ser maior ou igual a M.

Conclusão: Pelo menos um dos números α, β, γ é maior ou igual à média aritmética dos três. □

Ex.9) Afirmação: Um polígono triangulado P com quatro ou mais lados possui pelo menos dois triângulos exteriores.

Proof. **Base da indução:** Para um polígono com 4 lados (quadrilátero), ao traçarmos uma diagonal, obtemos dois triângulos. Ambos os triângulos terão dois lados que são lados do polígono original, então ambos são triângulos exteriores.

Passo de indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum polígono P com k lados. Queremos mostrar que é verdadeira para um polígono com $k+1$ lados. Considere um polígono P' com $k+1$ lados. Escolha um vértice v de P'. Desenhe uma diagonal a partir de v para o vértice w, onde w é o sucessor do sucessor de v (isso pode ser no sentido horário ou anti-horário). Dessa forma, o segmento vw não é um lado do polígono e divide P' em um triângulo T e um polígono P'' com k lados. Pela hipótese de indução, P'' possui pelo menos dois triângulos exteriores. Observe que T é um triângulo exterior de P'. Além disso, pelo menos um dos triângulos exteriores de P'' não compartilha o lado vw (já que P'' tem pelo menos dois triângulos exteriores). Portanto, P' possui pelo menos dois triângulos exteriores.

Conclusão: Pela base e pelo passo de indução, concluímos que qualquer polígono triangulado com quatro ou mais lados possui pelo menos dois triângulos exteriores. □

Ex.10) Afirmação: Para todo $n \in \mathbb{N}$, 2 divide $n^2 + n$.

Proof. Consideremos dois casos:

Caso 1: n é par. Se n é par, então podemos escrever n como $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

Claramente, 2 divide $2(2k^2 + k)$.

Caso 2: n é ímpar. Se n é ímpar, então podemos escrever n como $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$n^2+n = (2k+1)^2+(2k+1) = 4k^2+4k+1+2k+1 = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1)$$

Claramente, 2 divide $2(2k^2 + 3k + 1)$.

Nos dois casos, vemos que 2 divide $n^2 + n$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, 2 divide $n^2 + n$.

Conclusão: A afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □