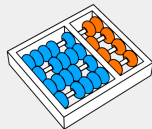


MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

22 de novembro de 2023



Instituto de computação



UNICAMP

1 Estimativas assintóticas para relações de recorrência

2 Perguntas, observações, comentários?

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para alguns tipos específicos de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para alguns tipos específicos de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Mas, e se só estivermos interessados em achar uma estimativa assintótica?

Então, achar uma fórmula fechada pode ser desnecessariamente trabalhoso...

Já vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1 \in O(2^n)$.

Então, é natural achar que $g(n) = 2g(n-1) - 1 \in O(2^n)$.

Como podemos provar isso?

Considere $g(0) = 1$.

Exemplo com passo multiplicativo

Em vez de definirmos a relação de recorrência em função de um passo $n - k$, vamos considerar n/k .

Por exemplo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n/2) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar g tal que $f(n) \in O(g(n))$.

Exemplo com passo multiplicativo

Agora considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n/2) + 3n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese supondo algo como $f(k) \leq cg(n) + d$ e depois ajustamos d para obtermos o que queremos.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese supondo algo como $f(k) \leq cg(n) + d$ e depois ajustamos d para obtermos o que queremos.

Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} 10 & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n^2)$.

Um exemplo onde estimativa assintótica é claramente mais fácil que fórmula fechada

Considere a função

$$f(n) = f(n/3) + f(2n/3) + n$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Perguntas, observações, comentários?