MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

13 de novembro de 2023

1. Resolução de recorrências via equação característica

2. Estimativas assintóticas para relações de recorrência

3. Perguntas, observações, comentários?

Resolução de recorrências via equação característica

Recorrência com dois termos recursivos

Considere a recorrência

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$$

Tentar aplicar o método da iteração e substituição pode se mostrar muito laborioso...
Então como podemos achar uma fórmula fechada para essa recorrência?

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$$

Considere soluções do tipo $a_n = cx^n$ para algum $(c, x) \in \mathbb{R}^2$...
Se isso funcionasse, teríamos

$$cx^n = cx^{n-1} + 2cx^{n-2}$$

que equivale a

$$x^2 - x^1 - 2 = 0$$

Então, de alguma forma, a solução da recorrência está conectada às raízes do polinômio...

Solução para recorrências lineares homogêneas de grau 2

Teorema

Sejam c_1 e c_2 constantes não nulas. Considere a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} i_0 & \text{se } n = 0 \\ i_1 & \text{se } n = 1 \\ c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Defina o polinômio $p(X) = X^2 - c_1 X - c_2$. Se $p(X)$ tem duas raízes diferentes r_1 e r_2, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

onde α_1, α_2 são constantes determinadas por i_0 e i_1.

Veremos o caso $r_1 = r_2$ posteriormente.

Fórmula fechada para sequência de Fibonacci

A sequência é definida como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

com condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Vemos que ela é homogêna, linear e de grau 2, logo, podemos aplicar o teorema...

Fórmula fechada para sequência de Fibonacci

A sequência é definida como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

com condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Vemos que ela é homogêna, linear e de grau 2, logo, podemos aplicar o teorema...

Obtemos assim

$$F_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

e $\alpha_1 = 1/\sqrt{5} = -\alpha_2$.

Exemplo: contando strings binárias sem 00

Existem quantas strings binárias de $n \geq 1$ caracteres, ou seja, em $\{0, 1\}^n$, que não tenham dois zeros seguidos?

Exemplo: contando strings binárias sem 00

Existem quantas strings binárias de $n \geq 1$ caracteres, ou seja, em $\{0,1\}^n$, que não tenham dois zeros seguidos?

Definindo s_n como a quantidade de tais strings, temos $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ e

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Podemos usar o teorema para achar uma fórmula fechada para s_n.

Solução para recorrências lineares homogêneas de grau 2

Teorema

Sejam c_1 e c_2 constantes não nulas. Considere a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} i_0 & \text{se } n = 0 \\ i_1 & \text{se } n = 1 \\ c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Defina o polinômio $p(X) = X^2 - c_1 X - c_2$. Se $p(X)$ tem uma raiz r de multiplicidade 2 (i.e., $p(X) = (X - r)^2$), então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \alpha_1 \cdot r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

onde α_1, α_2 são constantes determinadas por i_0 e i_1.

Exemplo

Considere a relação de recorrência

$$a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ para } n \geq 2$$

Ela é homogênea, linear e de grau dois, logo, podemos aplicar um dos dois teoremas...

Exemplo

Considere a relação de recorrência

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ para } n \geq 2$$

Ela é homogênea, linear e de grau dois, logo, podemos aplicar um dos dois teoremas...

- polinômio associado: $p(X) = X^2 - 6X + 9$
- raiz única: $p(X) = (X - 3)^2$
- $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$
- Condição inicial: $1 = a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$
- Condição inicial: $0 = a_1 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 = -1$
- Finalmente: $a_n = 3^n - n3^n$

Exemplo

Considere a relação de recorrência

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ para } n \geq 2$$

Ela é homogênea, linear e de grau dois, logo, podemos aplicar um dos dois teoremas...

- polinômio associado: $p(X) = X^2 - 6X + 9$
- raiz única: $p(X) = (X-3)^2$
- $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$
- Condição inicial: $1 = a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$
- Condição inicial: $0 = a_1 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 = -1$
- Finalmente: $a_n = 3^n - n3^n$

Podemos verificar que $a_n = 3^n - n3^n$ satisfaz de fato $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2}$.

Generalizações para grau maior que dois

Não vamos cobrir neste curso, mas vale salientar que esse mesmo método se aplica também a relações de recorrência de grau k:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + ... + c_k f(n-k)$$

Generalizações para recorrências lineares não homogêneas

Não vamos cobrir neste curso, mas, com um método similar, podemos achar soluções de relações de recorrência não homogêneas de grau k:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \ldots + c_k f(n-k) + g(n)$$

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Mas, e se só estivermos interessados em achar uma estimativa assintótica?

Então, achar uma fórmula fechada pode ser desnecessariamente trabalhoso...

Já vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1 \in O(2^n)$.

Então, é natural achar que $g(n) = 2g(n-1) - 1 \in O(2^n)$.

Como podemos provar isso?

Considere $g(0) = 1$.

Exemplo com passo multiplicativo

Em vez de definirmos a relação de recorrência em função de um passo $n - k$, vamos considerar n/k.

Por exemplo:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n/2) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar g tal que $f(n) \in O(g(n))$.

Perguntas, observações, comentários?