MC358 - 2s2023 - Lista de exercícios 03

IC - Unicamp

2023

1. Numa aula, vimos um resultado, conhecido como Identidade de Bézout, que diz

$$\texttt{mdc}(a, b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ d = u \cdot a + v \cdot b.$$

   (a) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se existem $d, u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $d = u \cdot a + v \cdot b$, então $d = \texttt{mdc}(a, b)$? Prove ou refute.

   (b) E para o caso $d = 1$? É verdade que $\exists u, v \in \mathbb{Z},\ 1 = u \cdot a + v \cdot b \Rightarrow \texttt{mdc}(a, b) = 1$? Prove ou refute.

2. Demonstre as seguintes afirmações sobre o máximo divisor comum e sobre divisibilidade:

   (a) Prove que se $\texttt{mdc}(a, n) = 1$ e $n \mid (ab)$, então $n \mid b$.

   (b) Prove que $\texttt{mdc}(a, b) = 1$, se, e somente se, $\texttt{mdc}(a, b^n) = 1$ para todo natural $n \geq 1$.

   (c) Conclua que $\texttt{mdc}(a, n) = 1$ e $n \mid (a^k b)$, para algum inteiro $k \geq 1$, então $n \mid b$.

3. (a) Prove que, para todo n natural, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   (b) Encontre uma fórmula para $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$, para $n \in \mathbb{N}$, e prove que sua fórmula está correta.

4. Prove que para todo $n \geq 1$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

5. Se $sen\ \alpha \neq 0$, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$cos\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2^2\alpha \cdots cos\ 2^n\alpha = \frac{sen\ 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} sen\ \alpha}.$$

   Sugestão: Use a fórmula $sen\ 2\beta = 2 sen\ \beta\ cos\ \beta$.

6. Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices, $n \geq 3$, é $180(n-2)$.

7. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Considere as relações $\mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in A \times B : 2a = b\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(b, a) \in B \times A : a \neq b\}$, e $\mathcal{R}_3 = \{(a, b) \in A \times B : a^2 = b\}$. Liste os elementos das seguintes relações:

   (a) $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$

   (b) $\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)$

   (c) $\mathcal{R}_2^{-1} \circ \mathcal{R}_1^{-1}$

8. Prove que uma relação R em um conjunto X é transitiva se, e somente se, para todo n natural, $R^n \subseteq R$.

9. Seja $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, defina $D_x^+ = \{d \in \mathbb{N}^* : d \mid x\}$, ou seja, o conjunto de divisores positivos de x. Para cada relação a seguir, verifique se ela é uma relação de ordem sobre o conjunto $\mathbb{N}^*$. Em caso afirmativo, desenhe o diagrama de Hasse restringindo o domínio a $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ em vez de $\mathbb{N}^*$. Além disso, identifique o mínimo, se houver, e o(s) minimal(ais).

   (a) $\mathcal{R}_1 = \{(a, b) : |D_a^+| \leq |D_b^+|\}$

   (b) $\mathcal{R}_2 = \{(a, b) : D_a^+ \subseteq D_b^+\}$