DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

21 / 09 / 23

Nome: Marcos Rerezo Pedroso RA: 202093 Turma:

MC358 - 2S2023 - 3ª Lista de Exercícios

① Numa aula, vimos um resultado, conhecido como Identidade de Bézout, que diz: $\text{mdc}(a,b) = d \Rightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z},\ d = u.a + v.b$

a) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se existem $d, u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $d = u.a + v.b$, então $d = \text{mdc}(a,b)$? Prove ou refute.

A recíproca da Identidade de Bézout não é verdadeira em geral. Ou seja, se existem números inteiros d, u e v tais que $d = u.a + v.b$, isso não implica necessariamente que d seja o máximo divisor comum (mdc) de a e b. Vamos ilustrar isso por meio de um exemplo:

Considere $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 6$ e $b = 9$. Vamos encontrar valores de u e v tais que $d = u.a + v.b$. Vamos tentar encontrar valores de u e v para $d = 3$, que é o mdc de 6 e 9.

Podemos escrever: $3 = u.6 + v.9$

Agora, tentemos encontrar valores de u e v que satisfaçam essa questão. Seja $u = 1$ e $v = -1$, obtemos: $3 = 1.6 + (-1)9 \Rightarrow 3 = 6 - 9 \Rightarrow 3 = -3$?

Porém, o mdc $(6,9) = 3$, mas a equação acima não nos dá o resultado correto para o mdc, pois -3 não é o mdc de 6 e 9.

Logo, a recíproca da Identidade de Bézout não é verdadeira em geral. Ter valores de u, v e d tais que $d = u.a + v.b$ não garante que d seja o mdc de a e b. Esta identidade afirma apenas que, se o mdc de a e b é igual a d, então existem valores inteiros u e v que satisfaçam a equação, mas não implica o contrário.

b) E para o caso $d = 1$? É verdade que $\exists\, u, v \in \mathbb{Z},\ 1 = u.a + v.b \Rightarrow \text{mdc}(a,b) = 1$?

Para o caso em que $d = 1$ e existe u, v tais que $1 = u.a + v.b$, é verdade que o mdc de a e b deve ser igual a 1. Isso é consequência do fato de que a Identidade de Bézout estabelece uma relação entre o mdc de a e b e a combinação linear de a e b com coeficientes inteiros. Vamos provar isto:

Se $1 = u.a + v.b$, onde u e v são números inteiros, isso significa que 1 é uma combinação linear de a e b com coeficientes inteiros. Agora, vamos considerar o mdc de a e b, que denotaremos como d. Temos duas situações possíveis:

a) Se $d > 1$, então $d | a$ e $d | b$. Isso significa que d também deve dividir a combinação linear $u.a + v.b$. No entanto, como sabemos que 1 é uma combinação linear de a e b, implica-se que d deve dividir 1. Mas o único número inteiro que divide 1 é 1. Logo, a única possibilidade é que d seja igual a 1.

b) Se $d = 1$, então não há nada a provar, pois já sabemos que $mdc(a,b) = 1$. Portanto, em ambos os casos, se $1 = u.a + v.b$ com u e v inteiros, então $mdc(a, b)$ deve ser igual a 1. Isso confirma que a recíproca é verdadeira quando $d = 1$.

② Demonstre as seguintes afirmações sobre o máximo divisor comum e [illegible] divisibilidade:

a) Prove que se $mdc(a, n) = 1$ e $n | (ab)$, então $n | b$.

* Prova: Suponha que $mdc(a, n) = 1$. Queremos mostrar que $n | b$. Como $mdc(a, n) = 1$, sabemos que existe uma combinação linear de a e n que resulta em 1, ou seja, $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$, tais que: $1 = ax + ny$. Agora, multiplicando ambos os lados por b, obtemos: $b = abx + nby$. Como n divide ambos os termos do lado direito da equação, n também deve dividir o lado esquerdo (b). Logo, concluímos que $n | b$.

b) Prove que $mdc(a, b) = 1$, se, e somente se, $mdc(a, b^n)$, para algum inteiro $k \geq 1$, [illegible]

* Prova: i) Suponha que $mdc(a, b) = 1$. Queremos mostrar que $mdc(a, b^n) = 1$, $\forall$ [illegible]
Vamos usar a propriedade: $mdc(a, bc) = 1 \Leftrightarrow mdc(a, b) = 1$ e $mdc(a, c) = 1$.
Podemos aplicar essa propriedade repetidamente para mostrar que $mdc(a, b^n) = 1$.
Começamos com $n = 1$, onde $mdc(a, b^1) = mdc(a, b)$, que já assumimos ser 1.
Agora, para $n \geq 2$, podemos escrever b^n como $b . b^{(n-1)}$. Usando a propriedade do mdc: $mdc(a, b^n) = mdc(a, b . b^{(n-1)})$. Como já mostramos que $mdc(a, b) = 1$ e por hipótese indutiva $mdc(a, b^{(n-1)}) = 1$, podemos aplicar a propriedade do mdc novamente para concluir que $mdc(a, b^n)$

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

27 | 09 | 23

ii) Agora, suponha que $mdc(a, b^n) = 1$ para todo $n \geq 1$. Queremos mostrar que $mdc(a, b) = 1$. Suponha por contradição que $mdc(a,b) = d$, onde $d > 1$. Isso significa que d divide a e d divide b. Consideremos $n = 2$, temos: $mdc(a, b^2) = 1$. Porém, usando a propriedade do mdc, podemos escrever: $mdc(a, b^2) = mdc(a, b \cdot b) = d$. Isso é uma contradição com a afirmação anterior de que $mdc(a, b^2) = 1$. Logo, nossa suposição de que $mdc(a,b) = d$ está errada e concluímos que $mdc(a,b)$ deve ser igual a 1.

c) Conclua que $mdc(a, n) = 1$ e $n \mid (a^k b)$, para algum inteiro $k \geq 1$, então $n \mid b$.

Agora, usando as duas partes anteriores da prova, podemos concluir a afirmação (c). Suponha que $mdc(a, n) = 1$ e $n \mid (a^k \cdot b)$ para algum inteiro $k \geq 1$. Pela parte (a), sabemos que $n \mid b$ e pela parte (b), sabemos que $mdc(a,b) = 1$. Portanto, todas as condições foram satisfeitas e assim concluímos que $n \mid b$.

3) a) Prove que, para todo n natural, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

*Prova de $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ por indução matemática

i) Caso-base $(n = 1)$: $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{1(2)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{4}{4} = 1$ (V)

ii) Passo Indutivo: Assumindo que a fórmula é verdadeira para algum k, ou seja, $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = [k^2(k+1)^2]/4$ queremos mostrar que é verdade para $k+1$ também.

Consideremos a soma $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$ e tentemos provar que ela é igual a $[(k+1)^2(k+2)^2]/4$.

Começamos com a soma anterior: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$

Agora, usamos a nossa hipótese de indução: $[k^2(k+1)^2]/4 + (k+1)^3$

Simplificando: $\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{k^2(k^2+2k+1) + 4(k+1)^3}{4} = \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4(k+1)^3}{4}$

Expandindo $(k+1)^3$: $\frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4(k^3+3k^2+3k+1)}{4} = \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4}$

Segue que: $\frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4} = \frac{k^2(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{[(k+1)^2(k+2)^2]}{4}$

Assim, chegamos na expressão que queríamos provar e a fórmula é verdadeira

21 09 23

b) Encontre uma fórmula para $0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$, para $n \in \mathbb{N}$, e prove que sua fórmula está correta.

Para encontrar uma fórmula para a soma em questão, podemos notar que cada termo é da forma $k(k+1)(k+2)$ para $0 \leq k \leq n$.

Logo, reescrevemos: $S = 0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \Sigma(k(k+1)(k+2))$ do $k=0$ até $k=n$.

Simplificando: $S = \Sigma(k(k+1)(k+2)) = \Sigma(k^2(k+3)) = \Sigma(k^3+2k^2)$, $0 \leq k \leq n$

Dividindo a soma em duas partes: $S = \Sigma(k^3) + 2\Sigma(k^2)$, $0 \leq k \leq n$

[illegible] podemos usar a fórmula que provamos na letra a):

$\Sigma(k^3)$ do $k=0$ até $k=n$ $= [n^2(n^2+1)^2]/4$

Para a segunda parte, $\Sigma(k^3)$, podemos usar outra fórmula conhecida:

$\Sigma(k^2)$ de $k=0$ até $k=n$ $= [n(n+1)(2n+1)]/6$

Agrupando, obtemos: $S = \dfrac{(n^2(n+1)^2)}{4} + \dfrac{2(n(n+1)(2n+1))}{6}$

Simplificando $S = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \dfrac{n(n+1)n(n+1)}{4} + \dfrac{(2n+1)}{3}$

Agora, vamos encontrar um denominador comum para somar os termos

$S = n(n+1)\left[\dfrac{3n(n+1)}{12}\right] + \dfrac{4(2n+1)}{12} = n(n+1)\left[\dfrac{3n(n+1) + 8(2n+1)}{12}\right]$

$S = n(n+1)\dfrac{3n^2+3n+16n+8}{12} = n(n+1)\left[\dfrac{3n^2+19+8}{12}\right]$

Agora, podemos simplificar ainda mais o numerador:

$S = n(n+1)\dfrac{3n^2+19n+8}{12} = n(n+1)\dfrac{3n^2+16n+3n+8}{12}$

$S = n(n+1)\dfrac{3n(n+1)+8(n+1)}{12} = n(n+1)\dfrac{3(n+1)(n+1)}{12}$

Simplificando o denominador 12:

$S = n(n+1)\dfrac{(n+1)(n+1)}{4}$

E assim, chegamos à fórmula desejada

23 09 23

(4) Prove que para todo $n \geq 1$, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n)}=\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+3)}+\dots+\frac{1}{(2n)}$

Podemos provar essa igualdade usando indução matemática:

i) Caso-base ($n=1$). Vamos começar provando que a igualdade é verdadeira para $n=1$. Logo, substituindo na equação, obtemos:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3+2}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

Como $1/2 \neq 5/6$, a igualdade não é verdadeira para $n=1$

ii) Passo indutivo (assumindo a hipótese de indução)

Vamos assumir que a igualdade é verdadeira para algum valor k:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k)}=\frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{(k+2)}+\frac{1}{(k+3)}+\dots+\frac{1}{(2k)}$$

Agora, vamos provar que ela também é verdadeira para $k+1$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{(2(k+1)-1)}-\frac{1}{(2(k+1))}=\frac{1}{((k+1)+1)}+\frac{1}{((k+1)+2)}+\frac{1}{((k+1)+3)}+\dots+\frac{1}{2(k+1)}$$

iii) Passo indutivo (prova): começamos com a expressão do lado esquerdo da igualdade para $k+1$: $1-1/2+1/3-1/4+\dots+1/[2(k+1)-1]-1/[2(k+1)]$

Agora, observe que a expressão do lado esquerdo é a mesma que a expressão para k (hipótese de indução) mais o próximo termo: $1/(2k+1)-1/2(k+1)$

Vamos simplificar: $$\frac{1}{(2k+1)}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{(2(k+1)-1)-2k}{(2k+1)(2(k+1))}=\frac{\cancel{2k}+2-1-\cancel{2k}}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

Agora, vamos analisar o lado direito da igualdade para $k+1$

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\frac{1}{(k+1)+3}+\dots+\frac{1}{2(k+1)}$$

Que pode ser escrito como: $\frac{1}{(k+2)}+\frac{1}{(k+3)}+\frac{1}{(k+4)}+\dots+\frac{1}{2(k+1)}$

Agora, podemos comparar essa expressão com a simplificação anterior:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{(k+2)}+\frac{1}{(k+3)}+\frac{1}{(k+4)}+\dots+\frac{1}{2(k+1)}$$

[illegible] a igualdade é verdadeira para $k+1$. Assim, usando [illegible]

Portanto, [illegible] que a igualdade vale para todo $n \in \mathbb{Z}$ positivo [illegible] indução matemática, provamos que a igualdade [illegible]

DOM | SEG | TER | QUA | QUI | SEX | SÁB

22 | 09 | 23

5) Se $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2^2\alpha \dots \cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha}$. Use $\operatorname{sen} 2\beta = 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

i) Primeiro, vamos reescrever o lado direito em termos de seno:

$\frac{\operatorname{sen}(2^{(n+1)}\alpha)}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}(2^n\alpha \cdot \alpha)}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha}$

ii) Agora, aplicamos a fórmula $\operatorname{sen}(2\beta) = 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$ para $\beta = 2^n\alpha$

$\frac{2\operatorname{sen}(2^n\alpha \cdot \alpha)}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2 \cdot 2^n \operatorname{sen}(\alpha \cdot 2^n\alpha)}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2^{(n+1)}\operatorname{sen}(\alpha \cdot 2^n\alpha)}{2^{(n+1)}\operatorname{sen}\alpha}$

iii) Observe que o termo se simplificando com o denominador [illegible]:

$\frac{\cancel{2^{(n+1)}}\operatorname{sen}(\alpha \cdot 2^n\alpha)}{\cancel{2^{(n+1)}}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \cdot 2^n\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$

iv) Usamos a identidade trigonométrica a seguir, com $x = \alpha$ e $y = 2^n\alpha$

$\frac{\operatorname{sen}(x\,y)}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{sen}(y) \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha \cdot 2^n\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \operatorname{sen}(2^n\alpha)$

Agora, mostramos que o lado direito da 1ª equação é $\operatorname{sen}(2^n\alpha)$

Então, para mostrar que o lado esquerdo da igualdade original também é igual a $\operatorname{sen}(2^n\alpha)$, usamos a fórmula do ângulo duplo para cos

$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2^2\alpha \dots \cos(2^n\alpha)$

$= \cos\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1) \cdot (2\cos^2(2\alpha) - 1) \dots (2\cos^2(2^n\alpha) - 1)$

v) Agora, aplicamos a identidade trigonométrica $\cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{\cos(2\theta)}{2}$:

$(2^n)\cos\alpha \left(\frac{1}{2}\cos(2\alpha)\right)\left(\frac{1}{2}\cos(4\alpha)\right) \dots \frac{1}{2}\cos 2^n \cdot 2\alpha$

vi) Observe que os termos $\frac{1}{2}$ e 2 cancelam-se: $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \dots \cos 2^n \cdot 2\alpha$

Agora, aplicamos a fórmula do ângulo duplo para [illegible]

$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \dots \cos(2^n 2\alpha) = \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)(2\cos^2(2\alpha) - 1) \dots (2\cos^2(2^n \cdot 2\alpha) - 1)$

$= 2^n \cdot \cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2(2\alpha) - \frac{1}{2}\right) \dots \cos^2(2^n \cdot 2\alpha) - \frac{1}{2}$

vii) Aplicamos a identidade $\cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos(2\theta)$;

$= 2^n \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\cos(2\alpha)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\cos(4\alpha)\right) \dots \frac{1}{2}\cos(2^n \cdot 2\alpha)$

$= \cos\alpha \cdot \cos(2\alpha) \cdot \cos(4\alpha) \dots \cos(2^n\, 2\alpha)$

viii) Aplicamos ângulo duplo: $\cos\alpha \cdot \cos(2\alpha) \cdot \cos(4\alpha) \cdot \cos(2^n \cdot 2\alpha) \cdot \cos(2^n$ [illegible]

Portanto, demonstramos que o lado esquerdo da equação é igual a $\operatorname{sen}(2^n\alpha)$, assim como o lado direito

22 01 23

6) Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices, $n \geq 3$ é $180(n-2)$

Para provar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices, devemos usar o seguinte raciocínio.
Consideremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Agora, vamos construir um polígono convexo de n vértices a partir de triângulos.

i) Comece com um triângulo. A soma dos ângulos internos é 180°

ii) Adicione um vértice a esse triângulo, criando um novo triângulo. Agora temos 4 ângulos internos: os 3 ângulos originais do triângulo mais o novo ângulo formado pelo vértice adicionado. A soma dos ângulos internos do novo polígono é a soma dos ângulos do triângulo mais o ângulo extra. Logo, temos que a soma é: $180° + x$, onde x é o ângulo extra.

iii) Continue adicionando vértices, criando novos triângulos a cada passo. A cada adição de um vértice, estaremos adicionando um ângulo extra à soma dos ângulos internos.

iv) Quando você terminar de adicionar $(n-3)$ vértices, porque já [illegible] triângulos iniciais, teremos um polígono convexo de n vértices.

Observe que a soma total dos ângulos internos do polígono é Σ ângulos internos do triângulo + Σ ângulos extras. Logo:

* Soma Total $= 180° + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-3}$ (ângulos extras dos vértices novos)

Agora, cada ângulo extra $x_1, x_2, \dots, x_{n-3}$ é igual a 180°, já que cada vértice adicionado cria um triângulo e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Portanto, podemos escrever:

Soma Total $= 180 + 180 + 180 + \dots + 180$ ($n-3$ vezes)

Soma Total $= 180 \cdot (1+1+1+\dots+1)$ ($n-3$ vezes)

Soma Total $= 180 \cdot (n-2)$

Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices ($n \geq 3$) é igual a $180(n-2)$ [illegible]

28 | 09 | 23

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

7) Sejam $A = \{0,1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3\}$. Considere as relações $R_1 = \{(a,b) \in A \times B : 2a = b\}$, $R_2 = \{(b,a) \in B \times A : a \neq b\}$, e $R_3 = \{(a,b) \in A \times B : a^2 = b\}$. Liste os elementos das seguintes relações:

a) $R_1 \circ R_2$ (Composição de R_1 com R_2)

Primeiro, para calcular $R_1 \circ R_2$, ou seja, devemos encontrar todos os pares (a,c) onde existe um elemento b que está em B, tal que (a,b) está em R_1 e (b,c) está em R_2.

$R_1 = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

$R_2 = \{(1,0),(2,1),(3,2)\}$

Agora, para calcular $R_1 \circ R_2$, combinamos os pares (a,b) de R_1 com os pares (b,c) de R_2, desde que o elemento b seja o mesmo em ambos os pares.

Logo: $R_1 \circ R_2 = \{(1,0),(2,0),(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

b) $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ (Composição de R_3 com a composição de R_2 com R_1)

Primeiro, vamos calcular $R_2 \circ R_1$, ou seja, devemos encontrar todos os pares (a,c), onde existe um elemento b tal que $(a,b) \in R_1$ e $(b,c) \in R_2$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,0),(2,0),(3,0),(3,1)\}$

Agora, calculamos $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, combinando os pares (a,b) de R_3 com os pares (b,c) de $R_2 \circ R_1$, desde que o elemento b seja comum ao [illegible]

$R_3 = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$

$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = \{(1,0),(2,0),(3,0)\}$

c) $R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ (Composição das inversas de R_2 e R_1)

Encontramos as inversas de R_1 e R_2, trocando os elementos dos pares:

$R_1^{-1} = \{(0,0),(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)\}$

$R_2^{-1} = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$

Agora, vamos calcular $R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$, que é a composição das inversas de R_2 e R_1

$R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{(0,1),(2,0)\}$

8) Prove que uma relação R em um conjunto X é transitiva se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$.

Para provar que uma relação R em um conjunto X é transitiva se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$, vamos dividir a prova em 2 partes

24 | 09 | 23

1) Vamos supor que R é transitiva e mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$. Se R é transitiva, então para quaisquer elementos a, b e c em X, se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$ também. Isso é a definição de transitividade.

Agora vamos considerar R^2, a composição de R consigo mesma ($R^2 = R \circ R$). Se $(a,b) \in R^2$, isso significa que existe um elemento intermediário, digamos x, tal que $(a,x) \in R$ e $(x,b) \in R$. Como R é transitiva, sabemos que $(a,b) \in R$ também. Logo, $R^2 \subseteq R$.
Da mesma forma, podemos argumentar para R^3, R^4 e assim por diante. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$.

2) Agora, vamos supor que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$, e mostrar que R é transitiva. Para fazer isso, assumimos que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$. Queremos mostrar que $(a,c) \in R$.

Usando prova por contradição, suponha que $(a,c) \notin R$. Isso significa que há uma falha na transitividade, já que se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, deveríamos ter $(a,c) \in R$. Portanto, temos uma contradição.

Agora, usando a suposição inicial de que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R^n \subseteq R$, podemos aplicar essa suposição para $n=2$. Se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R^2$. Mas acabamos de mostrar que qualquer elemento de R^2 também está em R. Logo $(a,c) \in R$, confirmando que R é transitiva. Assim, demonstramos que se R é transitiva, então R é transitiva, portanto a prova está completa e a afirmação é verdadeira.

9) Seja $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para todo $x \in \mathbb{N}^*$, defina $D_x^+ = \{d \in \mathbb{N} : d \mid x\}$, ou seja, o conjunto de divisores positivos de x. Para cada relação a seguir, verifique se ela é uma relação de ordem sobre o conjunto $\mathbb{N}^*$. Em caso afirmativo, desenhe o diagrama de Hasse restringindo o domínio a $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ em vez de $\mathbb{N}^*$. Além disso, identifique o mínimo se houver, e o(s) minimal(ais).

25 | 09 | 23

a) $R_1 = \{(a,b) : |D^+_a| \leq |D^+_b|\}$

Essa relação compara o número de divisores positivos de b. Para ser uma relação de ordem, ela deve satisfazer as propriedades de reflexividade, transitividade e antissimetria.

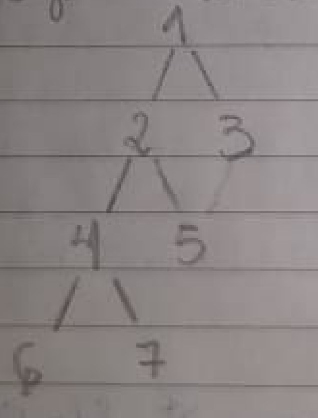
i) Reflexividade: Para cada elemento a em A, temos $|D^+_a| = |D^+_a|$, portanto, a relação é reflexiva.

ii) Transitividade: Suponha que (a,b) e (b,c) estejam em R_1, ou seja, $|D^+_a| \leq |D^+_b|$ e $|D^+_b| \leq |D^+_c|$. Isso implica que $|D^+_a| \leq |D^+_c|$, pois se um conjunto é menor ou igual a outro e o segundo conjunto é menor ou igual a um terceiro conjunto, então o primeiro conjunto é menor ou igual ao terceiro conjunto. Logo, R_1 é transitiva.

iii) Antissimetria: Suponha que (a,b) e (b,a) estejam em R_1, ou seja, $|D^+_a| \leq |D^+_b|$ e $|D^+_b| \leq |D^+_a|$. Isso implica que $|D^+_a| = |D^+_b|$, pois se ambos os conjuntos têm tamanhos iguais, então são iguais. Portanto, a relação é antissimétrica.

Deste modo, R_1 é uma relação de ordem sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Vamos agora desenhar o diagrama de Hasse:



* Neste diagrama, os números menores estão localizados acima dos maiores. Os divisores estão conectados aos números que eles dividem.

* Agora, vamos identificar o mínimo e os minimais

- Mínimo: 1, pois ele é o menor

- Minimais: Não há elementos minimais, pois todos os [illegible] têm ao menos um [illegible]

b) $R_2 = \{(a,b) : D^+_a \subseteq D^+_b\}$

Essa relação compara os conjuntos de divisores positivos de a e b. Para ser uma relação de ordem, ela deve satisfazer as três propriedades:

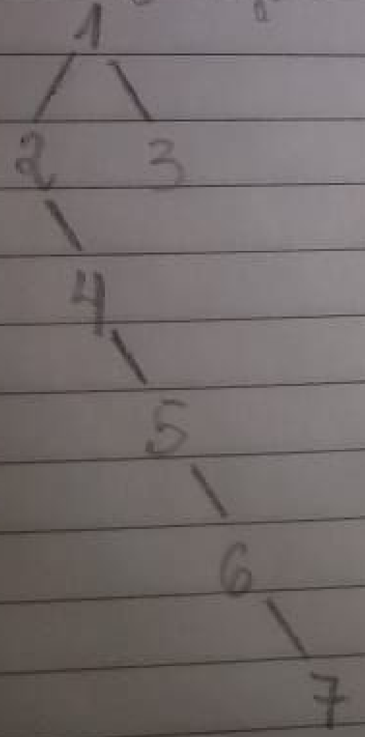
i) Reflexividade: Para cada elemento a em A, temos $D^+_a \subseteq D^+_a$, pois qualquer conjunto é um subconjunto de si mesmo. Logo, a relação é reflexiva.

ii) Transitividade: Suponha que (a,b) e (b,c) estejam em R_2, ou seja, $D_a^+ \subseteq D_b^+$ e $D_b^+ \subseteq D_c^+$. Isso implica que $D_a^+ \subseteq D_c^+$, pois se um conjunto é subconjunto de outro e o segundo conjunto é um subconjunto de um terceiro conjunto, então o primeiro conjunto é um subconjunto do terceiro. Portanto, a relação é transitiva.

iii) Antissimetria: Suponha que (a,b) e (b,a) estejam em R_2, ou seja, $D_a^+ \subseteq D_b^+$ e $D_b^+ \subseteq D_a^+$. Isso implica que $D_a^+ = D_b^+$, pois se ambos os conjuntos são subconjuntos um do outro, então são iguais. Logo, a relação é antissimétrica.

Desta modo, R_2 é uma relação de ordem sobre $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Vamos agora desenhar o diagrama de Hasse para R_2:



* Neste diagrama, os números menores estão localizados acima dos números maiores. Os conjuntos de divisores estão conectados aos números que têm um conjunto de divisores menor ou igual.

* Agora, vamos identificar o mínimo e os minimais:

- Mínimo: 1, pois é o menor elemento de A e é único.
- Minimais: não há outros elementos minimais, pois todos os outros números têm um conjunto de divisores positivos que é estritamente maior do que o conjunto de divisores de 1.