第2章

变分法在最优控制中的应用

1、变分法

(1)泛函的定义

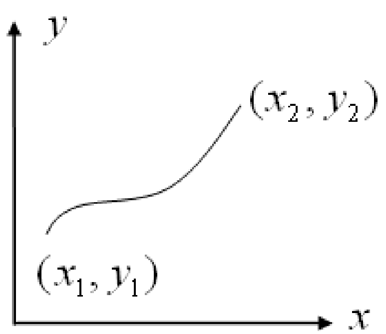
凡变量的值是由一个或几个函数的选取而确定的，这个变量称之为泛函。

例：考察平面上两点 x_1, x_2 之间曲线 $y = f(x)$ 的弧长

$$ds = \sqrt{d^2x + d^2y}$$

$$S = \int_l ds = \int_l \sqrt{d^2x + d^2y}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\,dx$$



S的值取决于函数y=f(x)的确定，S为y=f(x)的泛函。

简而言之，泛函就是函数的函数。

(2)泛函宗量的变分

函数 $y = f(x)$ x ---自变量

$$\Delta x = x - x_0 \doteq dx, \Delta y \doteq dy = \dot{y} \cdot \Delta x = \varepsilon \eta(x)$$

泛函 $J = J[x(t)], x(t)$ ---泛函的宗量

当泛函的宗量由 $x_0(t)$ 微量变动到 $x(t)$ 时，称泛函宗量的增量为泛函宗量的变分，用 $\delta x(t)$ 表示:

$$\delta x \triangleq x(t) - x_0(t), \delta x = \varepsilon \eta(t)$$

(2)泛函的连续性

泛函 $J=J[x(t)]$

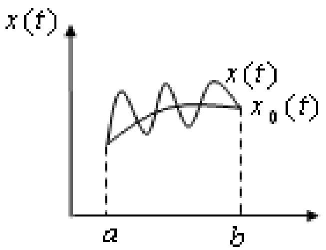
如果泛函 $J[x(t)]$ 的宗量 $x(t)$ 在 $x_0(t)$ 处有一个微量变动，同时泛函 $J[x(t)]$ 的变化也很微小，则称泛函 $J[x(t)]$ 在 $x_0(t)$ 处连续。

①函数的接近度

$x(t)$， $x_0(t)$， $t\in[a,b]$

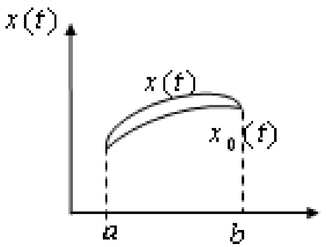
i) 零阶接近度

当 $|x(t)-x_0(t)|$ 很小，称 $x(t)$ 和 $x_0(t)$ 有零阶接近度。



ii) 一阶接近度

当 $|x(t)-x_0(t)|$, $|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|$ 都很小。



iii) k 阶接近度

当 $|x(t)-x_0(t)|$, $|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|\cdots|x^{(k)}(t)-x_0^{(k)}(t)|$ 都很小

②函数空间

所有在$[a,b]$上连续，且有连续k阶导函数的函数构成一个函数空间，用$C^k[a,b]$表示。

考察平面上两点之间的距离

$$A(x_1,y_1) \qquad d(A\cdot B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$B(x_2,y_2) \qquad d(A\cdot B)=|x_2-x_1|\,|y_2-y_1|$$

函数空间两点之间的距离

$$d[x(t)\cdot x_o(t)]=\max_{a<t<b}\left\{|x(t)-x_o(t)|,|x(t)-x_o(t)|\cdots|x^{(k)}-x_o^{(k)}(t)|\right\}$$

③泛函的连续性。

如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，总有 $\delta>0$，使得当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\left|J[x(t)]-J[x_0(t)]\right|<\varepsilon$，则称 $J[x(t)]$在$x_0(t)$ 上连续，并称为k阶连续。

④线性泛函

连续泛函如果满足：$J[x_1(t)+x_2(t)]=J[x_1(t)]+J[x_2(t)]$

$$J[cx(t)]=cJ[x(t)] \qquad \text{C 为常数}$$

则称 $J[x(t)]$ 为线性泛函。

⑤泛函的变分

函数 $y=f(x)$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\cdot\Delta x+\beta(x,\Delta x)$，泛函 $J[x(t)]$

如果泛涵 $J[x(t)]$ 的增量 $\Delta J=J[x(t)+\delta x]-J[x(t)]$ 可以分为两部分，即有

$\Delta J=L[x(t),\delta x]+\beta[x(t),\delta x]\max|\delta x|$，其中当 $\max|\delta x|\to 0$ 时，则 $\beta[x(t),\delta x]\to 0$，称

$L[x(t),\delta x]$ 为泛函的变分，记为 δJ。

线性：$L[x(t),\delta x_1+\delta x_2]=L[x(t),\delta x_1]+L[x(t),\delta x_2]$

$L[x(t),c\delta x]=cL[x(t),\delta x]$

⑥ 泛函变分的求法

1、按定义求

2、引进 $\delta x=\varepsilon\eta(t)$,则有$\Delta J=J\left[x(t)+\varepsilon\eta(t)\right]-J\left[x(t)\right]$

设$x(t),\eta(t)$不变， 则$J\left[x(t)+\varepsilon\eta(t)\right]$可视为$\varepsilon$的函数，将其展开为麦克劳林级数， 可得$\Delta J$：

$$\Delta J=J\left[x(t)\right]+\frac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon+\frac{1}{2!}\frac{d^2J}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon^2+\ldots-J\left[x(t)\right]$$

所以有：

$$\delta J=\frac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon,\leftarrow \text{一次变分}$$

$$\delta^2 J=\frac{d^2J}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon^2,\leftarrow \text{二次变分}$$

$$\delta^{(k)} J=\frac{d^kJ}{d\varepsilon^k}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon^k,\leftarrow k\text{次变分}$$

3、针对多元函数的求法

设$F=F(x,\dot{x},t)$关于$x,\dot{x}$连续，且有足够的可微性，

计算$\Delta F=F(x+\Delta x,\dot{x}+\Delta\dot{x},t)-F(x,\dot{x},t)$

$=F_x\Delta x+F_{\dot{x}}\Delta\dot{x}+\cdots$

定义：$\delta F=F_x\delta x+F_{\dot{x}}\delta\dot{x}$

且有：$\delta\int_{t_0}^{t_f}F(x,\dot{x},t)dt=\int_{t_0}^{t_f}\delta F dt$

⑦泛函的级值

定义：如果泛函 $J[x(t)]$ 在任何一条与 $x^*(t)$ 接近曲线 $x(t)$ 上的值 $J[x(t)]$ 不大于（或不小于）$J[x^*(t)]$，即可 $\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \le 0$（或 $\Delta J \ge 0$），则称泛函 $J[x(t)]$ 在 $x^*(t)$ 上取得极大值（或极小值）。

定理：如果具有变分的泛函在 $x^*(t)$ 上取得极值，

则在 $x^*(t)$ 上泛函的一次变分为零。

证明：设 $x(t) = x^*(t) + \varepsilon\eta(t)$，当 $x^*(t)$，$\eta(t)$ 不变时，

$J\left[x(t)\right] = J\left[x^*(t) + \varepsilon\eta(t)\right]$ 可视为 ε 的函数，用 $\phi(\varepsilon)$ 表示。

由假定，$\phi(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 上取得极值，有 $\phi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=0$.

即 $\dfrac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \delta J = \dfrac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = 0$

2、无约束条件下的变分问题

（1） t_o, t_f 固定的变分问题

问题：已知泛函$J=\int_{t_0}^{t_f} F\left[x(t),\dot{x}(t),t\right]dt$，寻求最优轨线$x^*(t)$，使$J$取极值，

其中F对$x,\dot{x}$二阶连续可微。

分析：引入$\delta x=\varepsilon\eta(t),\delta\dot{x}=\varepsilon\dot{\eta}(t)$，则有$J=\int_{t_0}^{t_f} F\left[x^*(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{x}^*(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t\right]dt$

$$\therefore \frac{dJ}{d\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\cdot\dot{\eta}\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\eta dt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\eta dt$$

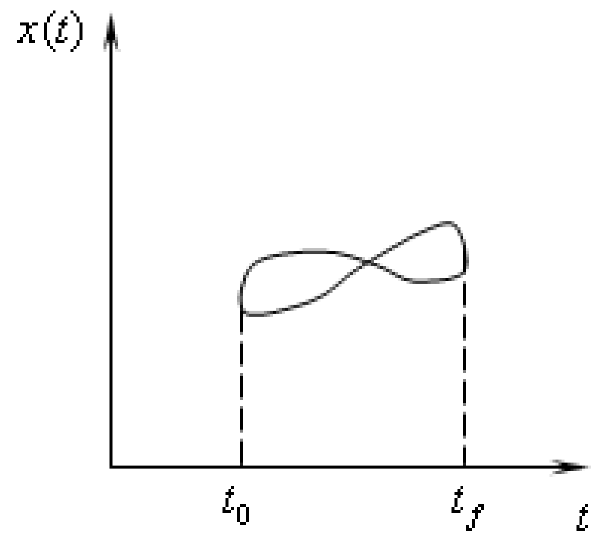
$$=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\cdot\eta dt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f}\eta\left(t_f\right)-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_0}\eta\left(t_0\right)$$

根据泛函极值的必要条件 $\delta J = 0$

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]\right]\eta dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

①两端固定

$\delta x = \varepsilon \eta(t)$



ε不能为零，$\eta(t) = 0\Big|_{t=t_f}^{t=t_0}$

$$\delta J = \int_{t_o}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\eta dt = 0$$

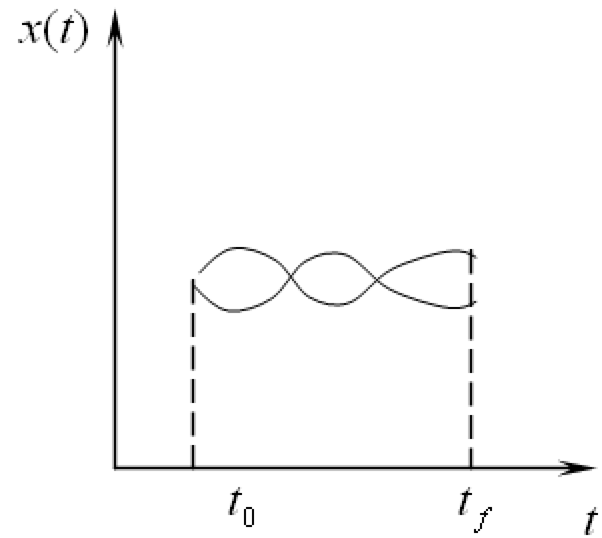
$\eta(t_o) = \eta(t_f) = 0$

由于$\eta(t)$任意，即$\eta(t) \neq 0$，因此有$\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$——欧拉方程。

第2章——变分法在最优控制中的应用

②两端不固定

既然 $x^*(t)$ 在端点不固定的情况下，是泛函的极值曲线，那么它必然依然是端点固定情况下的极值曲线，因此必然满足欧拉方程。些时应有



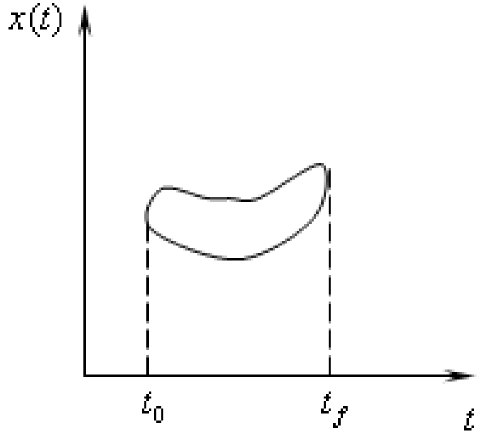
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\Big|_{t_o}^{t_f}=0,\text{即}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{\substack{t=t_o\\t=t_f}}=0$$

（2）边界条件

①两端固定　②两端不固定　③始端固定，末端不固定　④始端不固定，末端固定

① $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$　② $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{\substack{t=t_0\\t=t_f}}=0$　③ $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0, x(t_o)=x_o$　④ $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_o}=0, x(t_f)=x_f$

例：最速降线问题

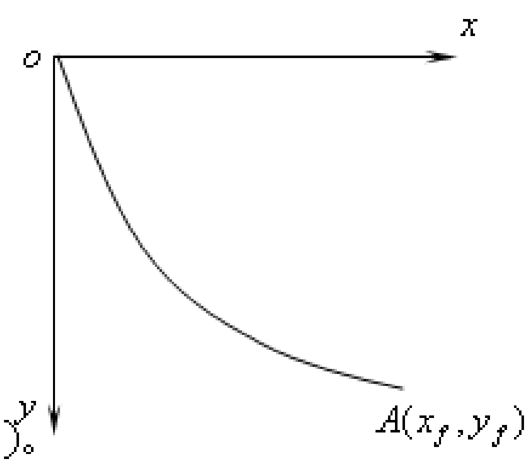


设在垂直平面上，有o,A两点，它们不在同一垂直线上，现有一质点自向 A 运动，假定介质的阻力可忽略不计，向应取怎样的轨线，才能使所需时间最短。

解：$V^2 = 2gy \quad V = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$

$$dt = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$\therefore\ t = \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$



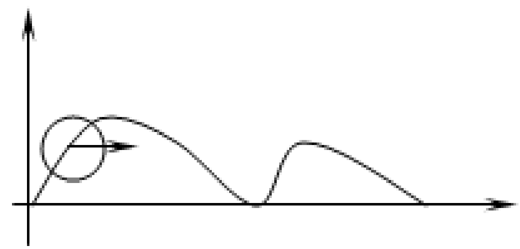
最终成为寻求最优轨线，使泛函$t[y(x)]$最小（两头固定式）。

令$F=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$，则由欧拉方程有$F_y - F_{\dot{y}y}\dot{y} - F_{\dot{y}\dot{y}}\ddot{y} = 0$

将上式两边同乘$\dot{y}$；$\dot{y}(F_y - F_{\dot{y}y}\dot{y} - F_{\dot{y}\dot{y}}\ddot{y}) = 0$

上式左边是$F-\dot{y}F_{\dot{y}}$对x的全导数，

因此有$F-\dot{y}F_{\dot{y}}=C$，C 为常数



$$(\sqrt{1+\dot{y}^2}/\sqrt{2gy}) - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{2gy}\cdot\sqrt{1+\dot{y}^2}} = C$$

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} = C' \qquad y(1+\dot{y}^2) = C_1$$

$$y = \frac{C_1}{1+\dot{y}^2} \overset{\text{设}\dot{y}=ctg\alpha}{=\!=\!=} C_1 \sin^2\alpha$$

$$dy = \dot{y}dx \quad dx = \frac{dy}{y} \Rightarrow dx = C_1(1-\cos 2\alpha)d\alpha$$

$$\therefore x = \frac{c_1}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

由 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0$ 曲线为 $\begin{cases} x = \dfrac{c_1}{2}(\alpha - \sin\alpha) \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\alpha) \end{cases}$ 圆滚线。

(2) t_o, t_f 不固定，可动端点的变分问题

已知泛函 $J = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), \dot{x}(t), t]dt$，初始端须满足 $x_0 = \phi(t)$，末端须满足 $x_f = \varphi(t)$，

不固定的问题最好利用固定的结论寻求最优轨线 $x^*(t)$，使 J 取极值：

由定义，$\Delta J=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f}F(x+h,\dot{x}+\dot{h},t)dt-\int_{t_0}^{t_f}F(x,\dot{x},t)dt$

$=\int_{t_0}^{t_f}F(x+h,\dot{x}+\dot{h},t)dt-\int_{t_0}^{t_f}F(x,\dot{x},t)dt-\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0}Fdt+\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f}Fdt$

上式前两项主部为$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\cdot hdt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\cdot h\Big|_{t_0}^{t_f}$

后两项主部根据积分中值定理为$-\mathrm{F}\Big|_{t=t_0}\cdot\delta t_0+\mathrm{F}\Big|_{t=t_f}\cdot\delta t_f$

$\therefore\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\cdot hdt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f}\cdot h(t_f)-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_0}\cdot h(t_0)$

$-\mathrm{F}\Big|_{t=t_0}\cdot\delta t_0+\mathrm{F}\Big|_{t=t_f}\cdot\delta t_f$

由$\begin{cases}\phi(t_0+\delta t_0)=x(t_0+\delta t_0)+h(t_0+\delta t_0)\\ \phi(t_0)=x(t_0)\end{cases}$有

$$\dot{\phi}(t_0)\delta t_0=\dot{x}(t_0)\delta t_0+h(t_0)$$

$$\therefore h(t_0)=\dot{\phi}(t_0)\delta t_0-\dot{x}(t_0)\delta t_0$$

同理有$h(t_f)=\dot{\varphi}(t_f)\delta t_f-\dot{x}(t_f)\delta t_f$

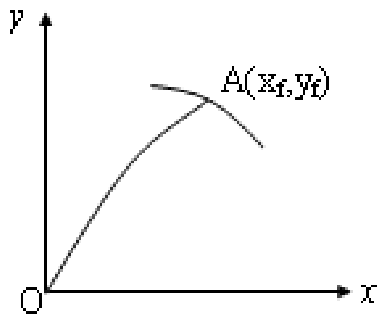
$$\therefore \delta J=\int_{t_0}^{t_t}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})\right]\cdot hdt+\left[\dot{\varphi}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_f}\cdot\delta t_f$$

$$-\left[\dot{\phi}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_0}\cdot\delta t_0=0$$

由于$h(t)$的任意性，最后得到$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})=0$——欧拉方程

$$\left.\left.\begin{aligned}&[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}+F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}]\Big|_{t=t_0}=0\\&[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\varphi}+F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}]\Big|_{t=t_f}=0\end{aligned}\right\}\right.\text{横截条件}$$

例：在平面上给定O、A两点，O点位于坐标原点，A点沿曲线$y_f=\psi(x)$移动，求一条曲线，连接OA两点，且有最短长度。



解：即求最优曲线使$J=\int_0^{x_f}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$最小且使满足$y_f=\psi(x)$由欧拉方程$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})=0$，可得$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}=C$，$C$为常数

即$\frac{2\dot{y}}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c, c$为常数

整理得$\dot{y}=a, a$为常数

$\therefore y=ax+b$

由$y(x_0)=y(0)=0,$有$b=0$

由横截条件：$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\psi}+F-\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\cdot\dot{y}\right]\Big|_{x=x_f}=0$

有$\dot{y}(x_f)\dot{\psi}(x_f)+1=0$

$\therefore a=-\frac{1}{\dot{\psi}(x_f)}$

3、等式约束条件下的变分问题

(1)矩阵微分法

（1）纯量对向量求导

$$y = y(x) \quad y - \text{纯量} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^T$$

（2）纯量对矩阵求导

$$y = y(x) \quad x = (x_{ij})_{m \times n}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_{ij}}\right)_{m \times n}$$

（3）向量对纯量求导.

已知向量 $y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T \quad y(x)$ — x是纯量

$$\frac{dy}{dx}=(\frac{\partial y_1}{\partial x},\frac{\partial y_2}{\partial x},\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x})^T$$

(4)矩阵对纯量求导

已知矩阵 $y=(y_{ij})_{m\times n} \quad y(x)$ — x是纯量

$$\frac{dy}{dx}=(\frac{\partial y_{ij}}{\partial x})_{m\times n}$$

（5）向量对向量求导

已知向量 $y=y(g)$ 其中$y=(y_1,y_2\cdots y_n)^T \quad g=(g_1,g_2,\cdots g_n)^T$

$$\frac{dy^T}{dg}=(\frac{\partial y_j}{\partial g_i})_{m\times n} \qquad \frac{dy}{dg^T}=(\frac{\partial y_i}{\partial g_j})_{n\times m}$$

(2) 条件极值

问题：已知泛函$J=\int_{t_0}^{t_f}F(x,\dot{x},t)dt$，$F$对$x,\dot{x}$二阶连续可微，

寻求最优轨线$x^*(t)$使J取极值。其中$x(t)$须满足等式约束条件

$\Phi\left(x,\dot{x},t\right)=0$，其中$x(t)=\left(x_1,\ x_2,\cdots x_n\right)^T$，$\Phi=\left(\phi_1,\phi_2,\cdots\phi_m\right)^T$

求解：引进拉格朗日乘子λ，$\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m\right)^T$

构造$L=F(x,\dot{x},t)+\lambda^T\Phi\left(x,\dot{x},t\right)$

于是有$J=\int_{t_0}^{t_f}L(x,\dot{x},t)dt=\int_{t_0}^{t_f}\left[F(x,\dot{x},t)+\lambda^T\Phi\left(x,\dot{x},t\right)\right]dt$

此时，欧拉方程$\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$

注：x为n维向量，故有n个一阶方程。

4、用变分法求解最优控制问题 (注：$u(t)$不受约束)

已知被控系统$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t), x(t_0)=x_0$, 其中$x(t)$为$n$维状态向量，$u(t)$为$m$维控制向量，$f$为$n$维向量函数。性能指标

$J=\phi\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F\left[x(t),u(t),t\right]dt$, 寻求最优控制$u^*(t)$, 使$J$最小。

1、t_f固定，$x(t_f)$自由

方法：将状态方程视为等式约束条件，即有

$f\left(x(t),u(t),t\right)-\dot{x}(t)=0,$

引进拉格朗日乘子$\lambda(t)$, 构造

$$J'=\phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{F[x(t),u(t),t]+\lambda^T(t)[f(x(t),u(t),t)-\dot{x}(t)]\}dt$$
,

定义哈密顿函数$H(x,u,\lambda,t)=F(x,u,t)+\lambda^T(t)f(x,u,t)$

则$J^{'}=\phi\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T(t)\dot{x}(t)\right]dt$

其中$\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T(t)\dot{x}(t)dt=\lambda^T(t)x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T(t)x(t)dt$

$\therefore J^{'}=\phi\left[x(t_f),t_f\right]-\lambda^T(t_f)x(t_f)+\lambda^T(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t)+\dot{\lambda}^T(t)x(t)\right]dt$

$\because$ 宗量$\delta u,\ \delta x,\delta x(t_f)\rightarrow\delta J^{'}$

$$\therefore\delta J^{'}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x(t_f)}\right)^T\cdot\delta x(t_f)-\lambda^T(t_f)\delta x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\cdot\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\cdot\delta u+\dot{\lambda}^T(t)\delta x\right]dt$$

$$=\left[\frac{\partial\phi}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right]^T\delta x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}(t)\right)^T\cdot\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\cdot\delta u\right]dt$$

根据泛函极值必要条件$\delta J^{'}=0$,

引进$\lambda(t)$,使满足$\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}(t)=0$和边界条件$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$

则$\delta J^{'}=\int_{t_0}^{t_f}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right)^T\cdot\delta u dt=0$

又$u(t)$不受约束，即δu任意，$\therefore\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

小结：$u^*(t)$为最优控制的必要条件为

(1)状态方程$\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$

(2)协态方程$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

(3)控制方程$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

(4)初始条件$x(t_0)=x_0$

(5)横截条件$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$

说明：

（1）协态方程和控制方程就是变分法中的欧拉方程；

（2）由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 可知，$u^*(t)$ 使 H 函数取极值，同时也就使性能指标 J 取极值；

（3）对最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ 而言，H 函数对 t 的全导数等于 H 函数对 t 的偏导数：

$$\frac{dH(x,u,\lambda,t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

对于定常系统 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，$H$ 函数保持常数。

2、t_f固定，$x(t_f)$受约束

即有$\psi\left[x(t_f),t_f\right]=0$，$\psi$为$k$维向量函数

方法：再引进拉格朗日乘子$v=\left(v_1,v_2,\cdots v_k\right)^T$，$v$为$k$维常向量

构造

$$J'=\phi[x(t_f),t_f]+v^T\psi\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^T(t)\dot{x}(t)\}dt$$

同样$\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T(t)\dot{x}(t)dt=\lambda^T(t)x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T(t)x(t)dt$

$$\therefore \delta J'=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x(t_f)}\right)^T\cdot\delta x(t_f)+v^T\frac{\partial\psi}{\partial^T x(t_f)}\cdot\delta x(t_f)-\lambda^T(t_f)\delta x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\cdot\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\cdot\delta u+\dot{\lambda}^T(t)\delta x\right]dt$$

根据泛函极值的必要条件可得

(1)正则方程组：$\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$， $\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

(2)边界条件$x(t_0)=x_0$， $\psi\left[x(t_f),t_f\right]=0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial \psi^T}{\partial x(t_f)}\cdot v-\lambda(t_f)=0$$

(3)在系统完全可控条件下，有控制方程$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

3、t_f固定，$x(t_f)$固定

$u^*(t)$为最优控制的必要条件：

(1)正则方程组：$\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$，$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

(2)边界条件$x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=x_f$

(3)在系统完全可控条件下，$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

4、t_f变动，$x(t_f)$自由

则$J' = \phi\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T(t)\dot{x}(t)\right]dt$

$\because$ 宗量$\delta u,\ \delta x, \delta x(t_f), \delta t_f \rightarrow \delta J'$

$$\therefore \delta J' = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}\right)^T \cdot \delta x(t_f) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_f}\right)^T \cdot \delta t_f + \left(H - \lambda^T \dot{x}\right)\Big|_{t=t_f} \cdot \delta t_f - \left(\lambda^T \delta x\right)\Big|_{t=t_f}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}(t)\right)^T \cdot \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \cdot \delta u\right]dt$$

注意在t_f变动的情况下，$(\delta x)_{t=t_f} = \delta x(t_f) - \dot{x}(t_f)\delta t_f$

$$\therefore \delta J' = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}\right)^T \cdot \delta x(t_f) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + H(t_f)\right] \cdot \delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}(t)\right)^T \cdot \delta x + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \cdot \delta u\right]dt$$

$\therefore u^*(t)$为最优控制的必要条件为

(1)正则方程组：$\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$，$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

(2)边界条件$x(t_0)=x_0$，$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$

(3)控制方程$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

(4)H函数末值为$H(t_f)=-\dfrac{\partial \phi}{\partial t_f}$

对于定常系统$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0, H$函数保持常数零值。

5、古典变分法的局限性

（1）u(t)在有界闭域取值时，完全可能不存在 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$

（2）对可微性要求很高。