

# 控制工程数学

(Mathematics for Control Engineering)

人工智能与自动化学院

万一鸣

ywan@hust.edu.cn

**学时： 48**

**考试： 平时+卷面**

参考书目：

1. 郭雷 主编 《控制理论导论：从基本概念到研究前沿》，科学出版社，2004
2. 杨晓松 编著 《数学控制论基础》，科学出版社，2012
3. K J Astrom, P R Kumar. “Control: a perspective”, Automatica, 2014, 50(1): 3-43.

# 控制理论与控制工程

- 倒立摆的控制：PID or LQR/LQG?
  - PID：试凑、难以用于多变量系统、依靠无法量化的经验
  - LQR/LQG：易于处理多变量系统，少量参数的调试且物理意义明确，固化成理论/方程的调参办法
- “The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking” -- Albert Einstein
- 工程应用对理论方法的要求
  - 调参简单、运行稳定、性能优化、计算快速



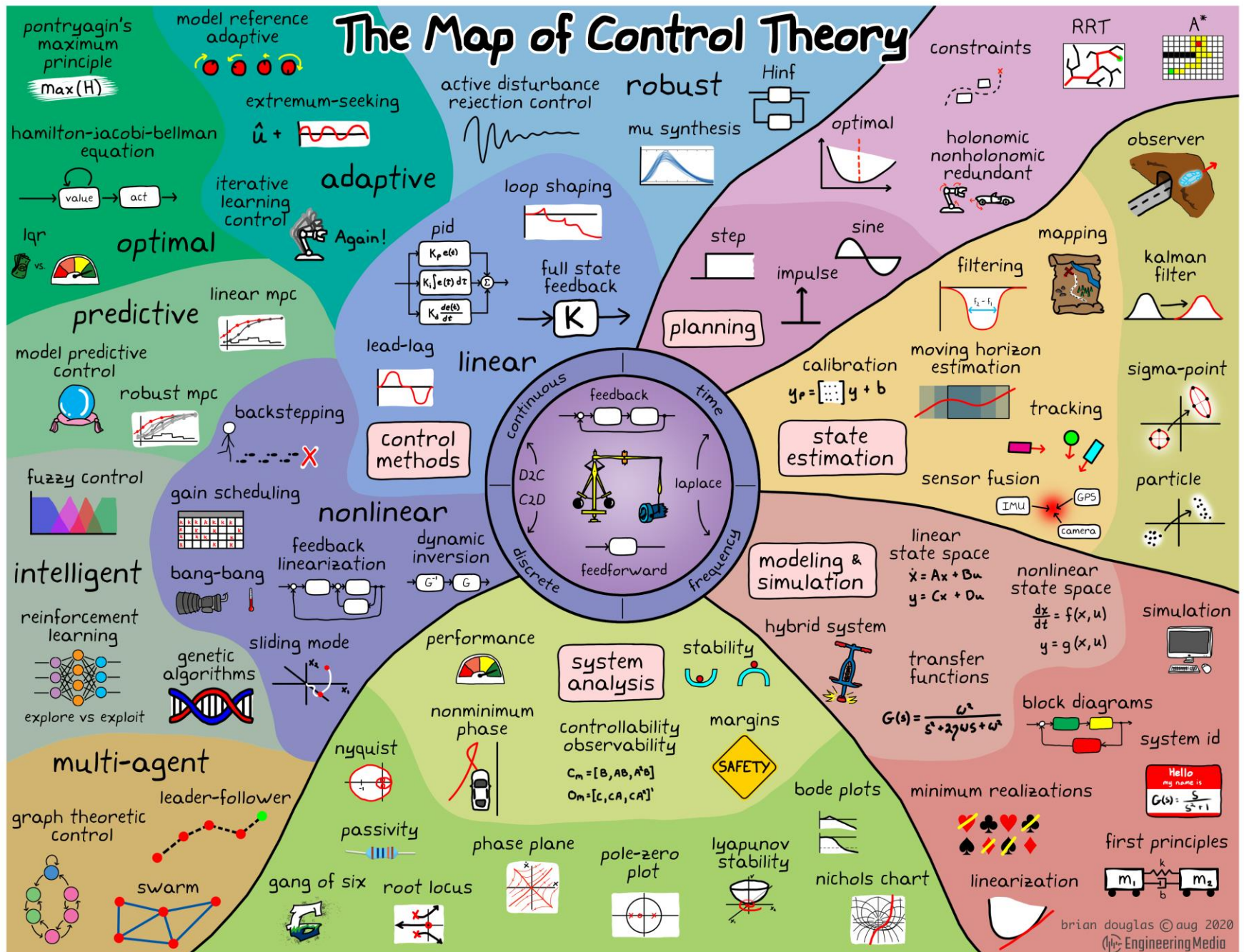
# 控制科学的数学基础

## 数学基础

- 常微分/偏微分方程
- 线性代数
- 抽象代数与微分几何
- 泛函分析、复变函数
- 概率论、统计、随机过程
- 最优化、计算数学
- 图论
- .....

## 控制理论与方法

- 系统辨识与状态估计
- 随机控制与 $H_\infty$ 控制
- 最优控制与模型预测控制
- 非线性控制
- 自适应控制
- 分布参数系统控制
- 离散事件动态系统
- .....



# Interplay between machine learning and control

Model-free approaches

ML in the loop: no performance guarantees

Hundreds or more parameters to tune

Huge size of training data

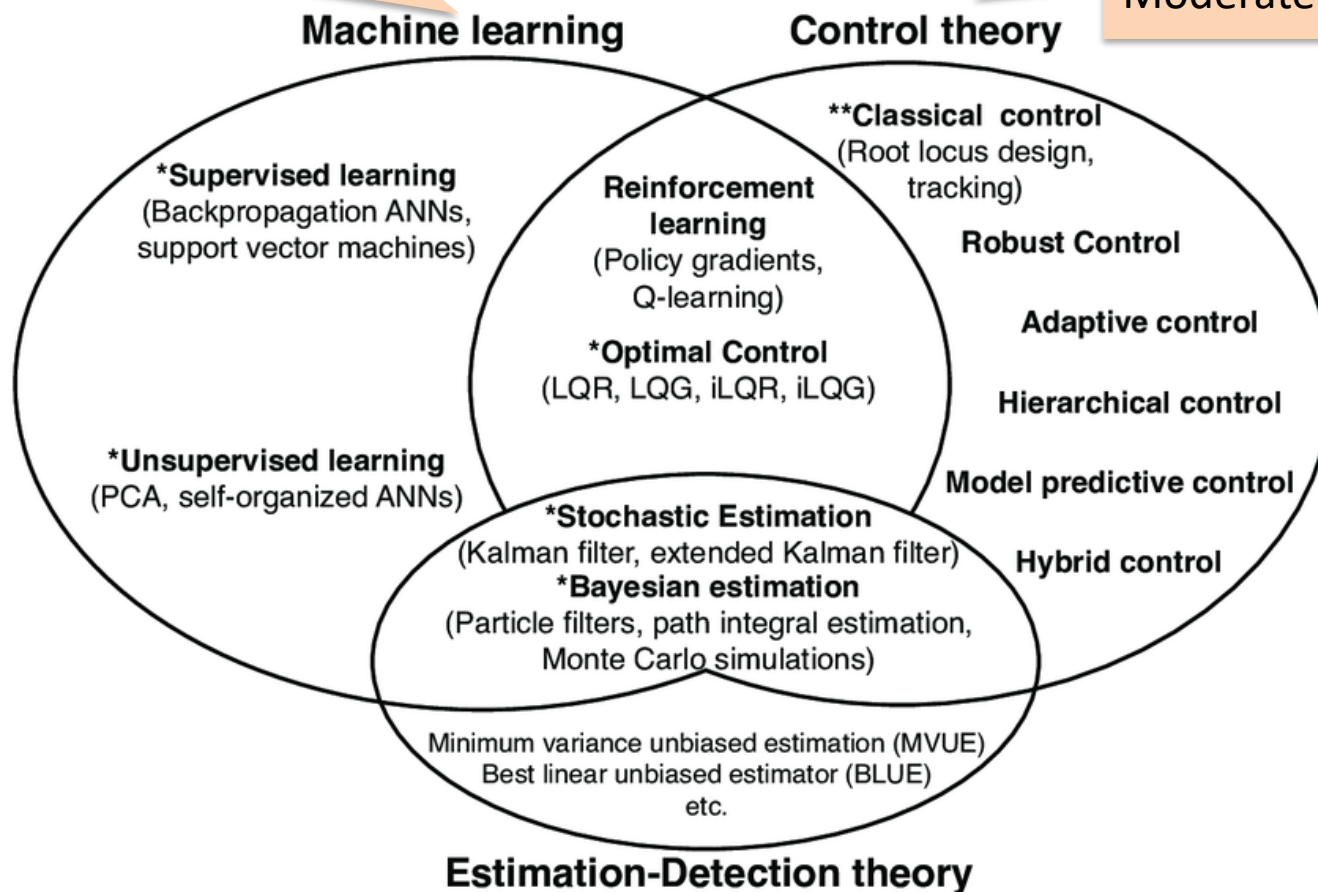
Model-based approaches

Performance guarantees

- Stability, robustness, optimality

A handful parameters to tune

Moderate data size for modelling





# IEEE Control Systems Society: <https://ieeecss.org/>

[ABOUT](#)[PUBLICATIONS ▾](#)[CONFERENCES ▾](#)[ACTIVITIES ▾](#)[AWARDS ▾](#)[VIDEOS & WEBINARS](#)

## SOCIETY SPOTLIGHT

SMART  
CITY

### 1st Workshop on Small-Scale Testbeds for Connected and Automated Vehicles and Robot Swarms

We are pleased to announce our workshop as part of the [IEEE Intelligent Vehicles Symposium \(IV\) 2024!](#)



### Special Section on Control and Monitoring of Next-Gen Urban Infrastructure: Applications to Power, Transportation, and Water Systems

Editor: Ahmad Taha (Vanderbilt University)

### IEEE Control Systems Society Upcoming Election

Election Begins: 20 April; Election Ends: 1 June

ELECTION



VOTE!



### Control for Societal-scale Challenges: Road Map 2030

[Panel Session](#) at the IFAC World Congress on July 10, 2023

# Control for Societal-scale Challenges: Road Map 2030



**Panel Session on "Control for Societal-Scale Challenges: Road Map 2030"  
at the IFAC World Congress, July 10th, 2023.**

## Control for Societal-scale Challenges: Road Map 2030

Edited by:

Anuradha M. Annaswamy, Karl H. Johansson, and George J. Pappas

[PDF](#)[Flipbook](#)[Print-on-Demand](#)

### Road Map 2023 Videos

[Introduction to Road Map 2030](#)[Societal Drivers](#)[Technological Trends](#)

The world faces some of its greatest challenges of modern time and how we address them will have a dramatic impact on the life for generations to come. Simultaneously, control systems, consisting of information enriched by various degrees of analytics followed by decision-making, are pervading a variety of sectors, not only in engineering but beyond, into financial services, socio-economic analysis, entertainment and sports, and political and social sciences. Increased levels of automation are sought after in various sectors and being introduced into new domains. All of these advances and transformations urge a shift in the conversation toward how control systems can meet grand societal-scale challenges. The document seeks to chart a roadmap for the evolution of control systems, identifying several areas where our discipline can have an impact over the next decade.

**Suggested Citation:** Control for Societal-scale Challenges: Road Map 2030, Eds. A. M. Annaswamy, K. H. Johansson, and G. J. Pappas, IEEE Control Systems Society Publication, 2023, <https://ieeecss.org/control-societal-scale-challenges-roadmap-2030>



# Table of Contents

Chapter 1: Introduction	xv
Chapter 2: Societal Drivers	5
2.A Climate Change Mitigation and Adaptation	7
2.A.1 Introduction	8
2.A.2 Climate Change: the 2022 View	9
2.A.3 Targets of Opportunity for Control Systems Scientists and Engineers	11
2.A.4 Broader Perspectives	17
2.B Healthcare and Ensuring Quality of Life	23
2.B.1 Introduction	23
2.B.2 Current Perspectives on Healthcare and Quality of Life	25
2.B.3 Targets of Opportunity for Control Systems Scientists and Engineers	27
2.C Smart Infrastructure Systems	33
2.C.1 Introduction	33
2.C.2 Drivers: Infrastructure Systems Undergoing Digital Transformation	34
2.C.3 Opportunities for Control	36
2.C.4 Recommendations	38
2.D The Sharing Economy	39
2.D.1 Introduction	39
2.D.2 The Sharing Economy and Control	42
2.D.3 Where Can Control Make a Difference?	44
2.D.4 Long-Term Challenges	47
2.E Resilience of Societal-Scale Systems	49
2.E.1 Introduction	49
2.E.2 Challenges and Opportunities	51
2.E.3 Recommendations	55
Appendices	71
A Pandemics: Modeling and Control	71
B Neuroengineering	78
Chapter 3: Technological Trends	85
3.A AI and Big Data	87
3.A.1 Introduction	88
3.A.2 Technical Trends	88
3.A.3 Scientific Trends	89
3.A.4 Challenges and Opportunities	90
3.B Electrify Everything	95
3.B.1 Introduction	95
3.B.2 Current Status	98
3.B.3 Looking Ahead	100
3.B.4 Targets of Opportunity for Control Systems Scientists and Engineers	102
3.B.5 Methods	103
3.B.6 Conclusions	104

3.C Engineering Biology	105
3.C.1 What Is Engineering Biology?	105
3.C.2 Contributions From Control to Engineering Biology	108
3.C.3 Challenges and Opportunities at the Intersection of Control and Biology	110
3.D Robots in the Real World	114
3.D.1 Introduction	114
3.D.2 Enabling Technologies	115
3.D.3 Challenges for Control	118
Chapter 4: Emerging Methodologies	135
4.A Learning and Data-Driven Control	137
4.A.1 Introduction	138
4.A.2 Autotuning	139
4.A.3 Batch Learning	140
4.A.4 Extremum Seeking and Learning	140
4.A.5 Off-Line vs. On-Line Computations	140
4.A.6 Parametric vs. Non-Parametric Methods	141
4.A.7 Partially Observable and Controllable Systems	141
4.A.8 Verification for Safety-Critical Applications	141
4.A.9 Optimal Exploration-Exploitation	141
4.A.10 Data-Driven Mechanism Design and Information Design	142
4.A.11 Learning Architectures to Support High Level Objectives	142
4.B Safety-Critical Systems	145
4.B.1 Introduction	145
4.B.2 Notions of Safety and Their Relation	146
4.B.3 The Pillars of Safety	149
4.B.4 Guaranteeing Safety for Systems	152
4.B.5 Safety for Human-in-the-Loop Systems	153
4.B.6 Applications and Open Challenges	154
4.C Resilient Cyber-Physical Systems	156
4.C.1 Introduction	156
4.C.2 Towards Resilience	157
4.C.3 Characterization of Disruptions	158
4.C.4 Automated Decision-Making for Resilience	160
4.C.5 Opportunities for Control	160
4.D Cyber-Physical-Human Systems	162
4.D.1 Taxonomies of CPHS	162
4.D.2 Computational Human Models for Prediction and Control	166
4.D.3 Human-Centered Control Design	168
4.D.4 Opportunities for Systems and Control	170
4.E Control Architecture	171
4.E.1 Introduction	171
4.E.2 Layered Architectures	172
4.E.3 Intralayer Control Architecture	176
4.E.4 A Societal-Scale Example: The Future Power Grid	178
4.E.5 Road Map for a Theory of Control Architecture	180
Chapter 5: Technology Validation & Translation	191
5.A Introduction	193
5.B Engagement in Industrial Ecosystems	195
5.C Validation	197

# 主要内容

- 一、控制论回顾
- 二、动态系统的稳定性
- 三、线性代数与矩阵分析
- 四、概率与统计

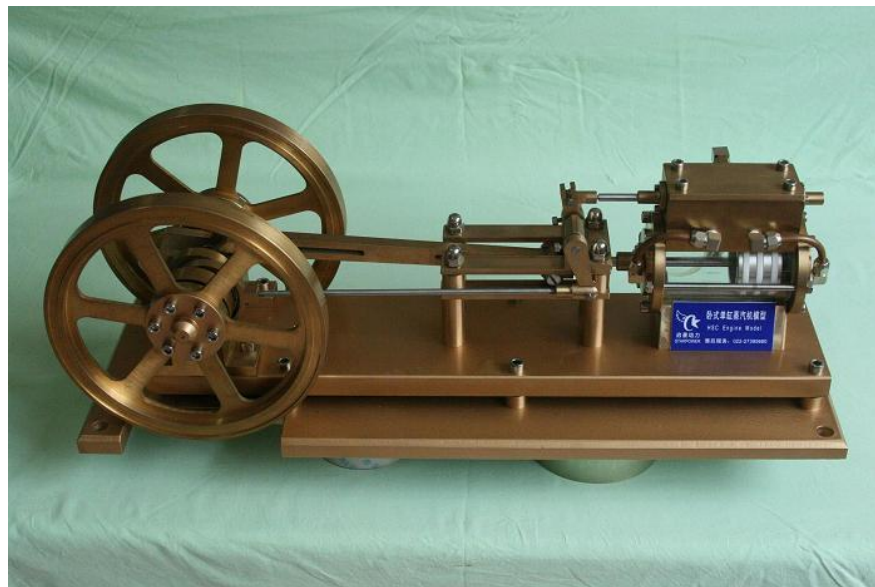
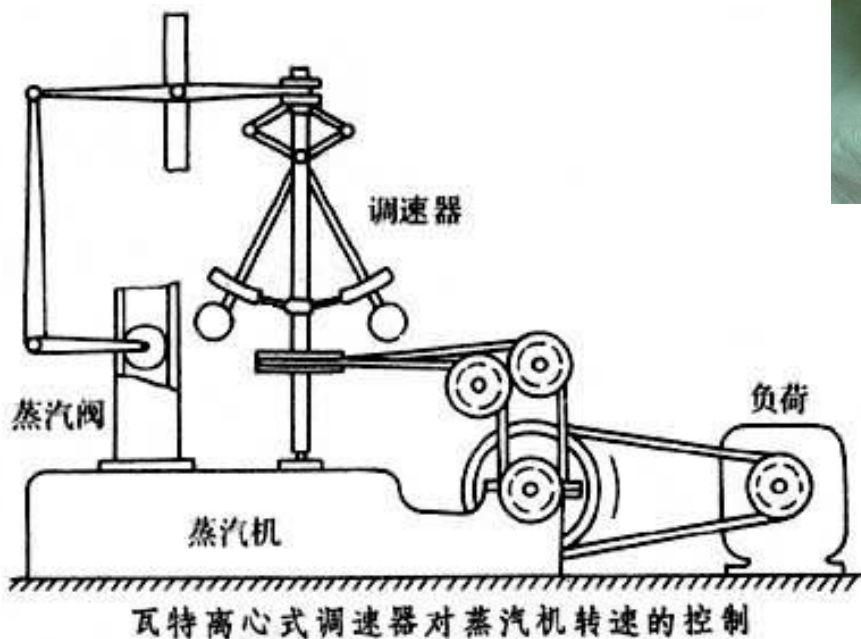
# 一、 控制论回顾

- 钱学森称之为二十世纪三大伟绩之一：  
量子力学、相对论、控制论
- 控制论的分支： 工程控制论 ——自动控制理论  
生物控制论  
经济控制论  
社会控制论
- 自动控制理论  
研究自动控制共同规律的技术学科

# 1.1 控制理论的发展历程

## 控制的开端

典型应用⇒模型描述⇒控制方法

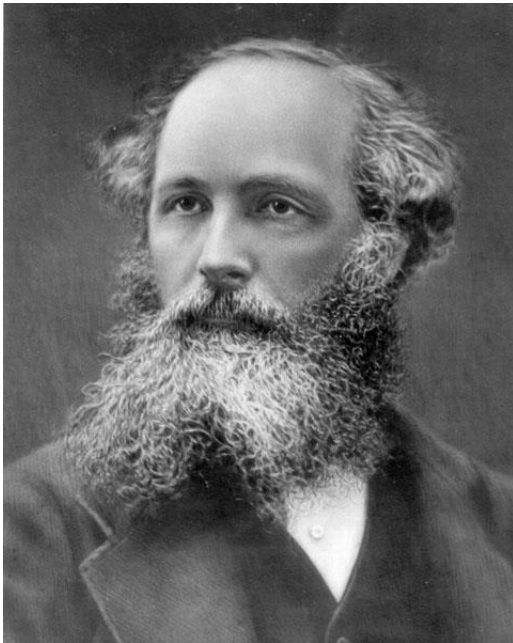


- 英国J·Watt用离心式调速器控制蒸汽机的速度（1788年）

- 英国**G·B·Airy (1801-1892)** 系统地研究了天文望远镜的速度控制，并根据倒立摆离心力原理，发现了系统的不稳定性。首次提出反馈系统的稳定性问题研究，以及利用**微分方程**来研究反馈控制动力学系统
- **C·Hugens (1629-1695)** 利用反馈控制原理发明了高性能的钟摆和天文望远镜



- J·C·Maxwell (1831-1879)，法国科学家，于1868年发表文章“论**调节器**” (On Governors. Proc. Royal Society of London, vol.16: 270-283, 1868)，成功解决了二阶及三阶系统的稳定性。



J·C·Maxwell

Maxwell 是一位天才的科学家，在许多方面都有极高的造诣。他同时还是物理学中**电磁理论**的创立人。

(见其论文 “A dynamical theory of the electromagnetic field”，1864)

Maxwell 在他的论文中还催促数学家们尽快地解决多项式的系数同多项式的根的关系的问题。

■ 剑桥大学的E·J·Routh与瑞士的Hurwitz解决了多阶系统的稳定性判断



A·M·Lyapunov



E·J·Routh



胡尔维茨, A.

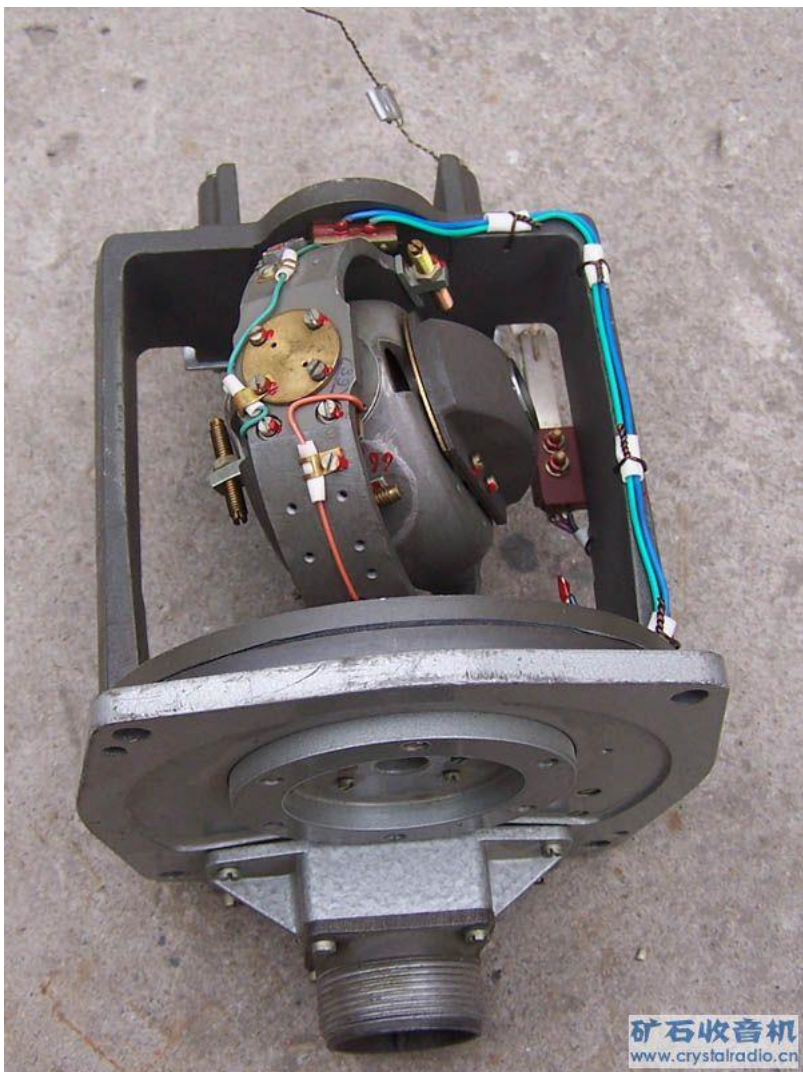
A·Hurwitz

- 俄国A·M·Lyapunov博士论文《论运动稳定性的一般问题》（1892年）

- 英国J·M·Gray设计出第一艘**全自动蒸汽轮船**东方号（Great Eastern）（1866年）
- 由徐寿设计的中国第一艘蒸汽轮船“黄鹤号”（L20m, 25T, 10km/hr）在安庆内军械所下水（1866年）。次年，中国第一艘木质明轮蒸汽舰船“恬古号”在江南造船厂下水。

# 经典控制前期（1900—1935）

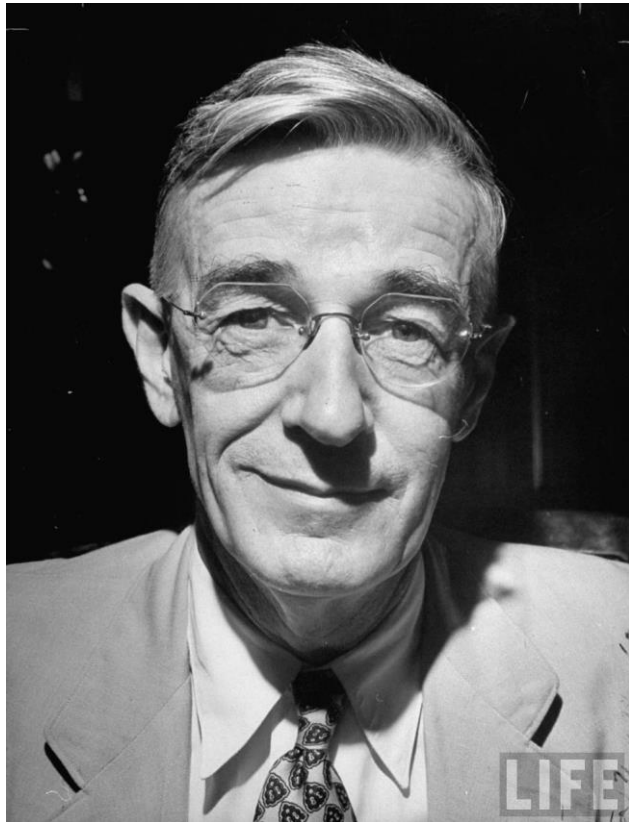
- **Wright Brothers**于**1903年12月17日**完成了人类历史上首次动力飞行，开创了**航空业**的新篇章
- 美国福特（**Ford Motor**）汽车公司组成最早的**汽车装配**流水线（**1913年**）



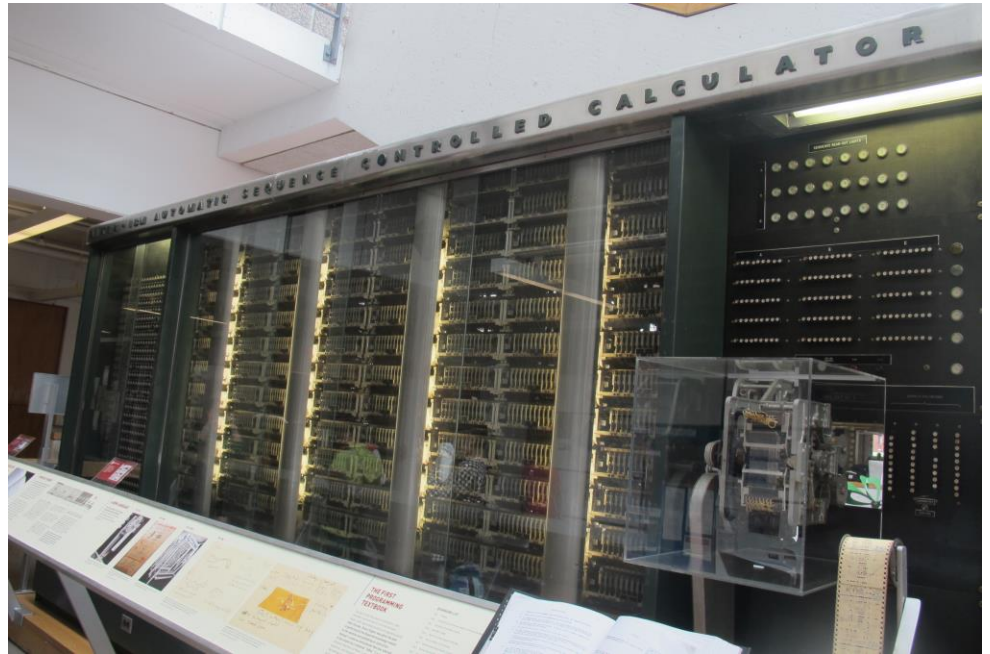
- **E·Sperry (1860-1930)** ,  
创立**Sperry**公司。由他们  
设计和制造的**陀螺仪**和各  
种控制装置被广泛地应用  
到二战时期的美国军舰、  
鱼雷、火炮、雷达和飞机  
上。
- **L·Sperry (1892-1923)** ,  
在1914年的巴黎航展中,  
成功地演示了**陀螺仪全自  
动机身平衡与稳定**, 为航  
空业的快速发展作出了重  
要的贡献



- 美国N·Minorsky研制出用于**船舶驾驶**的伺服机构，提出了**PID控制**方法（1922）
- 美国MIT的V·Bush研制成第一台大型模拟计算机（Differential Analyzer）（1928）

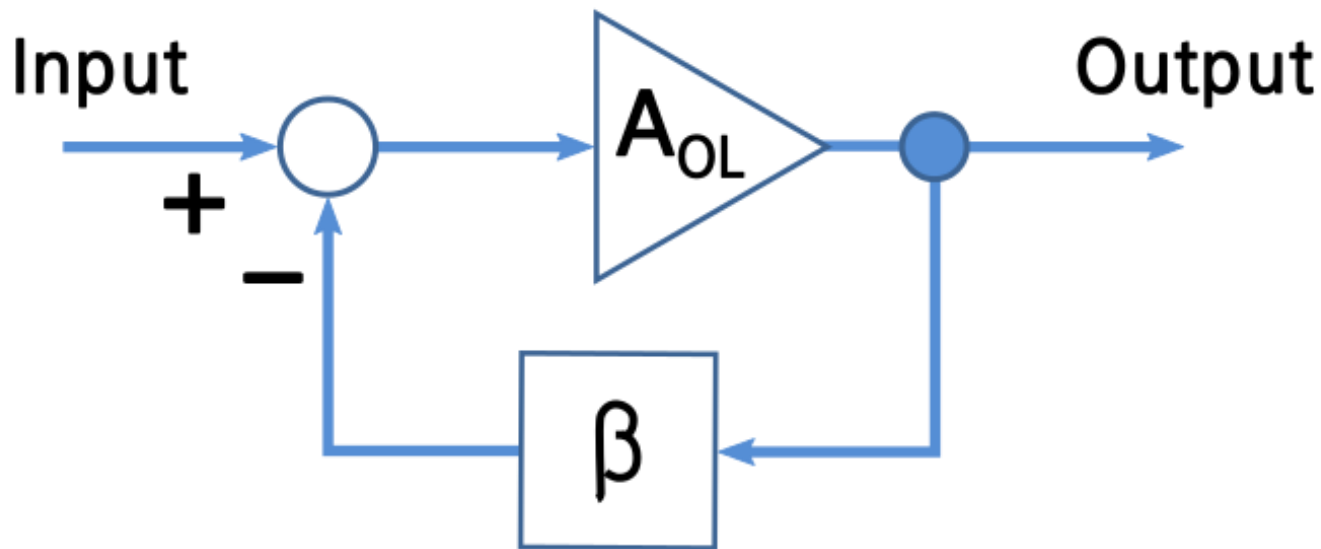


V·Bush



第一台大型模拟计算机

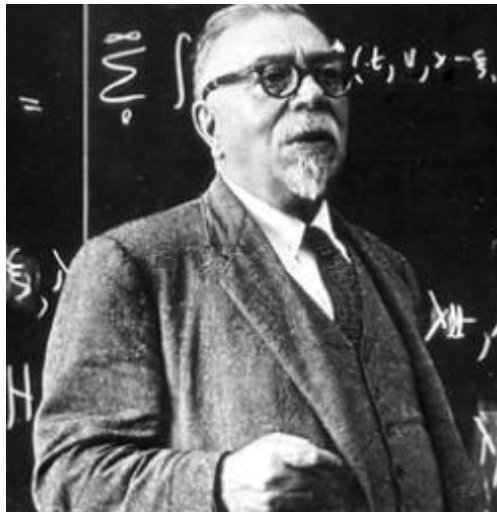
- 美国H·S·Black提出**放大器**性能的负反馈方法（Negative Feedback Amplifier）（1927）



输出反馈控制系统方块图

- 自动控制的基础为闭环控制。控制论的奠基人N·Wiener给出的定义为：

*Feedback is a method of controlling a system by inserting into it the result of its past performance*



N·Wiener

- 美国E·Sperry以及C·Mason研制出**火炮控制器**（1925），**气压反馈控制器**（1929）

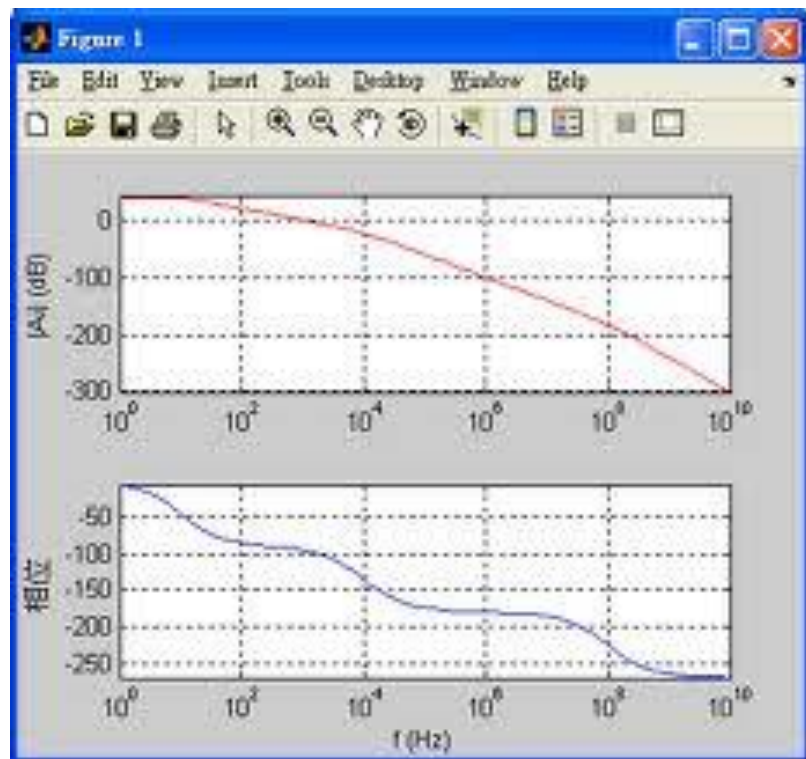
- 美国贝尔实验室的H·Bode（1938）以及Nyquist（1940）提出频率响应法



H·Bode

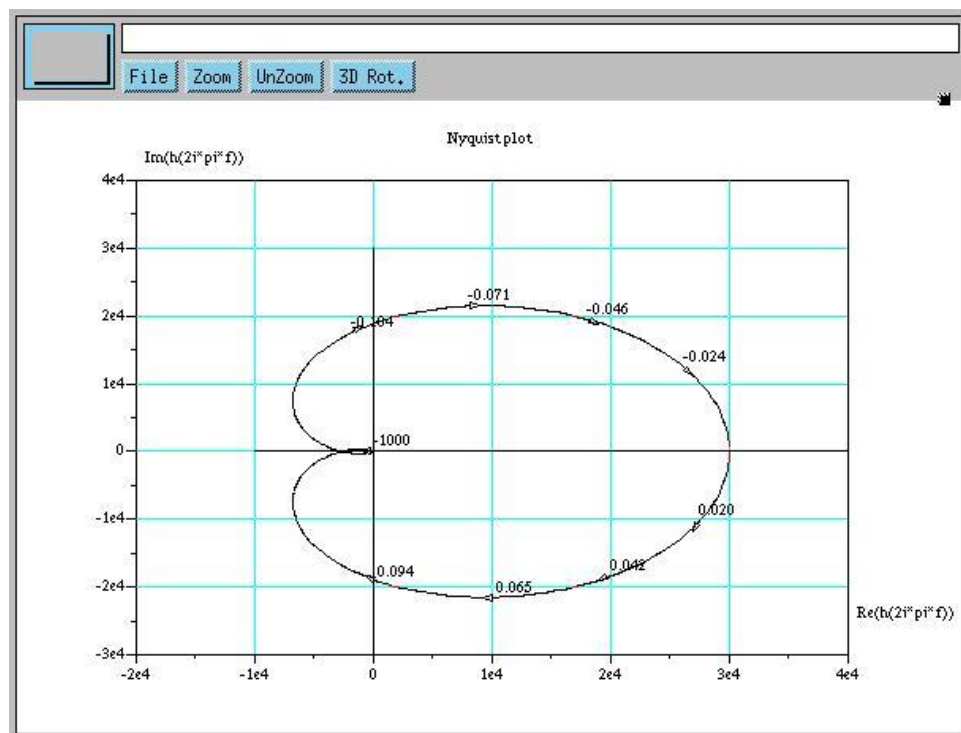


H·Nyquist



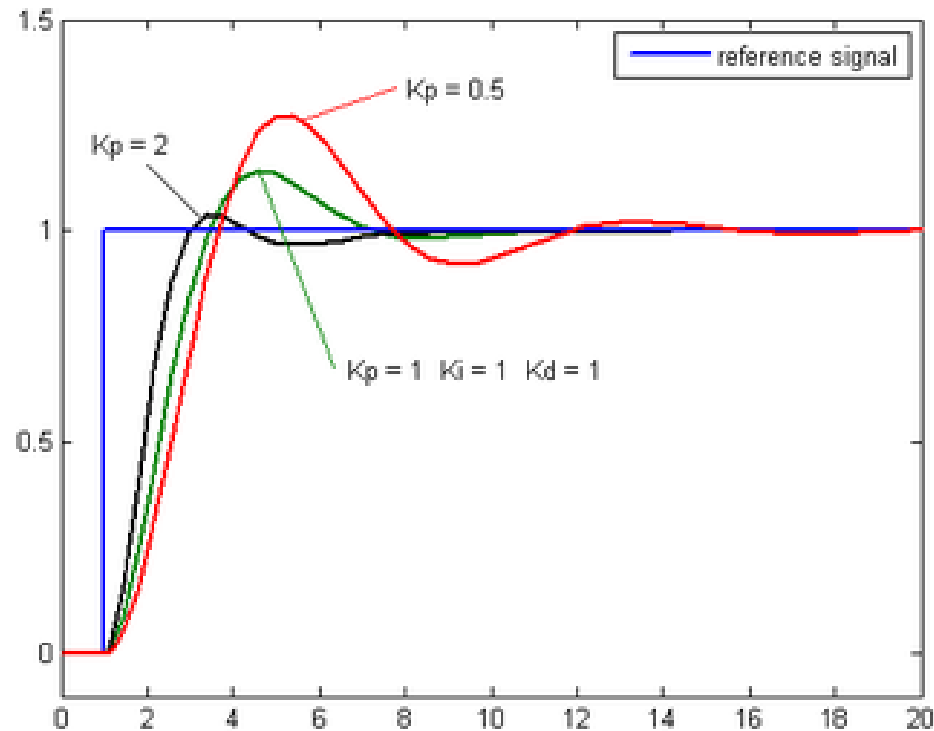
Bode 图

Nyquist 图





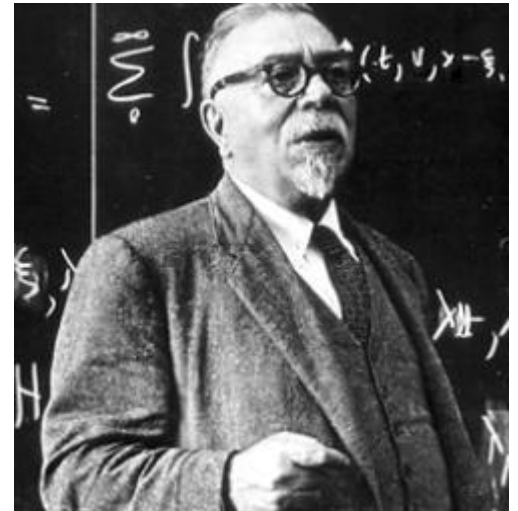
## (2) 美国Taylor仪器公司的J·G·Ziegler和N·B·Nichols提出PID参数的最佳调整法 (1942)



- 美国MIT的N·Wiener研究随机过程的预测（1942），提出Wiener滤波理论（1942），发表《控制论》（Cybernetics）一书（1948），标志着控制论学科的诞生



H·Hazen

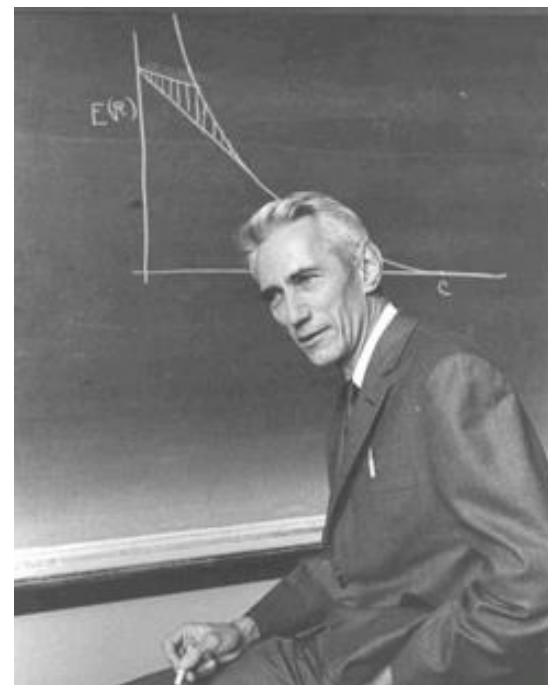


N·Wiener

- 美国的H·Hazen发表关于伺服结构理论（Theory of Servomechanism）(1934)，并在MIT建立伺服机构实验室（Servomechanism Laboratory）（1939）

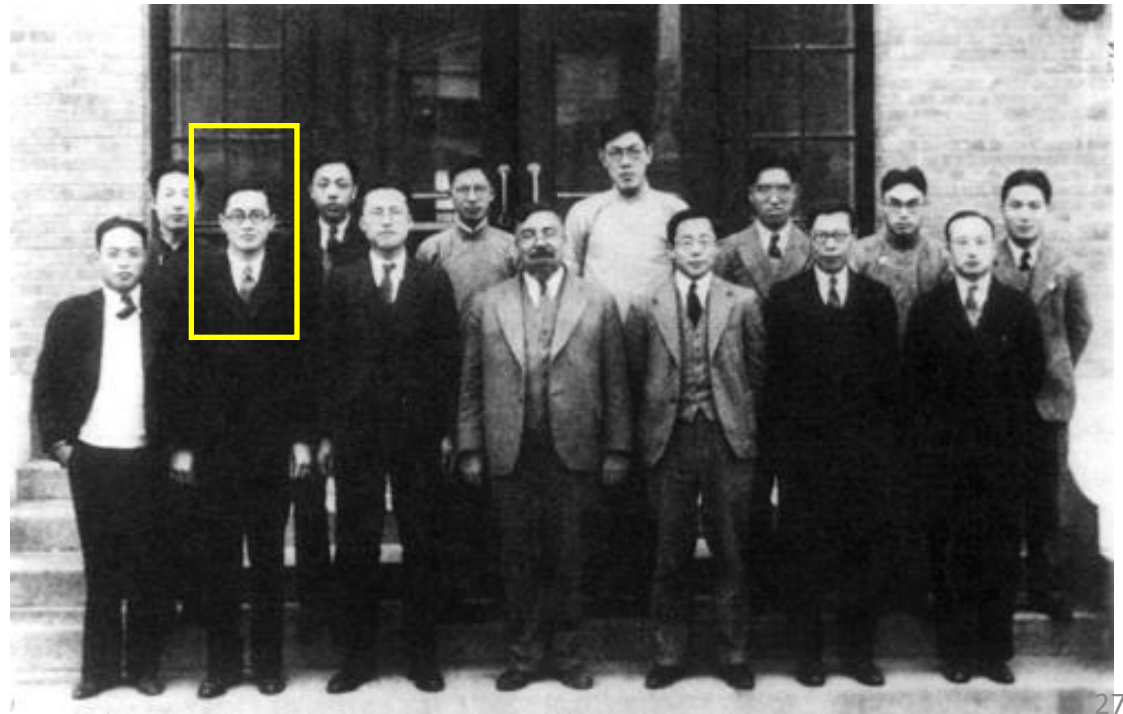
# 经典控制（1935—1950）

- 在贝尔实验室Bode领导的**火炮控制系统**研究小组工作的C·Shannon提出**继电器逻辑自动化理论**（1938）随后，发表专著《通信的数字理论》（The Mathematical Theory of Communication），奠定了信息论的基础（1948）



C·Shannon

- 李郁荣（Y·W·Lee，1904-1989），麻省理工学院N·Wiener的首位博士生，曾任职于清华大学电机系，早期为N·Wiener理论的工程应用与推广作了大量的工作。1946年回到MIT电机系，与Shannon一起成为该系最著名的两位学科带头人。其主要工作包括统计通讯和电路理论，培养了大批电子工程领域中的知名学者和工程师，被誉为MIT最伟大的教育家之一

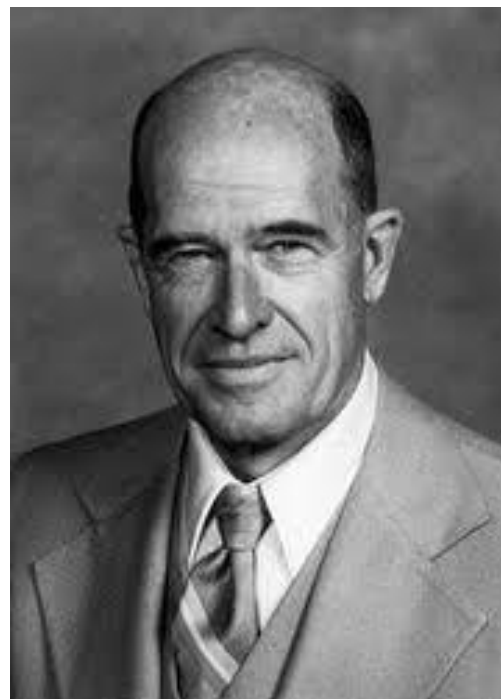
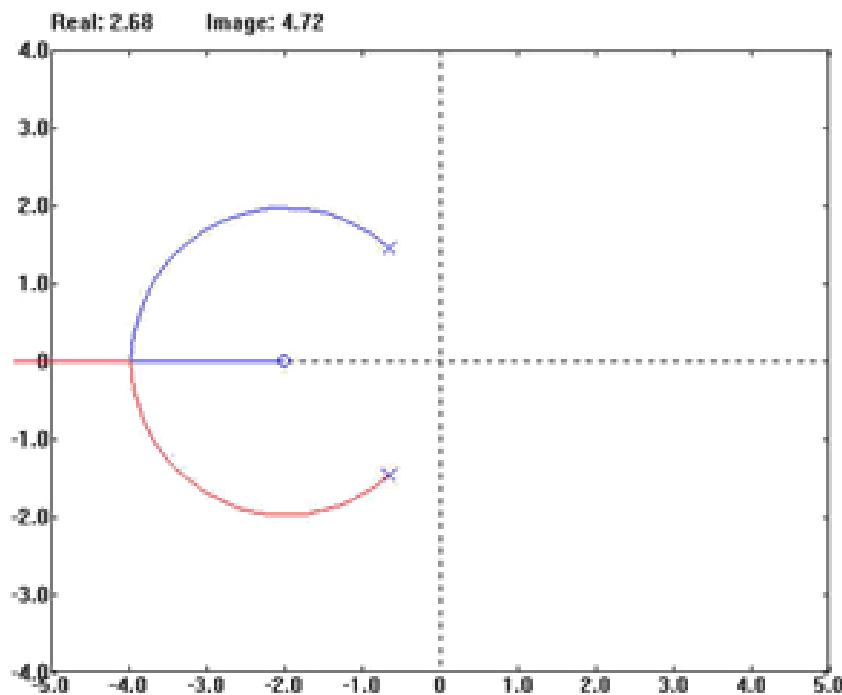


李郁荣（Y·W·Lee）

- MIT Radiation Laboratory在研究SCR-584雷达控制系统过程中，创立了Nichols Chart Design Method，
- R·S·Philips的论文On Noise in Servomechanisms，以及Hurwicz（1947）的数字控制系统（Sampled Data System）相继发表



- 美国W·Evans提出**根轨迹法**（Root Locus Method）（1948），以单输入线性系统为对象的经典控制研究工作完成



W·Evans

- 多本有关经典控制的经典名著相继出版，
  - Ed·S·Smith的Automatic Control Engineering（1942），
  - H·Bode的Network Analysis and Feedback Amplifier（1945），
  - L·A·MacColl的Fundamental Theory of Servomechanisms(1945),
  - 钱学森的《控制工程论》（Engineering Cybernetics）(1954)

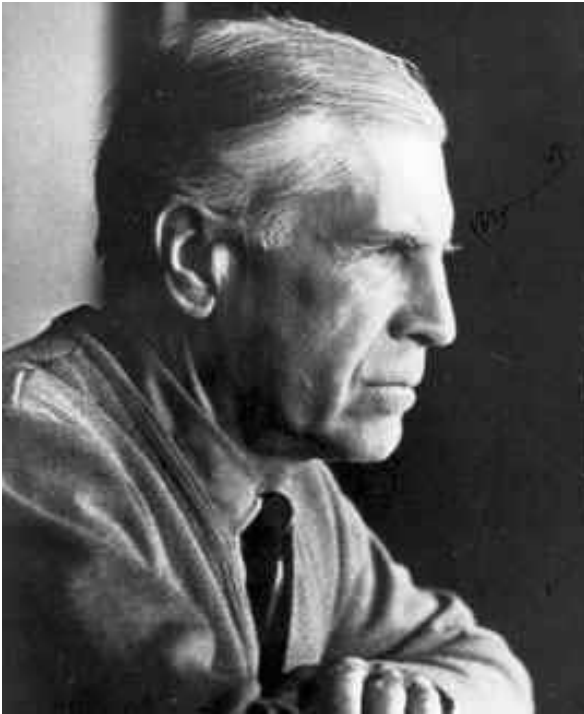
# 经典控制的特征

- 主要研究对象: 单入单出线性定常系统(低阶)
- 主要数学基础: 傅里叶变换、拉普拉斯变换
- 系统模型: 传递函数、频率响应
- 主要方法: 频率响应法(波特图)、根轨迹
- 设计目标: 稳定性

# 现代控制（1950—）

“二次世界大战中，火炮、雷达、飞机以及通讯系统的控制研究直接推动了经典控制的发展。五十年代后兴起的现代控制起源于冷战时期的军备竞赛，如导弹（发射、操纵、指导及跟踪）、卫星、航天器和星球大战，以及计算机技术的出现” — 英国科学家（A·J·G·Macfarlane）

- 苏联L·S·Pontryagin发表最优过程数学理论，提出极大值原理（**Maximum Principle**）（1956）



L·S·Pontryagin



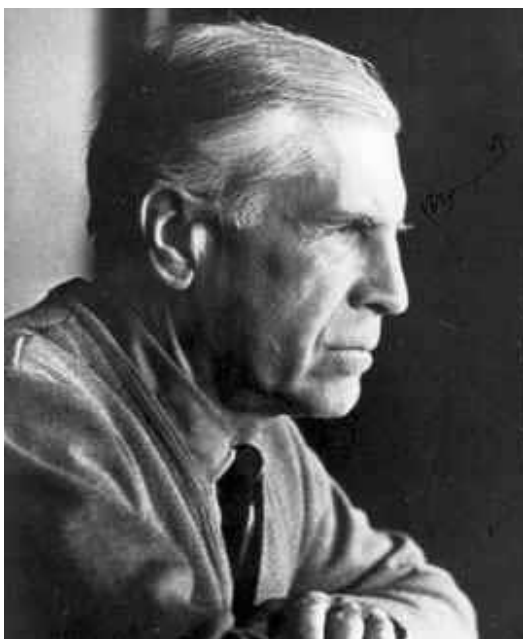
R·Bellman

贝尔曼, R.

- 美国R·Bellman在RAND Coporation数学部的支持下，发表著名的**Dynamic Programming**，建立**最优控制**的基础（1957）

- 国际自动控制联合会（IFAC）成立（1957），中国为发起国之一，第一届学术会议于莫斯科召开（1960）

## 控制理论三巨头



**L·S·Pontryagin**  
极大值原理



**R·E·Kalman**  
Kalman滤波



贝尔曼, R.  
**R·Bellman**  
动态规划



- 美国MIT的Servomechanism Laboratory研制出第一台**数控机床**（1952）
- 继MIT CNC Project之后，NC（数控）技术迅速进入商品化时代。1957年，Giddings & Lewis把NC装置装在Skin Miller上，制成NC工作母机。1958年，Kearney & Trecker开发了NC加工中心。同一年，日本富士通和牧野FRAICE公司开发成功NC铣床

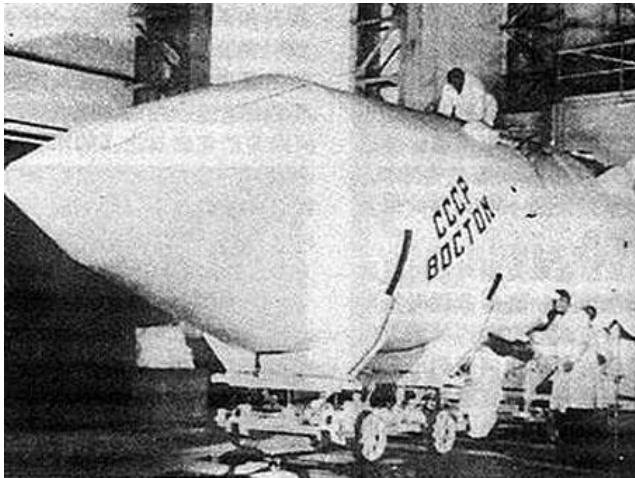
- 世界第一颗人造地球卫星（**Sputnik**）由苏联发射成功（**1957**）



**Sputnik:** 旅伴

- 美国G·Devol研制出第一台**工业机器人**样机（1954），两年后，被称为机器人之父的J·Engelberger创立了第一家机器人公司Unimation
- 1968年，日本Kawasaki公司从Unimation买进技术。目前，Yaskawa公司已成为世界最大机器人公司。机器人技术体现了电子控制和驱动、传感器以及运动机构一体化的新思想。日本安川（Yaskawa）公司的工程师把这叫做**Mechatronics**（机电一体化技术）（1972）

- 美籍匈牙利人R·E·Kalman发表On the General Theory of Control Systems等论文，引入状态空间法分析系统，提出能控性、最佳调节器和Kalman滤波等概念，奠定了现代控制理论的基础（1960）



- 苏联东方—1号飞船载着加加林进入人造地球卫星轨道，人类宇航时代开始了（1961）

R·E·Kalman

# Rudolf E. Kalman 1930-2016/07/02

His fundamental contribution, an algorithm called the **Kalman filter**, made possible many essential technological achievements of the last 50 years. These include **aerospace systems** such as the computers that landed Apollo astronauts on the moon, **robotic vehicles** that explore our world from the deep sea to the outer planets, and nearly any endeavor that needs to **estimate the state of the world from noisy data**. Someone once described the entire **GPS system**—an Earth-girdling constellation of satellites, ground stations, and computers as “one enormous Kalman filter.”

--- **“How an Inventor You’ve Probably Never Heard of Shaped the Modern World”**  
MIT Technology Review

## 求学生涯

1943 年，卡尔曼的电气工程师父亲领着全家移民到了美国。卡尔曼于 1953 和 1954 年在 MIT 先后获得电子工程学士和硕士学位，但没能通过 MIT 的博士资格考试，之后转往哥伦比亚大学，于 1957 年获得博士学位，论文题目是 “Analysis and Synthesis of Linear Systems Operating on Randomly Sampled Data” 。

## 出师不利

何毓琦先生回忆道：“当时几乎所有控制方面的著名工作都在 Fourier 与 Laplace 变换后的所谓频域里进行。Kalman 的方法则在动态系统上使用了时域微分方程模型。这在当时是非常离经叛道的，主流观点对此质疑很多。”另外，一些数学家认为卡尔曼的推导并不严格。几番周折之后，卡尔曼关于离散和连续时间滤波算法的这两篇奠基性论文不得不发表在机械工程（Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering）而不是电机工程或系统工程（当然更不是应用数学）杂志上。

## 一战成名

- 1960年 NASA Ames Research Center 阿波罗登月计划的导航项目
- 过滤雷达、陀螺仪、加速度计的噪声，估计飞船的位置和速度
- 计算难题：定点运算的舍入误差  $\Rightarrow$  平方根卡尔曼滤波（Cholesky 分解）



- 美国的E·I·Jury发表**数字控制系统（Sampled—Data Control System）**，建立了数字控制及数字信号处理的基础（1958）



- 苏联发射月球9号探测器，首次在月面软着落成功（1966）；三年后（1969），美国阿波罗11号把宇航员N·A·Armstrong送上月球。

- 瑞典Karl J·Astrom(1934-至今)提出**最小二乘辨识**，解决了线性定常系统参数估计问题和定阶方法（1967）；六年后，提出了self tuning regulator，建立自适应控制的基础。Astrom于1993年获得IEEE Medal of Honor
- 英国H·H·Rosenbrock发表State Space and Multivariable Theory（1970）；
- 加拿大W·M·Wonham发表Linear Multivariable Control: A Geometric Approach（1974）

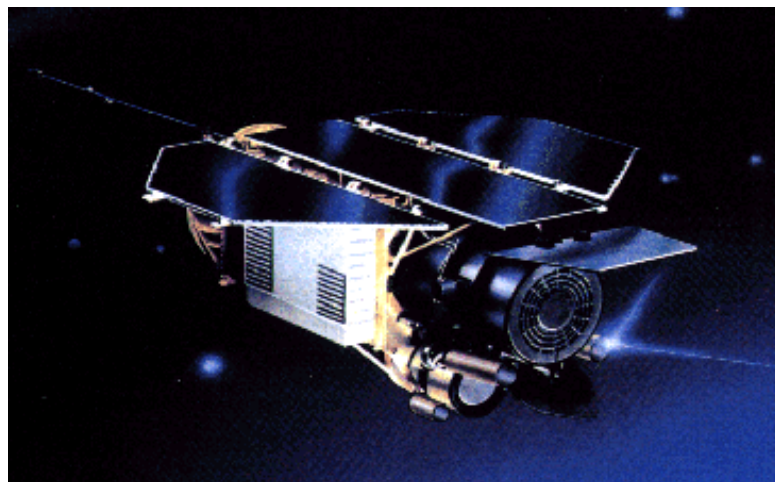
- 美国的**M·E·Merchant**提出计算机集成制造的概念（**1969**）
- 美国**ARPA**计算机网络初步建成（**1971**）
- 日本**Fanuc**公司研制出由加工中心和工业机器人组成的柔性制造单元（**1976**）

- 美国**R·Brockett**提出用微分几何研究非线性控制系统（1976），意大利**A·Lsidori**出版（**Nonlinear Control Systems**）（1985）
- 加拿大**G·Zames**提出 $H^\infty$ 鲁棒控制设计方法（1981）
- 美国哥伦比亚号航天飞机首次发射成功（1981）
- 美国**A·Bryson**和**Y·CHo**发表**Applied Optimal Control**（1969）。**Y·CHo**和**X·R·Cao**等提出离散事件系统理论（1983）

- 第一台火星探测器**Sojourner**在火星表面软着陆（1996）



火星探测器**Sojourner**



旅行者**Voyager**一号

- 旅行者**Voyager**一号、二号开始走出太阳系，对茫茫太空进行探索

# 现代控制的特征

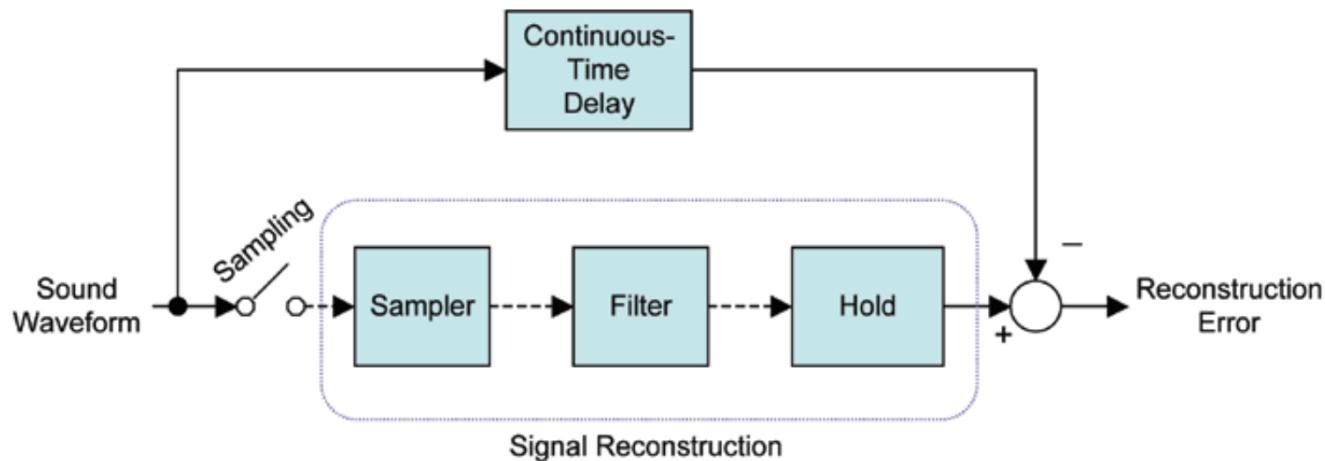
- 研究对象：多入多出、线性/非线性、定常/时变
- 数学基础：线性代数、矩阵论等几乎所有数学分支
- 系统模型：状态空间模型
  - 根本转变：从外部特性到内部状态
- 主要方法：
  - 矩阵分析、最优化、数值计算
- 设计目标：稳定性、性能优化



# The impact of control theory

<http://ieeecss.org/impact-control-technology-2nd-edition>

- 传统音频信号的数字化:
  - 采样 (0-20 kHz, 香农采样定理) 量化、编码
  - 高频成分被抑制; 相位失真; Gibbs现象
- 基于采样数据控制理论的信号重构

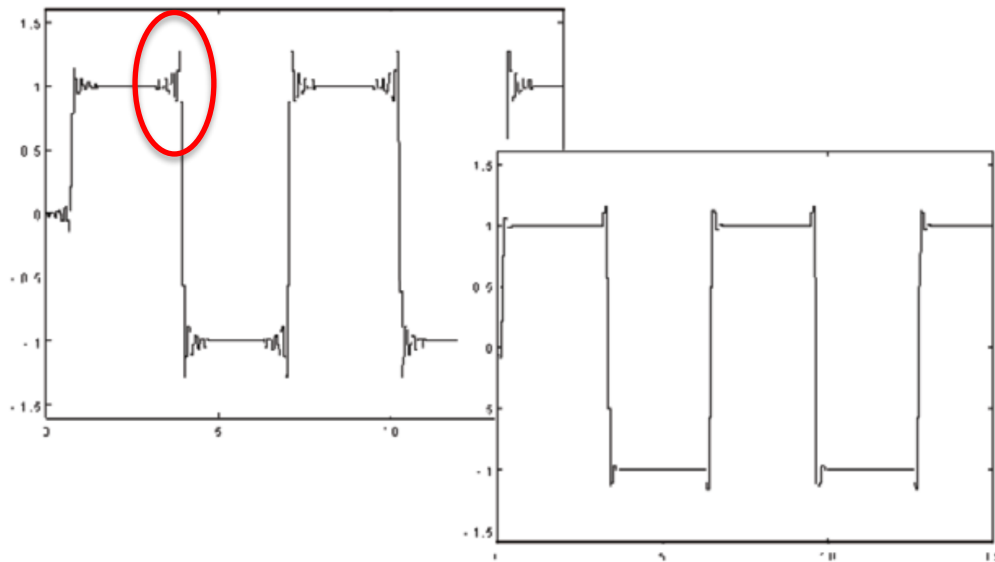


Y Yamamoto, M Ngahara, P P Khargonekar. Signal reconstruction via H-infinity sampled-data control theory – Beyond the Shannon Paradigm, IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(2), 613-625

# The impact of control theory

<http://ieeecss.org/impact-control-technology-2nd-edition>

- 基于采样数据控制理论的信号重构
- 该重构滤波器被ON Semiconductor做到集成电路中, 成功应用于CD、MP3、手机、音响、车载音频系统等



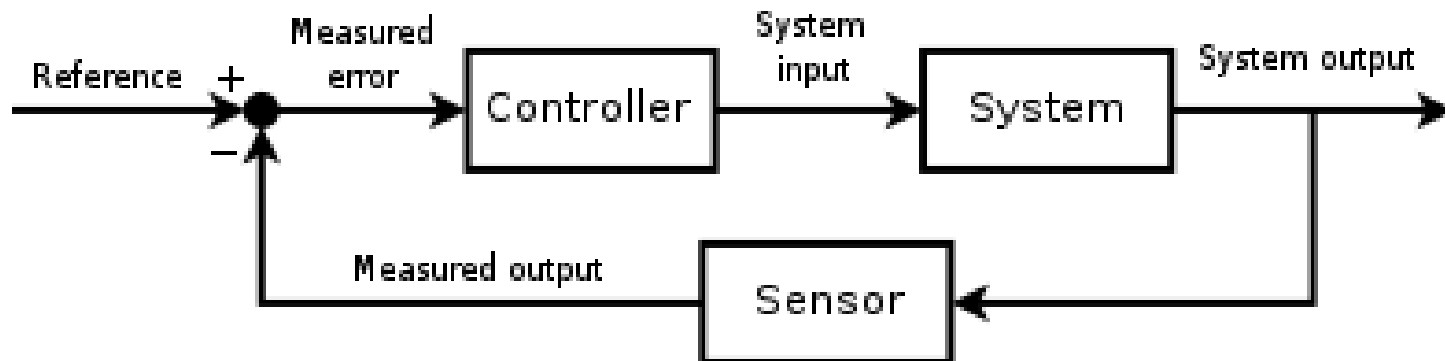
## 1.2 控制系统的主要性能指标

对控制系统性能的要求概括为三方面：

稳，准，快

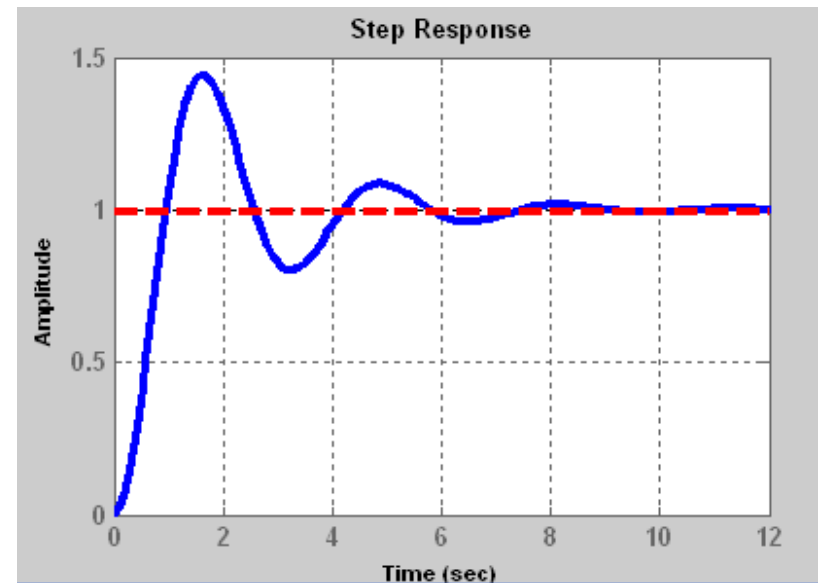
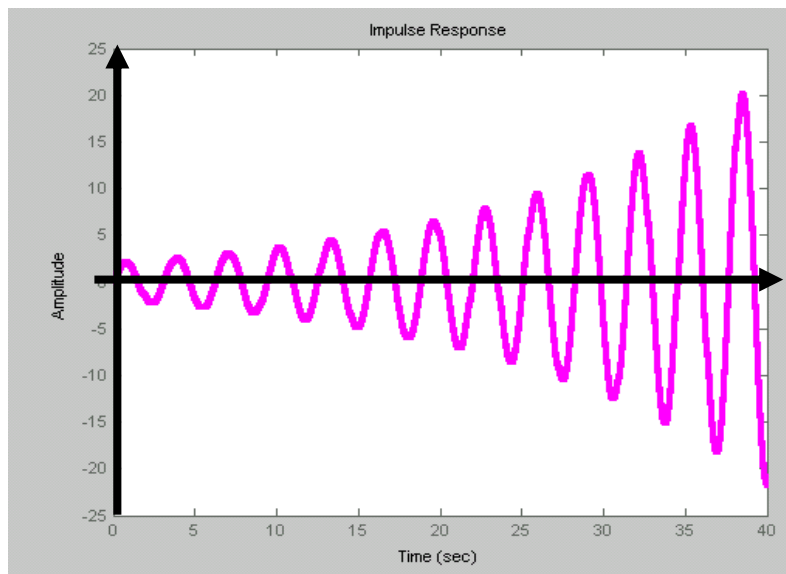
设计控制器改善系统的动态特性

- 1、首先保证闭环控制系统的稳定性；
- 2、然后追求系统的快速性和准确性。



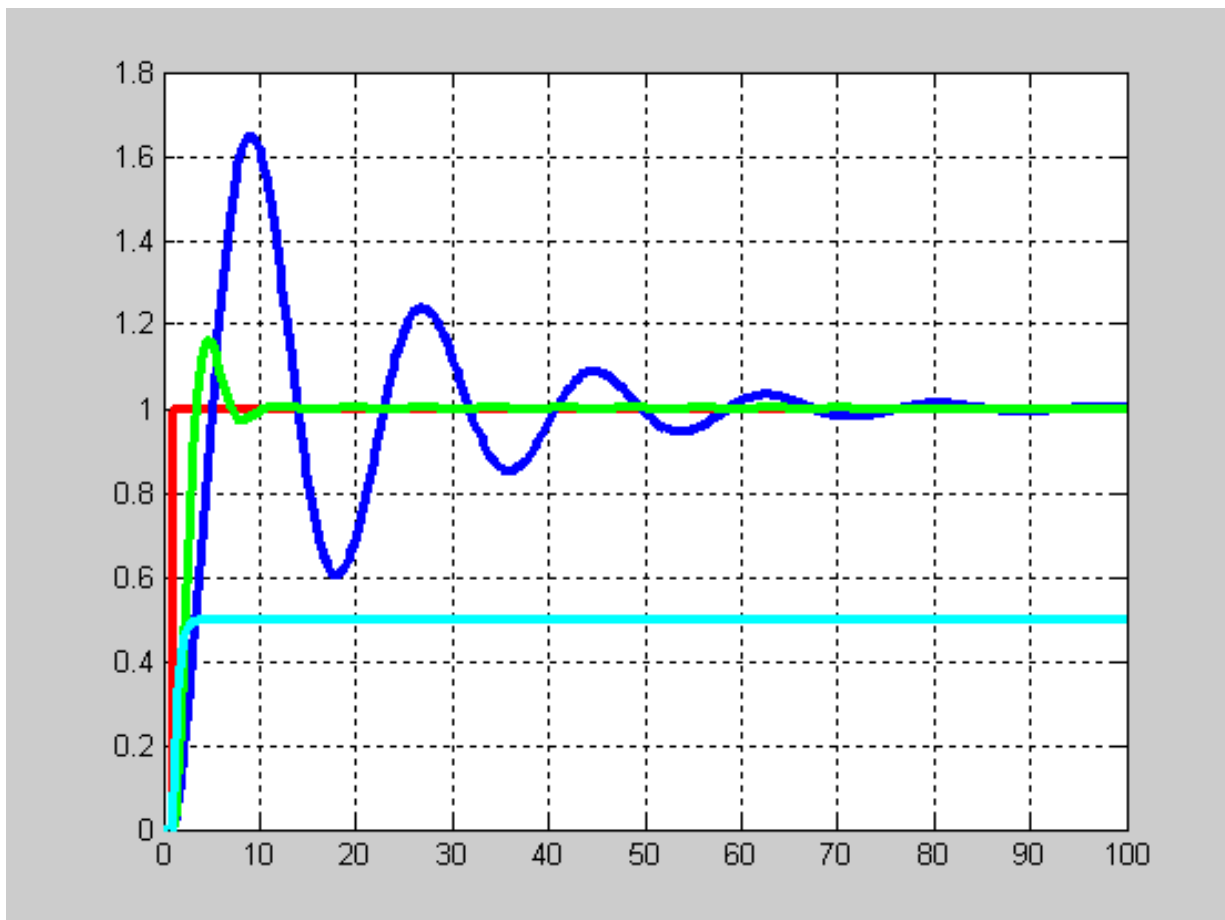
## ➤ 稳定性

- 系统在给定变化或受到扰动作用时，自动返回平衡状态的能力称为系统的**稳定性**。如果系统能自动返回平衡状态，则该系统是稳定的。稳定系统的数学特征是其输出量收敛；反之，系统是不稳定系统。



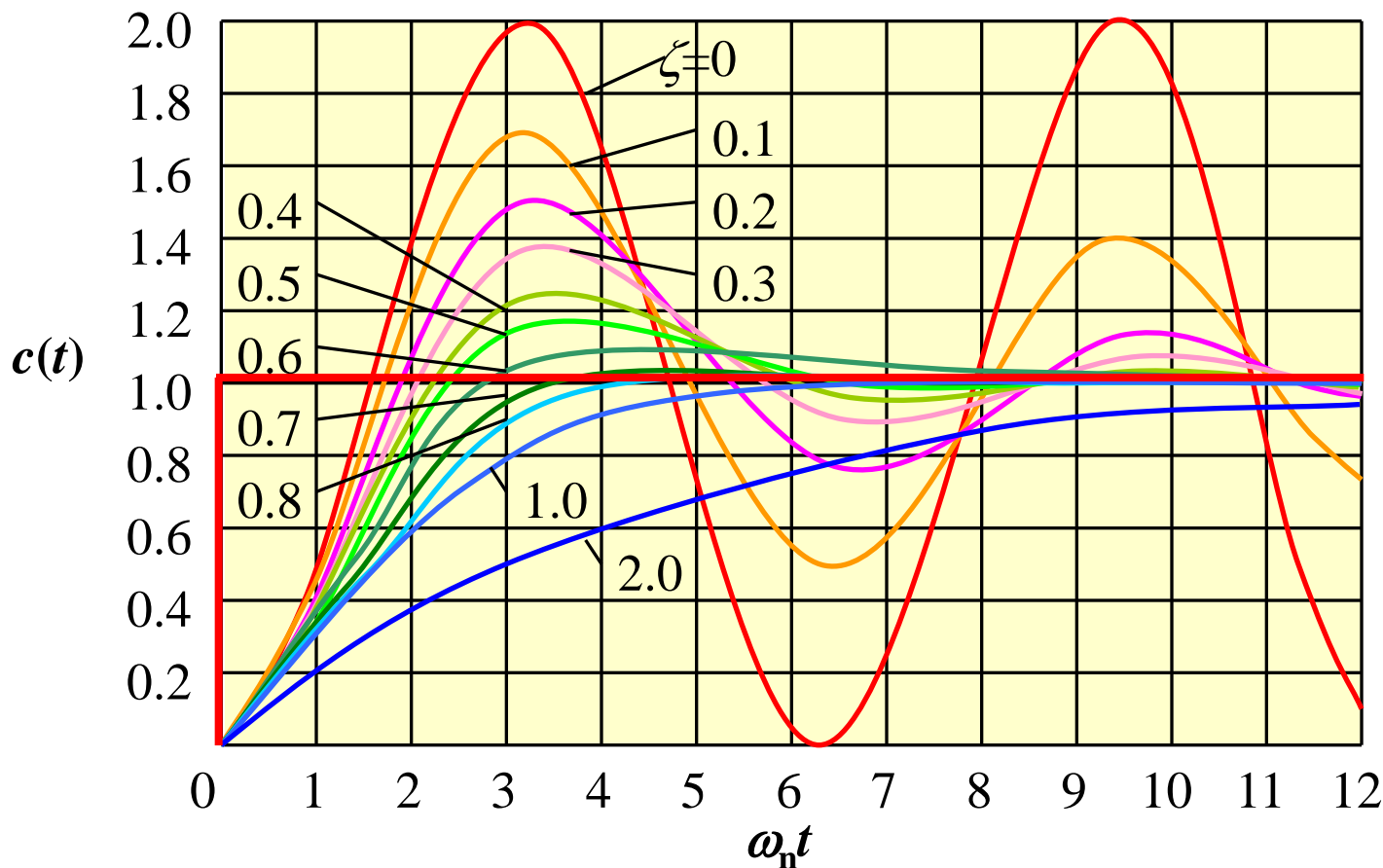
## ➤ 准确性

- 在系统稳定的前提下，希望稳态精度越高越好。  
例如：高射炮射角随动系统， $\gamma$ 刀定位系统



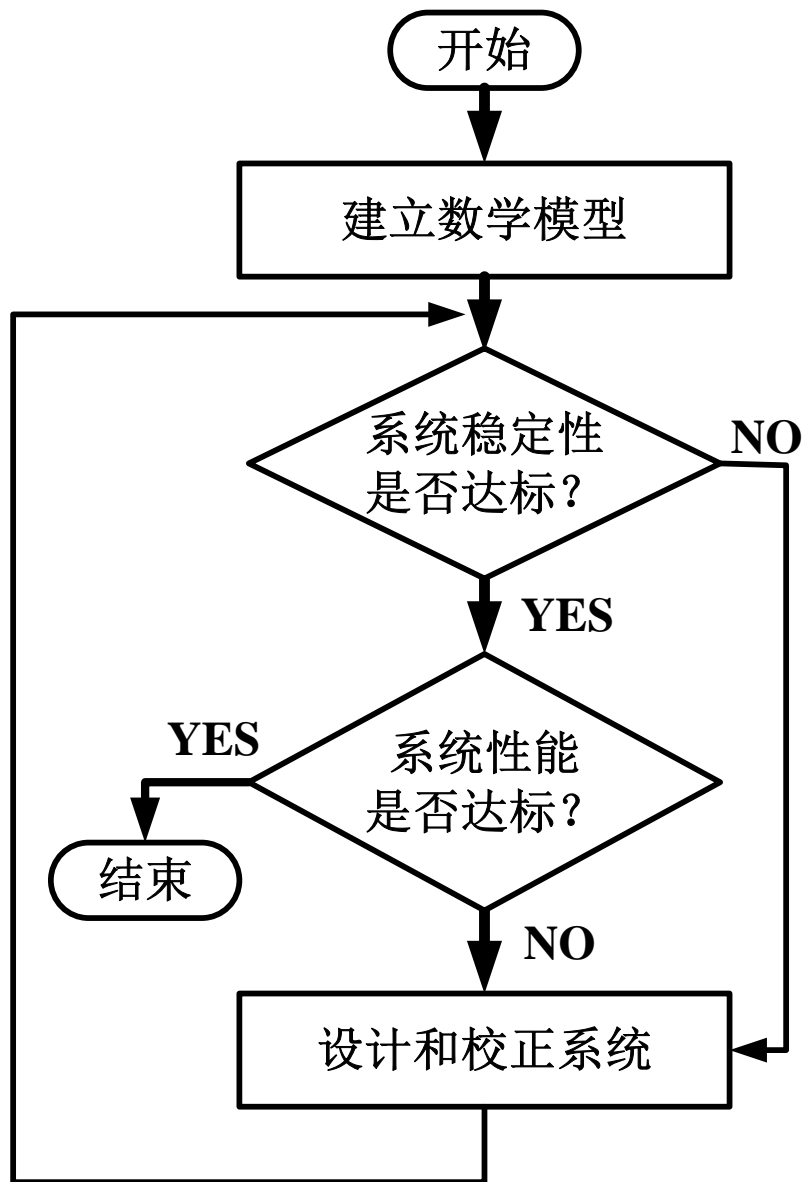
## ➤ 快速性

- 在系统稳定的前提下，希望控制过程（过渡过程）进行得越快越好。
- 例如：高射炮射角随动系统，导弹发射系统；



二阶系统的单位阶跃响应曲线





# 已学过的控制论主要内容

- 控制系统的数学模型
- 线性系统的时域分析
- 线性系统的频域分析
- 线性系统的校正方法
- 线性离散控制系统（采样系统分析）
- 非线性系统的分析
- 状态空间分析设计

# 控制方法的发展脉络总结

- 单变量、线性  $\Rightarrow$  多变量、非线性
- 传递函数、频域  $\Rightarrow$  状态空间、时域
- 镇定、调节、跟踪  $\Rightarrow$  多目标性能优化
- 传统工业系统  $\Rightarrow$  物理信息系统(control, communication, computation)、生化、经济、社会等复杂系统
  - Closed-loop autonomous decision making
- 传统控制  $\Rightarrow$  控制与机器学习的融合