Chapter 2 动态系统的稳定性

2.1 稳定性定义

2.2 李雅普诺夫第一法（间接法）

2.3 李雅普诺夫第二法（直接法）

2.4 拉塞尔不变性定理

2.5 Barlarat 引理

参考文献：

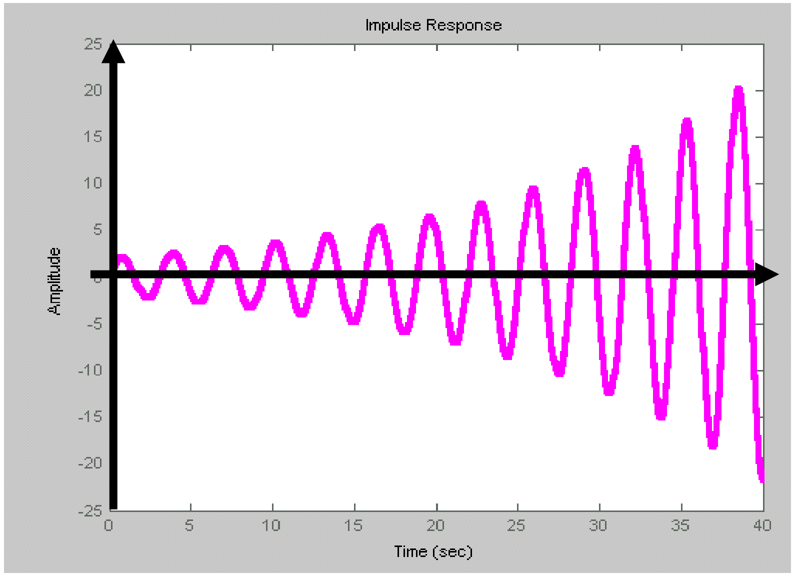
《稳定性的理论、方法及应用》，

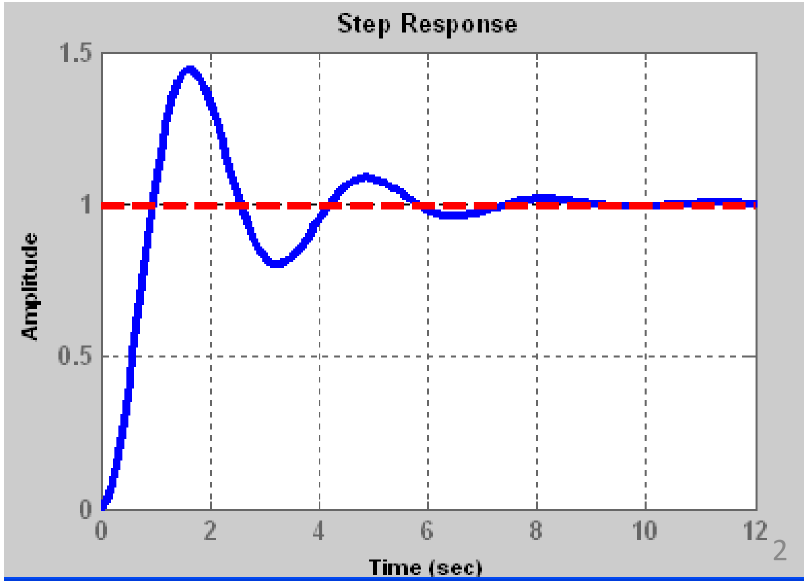
华中科技大学出版社，2010年，廖晓昕

系统运动稳定性的分析是控制理论的一个重要组成部分。稳定性是系统的一个重要特征。

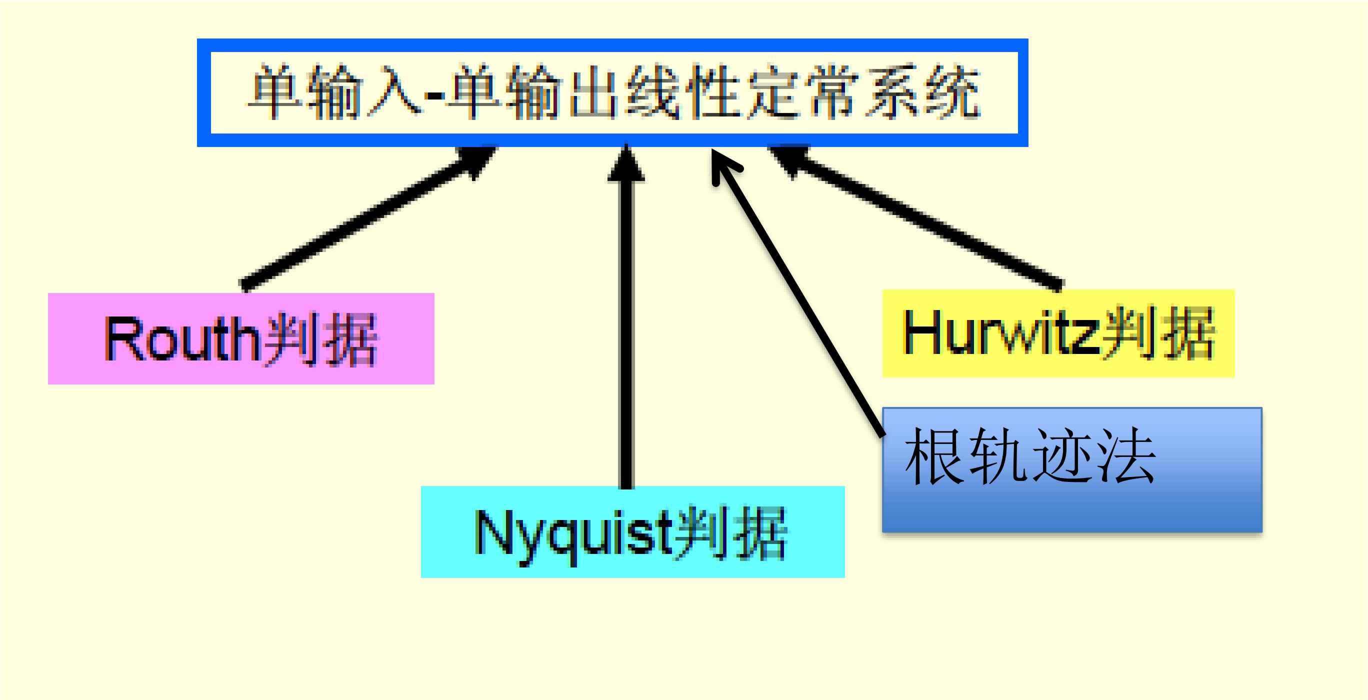
实际系统必须是稳定的。

系统在给定变化或受到扰动作用时，自动返回平衡状态的能力称为系统的稳定性。如果系统能自动返回平衡状态，则该系统是稳定的。稳定系统的数学特征是其输出量收敛；反之，系统是不稳定系统。





- **经典控制理论稳定性判别方法：** Routh判据，Nyquist判据， Hurwitz判据， 根轨迹判据
- **非线性系统：** 相平面法(适用于一，二阶非线性系统)



李雅普诺夫稳定性

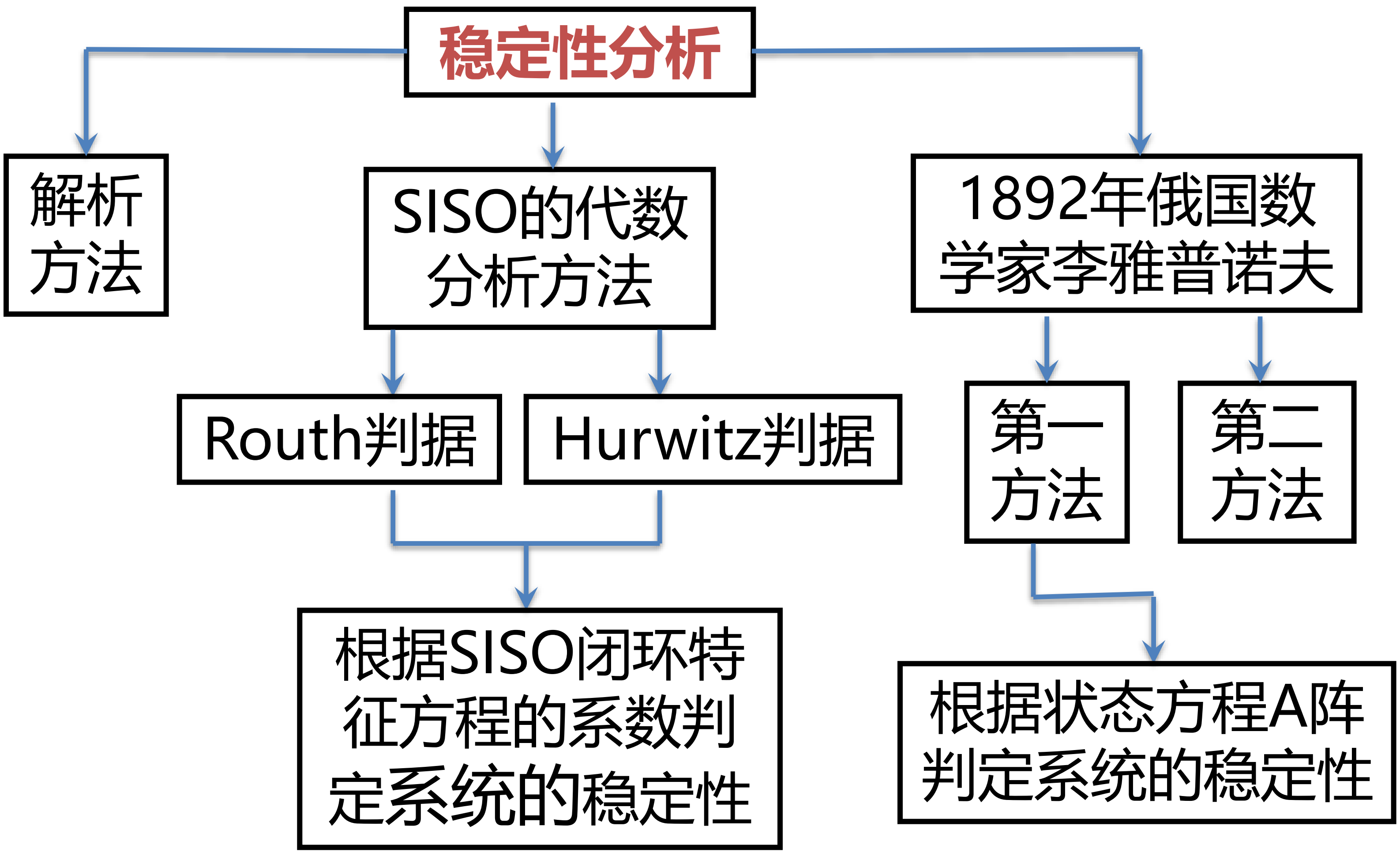
- **1892年，俄国学者李雅普诺夫提出的稳定性定理采用了状态向量来描述，适用于单变量，线性，非线性，定常，时变，多变量等系统。**

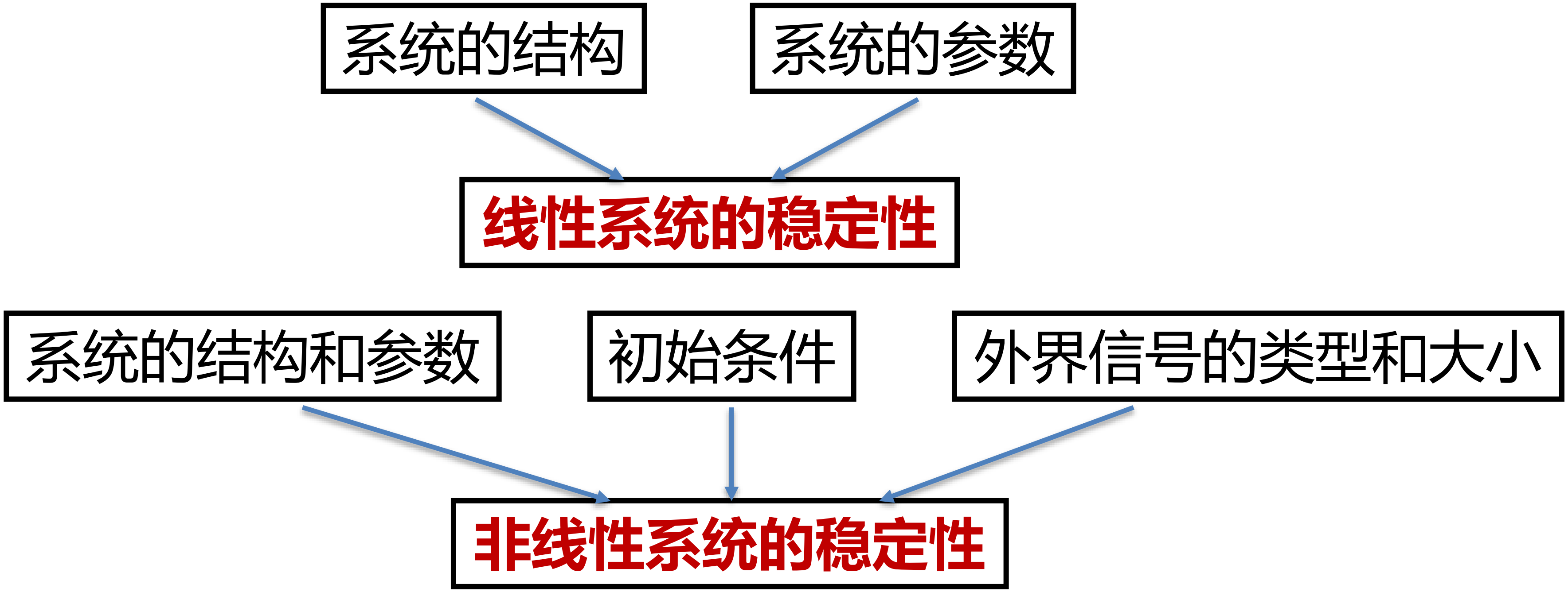
第一种方法：通过求微分方程的解来分析运动稳定性，对于非线性系统，在工作点附近的一定范围内，可以用线性化微分方程来近似描述（局部运动）

第二方法：通过对系统构造一个“类似能量”的标量函数，然后考察该函数对时间的变化来判断稳定性。又称直接方法，现今学术界广为应用且影响巨大的方法。

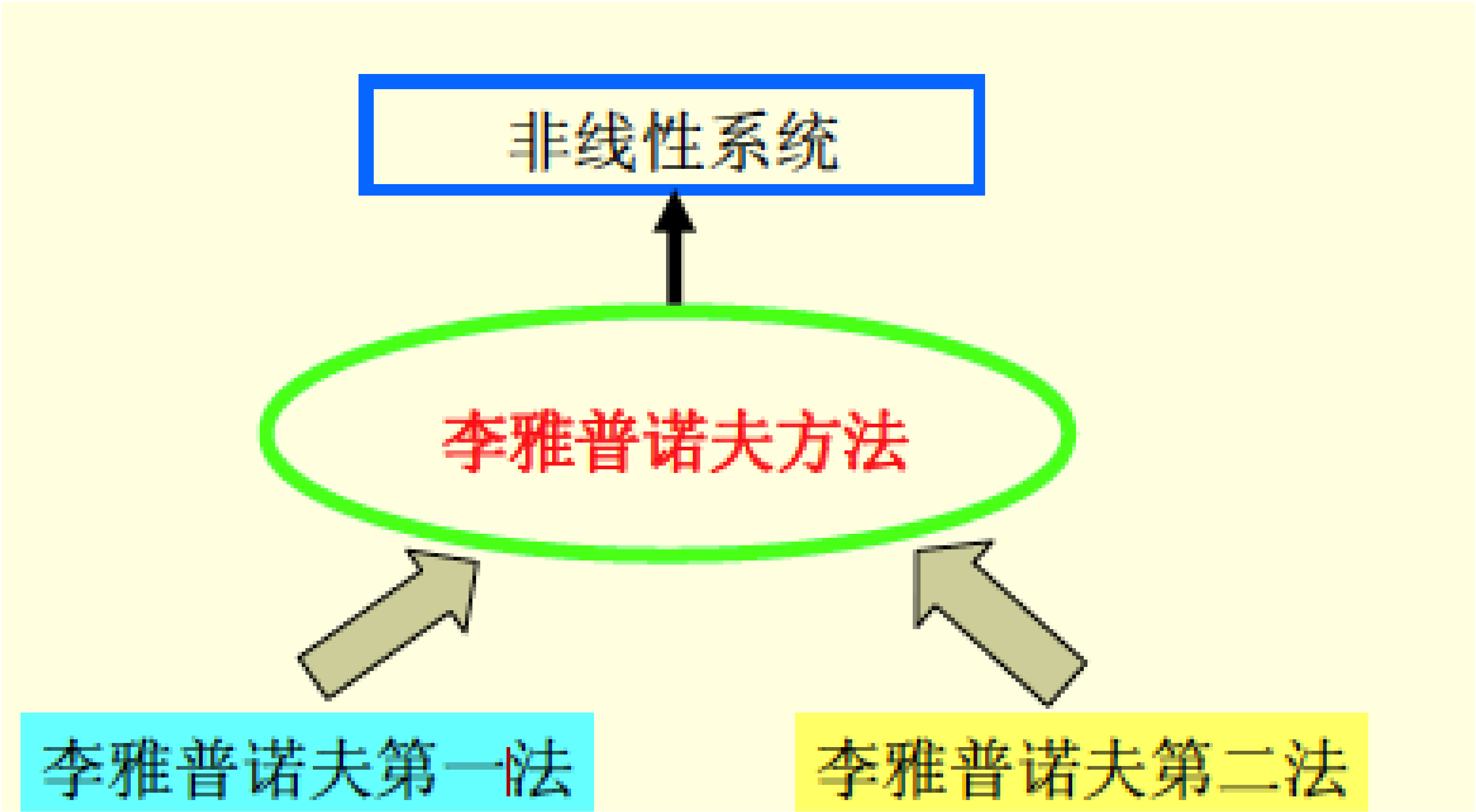
应用：自适应控制，最优控制，非线性控制等。

线性系统稳定性分析的理论框架





李雅普诺夫第二方法是一种普遍适用于线性系统、非线性系统及时变系统稳定性的分析方法。李雅普诺夫给出了对任何系统都普遍适用的稳定性的一般定义。


非线性系统
李雅普诺夫方法
李雅普诺夫第一法
李雅普诺夫第二法

2.1 稳定性(stability)定义

2.1.1 基本概念

向量范数(norm)

向量 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$， 其范数$||x||$为一实数，具有性质：

(1) 若$x\neq0$则 $||x||>0$; 当$x=0$, 则 $||x||=0$

(2) $||\alpha x||=|\alpha|\ ||x||$, α为任意标量.

(3) 对于两个向量x, y有 $||x+y||\leq||x||+||y||$. (三角不等式)

☞ 几种常见的向量范数：

$$\|x\|_2=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

—n维空间上的点到原点的距离。

$$(\|x\|_p \overset{\Delta}{=\!=} (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty), \qquad p \text{ — 范数}$$

$$\|x\|_\infty \overset{\Delta}{=\!=} \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

如果*x*=(1,1)

$$\|x\|_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max(1,1) = 1$$

信号范数

连续时间信号$x(t)$的p阶范数定义如下

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \sup|x(t)| & p = \infty \end{cases}$$

离散时间信号$x(n)$的p阶范数定义如下

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|x(n)|^p\right)\right]^{1/\mathrm{p}} & 1 \le p < \infty \\ \sup|x(n)| & p = \infty \end{cases}$$

sup表示信号的最小上界

一阶范数

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t$$ L空间

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$ l空间

一阶范数表示信号作用的强度。

二阶范数

L空间 $$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$ 即 $$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

l空间 $$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2\right]^{1/2}$$ 即 $$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

二阶范数的平方表示信号的能量。

问题：$\|x(t)\|_2 < \infty \Rightarrow x(\infty) = ?$

无穷范数

L空间 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup|x(t)|$

l空间 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup|x(n)|$

无穷范数表示信号的幅度

问题：
- 直流信号的1-范数、2-范数、无穷范数?
- 正弦信号的1-范数、2-范数、无穷范数?

矩阵范数

矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times m}$，其范数$\|A\|$满足:

(1) 当$A\neq 0$时，$\|A\|>0$；当$A=0$时，$\|A\|=0$；

(2) $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$　　α为任意向量;

(3) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$；

(4) $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$；

☞ 几种常见的矩阵范数：

$$\|A\|_1 \overset{\Delta}{=\!=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$$

1——范数

$$\|A\|_2 \overset{\Delta}{=\!=} \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

2——范数

$$\Big(\|A\|_p \overset{\Delta}{=\!=} \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^P\Big)^{\frac{1}{P}}, \quad 1 < p < \infty\Big)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty \overset{\Delta}{=\!=} \max_{1\le i\le n}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\Big)$$

或：$\|\mathbf{A}\|_\infty \overset{\Delta}{=\!=} \max_{i,j}|a_{ij}|$

A的矩阵范数

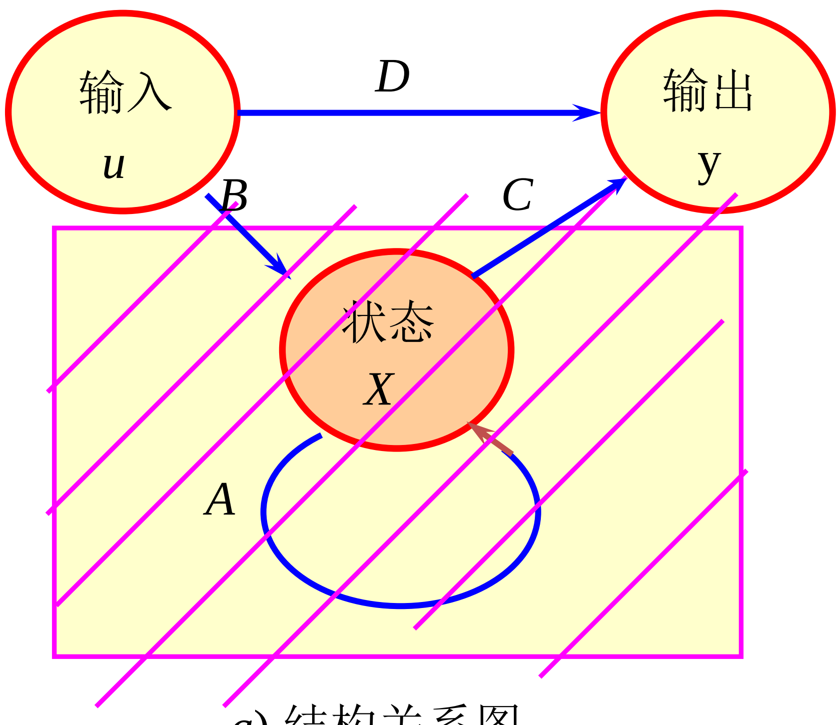
$\Downarrow$

$vec(A)$的向量范数

对于本节主要讨论的线性定常系统来说，状态空间模型的标准形式是

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



a) 结构关系图

传递函数阵(transfer matrix)

1）SISO系统，一输入对一输出，用传递函数G(s)描述，
G(s)是一个元素；

2）MIMO系统，多输入对多输出，故引入传递函数阵G(s)，G(s)是一个矩阵，可以表征多个输入对系统输出的影响；

状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (2-1)$$

根据传递函数定义，
式(2-1)拉氏变换，并令 $x(0) = x_0 = 0$ ，得式(2-2)：

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \qquad (2-2)$$

整理（2-2）式得：

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

注意矩阵求逆

定义传递函数阵：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1r} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mr} \end{bmatrix}$$

[说明]:

1）dim(G(s))=m×r，其中dim(·)表示·的维数。
m是输出维数，r是输入维数。

2）G(s)的每个元素的含义：

$$G_{ij}(s)=\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

表示第i个输出中，由第j个输入变量引起的输出和第j个输入变量间的传递关系。

3）同一系统，不同的状态空间表达式对应的G(s)是相同的。

[例] 求由 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

表述系统的G(s)

[解]:

由传递函数阵公式得:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 6 & 11 & s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

根据矩阵求逆公式: $$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

求得：

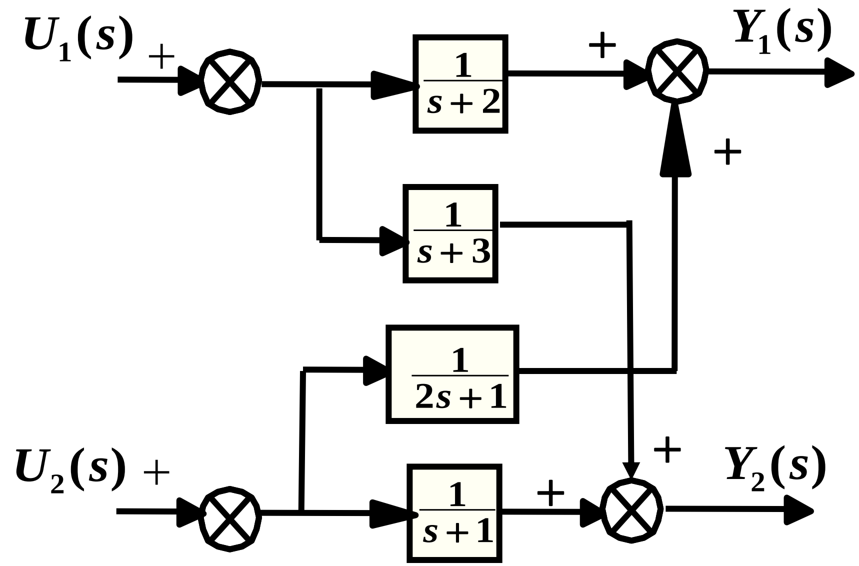
$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix} s^2+6s+11 & s+6 & 1 \\ -6 & s(s+6) & s \\ -6s & -11s-6 & s^2 \end{bmatrix}$$

求得传递函数阵为：

$$G(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix} -s^2-4s+29 & s^2+3s-4 \\ 4s^2+56s+52 & -3s^2-17s-14 \end{bmatrix}$$

[例2]

求如图所示二输入二输出系统的传递函数阵。



步骤：

1、确定G(s)维数。

2、确定G(s)中各元素的值。

[解]：根据G(s)矩阵中每个元素的含义，很容易写出上图的传递函数阵

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{2s+1} \\ \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G_{ij}(s)=\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

2.1.2 外部稳定性(external stability)与内部稳定性(internal stability)

定义：一个系统的外部稳定是指对任何一个有界输入**u(t)**,

即：$\|u(t)\| \le \beta_1 < \infty$，　$\forall t \in [t_{0,} + \infty)$

其对应的输出**y(t)**均为有界，即

$$\|y(t)\| \le \beta_2 < \infty \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

又称为有界输入-有界输出稳定，简称为 **BIBO**稳定。

单入单出 ⇒ 多入多出

脉冲响应矩阵和状态空间描述

对连续时间线性定常系统，其脉冲响应矩阵H(t)和传递函数矩阵G(s)之间有如下关系：

$$G(s)=L[H(t)]$$
$$H(t)=L^{-1}[G(s)]$$

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

δ(t)

结论：对连续时间线性定常系统(A，B，C，D)，设初始状态为零，则系统的脉冲响应矩阵为

$$H(t-\tau)=Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)$$
$$=C\Phi(t-\tau)B+D\delta(t-\tau)$$

结论1：对零初始条件p维输入和q维输出连续时间**线性定常系统(linear time-invariant system)**，令$t_0=0$,则系统BIBO稳定的充分必要条件为：存在一个有限正常数β，使脉冲响应矩阵H(t)所有元均满足关系式

$$\int_0^{\infty} \left|h_{ij}(t)\right| dt \le \beta < \infty \quad i = 1,2,\cdots q \quad j = 1,2,\cdots p$$

$$\Leftrightarrow h_{ij}(\infty) = 0$$

结论2：对零初始条件p维输入和q维输出连续时间线性**时变**系统(linear time-variant system)，$t\in[t_0,+\infty)$则t_0时刻系统BIBO稳定的充分必要条件为，存在一个有限正常数β，使对一切$t\in[t_0,+\infty)$脉冲响应矩阵H(t,τ)所有元均满足关系式

$$\int_{t_0}^{t} \left|h_{ij}(t,\tau)\right| d\tau \le \beta < \infty \quad i = 1,2,\cdots q \quad j = 1,2,\cdots p$$

简要证明思路（充分性）

$$
\begin{aligned}
|y_i(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [h_{i1}(t,\tau)u_1(\tau) + \cdots + h_{ip}(t,\tau)u_p(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} h_{i1}(t,\tau)u_1(\tau) d\tau \right| + \cdots + \left| \int_{t_0}^{t} h_{ip}(t,\tau)u_p(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |h_{i1}(t,\tau)| \, |u_1(\tau)| \, d\tau + \cdots + \int_{t_0}^{t} |h_{ip}(t,\tau)| \, |u_p(\tau)| \, d\tau \\
&\leq \beta(\gamma_1 + \cdots \gamma_p)
\end{aligned}
$$

$$|u_i(t)| \leq \gamma_i \text{ for } i = 1, \cdots, p$$

结论3：对零初始条件p维输入和q维输出连续时间线性定常系统，令初始时刻t_0=0,则系统BIBO稳定的充分必要条件为：**传递函数矩阵G(s)的所有极点均具有负实部**。

简要证明思路

G(s)特征多项式 = G(s)所有子式的最小公分母

传递函数矩阵G(s)的所有极点均具有负实部

$\Updownarrow$

Gij(s)的极点均具有负实部

$\Updownarrow$ $h_{ij}(\infty) = 0$

$$\int_0^\infty \left|h_{ij}(t)\right|dt \le \beta < \infty \quad i = 1,2,\cdots q \quad j = 1,2,\cdots p$$

内部稳定

对于线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$
$$y = Cx$$

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{Cx} + \mathrm{Du} \qquad \mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0$$

定义：称连续时间线性时不变系统在t_0为内部稳定（或称为渐近稳定），是指由时刻t_0**任意**非零初始状态引起的**零输入**响应$X_{ou}(t)$对$t \in [t_0, +\infty)$有界，并满足渐近属性，即：

$$\lim_{t \to \infty} X_{ou}(t) = 0$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = \Phi(t)x(0)$$

结论4：对n维连续时间**线性时不变自治系统**，内部稳定的充分必要条件为

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$$

或矩阵A所有特征值均具有负实部，即：$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}<0$。

结论5：设n维连续时间**线性时变自治系统**

$$\dot{x} = A(t)x \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty) \longleftarrow x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

系统在t_0时刻内部稳定的充分必要条件为：**状态转移矩阵** $\Phi(t,t_0)$对所有$t\in[t_0,+\infty]$为有界，并满足：

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, t_0) = 0$$

内部稳定：系统状态自由运动的稳定性，也即李亚普诺夫意义下的渐近稳定性。

内部稳定性和外部稳定性间的关系

结论1：设线性定常系统是内部稳定的，则其必是BIBO稳定。

简要证明思路

$$\text{内部稳定} \Rightarrow e^{At}\text{有界且}\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$$

脉冲响应矩阵$H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$
的所有元素均满足绝对可积条件 ⇒ BIBO稳定

内部稳定性和外部稳定性间的关系

结论2：设线性定常系统是BIBO稳定的，则不能保证系统必是内部稳定的。

<u>反例</u>

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s-1 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=(s+1)^{-1}$$

← **一个极点**

两个极点

思考：为什么在推导过程中有一个极点消失了？

内部稳定性和外部稳定性间的关系

结论2：设线性定常系统是BIBO稳定的，则不能保证系统必是内部稳定的。

反例

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s-1 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=(s+1)^{-1}$$

内部状态不稳定：$\boldsymbol{x_1}$稳定且可控，而$\boldsymbol{x_2}$不稳定且不可控

$\boldsymbol{x_2}$不可控

传递函数矩阵只反映系统的能控能观部分

BIBO稳定

内部稳定性和外部稳定性间的关系

结论3：如果线性定常系统为能控和能观测，则其内部稳定性与外部稳定性必是等价的。

传递函数矩阵只能反映系统的能控能观部分

非线性系统的稳定性?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, t) \\
y &= g(x, u, t)
\end{aligned}
$$

2.1.3 系统状态的运动及平衡状态

状态轨迹：设所研究系统的齐次状态方程为

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad (2\text{-}3)$$

x—n维状态矢量；f—与x同维的矢量函数；是x_i和时间t的函数；如果不含t，则为定常函数,一般f为时变的非线性函数。

设(2-3)在给定初始条件$(t_0\ x_0)$下,有唯一解：

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds = \phi(t, x_0, t_0) \qquad (2\text{-}4)$$

式(2-4)描述了系统(2-3)在n维状态空间中从初始条件$(t_0\ x_0)$出发的一条状态运动的轨迹，简称为系统的运动和状态轨线。

系统的平衡状态：若系统(2-3)存在状态向量 x_e，对所有t，使得：

$$f(x_e, t) \equiv 0$$

成立，则称 x_e 为系统的平衡状态。

说明:

1）对于任一个系统,不一定都存在平衡状态.

2) 如果一个系统存在平衡状态,其平衡状态也不一定是唯一的.

3) 对于线性定常系统 $\dot{x} = f[x,t] = Ax$，当A为非奇异矩阵时，$Ax_e \equiv 0$ 的解 $x_e = 0$ 是系统唯一存在的平衡状态，当A为奇异时，则 x_e 会有无穷多个。

4) 由于任意一个已知的平衡状态,都可以通过坐标变换将其变换到坐标原点 $x_e = 0$ 处。所以今后将只讨论系统在坐标原点处的稳定性就可以了。

5) 稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的。(这一点从线性定常系统中的描述中可以得到理解)

6) 如果一个系统有**多个平衡点**。由于每个平衡点处系统的稳定性可能是不同的。对有多个平衡点的系统来说，要讨论该系统的稳定性必须逐个对各平衡点的稳定性都要**逐个讨论**。

x_e： 一个状态变量，一旦系统到达此状态，则以后在无外力及扰动的情况下，总处于此状态。

任意状态$x(t)$可表达为：$x(t)=\Phi(t\,;\,t_0\,,\,x(t_0)\,,\,u(t))$

平衡状态x_e：零输入状态下的不变状态，有

$$x_e=\Phi(t\,;\,t_0\,,\,x_e\,,\,0) = \text{常量}$$

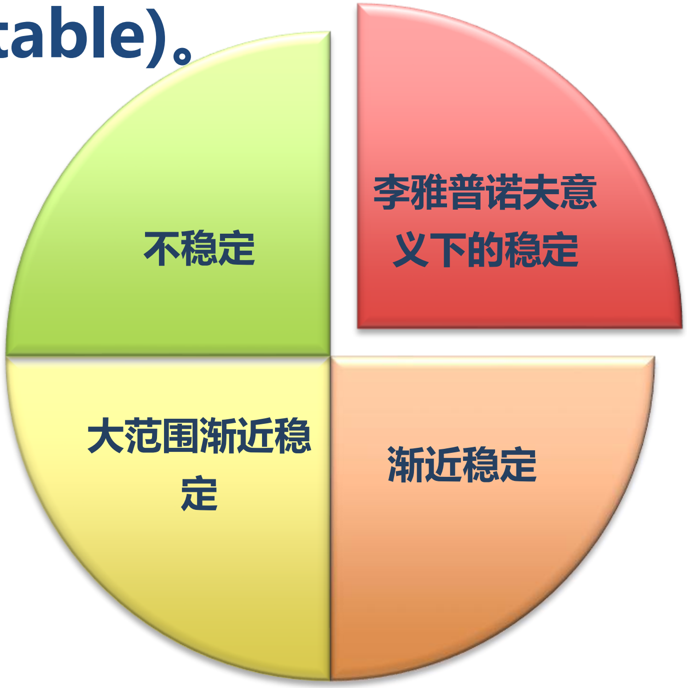
对于线性定常连续系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

x_e为平衡状态 $\Leftrightarrow Ax_e = 0.\ (\dot{x}_e = 0)$

2.1.4 李雅普诺夫稳定性定义

李雅普诺夫根据系统自由响应是否有界把系统的稳定性定义为四种情况：李雅普诺夫意义下的稳定(Lyapunov stability)、渐近稳定(Asymptotic stability)、大范围渐近稳定(global stability)、不稳定(unstable)。



(1) 李雅普诺夫意义下稳定

如果系统对于任意选定的实数ε>0，都存在另一实数δ(ε，t_0)>0，使当：

吸引域

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

时，从任意初态x_0出发的解都满足：

收敛半径

$$\|\phi(t; t_0, x_0) - x_e\| \le \varepsilon, \qquad t_0 \le t < \infty$$

则称平衡状态x_e为李雅普诺夫意义下稳定。

其中实数δ与ε有关，一般情况下也与t_0有关。

时变：δ与t_0有关

定常系统：δ与 t_0 无关，x_e 是一致稳定的。

注意：$\|\cdot\|$—向量范数(表示空间距离)

⟹ 欧几里得范数。

$$\|x_0 - x_e\| = [(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}}$$

一般，$\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$，即与$\varepsilon$和$t_0$有关；

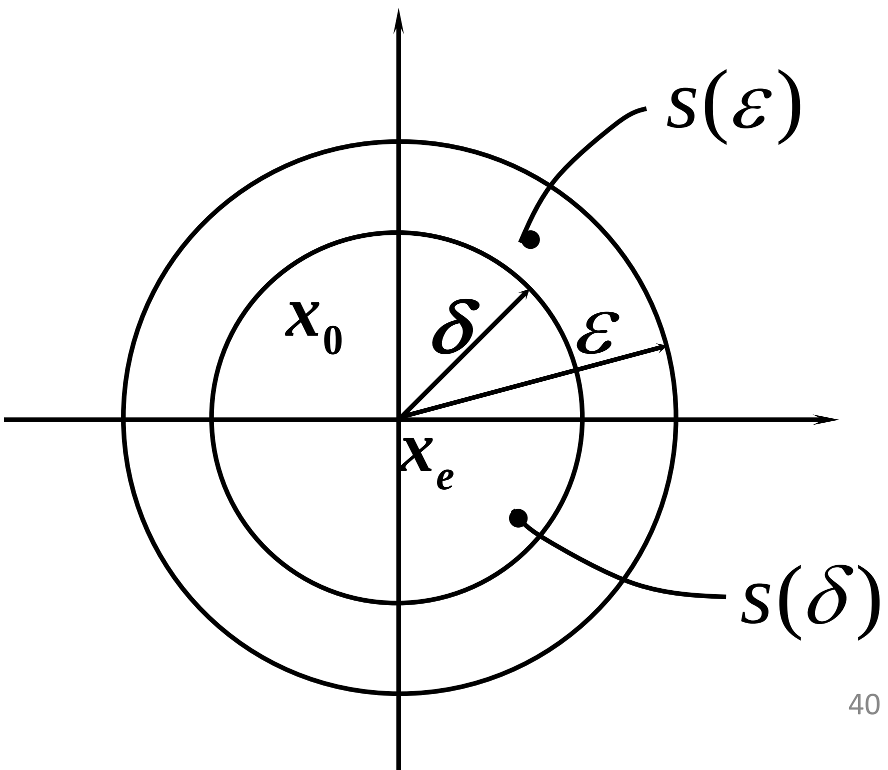
几何解释：

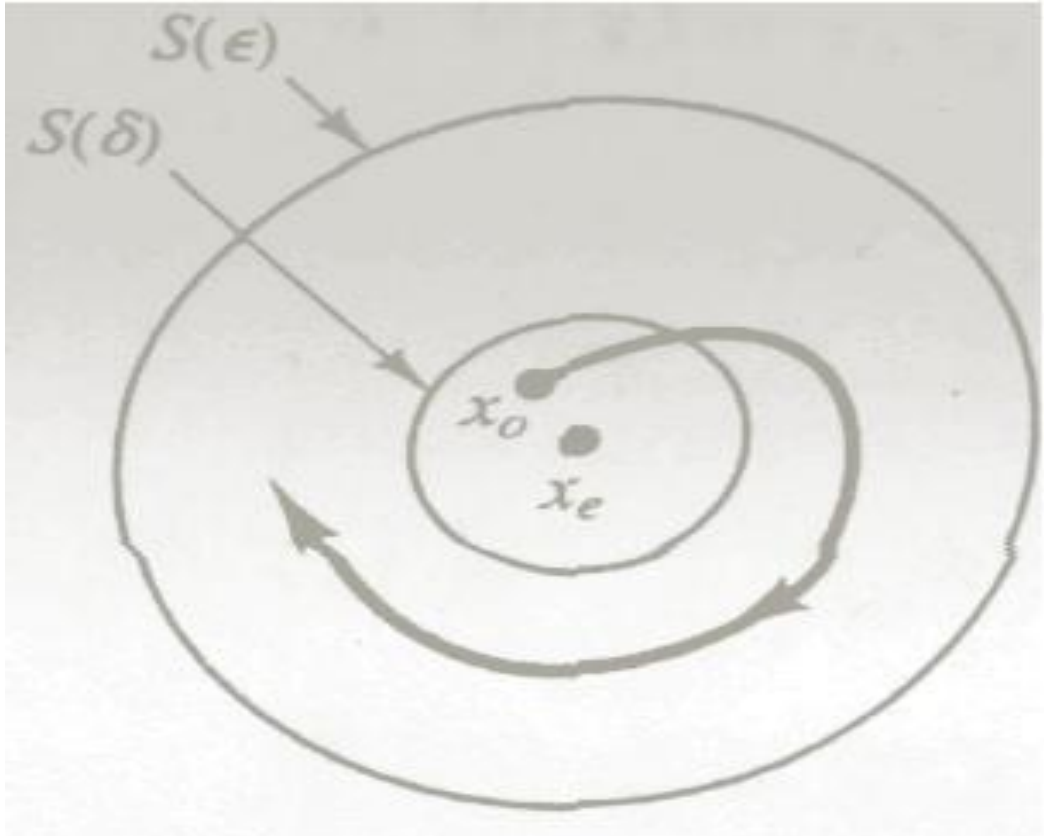
状态空间，以x_e为原点，对给定正实数ε，以x_e为球心、ε为半径构造一个超球体，球域记为$s(\varepsilon)$。

ε——球域$s(\varepsilon)$，半径为ε；

δ——球域$s(\delta)$，半径为δ。

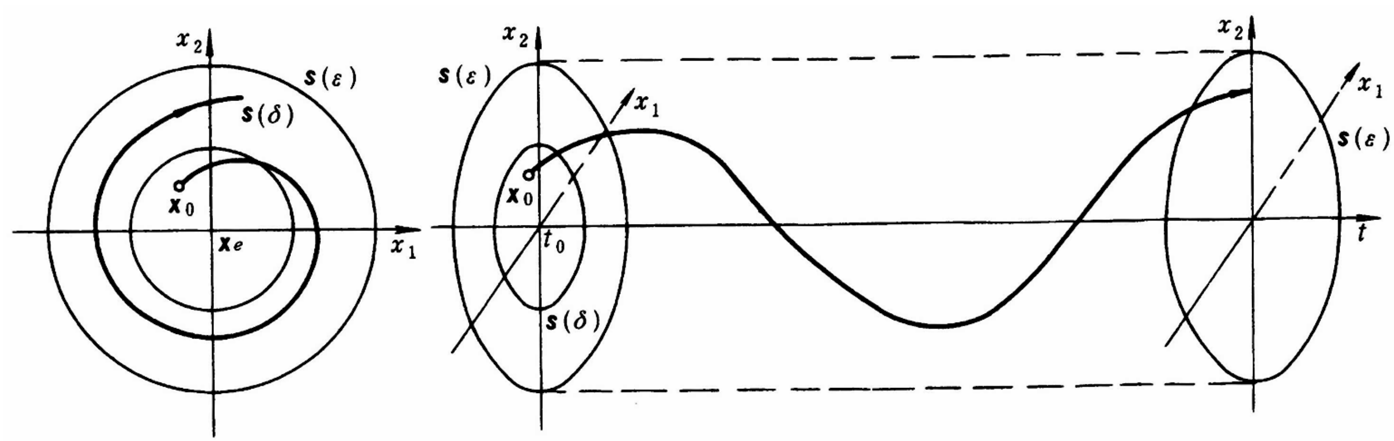
$s(\delta)$内初始状态的自由运动总在$s(\varepsilon)$内。

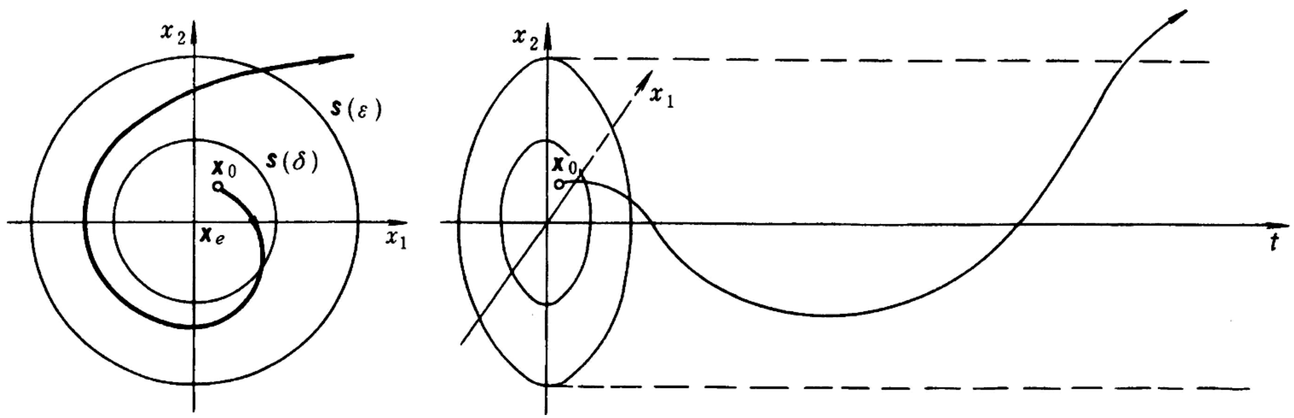




若对应于每一个s(ε)，都存在一个s(δ)，使当t无限增长时，从s(δ)出发的状态轨线(系统的响应)总不离开s(ε)，即状态$x(t)$相对于平衡态x_e的偏离是有界的，则称平衡状态x_e为李雅普诺夫意义下的稳定，简称为稳定。

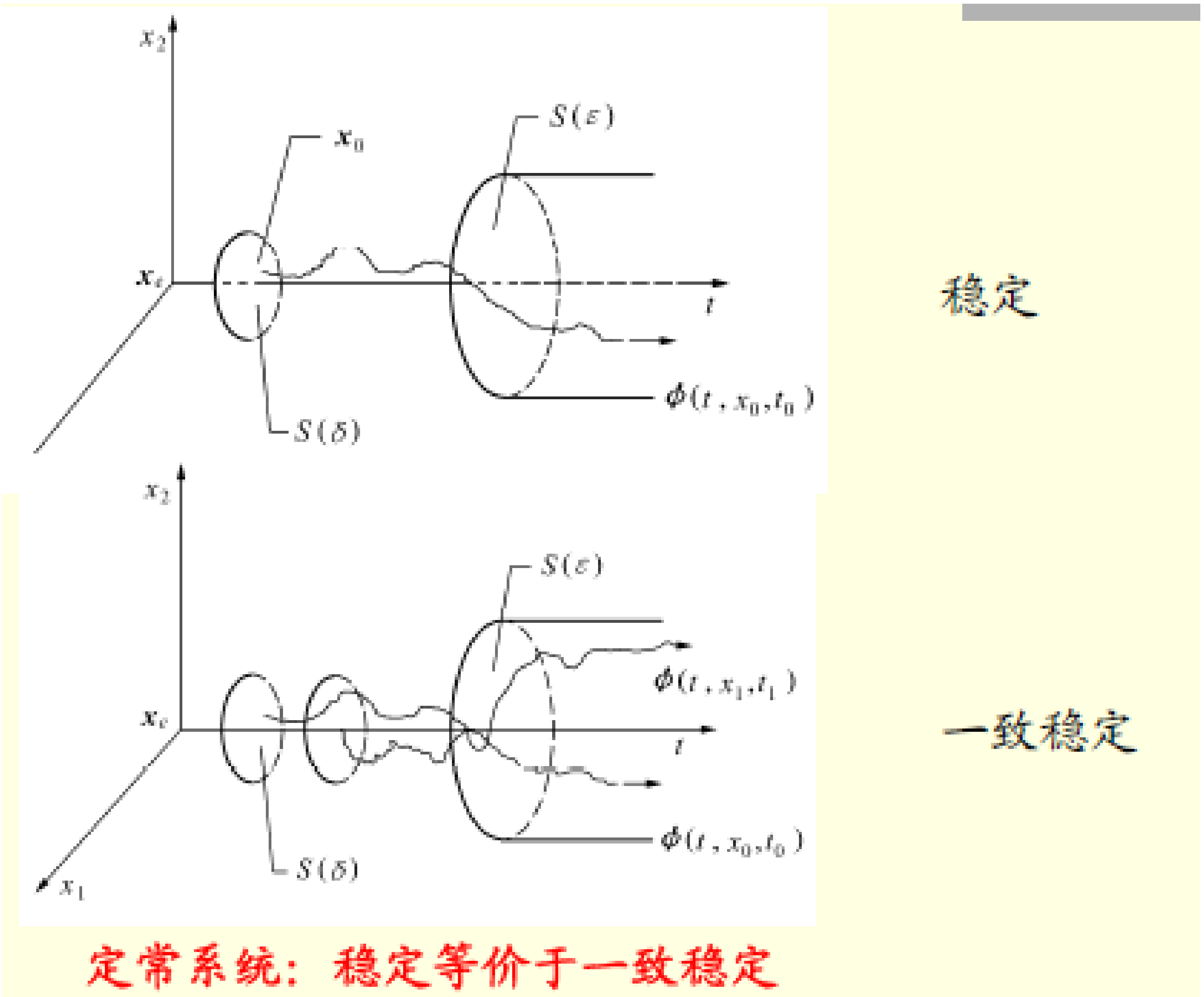
几何解释：





定常系统：稳定等价于一致稳定。

若δ与t_0无关，则称此平衡态x_e是李雅普诺夫意义下一致稳定的，如下图。



(2) 渐近稳定（*AS—asymptotic stability*）

称孤立平衡态x_e是渐近稳定（*AS*）的，如果满足：

① x_e是李雅普诺夫稳定的；

② $\lim_{t\to\infty}\|\phi(t;t_0,x_0,0)-x_e\|=0$

③ 对于$\delta(\varepsilon,t_0)$和任意给定的实数$\mu>0$，对应地存在实数

$$T(\mu,\delta,t_0)>0$$

使得满足①的任一初态x_0出发的零输入响应都满足：

$$\|\Phi(t;t_0,x_0,0)-x_e\|<\mu,\quad \forall t\geq t_0+T(\mu,\delta,t_0),$$

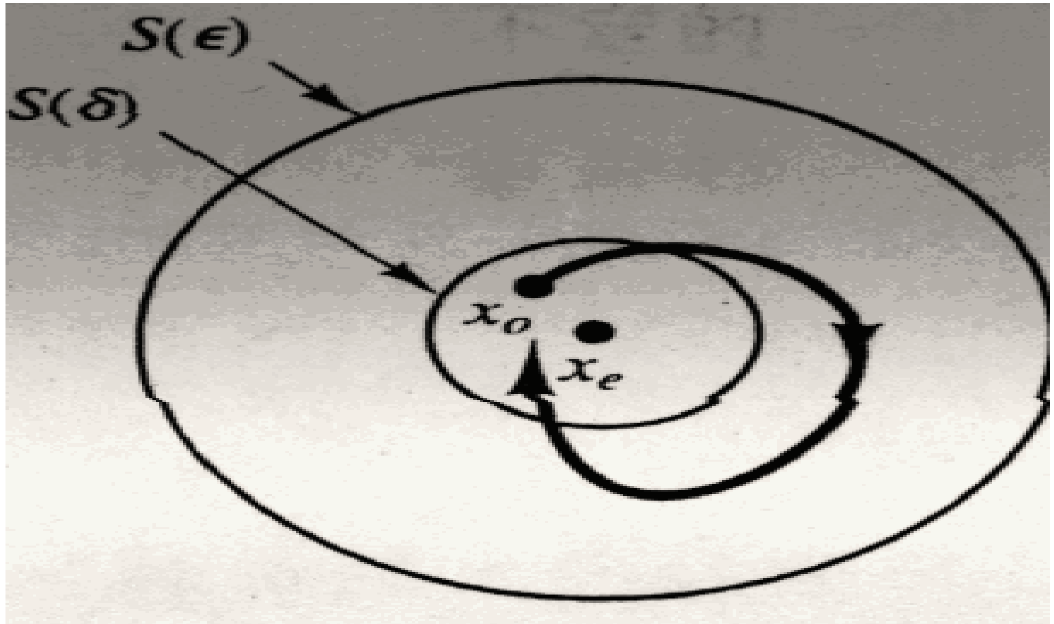
有界时间时偏离平衡状态的有界性

而且

$$\lim_{T\to\infty}\mu=0$$

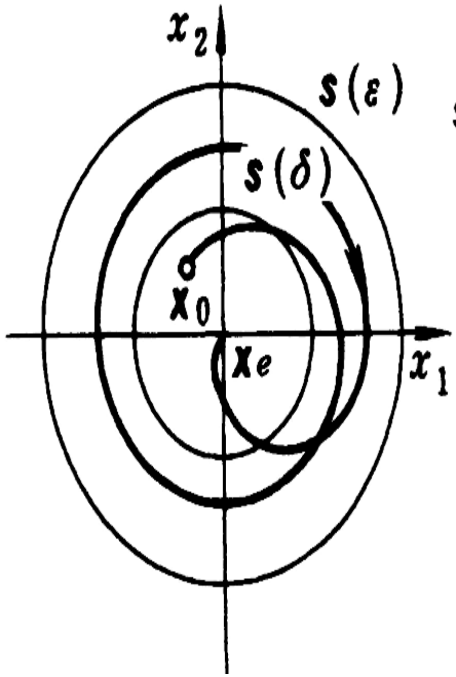
如果δ及T与t_0无关，则称此状态x_e是一致渐近稳定的。

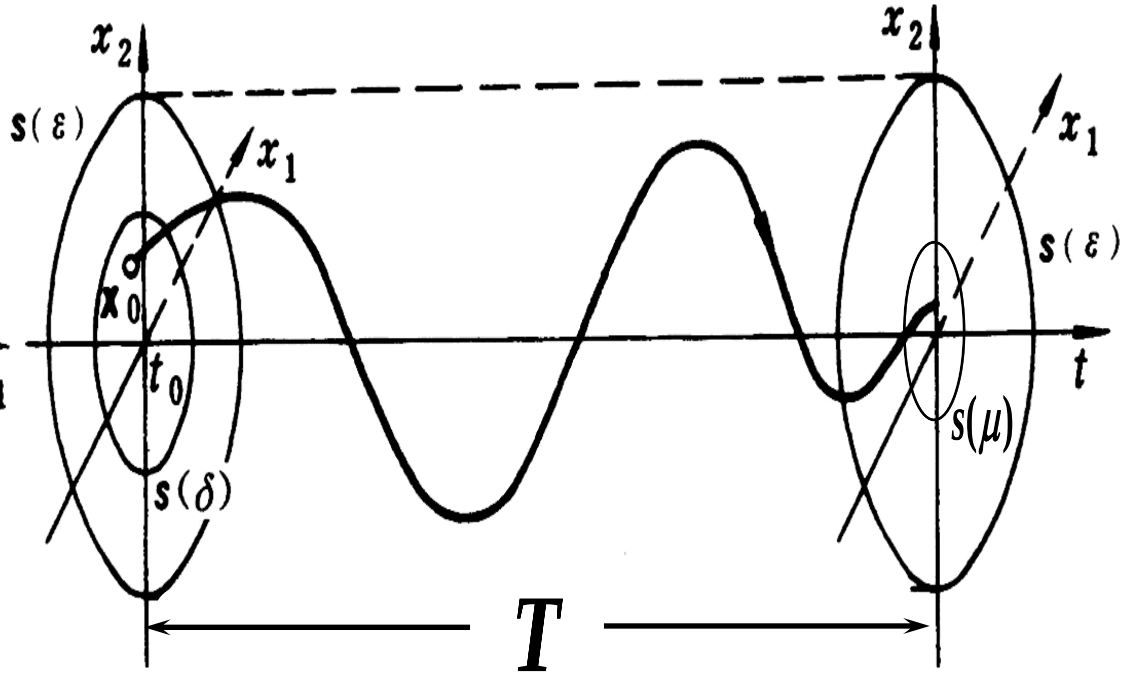
渐近稳定



如果平衡状态x_e是稳定的，而且当t无限增长时，轨线不仅不超出s(ε)，而且最终收敛于x_e，则称这种平衡状态x_e渐近稳定。

相对于平衡态的有界性　　　　　相对于平衡态的渐近性





从工程意义上说，渐近稳定比稳定更重要。但渐近稳定是一个局部概念，通常只确定某平衡状态的渐近稳定性并不意味着整个系统就能正常运行。

因此，如何确定渐近稳定的最大区域，并且尽可能扩大其范围是尤其重要的。

(3) 大范围渐近稳定 （global AS）

如果从任一初态x_0的受扰运动均为渐近稳定的，则称平衡状态是大范围渐近稳定的。

x_e为大范围渐近稳定：

$$\forall x_0 \in s(\delta) \quad \delta \to \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \| \phi(t;t_0,x_0) - x_e \| = 0$$

显然，大范围渐近稳定的必要条件是在整个状态空间中只有一个平衡状态。

对于线性系统来说，由于满足叠加原理，如果平衡状态是渐近稳定的，则必然是大范围渐近稳定的。

对于非线性系统，使x_e为渐近稳定平衡状态的吸引域s(δ)一般是不大的，常称这种平衡状态为小范围渐近稳定。

大范围渐近稳定也称为**全局(global)渐近稳定**

（小范围渐近稳定也称为**局部(local)渐近稳定**）

稳定性定义的主体----平衡点

- 稳定性都是针对系统的平衡状态而言的，只有对于具有惟一平衡点的系统或者是其所有平衡状态为同时稳定或同时不稳定的系统言及系统稳定与否才有意义。而对于一般的动力学系统言及“系统稳定与否”是没有意义的。

稳定性定义中的初始时刻--- 一致性问题

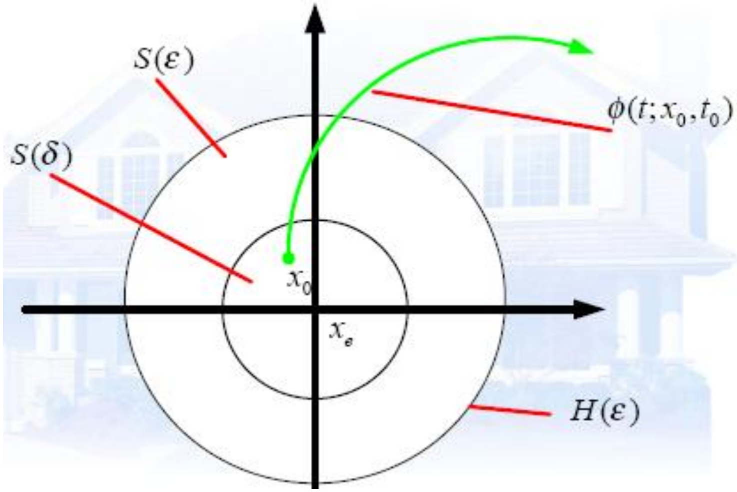
- 稳定性、渐近稳定性以至于全局渐近稳定性的定义都与初始时刻有关。这说明同一系统不同起始时刻的运动完全可能有着不同的稳定性。初始时刻的影响决定了稳定性是否一致的问题。

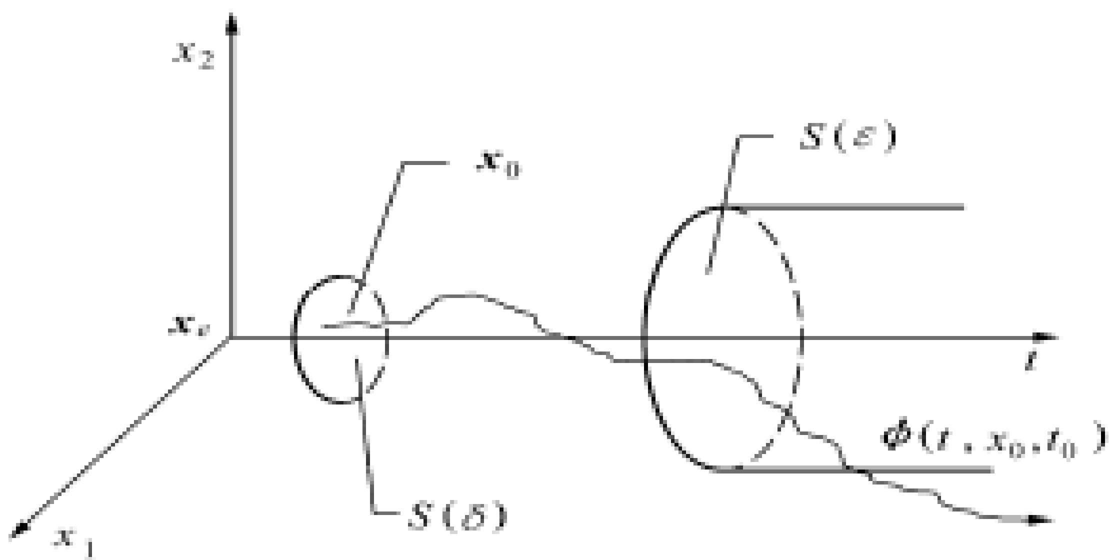
（4） 不稳定

不稳定：称自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

的孤立平衡状态$X_e=0$在时刻t_0为不稳定，如果不管取实数$\varepsilon>0$为多么大，都不存在对应一个实数$\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得满足不等式$\|X_0-X_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$的任一初始状态$x_0$出发的受扰运动$\Phi(t;x_0,t_0)$满足不等式$\|\Phi(t;x_0,t)-X_e\|\le\varepsilon$，


$S(\varepsilon)$
$S(\delta)$
$\phi(t;x_0,t_0)$
x_0
x_e
$H(\varepsilon)$


x_2
x_0
$S(\varepsilon)$
x_e
t
$\phi(t, x_0, t_0)$
$S(\delta)$
x_1

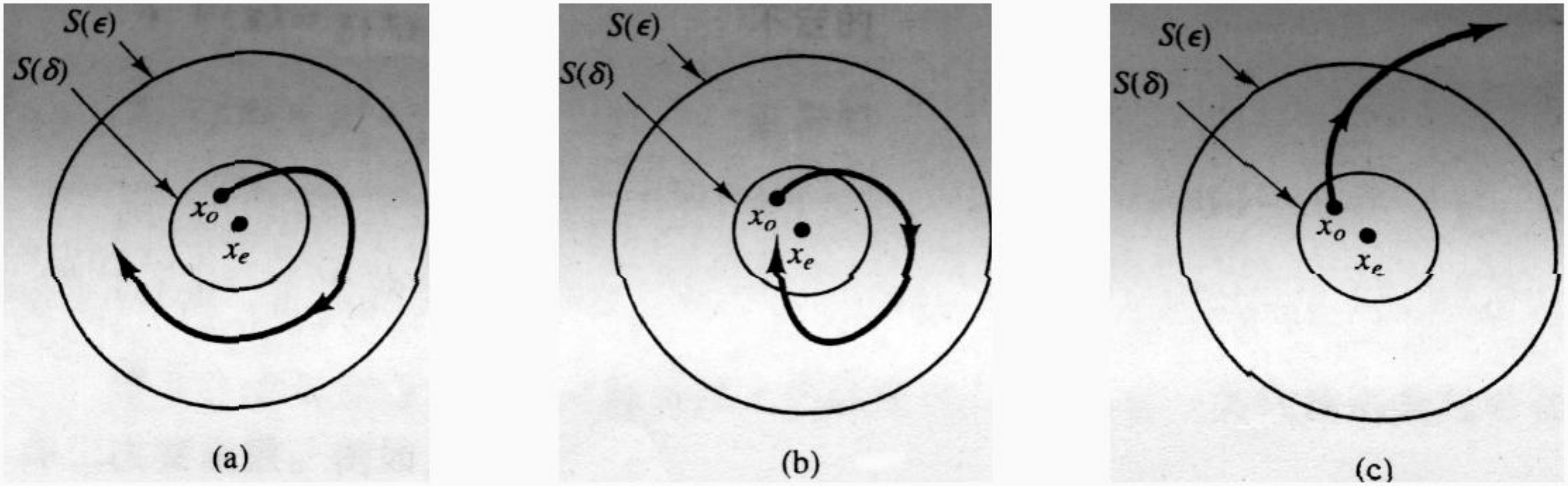


图4.1　（a）稳定平衡状态及一条典型轨迹
（b）渐近稳定平衡状态及一条典型轨迹
（c）不稳定平衡状态及一条典型轨迹

球域s(δ)限制着初始状态x_0的取值，球域s(ε)规定了系统自由响应 $x(t)=\varphi(t;x_0,t_0)$的边界。

如果x(t)为有界，则称x_e稳定。

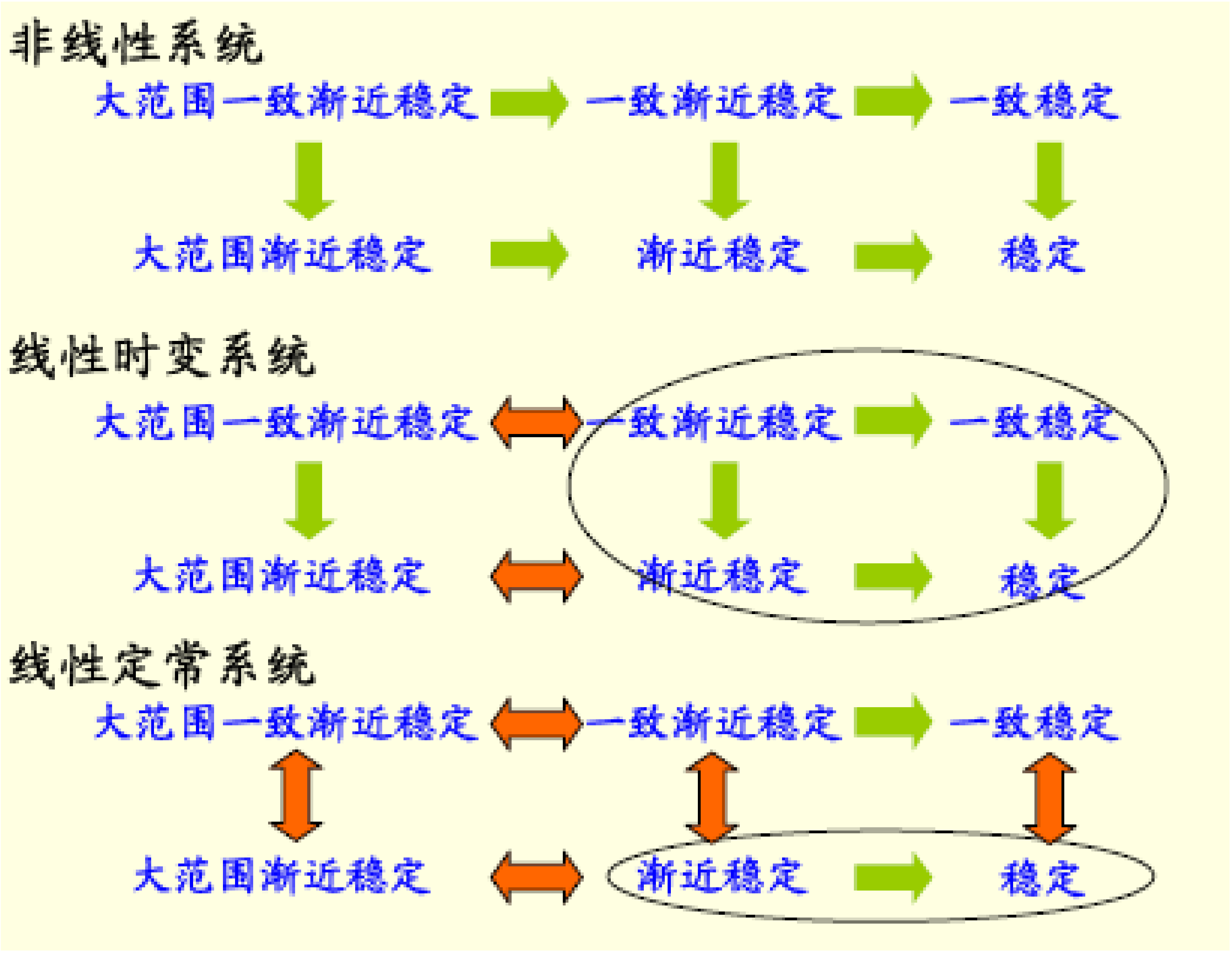
如果x(t)不仅有界而且有：$\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=0$ 则称 x_e 渐近稳定

如果x(t)为无界，则称x_e不稳定。

在经典控制理论中，只有渐近稳定的系统才称做稳定系统。

只在李雅普诺夫意义下稳定，但不是渐近稳定的系统则称临界稳定系统，这在工程上属于不稳定系统。

经典控制理论(线性系统）	不稳定 (Re(s)>0)	临界情况 (Re(s)=0)	稳定 (Re(s)<0)
Lyapunov意义下	不稳定	稳定	渐近稳定


非线性系统
大范围一致渐近稳定
一致渐近稳定
一致稳定
大范围渐近稳定
渐近稳定
稳定
线性时变系统
大范围一致渐近稳定
一致渐近稳定
一致稳定
大范围渐近稳定
渐近稳定
稳定
线性定常系统
大范围一致渐近稳定
一致渐近稳定
一致稳定
大范围渐近稳定
渐近稳定
稳定

非线性系统的稳定性

（1）非线性系统的稳定性，则除了与系统的结构、参数有关外，很重要的一点是与系统起始偏离的大小密切相连。

（2）不能笼统地泛指某个非线性系统稳定与否，而必须明确是在什么条件、什么范围下的稳定性。

2.2 李雅普诺夫第一法（间接法）

基本思路是通过系统状态方程的解来判定系统的稳定性。

对于**线性定常系统**，只需解出特征方程的根即可作出稳定性判断。

对于**非线性不很严重的系统**，则可通过线性化处理，取其一次近似得到线性化方程，然后再根据其特征根来判断系统的稳定性。

2.2.1 线性定常系统稳定性

利用状态方程解的特性来判断系统稳定性。

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

1）李雅普诺夫意义下稳定的充要条件：

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \qquad i = 1,2,\cdots n$$

2）渐近稳定的充要条件：

$$\boldsymbol{Re(\lambda_i) < 0} \qquad i = 1,2,\cdots n$$

3）不稳定的充要条件： $\boldsymbol{Re(\lambda_i) > 0}$

以上讨论的都是指系统的状态稳定性，或称内部稳定性。

如果系统对于有界输入u所引起的输出y是有界的，则称系统为输出稳定（BIBO稳定性）

线性定常系统 ∑=（A，b，c）输出稳定的充要条件是其传递函数

$$W(s)=c(sI-A)^{-1}b$$

的极点全部位于s的左半平面。

例 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

试分析系统的状态稳定性与输出稳定性。

解 （1）由A阵的特征方程

$$|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

可得特征值 $\lambda_1=-1;\lambda_2=+1$。故系统的状态不是渐近稳定的。

（2）由系统的传递函数

$$W(s)=c(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{s-1}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s+1}$$

可见传递函数的极点s＝ －1位于s的左半平面，故系统输出稳定。这是因为具有正实部的特征值 λ_2= +1被系统的零点s＝+1对消了，所以在系统的输入输出特性中没被表现出来。

由此可见，只有当系统的传递函数W（s）不出现零极点对消现象，并且矩阵A的特征值与系统传递函数W（s）的极点相同，此时系统的状态稳定性才与其输出稳定性相一致。

另一种解释：传递函数只体现了可控可观的x_1，不反映不可观的 x_2

2.2.2 线性定常离散系统的渐近稳定性

系统 $$x(k+1)=G\cdot x(k)$$

若对于任意 $x(0)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\|x(k)\|\to 0,$$

则称该系统是渐近稳定的。

定理 [特征值判据] 线性定常离散系统渐近稳定的充要条件为：G 的所有特征值的幅值均小于1，即

$$|\lambda_i|<1,\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

（即 G 的特征值 λ_i 均位于Z平面的单位内）。

2.3 李雅普诺夫第二法

2.3.1 二次型（quadratic form）及其标准形

定义：含有 n 个变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

令 $a_{ij} = a_{ji}$，则 $2\,a_{ij}\,x_i\,x_j = a_{ij}\,x_i\,x_j + a_{ji}\,x_i\,x_j$，于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boxed{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2}$$

$$\boxed{+2a_{12}x_1x_2} + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$
$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots$$
$$+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

对称阵

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=x^TQx$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

对称阵的二次型

$$\Updownarrow$$

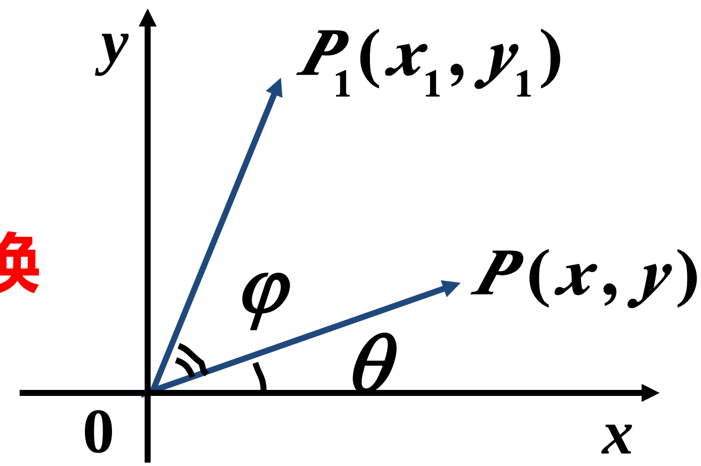
二次型的矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换/正交变换



正交矩阵A的性质

1. $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I$(行向量、列向量分别构成标准正交基)
2. A的逆矩阵为A^{T}
3. 正交变换下，向量的夹角、范数、内积均不变

- 解析几何中，二次曲线的一般形式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

通过选择适当的的旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

使得 $mx'^2 + ny'^2 = 0$.

对于二次型，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{m2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

简记为 $x = C\,y$,

于是 $f = x^TQx$

$$= (C\,y)^T\,Q\,(C\,y)$$

$$= y^T \boxed{(C^TQC)}\, y$$

使二次型只含平方项，即

$$f = k_1\,y_1^2 + k_2\,y_2^2 + \ldots + k_n\,y_n^2$$

定义：只含平方项的二次型称为二次型的标准形（或法式）.

如果标准形的系数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 只在–1, 0, 1三个数中取值,

即 $$f = k_1\,y_1^2 + \ldots + k_p\,y_p^2 - k_{p+1}\,y_{p+1}^2 - \ldots - k_r\,y_r^2$$

则上式称为二次型的规范形.

说明：这里只讨论实二次型，所求线性变换也限于实数范围.

定理：任给二次型 $f(x) = x^TQx$ （其中 $Q = Q^T$ ），总存在**正交变换** $x = Py$ ，使 f 化为**标准形**

$$f(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 Q 的特征值.

推论：任给二次型 $f(x) = x^TQx$ （其中 $Q = Q^T$ ），总存在**可逆变换** $x = Cz$ ，使 $f(Cz)$ 为**规范形**.

例：求一个正交变换 $x = Py$，把二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形.

解：二次型的矩阵 $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

有正交阵

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得 $P^{-1}QP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是正交变换 $x = Py$ 把二次型化为标准形

$$f = -2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P^{-1}QP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

如果要把 f 化为规范形，令

$$\begin{cases}y_1=1/\sqrt{2}z_1\\y_2=z_2\\y_2=z_2\end{cases}，即 \quad K=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可得 f 的规范形：$f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2$

2.3.2 二次型标量函数的正定性 (positive definite)

设 $x_1,x_2\ldots,x_n$ 为n个变量，则其二次型标量函数可写为：

$$V(x)=x^TQx=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其中，Q为实对称矩阵。

定义 (实)二次型是$x \in R^n$的标量函数

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^T Q x$$

式中，Q为一实对称$n \times n$矩阵，称为二次型V的矩阵，并将Q的秩称为二次型V的秩。

$\forall x \neq 0$，若$x^T Q x > 0$，则称二次型V为正定的，Q称为正定矩阵，记为$Q>0$。

$\forall x \neq 0$，若$x^T Q x \geq 0$，，则称二次型V为非负定的，Q称为非负定矩阵，记为为$Q \geq 0$。

若$x^T Q x < 0$ (≤ 0)，称V为负定的(非正定的)，Q称为负定(非正定)矩阵，记为 $Q<0$$(\leq 0)$。

若V既不是非正定又不是非负定，则称为不定的。

二次型V(x)赛尔维斯特(Sylvester)判据

设实对称阵

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix},\quad q_{ij}=q_{ji}$$

Δ_i 为其各阶顺序主子式，即

$$\Delta_1=\left|q_{11}\right|,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix},\cdots,\Delta_n=\left|Q\right|$$

矩阵Q或$V(x)$定号性的充要条件是：

(1)若 $\Delta_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，则Q正定；

(2)若 $\Delta_i \begin{cases} > 0(i\text{为偶数}) \\ < 0(i\text{为奇数}) \end{cases}$ ，则Q负定；

(3)若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0(i=1, 2, \cdots, \mathrm{n}-1) \\ = 0(i=\mathrm{n}) \end{cases}$ ，则Q半正定；

(4)若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0(i\text{为偶数}) \\ \leq 0(i\text{为奇数}) \\ = 0(i=\mathrm{n}) \end{cases}$，则$Q$半负定；

例 判断下列二次型函数的正定性。

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

通过相似对角化判断二次型的正定性

$$V = x^\top Q x$$

实对称矩阵的相似对角化$Q = P^\top \Lambda P$

P为正交矩阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$V = x^\top P^\top \Lambda P x = y^\top \Lambda y$$

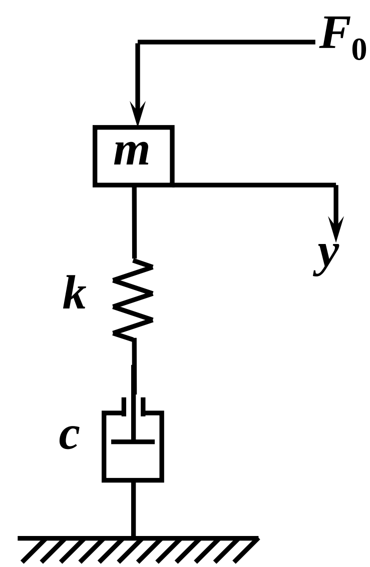
$$y = Px$$

- 正定：$\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$
- 负定：$\lambda_i < 0, i = 1, \cdots, n$
- 半正定：$\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$
- 半负定：$\lambda_i \leq 0, i = 1, \cdots, n$

2.3.3 李雅普诺夫第二法

引例 如图所示:

$$F_0 - ky - c\dot{y} = m\ddot{y}$$



外力F_0=0，得齐次方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

令 $x_1 = y,\ \ x_2 = \dot{y}$

则:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{c}{m}x_2 \end{cases}$$

平衡状态: 令 $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T = 0$, 得 $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

系统储能:
$$\begin{cases} \text{弹簧势能：} k\dfrac{x_1^2}{2} \\ \text{质量的动能：} m\dfrac{x_2^2}{2} \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

$$\dot{V}(x) = kx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2$$

$$= kx_1x_2 + mx_2(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2) = -cx_2^2$$

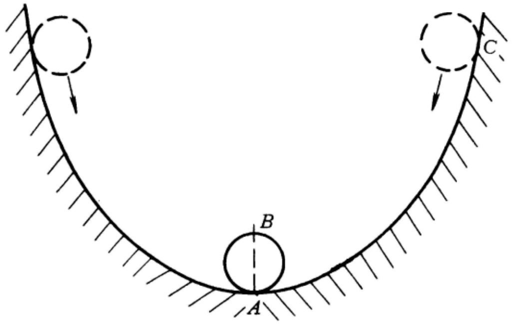
可见 $\dot{V}(x) \pounds 0.$

基本思路：从能量观点进行稳定性分析.

1) 如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，则这个平衡状态是渐近稳定的；

2) 反之，如果系统不断地从外界吸收能量，储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的；

3) 如果系统的储能既不增加，也不消耗，则这个平衡状态就是*Lyapunov*意义下的稳定。



由于实际系统的复杂性和多样性，往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系;

于是*Lyapunov*定义了一个**正定的标量函数**，作为虚构的**广义能量函数**，用其一阶微分的符号特征来判断系统的稳定性。

☞ 给定系统→**找*Lyapunov*函数*V(x)*：**

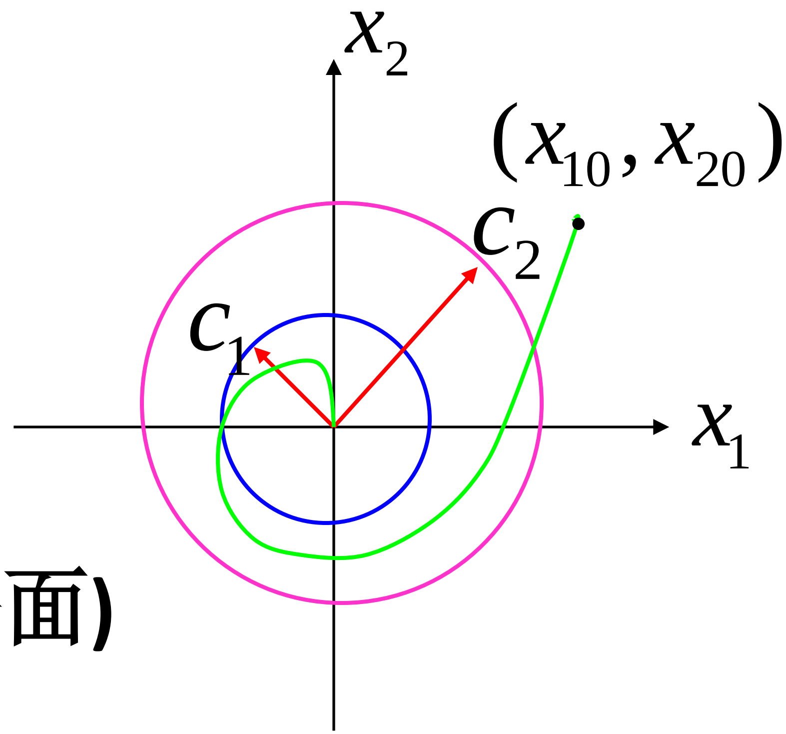
$$V(x)>0，\dot{V}(x)\leq 0\rightarrow \quad 系统稳定$$

- 几何意义：

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$= c_1^2(c_2^2)$$

➡ **等能量轨迹(整个平面)**



$V(x)$ 表示状态**x**到状态空间原点距离的一种度量。

如果原点与瞬时状态**x(t)**之间的距离随**t**的增加而连续地减小（即$\dot{V}(x(t)) < 0$），则最终$\dot{V}(x(t)) < 0)$则$x(t) \to 0$ 。

几个典型的稳定性判据

定理1：设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x)$

如果平衡状态 $x_e = 0$, 即 $f(x_e) = 0$。

如果存在标量函数 $V(x)$，对于非零状态 $x \in \Omega$ 满足：

1）$V(x)$ 对所有 x 具有一阶连续偏导数。

2）$V(x)$ 是正定的；

3）若 $\dot{V}(x)$ 是半负定的。

则平衡状态 x_e 在 Ω 域内为在李亚普诺夫意义下的稳定。

例 已知系统的状态方程，试分析平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x$$

解：其为线性系统，故 $x_e=0$ 是其唯一平衡点。

将矩阵形式的状态方程展开得到：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

取标量函数(李雅谱诺夫函数)：

$$V(x)=x_1^2+x_2^2>0$$

$$\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dt}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-2x_2^2\le 0$$

其为半负定，不恒为0，稳定。

当x_1任意且$x_2=0$时$\dot{V}(x)=0$，
那么系统可以在这些状态点上维持稳定吗？

定理2 设系统的状态方程为$\dot{x} = f(x)$, 对于所有非零状态$x \in \Omega$

若$V(x)$为正定的，$\dot{V}(x)$是负定的，则此系统平衡态$x_e = 0$在Ω域内渐近稳定的。

例 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性。

解： 由平衡点方程得 ← 令 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

解得唯一的平衡点为$x_1=0$, $x_2=0$, 即$x_e=0$, 为坐标原点。

设 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

则 $\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$

$$\therefore \dot{V}(x)=-2(x_1^2+x_2^2)^2$$

$$\because \begin{cases} x\neq 0 & \dot{V}(x)<0 \\ x=0 & \dot{V}(x)=0 \end{cases} \quad \therefore \dot{V}(x) \text{ 负定}$$

1) 原点是渐近稳定的；

2) 只有一个平衡状态，且对于全空间所有非零状态均有 $\dot{V}(x)<0$成立，因此原点是大范围渐近稳定；

3) 由于**V(x)**与**t**无关，又是大范围一致渐近稳定。

例（续） 已知系统的状态方程，试分析平衡状态的稳定性。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：其为线性系统，故 $x_e = 0$ 是其唯一平衡点。

将矩阵形式的状态方程展开得到：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

取标量函数(李雅谱诺夫函数)：

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2 \le 0$$

其为半负定，不恒为0，稳定。

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2 \leq 0$$

令 $\dot{V}(x) \equiv 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 只有全零解

$x \neq 0 \Longrightarrow$ 非零状态时 $\dot{V}(x) \not\equiv 0$

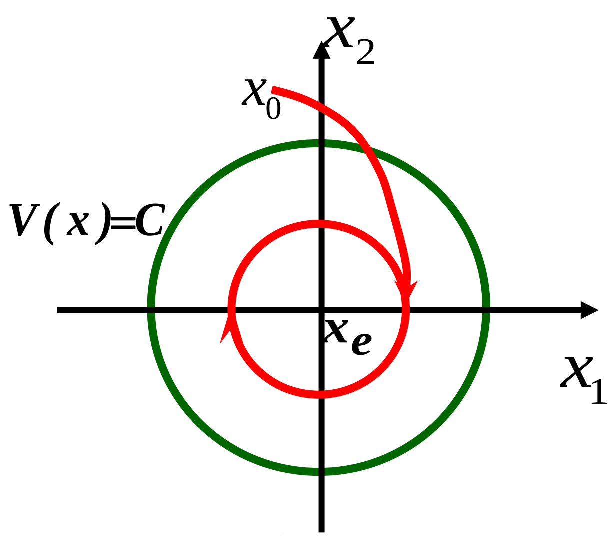
原点 $x_e = 0$ 是渐近稳定，且是大范围一致渐近稳定。

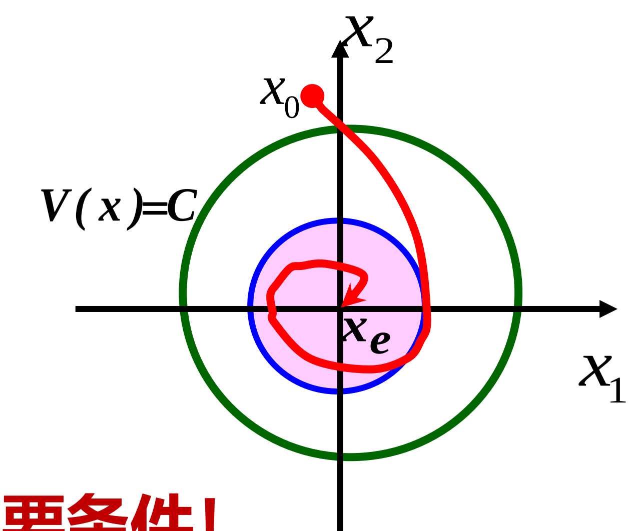
在系统容许的状态轨迹上$\dot{V}(x) < 0$

说明:

(1) $\dot{V}(x) \equiv 0$,则此时$V(x)=C$，系统轨迹将在某个曲面上，而不能收敛于原点，因此不是渐近稳定。

(2) $\dot{V}(x)$不恒等于0，说明轨迹在某个时刻与曲面 $V(x)=C$ 相交，但仍会收敛于原点，所以是渐近稳定。





(3) 稳定判据只是充分条件而非必要条件!

定理4：设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x)$

如果平衡状态 $x_e = 0$，即 $f(x_e) = 0$， 如果存在标量函数 $V(x)$ 满足：

1) $V(x)$ 对所有x具有一阶连续偏导数。

2) $V(x)$ 是正定的；

3) 若 $\dot{V}(x)$是正定的。

则平衡状态 x_e 是不稳定的。

充分条件

例 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性。

解：显然，原点为系统的平衡状态。选

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

可见系统在x_e=0处是不稳定的。

用A矩阵特征值判定才是充要条件!

非线性时变系统$\dot{x}=f(x,t)$的Lypunov稳定性定理

- **定理1：** 若**(1)** $V(x,t)$ 正定；

  (2) $\dot{V}(x,t)$ 负定；

  则原点是渐近稳定的。

(3) 当 $\|x\|\to\infty$ 时， $V(x,t)\to\infty$

则系统在原点处是大范围渐近稳定的。

$$\dot{V}(x,t)=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial t}$$

说明：$\dot{V}(x,t)$ 负定 ➡ 在整个状态空间的每一点上保证能量随时间连续单调衰减（要求苛刻）

- **定理2：** 若(1) $V(x,t)$ 正定；

  (2) $\dot{V}(x,t)$ 负半定；

  (3) $\dot{V}(x,t)$ 在非零状态不恒为零，

  则原点是渐近稳定的。

➢说明：对于$x(t;x_0,t_0) \neq 0$不存在$\dot{V}(x,t) \equiv 0$

（2）（3）$\Rightarrow$ 状态轨迹上的非零状态保证$\dot{V}(x,t) < 0$

对比

整个状态空间的非零状态保证 $\dot{V}(x,t) \leq 0$

使$\dot{V}(x,t)$ =0的x不一定是系统方程容许的平衡点

定理3：对所有非零状态$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$:

若**(1)** $V(x,t)$正定；

(2) $\dot{V}(x,t)$半负定；

则原点在Ω域内是李雅普诺夫意义下稳定的。

➢**说明：若存在非零状态保证$\dot{V}(x,t) \equiv 0$，则系统维持在上述非零状态且能量不变、不运行至原点。**

- **定理4：** 若(1) $V(x,t)$正定；

  (2) $\dot{V}(x,t)$正定

  则原点是不稳定的。

➢ 说明: $\dot{V}(x,t)$ 正定 ⇨ 能量函数随时间增大，在 x_e 处发散。

- **推论1：** 当 $V(x,t)$正定，$\dot{V}(x,t)$ 半正定，且 $\dot{V}(x,t)$ 在非零状态不恒为零时,则原点不稳定。

对李雅谱诺夫函数的讨论

（1） $V(x)$是正定的标量函数， $V(x)$具有一阶连续偏导数；

（2）并不是对所有的系统都能找到 $V(x)$来证明该系统稳定或者不稳定: 到目前为止，还没有构造Lyapunov函数的一般方法。因为Lyapunov第二法给出的结果是系统稳定性的充分条件。因此，对于某个系统来说，找不到合适的Lyapunov函数，既不能说系统稳定，也不能说系统不稳定，只能说无法提供有关该系统稳定性的信息（即：inconclusive —没有得出结论）；

（3） $V(x)$如果能找到，一般是不唯一的，但关于稳定性的结论是一致的；

对李雅谱诺夫函数的讨论

（4） $V(x)$最简单的形式是二次型 $V(x)=x^T Px$；

（5） $V(x)$只是提供平衡点附近的运动情况，丝毫不能反映域外运动的任何信息；

（6）构造 $V(x)$ 需要一定的技巧。

选取李雅普诺夫函数的方法:

构造一个 $V(x) = x^T Px$ 二次型函数；

1) 求 $\dot{V}(x,t)$；
2) 判断 $\dot{V}(x,t)$ 的正定性；
3) 判断非零状态情况下，$\dot{V}(x,t)$ 是否为零。

$$\dot{V}(x,t) \Rightarrow \begin{cases} \text{渐近稳定} \\ \text{李雅普诺夫意义下稳定} \\ \text{不稳定} \end{cases}$$

例：已知非线性系统的状态方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + x_2)^2 x_2$$

试用李雅普诺夫第二法判断其稳定性。

解：

令 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

原点是唯一平衡点

设 $V(x)=x_1^2+x_2^2$

则 $\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-2x_2^2(1+x_2)^2$

$$\because \begin{cases} x\neq 0 & \dot{V}(x)\leq 0 \\ x=0 & \dot{V}(x)=0 \end{cases} \qquad \therefore \dot{V}(x) \text{ 负半定}$$

反设 $\dot{V}(x)\equiv 0$

(1) $x_2\equiv 0$ 及 x_1 任意

$x_2\equiv 0\Rightarrow \dot{x}_2=0\Rightarrow$ 代入状态方程 $\Rightarrow x_1=0, x_2=0$

$\therefore$ 只有平衡状态 $x_1=x_2=0$ 满足 $\dot{V}(x)\equiv 0$

(2) $x_2 \equiv -1$ 及 x_1 任意

$x_2 \equiv -1 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow$ 代入状态方程 $\Rightarrow x_1 \equiv 0, \dot{x}_1 = -1$

这个结果是相矛盾的。所以这种情况不会发生在状态方程的解运动轨迹上。

综合以上分析可知, $x \neq 0$, $\dot{V}(x) \neq 0$

$\|x\| \to \infty, \quad V(x) = \|x\|^2 \to \infty$

$\therefore$ 系统在平衡状态x_e=0处是大范围渐近稳定的。

例：试判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

解: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 即 $x_1 = x_2 = 0$ $x_e = 0$

则 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ $\dot{V}(x) = 2x_2^2$

可见 x_1 与 $\dot{V}(x)$ 无关，故非零状态(如 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$)
有: $\dot{V}(x) = 0$

而对其余任意状态
有 $\dot{V}(x) > 0$

故 $\dot{V}(x)$ 半正定。

令 $\dot{V}(x)\equiv 0 \Rightarrow x_2=0, x_1=0$

即非零状态时,$\dot{V}(x)$不恒为零，则原点不稳定

即系统不稳定。

推论1

- 推论1：当 $V(x,t)$ 正定，$\dot{V}(x,t)$ 半正定，且 $\dot{V}(x,t)$ 在非零状态不恒为零时,则原点不稳定。

构造李雅普诺夫函数的一些方法

克拉索夫斯基方法给出了非线性系统平衡状态渐近稳定的充分条件。

克拉索夫斯基定理:

考虑如下非线性系统 $\dot{x} = f(x)$

式中，**x**为**n**维状态向量， $f(x)$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的非线性**n**维向量函数，假定 $f(0)=0$,且 $f(x)$ 对 x_i 可微（**i=1,2,…,n**）。

该系统的雅可比矩阵定义为

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

如果矩阵 $J^T(x)+J(x)$ 是负定的， 则平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的。

该系统的Lyapunov函数为: $V(x)=f^T(x)f(x)$

此外，若随着 $\|x\|\to\infty$ ， $f^T(x)f(x)\to\infty$,

则平衡状态是大范围渐近稳定的。

证明:

选取 $V(x)=\dot{x}^T\dot{x}=f^T(x)f(x)>0$

注意到 $\dot{f}(x)=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\dot{x}=J(x)f(x)$

从而 $\dot{V}(x)=\dot{f}^T(x)f(x)+f^T(x)\dot{f}(x)$

$$=[J(x)f(x)]^T f(x)+f^T(x)J(x)f(x)$$

$$=f^T(x)[J^T(x)+J(x)]f(x)$$

因为$J^T(x)+J(x)$是负定的，所以 $\dot{V}(x)$ 也是负定的。

所以原点是渐近稳定的。

例：已知非线性系统的状态方程为：

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

试用克拉索夫斯基方法判断x_e=0稳定性。

解：

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & -1-3x_2^2\end{bmatrix}$$

$$J^T(x)+J(x)=\begin{bmatrix}-10 & 2\\ 2 & -2-6x_2^2\end{bmatrix}$$

根据赛尔维斯特判据，有

$$\Delta_1=-10<0\ ,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-10 & 2\\ 2 & -2-6x_2^2\end{vmatrix}=60x_2^2+16>0$$

$\therefore\ J^T(x)+J(x)$ 是负定的

而且当 $\|x\| \to \infty$，有

$$V(x) = f^T(x) f(x)$$

$$= \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 & x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$= (-5x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty$$

$\therefore$ 系统在平衡状态x_e=0处是大范围渐近稳定

2.3.4 线性定常系统的*Lyapunov*稳定性分析

设系统状态方程为： $\dot{x} = Ax$

A --非奇异矩阵

$x_e = 0$ 为唯一平衡状态。

对于线性定常系统，可选*Lyapunov*函数$V(x)$：

(1) $V(x)=x^T Qx$,Q>0 —— $V(x)$为正定二次型。

(2) $\dot{V}(x) \le -k\|x\|^2, k > 0$

- 如何寻找合适的Q矩阵？
- 找不到满足条件的Q是否意味着不稳定？

$V(x)$称为二次型*Lyapunov*函数。

定理 线性定常自治系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

若存在二次型*Lyapunov*函数，则此系统是渐近稳定的。

对于二次型 $V(x)=x^TQx$, $Q>0$：

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) = \frac{d}{dt}(x^TQx) = \dot{x}^TQx + x^TQ\dot{x}$$

$$= (Ax)^TQx + x^TQ(Ax) = x^T(A^TQ + QA)x = -x^TMx$$

式中，$M = -(A^TQ + QA)$

由 $\dot{V}(x) \le -k\|x\|^2$

$$-x^TMx \le -k\|x\|^2 = -kx^Tx$$

$$x^TMx \ge kx^Tx$$

因$k>0$, 故$M>0$ (正定)。

☞由此，给出检验任意函数是否为*lyapunov*函数的方法：

1）选一实数对称矩阵$Q>0$.

2）由$A^TQ+QA=-M$，算出M .

3）若$M>0$，则$V(x)=x^TQx$是一个*lyapunov*函数，系统是*AS*；

若$M \ngtr 0$，则需另选一$Q>0$，再作检验。

定理 线性定常系统

$$\dot{x} = A \cdot x(t)$$

其平衡态$x_e=0$为渐近稳定的**充要条件**是：

对**任意**正定对称矩阵M，则存在一个正定对称矩阵Q，

满足 $A^TQ+QA=-M$ （称为*lyapunov*方程）。

☞ *Lyapurov*函数法判定线性定常系统为*AS* (渐近稳定)：

$$\begin{cases} \text{选一个} M > 0\,; \\ \text{由} A^T Q + QA = -M, \text{求出} Q\,; \\ \text{若} Q > 0, \text{则系统是} AS\,; \\ \text{若} Q \le 0, \text{则系统不是} AS \end{cases}$$

例 某系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}x$

其平衡状态在坐标原点，试判断该系统的稳定性。

解：选$M=I$，由$A^TQ+QA=-M$，$q_{ij}=q_{ji}$.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(1,1):&\quad 2q_{11}+2q_{12}=-1\\
(1,2):&\quad -3q_{11}-q_{12}+q_{22}=0\\
(2,1):&\quad -3q_{11}-q_{12}+q_{22}=0\\
(2,2):&\quad -6q_{12}-4q_{22}=-1
\end{aligned}$$

注：由于Q的对称性，只有 $\dfrac{n^2-n}{2}+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个未知数。

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11}\\ q_{12}\\ q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

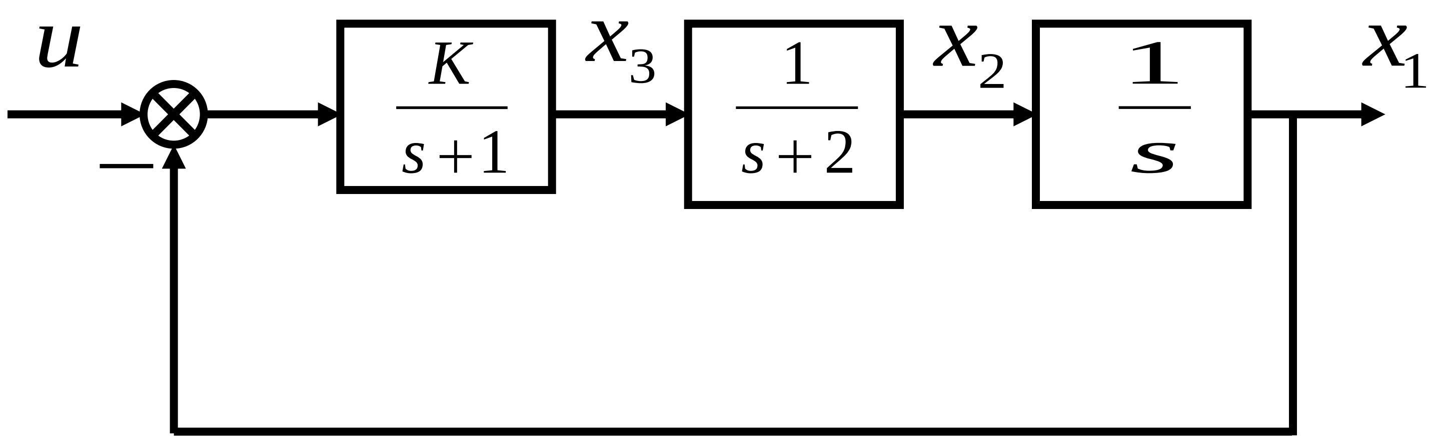
$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{-9}{2} & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

用*Sylvester*判据：

$$3 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} 3 & \frac{-7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(66 - 49) > 0$$

$Q > 0 \Rightarrow$ 系统是渐近稳定(*AS*)的.

例：试用李雅普诺夫方程确定下图所示系统渐近稳定的K值范围。



[解] 建立系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

在确定K的稳定范围时，假设输入u为零。

于是上式可写为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \qquad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 \qquad (3)$$

由式(1)到(3)可知，原点是平衡状态。

假设取正半定的实对称矩阵M为:

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由于除原点外 $\dot{V}(x)=-x^TMx$ 不恒等于零，因此可选上式的**M**。为了证实这一点，注意

$$\dot{V}(x)=-x^TMx=-x_3^2 \quad ,\dot{V}(x)\text{ 为负半定。}$$

取 $\dot{V}(x)\equiv 0\Rightarrow x_3\equiv 0\Rightarrow x_1\equiv 0\Rightarrow x_2\equiv 0$

于是 $\dot{V}(x)$ 只在原点处才恒等于零。

因此可选择正半定M用于Lyapunov方程。

现在求解如下Lyapunov方程:

$$A^T Q + QA = -M$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对Q的各元素求解，可得:

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{K^2+12K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} & 0\\ \frac{6K}{12-2K} & \frac{3K}{12-2K} & \frac{K}{12-2K}\\ 0 & \frac{K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K}\end{bmatrix}$$

为使Q成为正定矩阵，其充要条件为:

$12-2K>0$ 和 $K>0$

即 $0<K<6$ 系统渐近稳定。也就是说，原点是大范围一致渐近稳定的。

2.3.5 离散时间系统状态运动的稳定性及其判据

设系统状态方程： $x(k+1)=\Phi x(k)$

其中 Φ -非奇异阵， $x_e=0$ 是平衡状态。

设

$$V[x(k)]=x^T(k)Qx(k)$$

$$\Delta V[x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)]$$

$$= x^T(k+1)Qx(k+1) - x^T(k)Qx(k)$$

$$= [\Phi x(k)]^T Q[\Phi x(k)] - x^T(k)Qx(k)$$

$$= x^T(k)[\Phi^T Q\Phi - Q]x(k)$$

令 $\Phi^T Q\Phi - Q = -M$　李氏代数方程

$$\therefore \ \Delta V[x(k)] = -x^T(k)Mx(k)$$

定理：系统 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$ 渐近稳定的充要条件为：

给定任意正定实对称矩阵$\boldsymbol{M}$，存在一个正定实对称矩阵$\boldsymbol{Q}$，使式$\boldsymbol{\Phi}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{M}$ 成立，

则 $\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$是系统的一个李氏函数。

可取$\boldsymbol{M}$为半正定阵，只要

$$\dot{V}\le 0$$

$$\dot{V}\equiv 0\Rightarrow x\equiv 0$$

[大范围渐近稳定判据] 对离散时间非线性时不变自治系统，若存在一个相对于离散状态x(k)的标量函数V(x(k))，使对任意$x(k) \in R^n$满足：

（ⅰ）V(x(k))为正定；

（ⅱ）令$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$，$\Delta V(x(k))$为**负定**；

（ⅲ）当$\|x(k)\| \to \infty$，有$V(x(k)) \to \infty$。

则原点平衡状态即x=0为大范围渐近稳定。

[大范围渐近稳定判据] 对离散时间非线性时不变系统，若存在一个相对于离散状态x(k)的标量函数V(x(k))，使对任意$x(k)\in R^n$满足：

（ⅰ）V(x(k))为正定；

（ⅱ）令△V(x(k))＝V(x(k＋1))－V(x(k))，△V(x(k))为**负半定**；

（ⅲ）对由任意非零初始状态$x(0)\in R^n$确定的所有自由运动x(k)的轨线，△V(x(k))不恒为零；

（ⅳ）当‖x(k)‖→∞，有V(x(k)) →∞。

则原点平衡状态即x=0为大范围渐近稳定。

[特征值判据] 对离散时间**线性时不变自治系统**，原点平衡状态即$x_e=0$是李亚普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，Φ的全部特征值$\lambda_i(\Phi)$（i=1,2,…,n）的幅值均等于或小于1，且幅值等于1的特征值只能为Φ的最小多项式的单根。

[特征值判据] 对离散时间线性时不变自治系统，原点平衡状态是**渐近稳定**的充分必要条件为， Φ的全部特征值的幅值均小于1。

[李亚普诺夫判据] 对n维离散时间线性时不变自治系统，原点平衡状态渐近稳定的充分必要条件为，对任一给定n×n正定对称矩阵M，离散型李亚普诺夫方程

$$\Phi^T Q \Phi - Q = -M$$

有唯一n×n正定对称解阵Q。

- 第一方法：通过寻求描述系统运动规律的微分方程的解或特解，以级数形式将它表示出来，进而研究其稳定性问题。
- Lyapunov直接法或第二方法：不需考虑微分方程解的具体形式，而仅借助于一个所谓的李雅普若夫函数或V函数及根据该函数沿系统的导数符号来直接判断稳定性。

通过线性矩阵不等式判断线性系统的内部稳定性

https://yalmip.github.io/tutorial/semidefiniteprogramming/

Given a linear dynamic system $\dot{x} = Ax$, our goal is to prove stability by finding a symmetric matrix P satisfying

$$\begin{aligned} A^T P + PA &\prec 0 \\ P &\succ 0 \end{aligned}$$

Given a linear dynamic system $\dot{x} = Ax$, our goal is to prove stability by finding a symmetric matrix P satisfying

$$\begin{aligned} A^T P + PA &\prec 0 \\ P &\succ 0 \end{aligned}$$

Define a stable matrix A and symmetric matrix P (remember: square matrices are symmetric by default)

```
A = [-1 2 0;-3 -4 1;0 0 -2];
P = sdpvar(3,3);
```

Having defined P, we are ready to define the semidefinite constraints.

```
F = [P >= 0, A'*P+P*A <= 0];
```

Note that we have defined non-strict inequalities, although our theoretical problem involves strict inequalities. YALMIP will warn or submit and error if you use strict inequalities.

> *Strict inequalities simply does not make much sense in continuous numerical optimization.*

To avoid the zero solution on this homogeneous problem we can for instance add a margin and use $P \succeq I$ (which additionally ensures we obtain a strictly feasible solution), or as we do here, constrain the trace of the matrix to dehomogenize the solution.

```
F = [F, trace(P) == 1];
```

At this point, we are ready to solve our problem. But first, we display the collection of constraints to see what we have defined.

```
F
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
|   ID|                  Constraint|
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
|   #1|      Matrix inequality 3x3|
|   #2|      Matrix inequality 3x3|
|   #3|    Equality constraint 1x1|
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

We only need a feasible solution, so one argument is sufficient when we call optimize to solve the problem.

```
optimize(F);
Pfeasible = value(P);
```

```
F = [P >= 0, A'*P+P*A <= 0];
```

```
F = [F, trace(P) == 1];
```

The resulting constraint satisfaction is easily investigated with check.

```
check(F)
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
|   ID|            Constraint|   Primal residual|   Dual residual|
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
|   #1|     Matrix inequality|           0.20138|     8.2785e-016|
|   #2|     Matrix inequality|            1.1397|     3.6687e-016|
|   #3|   Equality constraint|       -2.276e-015|    -8.1801e-016|
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

2.3.6 Supplemental Material

Example: Pendulum equation with friction

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin x_1 - bx_2 \end{aligned}$$

$$V(x) = a(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -bx_2^2$$

The origin is stable

$\dot{V}(x)$ is not negative definite because $\dot{V}(x) = 0$ for $x_2 = 0$ irrespective of the value of x_1

Try

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \tfrac{1}{2}x^T P x + a(1-\cos x_1) \\
&= \tfrac{1}{2}[x_1\ x_2]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a(1-\cos x_1)
\end{aligned}
$$

$$p_{11} > 0, \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= (p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + a\sin x_1)\, x_2 \\
&\quad + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)\,(-a\sin x_1 - bx_2) \\
&= a(1-p_{22})x_2 \sin x_1 - ap_{12}x_1 \sin x_1 \\
&\quad + (p_{11} - p_{12}b)\, x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}b)\, x_2^2
\end{aligned}
$$

$p_{22} = 1, \quad p_{11} = bp_{12} \ \Rightarrow\ 0 < p_{12} < b,$ Take $p_{12} = b/2$

$$\dot{V}(x) = -\tfrac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \tfrac{1}{2}bx_2^2$$

$$D = \{x \in R^2 \mid |x_1| < \pi\}$$

$a > 0$
$b > 0$

$V(x)$ is positive definite and $\dot{V}(x)$ is negative definite over D
The origin is asymptotically stable

Backstepping Method: single-integrator form

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= u, \quad \eta \in R^n, \ \xi, \ u \in R \end{aligned}$$

Stabilize the origin using state feedback

- Cascade connection of an integrator with the nonlinear subsystem

- Assumed equilibrium $(\eta, \xi) = (0,0)$

$$f(0) = 0, u = 0$$

- Basic idea of backstepping:
  - Step 1: stabilize the η subsystem using a virtual control $\xi = \phi(\eta)$
  - Step 2: determine u that drives ξ to the virtual control $\phi(\eta)$

Backstepping Method: single-integrator form

Step 1: stabilize the η subsystem

View ξ as "virtual" control input to

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi$$

Suppose there is $\xi = \phi(\eta)$ that stabilizes the origin of

$V(\eta)$

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall\, \eta \in D$$

- The control $\phi(\eta)$ and the Lyapunov function $V(\eta)$ are obtained with other methods
- $\phi(0) = 0; W(\eta) > 0\ \forall \eta \neq 0$

Backstepping Method: single-integrator form

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= u, \quad \eta \in R^n,\ \xi,\ u \in R\end{aligned}$$

Stabilize the origin using state feedback

Step 2: drive ξ to the virtual control $\phi(\eta)$

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \qquad z = \xi - \phi(\eta) \\ \dot{z} &= \underbrace{u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi]}_{v}\end{aligned}$$

Can we stabilize the closed-loop system by setting $v = -kz$?

$$\boxed{V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \tfrac{1}{2}z^2}$$

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z + zv$$

$$\leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z + zv$$

$$v = \boxed{-\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)} - kz, \quad k > 0$$

$$\dot{V}_c \leq -W(\eta) - kz^2$$

从v转化为u:

$$\dot{z} = \underbrace{u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi]}_{v}$$

$$u = -\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta) - k\left[\xi - \phi(\eta)\right] + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\left[f(\eta) + g(\eta)\xi\right]$$

Backstepping method: strict-feedback form

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) z_1 \\
\dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2 \\
\dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \ldots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \ldots, z_{k-1}) z_k \\
\dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \ldots, z_k) + g_k(x, z_1, \ldots, z_k) u
\end{aligned}
$$

$$g_i(x, z_1, \ldots, z_i) \neq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq k$$

<u>Step 1: stabilize the x subsystem with $z_1 = u_0(x)$</u>

Associated Lyapunov function $V_0(x)$

Backstepping method: strict-feedback form

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) z_1 \\
\dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2 \\
\dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \ldots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \ldots, z_{k-1}) z_k \\
\dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \ldots, z_k) + g_k(x, z_1, \ldots, z_k) u
\end{aligned}
$$

$$
g_i(x, z_1, \ldots, z_i) \neq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq k
$$

<u>Step 2: design $z_2 = u_1(x, z_1)$ such that z_1 tracks $u_0(x)$</u>

Transformed single-integrator form

$$
\dot{z}_1 = u_{1a}(x, z_1) \qquad z_2 = \frac{u_{1a}(x, z_1) - f_1(x, z_1)}{g_1(x, z_1)}
$$

Augmented Lyapunov function $V_1(x) = V_0(x) + 0.5\big(z_1 - u_0(x)\big)^2$

Example

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1 \;\;\Rightarrow\;\; \dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$$

$$\boxed{V(x_1) = \tfrac{1}{2}x_1^2} \;\Rightarrow\; \dot{V} = -x_1^2 - x_1^4, \quad \forall\, x_1 \in R$$

$$\boxed{z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{V_c(x) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}z_2^2}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) \\ &\quad + z_2[u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= -x_1^2 - x_1^4 \\ &\quad + z_2[x_1 + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u]\end{aligned}$$

$$\boxed{u = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2}$$

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2$$

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2$$

2.4 拉萨尔不变性定理

有时，李雅普洛夫函数的导数仅仅是半负定的，通过其它的方法我们仍有可能判断系统的渐近稳定性。

LaSella(拉萨尔)不变性定理 就是一种可供选择的方法，它延伸了李亚普诺夫函数的概念。

拉萨尔引理的主要特点是**不要求V(x)正定**。

例（续） 已知系统的状态方程，试分析平衡状态的稳定性。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：其为线性系统，故 $x_e = 0$ 是其唯一平衡点。

将矩阵形式的状态方程展开得到：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

取标量函数(李雅谱诺夫函数)：

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2 \le 0$$

其为半负定，不恒为0，稳定。

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

考虑： $$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2 \le 0$$

$$\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2 = 0 & \dot{V}(x) = 0 \\ \text{其它} & \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \qquad \therefore \dot{V}(x)\ \text{半负定}$$

令 $\dot{V}(x) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 只有全零解

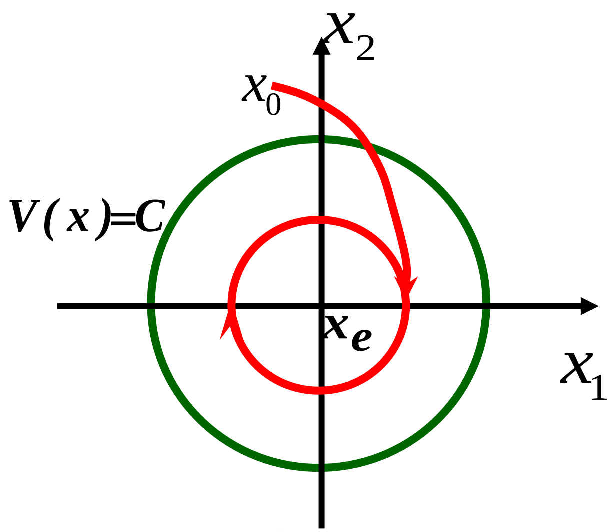
$x \neq 0 \Rightarrow$ 非零状态时 $\dot{V}(x) \not\equiv 0$

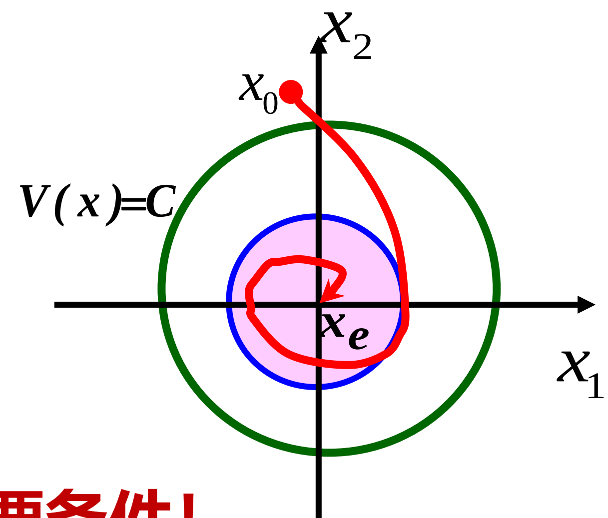
原点 $x_e = 0$ 是渐近稳定，且是大范围一致渐近稳定。

说明:

(1) $\dot{V}(x) \equiv 0$,则此时 $V(x)=C$ ，系统轨迹将在某个曲面上，而不能收敛于原点，因此不是渐近稳定。

(2) $\dot{V}(x)$不恒等于0，说明轨迹在某个时刻与曲面 $V(x)=C$ 相交，但仍会收敛于原点，所以是渐近稳定。





(3) 稳定判据只是充分条件而非必要条件!

例 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

在平衡点 $x=0$ 的稳定性。

选取李氏函数为： $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

由于 $\dot{V} = -3x_2^2 \le 0$ （$x \ne 0$ ），故原点是稳定的.

如果选取李氏函数为:

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{9}{4}x_1^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2 = \frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}$$

则有 $\dot{V} = -(x_1^2 + 5x_2^2) < 0$，从而得到系统是渐近稳定的.

基本定义：

ω 极限集：解的极限的全体（无穷大、平衡点、极限环等）

对于一个集合 $S \subset R^n$，如果对任意 $y \in S$，都存在一个时间序列 $t_n \to \infty$，满足 $\phi(t_n, x_0, t_0) \to y$，则称该集合是解 $\phi(\cdot, x_0, t_0)$ 的一个 ω 极限集。

不变集（invariant set）：考虑自治非线性系统。状态的集合 M 称为该系统的不变集，指对于任意初始状态 $x(0) \in M$，有 $x(t) \in M, \forall t \geq 0$ 成立。

即：从区域M出发的解始终保持在该区域中。

针对自治非线性系统和标量函数$V(x)$，在状态空间中定义如下集合：

$$\Omega_l = \{x |\ V(x) \le l\}$$

$$S = \{x \mid \ \dot{V}(x) = 0\ , x \in \Omega_l\} \subset \Omega_l$$

定理1 (拉萨尔不变性原理)

对于给定的自治系统，若存在连续可微的标量函数 $V(x)$，满足：

(1)存在适当的正数l，使得 Ω_l 是有界的；

(2) $\dot{V}(x) \le 0 \quad \forall x \in \Omega_l$

则对于任意初始状态 $x(0) \in \Omega_l$，当 $t \to \infty$时，状态轨迹 $x(t)$ 将趋于 S 内的最大不变集 M。其中最大不变集是指S内所有不变集的并集。

$$S = \{x \mid \dot{V}(x) = 0 \ , x \in \Omega_l\} \subset \Omega_l$$

$$M = \left\{x \middle| \dot{V}(x) = 0, \dot{x} = f(x), x \in \Omega_l \right\} \subset S$$

- 对比：Lyapunov稳定性定理并未直接说明状态会收敛到哪里
- 无需$V(x)$正定
- 不变集M包含平衡点、极限环、吸引域等

定理2（拉萨尔全局不变性原理）

对于自治非线性系统，若存在连续可微的标量函数 $V(x)$，满足：

(1) $V(x)$是径向无界的，即当$\| x \| \to \infty$时，有:

$$V(x) \to \infty$$

(2) $\dot{V}(x) \le 0, \forall x;$

则对于任意初始状态 $x(0)$，当$t \to \infty$时，状态轨迹$x(t)$将趋于S内的最大不变集M。

当不变集M只包含平衡点x=0时

（缩小Ω_l的范围来减小不变集M）

定理3（拉萨尔渐近稳定性定理）设$V: R^n \to R$，Ω_l 及 S 为定理1中定义的集合。如果集合S 除 $x=0$外不包含其它解，则平衡点$x=0$ 是局部渐近稳定的。

定理4 （拉萨尔全局渐近稳定性定理）设V满足定理2的条件。如果集合S 除 $x=0$ 外不包含其它解，则平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的。

例 考虑系统
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2\end{cases}$$

在平衡点 $x=0$ 的稳定性。

对于 $$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

有 $$\dot{V} = -3x_2^2$$

可以求得：

$$S = \{(x_1, x_2) \mid \dot{V} = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$$

然而，易知在S内只有 $(0,0)$ 是系统的解。因此，根据定理4可知， $x=0$ 是全局渐近稳定的。

2.5 Barbalat引理

当李雅普洛夫函数的导数为**负半定**时，拉萨尔不变性理论为判断自治系统 的渐近稳定性提供了一种可能的方法。而对于**非自治系统**（如模型参考自适应控制系统），则不适用。

Barbalat引理为非自治系统的稳定性分析提供了一种重要的工具。

函数及其导数的渐近性质

给定一个关于 t 的可微函数，有下面三个重要结论：

1、$\dot{f} \to 0 \neq> f$ 收敛

几何上，导数趋于零意味着切线越来越平，但这并不意味着该函数收敛。如：$f(t)=\sin(\text{In}\ t)$ 或 $f(t)=\sqrt{t}\sin(\text{In}\ t)$

2、f 收敛 $\neq> \dot{f} \to 0$

当 $t \to \infty$ 时，f 存在极限并不意味着导数趋于零。如：

$$f(t)=e^{-t}\sin^2(e^{2t})$$

3、如果 f 有下界且非增，则存在极限（但不意味着 $\dot{f} \to 0$）

2.5.1 Barbalat引理

Barbalat引理 ：如果可微函数 $f(t)$当$t\to\infty$时存在有界极限，且$\dot{f}$ 一致连续，则 $t\to\infty$ 时 $\dot{f}(t)\to 0$。

注：

1、可微函数一致连续的充分条件是其导数有界。该条件是验证函数是否一致连续的简单方法。

2、Barbalat引理的一个直接而有用的推论：

如果可微函数 $f(t)$ 当 $t\to\infty$ 时存在有界极限，f 二阶导数存在且有界，则当 $t\to\infty$ 时，f 一阶导数$\to 0$。

2.5.2 类李雅普诺夫引理

下面引理由Barbalat引理直接得出，在非自治系统分析中的作用类似 LaSalle不变集原理。

引理2（类Lyapunov引理）：如果存在标量函数满足

(1) $V(x,t)$ 有下界;

(2) $\dot{V}(x,t)$半负定;

(3) $\dot{V}(x,t)$对时间一致连续。

那么$\dot{V}(x,t)\to 0,\ \ t\to\infty$。

证明： 根据定理条件，V存在极限 V_∞，使得$V_\infty \le V(x(0),0)$，由Barbalat引理可证。

例　考虑带有未知参数的一阶自适应控制系统的闭环误差系统方程为

$$\dot{e} = -e + qw(t)$$

$$\dot{q} = -e\,w(t)$$

其中e和θ是跟踪误差和参数误差，$\omega(t)$是有界连续函数。

考察有下界函数

$$V = e^2 + \theta^2$$

其导数为

$$\dot{V} = 2e\left(-e + qw\right) + 2q\left(-e\,w\right) = -2e^2 \pounds 0$$

故$V(t) \leq V(0)$，从而e和θ有界。但是不能根据不变集原理推出e的收敛性。为了应用Barbalat引理，考查$\dot{V}$的一致连续性：

$$\ddot{V} = -4e\left(-e + qw\right)$$

故$\ddot{V}$有界，从而$\dot{V}$一致连续。由Barbalat引理得

$$e \to 0,\ t \to \infty$$

稳定性分析方法总结

- **拉萨尔不变集定理**

  适用于自治系统

  标量函数V对时间的一阶求导是半负定的。

  分析不变集 ⇒ 渐近稳定性

- **Barbalat引理**

  适用于一致连续函数 ⇒ 偏微分趋于0

- **类李雅普诺夫引理**

  适用于非自治系统（如跟踪装置）

  利用Barbalat引理