控制理论导论

从基本概念到研究前沿

主　编: 郭　雷
副主编: 程代展 冯德兴

中国科学院, 系统科学研究所, 北京100080

陈翰馥 陈文德 秦化淑
申铁龙 张纪峰

中国科学出版社
北京2005

前 言

维纳（N. Wiener）在1948年出版的专著《控制论,或关于在动物和机器中的控制与通讯》[1], 标志着控制论作为科学的一门重要分支正式诞生. 他也因此成为控制论的主要创始人之一. 我国著名科学家钱学森在1954 年出版的专著《工程控制论》[2]又进一步推动了控制论与工程技术问题的密切结合.

从那时到现在, 控制论经历了半个世纪的迅猛发展.工业化和高科技的发展, 对工业控制提出了越来越高的要求,特别是制导和航天技术的发展,促进了自六十初以来现代控制理论的诞生和发展.而计算机的出现和高速发展, 网络技术的日新月异使得高精度控制的在线实现成为可能. 半个世纪后的今天, 控制论已经成为一门理论严谨, 内容丰富, 分支众多, 发展迅速, 应用范围广泛的学科领域.钱学森曾经从生产力, 特别是技术革命的进程分析了控制论的产生和发展,他强调指出:“我们可以毫不含糊地说, 从科学理论的角度来看,二十世纪上半叶的三大伟绩是相对论, 量子论和控制论,也许可以称它们为三项科学革命, 是人类认识客观世界的三大飞跃. ”[3]

控制理论发展到今天,恐怕没有一位系统与控制专家能够同时掌握控制理论的所有前沿分支,正如当今一个数学家很难同时是拓朴学、几何学、代数学、微分方程、泛函分析、概率统计, 数论等各方面的专家. 但是, 与纯数学不同的是,一个优秀的系统与控制科学家,应该能对不同的控制理论与控制方法有一个比较全面的了解. 控制论是一门应用性很强的科学理论,它面对的是各种各样的错综复杂实际系统. 宇宙飞船到底是有穷维模型还是无穷维模型,是随机系统还是确定性系统, 是该采用最优控制还是用鲁棒控制,抑或是多种模型和多种控制手段的综合, 不可能有现成的答案.模型的刻划, 控制手段的选择, 都是控制工程师自己的事情.这种以问题为导向, 以解决问题为目标的研究路线, 要求系统与控制的理论工作者和工程师面对需求或实际对象, 有宽阔的知识面,对本学科的各个重要分支的理论和方法有一个全面、综合的了解. 这也是我们对研究生,特别是对那些有志于在系统与控制科学的理论与应用研究方面,实践其人生宏伟理想的博士研究生们的要求和期盼.控制论方面的书籍汗牛充栋, 文献更是如山似海.“读书破万卷,下笔如有神”, 对文学书籍或许可能.自然科学理论书籍有时是“读破一卷书, 悠忽三五载”, 但不求甚解的“泛读”不如“不读”, 如此可能会造出一批“夸夸其谈”而又“胸无点墨”的滥竽. “书山有路勤为径, 学海无涯苦作舟”固然有其道理, 但好的工具书犹如名师利器,可以让人达到事半功倍的效果.

上世纪70年代中期至80年代,我们的老研究室主任关肇直主编的“现代控制理论小丛书”,曾经为现代控制理论在中国的传播和发展起到了历史性的作用.二十多年过去了, 控制论有了长足的发展, 相当部分内容亟待更新. 另外,“小丛书”虽册书较多, 但系统性和整体性还不完善. 我们希望本书,满足以下几个要求：

1. 从必要的数学基础到控制理论, 基本上自成体系, 一个具有现代工程数学背景的大学毕业生就能读懂它的主要部分.

2. 它具有全方位性, 能够对控制理论的几个主要方向都作出一定深度的介绍. 使“读破” 这卷书的读者能对现代控制理论有一个较为全面的了解.

3. 它是一本综合性的教科书. 基本部分论述详尽具体, 每节后附有启发性的习题,可供学生循序渐进地学习, 引导研究生迅速进入研究前沿.

4. 它又是一本前沿性的参考书, 提高部分对现代控制理论的最新进展和挑战性课题作专门介绍, 可供有关科学和工程研究工作者参考.

这样一个目标决非一、两个人所能完成的. 国内外也未曾见过此类书籍,这是一个创新的尝试. 本书是由八位资深研究员执笔, 十多位一线科研人员参与, 依靠我们的协作、奉献和团队精神完成的. 部分内容曾作为中国科学院有关专业博士生课程教材试讲.

本书的内容大体上可分为两大部分. 第一部分(前五章)是工具篇, 介绍本书及控制理论中用到的一些基本数学工具. 这些可以看作是对控制论专业博士研究生的基本要求,也可以作为有关科研工作者理论进修的参考或工具型手册.

第一章包括线性代数和线性系统两部分. 在线性代数部分中给出一些在一般大学教科书中不多见的内容, 如张量积, 奇异值分解等, 可以看作标准线性代数课程的补充. 线性系统部分则包括能控性、能观测性、标准分解等一些基本知识. 现在这些内容不仅对于控制专业,而且对许多相近专业也已经成为必修的基础理论了.

第二章介绍常微分方程的基本理论, 包括解的存在、唯一性、解的延拓及解对初值和参数的连续依赖性; 线性常微分方程的基本结果; 稳定性理论和平面定性理论初步. 这些内容是集中参数控制理论的必不可少的数学工具.

第三章的内容包括抽象代数, 拓朴, 及微分几何. 对抽象代数只讨论群, 环与代数概念. 对点集拓朴作了较全面的介绍. 对代数拓朴,只涉及到同伦, 基本群等. 微分几何因为是非线性系统研究的基本工具,本章对它的讨论相对而言较详细. 对流形, 向量值纤维丛, 黎曼流形,辛几何等均作了讨论.

第四章从测度论的观点引进严格的概率空间,事件独立性等概念,介绍概率中的独立变量, 极限定理等基本工具,然后介绍鞅与鞅差序列. 并讲述随机过程和随机微分方程初步. 为随机控制系统提供理论基础.

第五章介绍分布参数系统控制所要用的泛函分析、线性算子半群理论和偏微分方程的一些基本知识.主要内容包括Hilbert空间和Banach空间, 线性算子理论, 谱理论,线性发展方程, Sobolev空间, 偏微分方程边值问题等. 当然这些基本理论的深入掌握则需要读者去阅读有关的专著了.

本书的第二部分(后六章)是控制篇, 介绍现代控制理论中最活跃的几个理论分支, 目的是帮助研究生了解有关控制理论, 并引导他们进入科研前沿, 也可以作为相关研究人员的参考资料.

第六章首先讨论了线性系统H_∞ 控制的基础理论与设计方法. 然后讨论非线性系统H_∞ 控制问题.它在理论与设计上都与线性系统有显著区别.最后给出一些它在工程设计中应用的典型例子.

第七章介绍集中参数系统最优控制理论的基本结果.从工程实际问题归纳出最优控制问题的共同特点和数学描述开始,讲述最优控制理论的基本结果. 包括最大值原理;线性系统时间最短控制; 线性二次最优控制; 双方极限原理及其与H_∞控制的关系,为了解上世纪60年代的最优控制理论与90年代的干扰抑制控制之间的区别和联系提供"桥梁".

第八章讨论非线性系统控制理论.由于非线性系统控制的理论与方法十分丰富, 这里着重于非线性系统的几何理论. 内容包括主要的经典方法与理论结果. 如能控性,能观测性, 不变分布及解耦, 线性化与近似线性化等.也包括新近发展起来的后推式自适应控制, 中心流形方法, 耗散理论, 哈密顿系统理论等.

第九章讨论自适应系统. 内容包括自适应估计和自适应控制两部分.该章将首先对自适应系统作一综合介绍, 然后讨论定常及时变参数系统的自适应估计理论和方法, 其中涉及线性时变随机系统的稳定性研究;接着给出自校正调节器和自适应极点配置等典型自适应控制器的基本理论与设计技巧.该章的习题也是从事该领域进一步研究的必要基础.

第十章讨论分布参数控制系统的基本理论, 包括无穷维线性系统的稳定性,能控性, 能观测性, 反馈镇定, 弹性梁振动控制, 波动方程的控制, 以及时域乘子法, 频域乘子法, Riesz基方法等各种具体方法,变系数波动方程控制的黎曼几何方法,以及无穷维线性系统二次型最优控制等.

第十一章研究关于以制造系统,计算机网等为应用背景的离散事件动态系统. 先简单综述了各种方法,然后主要论述了极大代数方法, 包括建模与分析, 能达能观测性,周期（'极点'）配置与稳定性, 最优控制与调度等.最后论述了这个方向的两个最新进展：双子（Dioid）代数方法与极小极大函数方法.

本书各章的执笔人为：第一章：张纪峰; 第二章：秦化淑; 第三章：程代展; 第四章：陈翰馥; 第五章：冯德兴; 第六章：申铁龙; 第七章：秦化淑; 第八章：程代展; 第九章：郭 雷; 第十章：冯德兴; 第十一章：陈文德. 最后, 由郭雷、程代展和冯德兴等负责统编.

在这新千年发端之际, 复杂系统科学, 信息科学与生命科学的发展, 社会与生态问题, 高科技与经济全球化都给控制理论提出了新的挑战, 同时也给予控制论发展以新的机遇.

希望寄托于年轻的一代, 寄托于现在的大学生和研究生们. 伴随着中华民族的腾飞, 他们必将成为未来国际系统与控制科学主导潮流的弄潮儿. 如果能用我们的肩膀为他们的成长起一点铺路石子的作用, 那么本书的目的也就达到了.

作者感谢华夏英才基金对本书出版的支持, 感谢常金玲、刘智敏等同志在本书打印、编排等方面的贡献, 感谢科学出版社的支持与帮助.

笔者学识浅薄, 错误和缺点在所难免, 愿专家和读者不吝赐教.

作　者

2005年3月

于中国科学院数学与系统科学研究院

系统控制重点实验室

数学符号表

$\in$	属于
$\subset$	包含
$\cap$	集合交运算
$\cup$	集合并运算
$\setminus$	集合差运算
$\Longrightarrow$	蕴含
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{Z}$	整数域
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{N}$	自然数集
$\emptyset$	空集
Re	实部
Im	虚部
$\mathrm{span}\,\{M\}$	由M中向量的线性组合构成的线性子空间
sign	符号函数
$L^p(\Omega)$	可测集Ω上p次可积函数空间
$L^p(J;\mathbb{R}^m)$	区间J到$\mathbb{R}^m$上的p次可积函数空间
$\mathrm{tr}(A)$	矩阵A的迹
A^τ	矩阵A的转置
$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$	矩阵A的特征值的实部
$\dim M$	子空间M的维数
$\mathrm{codim}\,N$	子空间N的余维数
$\ker(A)$	矩阵A的零(核)空间
$\mathrm{Image}(A)$	矩阵A的值域
$\dot{+}$	直接和
$\oplus$	直交和

第三、八章专用符号

$M_{m\times n}$	$m\times n$矩阵集
M_n	$n\times n$矩阵集
$\mathrm{GL}(n,R)$	一般线性群
$\mathrm{gl}(n,R)$	一般线性代数
$\mathrm{SO}(n,R)$	特殊正交线性群
$\mathrm{so}(n,R)$	特殊正交线性代数
$\mathrm{Sp}(n,R)$	辛群
$\mathrm{sp}(n,R)$	辛代数
$[\cdot,\cdot]$	李括号
$\wedge$	协变张量的外积

$\{\cdot,\cdot\}$	泊桑括号
$H < G$	群G的子群
$H \lhd G$	群G的正规子群
$\mathrm{ad}_f^k g$	向量g对f的k次李导数
$L_f^k h$	函数h对f的k次李导数
$T_s^r(V)$	V上协变阶r逆变阶s的张量集
DF	F的微分
$\bigtriangledown_f g$	g沿f的联络
$T(N)$	流形N的切空间
$T^*(N)$	流形N的余切空间
$C^\infty(N)$	N上的C^∞的函数集合
$C^\omega(N)$	N上的解析函数集合
$V(N)$	N上的光滑向量场集合
$V^\omega(N)$	N上的解析向量场集合
$\otimes$	矩阵的张量积
$\circ$	矩阵的Hadamard积
$\phi_X^t(x_0)$	向量场X的以x_0为初值的积分曲线
$T_t^s(N)$	N上的张量场集合

第四章专用符号

λ	Lebesgue测度
$\mathcal{B}$	Borel σ-代数
Ω	全空间
$\mathcal{F}$	σ-代数
$P(A)$或PA	集合A的概率
I_A	集合A的示性函数
$E\chi$	随量变量χ的数学期望
a.s.	几乎肯定, 或以概率1
$P(A\|B)$或$P^B(A)$或P^BA	在B条件下A的条件概率
$P^{\mathcal{F}}A$或$P(A\|\mathcal{F})$	在σ-代数$\mathcal{F}$条件下, A的条件概率
P^XA, $P(A\|C)$	在随机变量X条件下A的条件概率
$E^{\mathcal{F}}$或$E(\chi\|\mathcal{F})$	在σ-代数$\mathcal{F}$条件下χ的条件期望
$E^\xi\chi$或$E(\chi\|\xi)$	在随机变量ξ条件下χ的条件期望
$(x_k,\mathcal{F}_k)$	对一切$k\geq 0$, x_k对$\mathcal{F}_k$可测
iid	独立同分布
A^+	阵A的伪逆
$a_n = o(b_n)$	$b_n > 0$ 且$\frac{a_n}{b_n}\to 0$, $n\to\infty$
$a_n = O(b_n)$	$b_n \geq 0$且存在常数$M>0$使$\|a_n\|\leq Mb_n$, $\forall n$
$a_n \sim b_n$	$\frac{a_n}{b_n}\to 1$, $n\to\infty$

第五、十章专用符号

$L^p(J;X)$	区间J到Banach空间X的p次可积抽象函数空间

$\mathcal{L}(X,Y)$	Banach空间X到Banach空间Y的有界线性算子空间
$\perp$	直交
$\sigma(A)$	算子A的谱(集)
$\sigma_p(A)$	算子A的点谱
$\sigma_c(A)$	算子A的连续谱
$\sigma_r(A)$	算子A的剩余谱
$\sigma_e(A)$	算子A的本质谱
$\rho(A)$	算子A的正则集
$\mathcal{N}(A)$	算子A的零空间
$\mathcal{R}(A)$	算子A的值域

第九章专用符号

θ	未知参数向量
θ_t	时变参数或对定常参数的估计
$\tilde{\theta}_t$	参数向量估计误差
ϕ_t	线性模型中的回归向量
P_t	递推估计算法中的增益矩阵
LS	最小二乘
WLS	加权最小二乘
$\{\mathcal{F}_t\}$	非降的σ-代数序列
STR	自校正调节器
S^0	由一维非负随机序列组成的稳定激励类
S_p	L_p指数稳定激励簇
LMS	最小均方算法
KF	Kalman滤波型算法
y_t^*	被跟踪的参考信号

第十一章专用符号

D	极大代数
$D^{m\times n}$	极大代数上$m\times n$矩阵集
D^n	极大代数上n维向量集
$G(A)$	矩阵A的关联图
$\oplus$	极大代数上的加法: 取极大
ϵ	表示$-\infty$
$(A)_{ij}$	矩阵A的第i行第j列元
$A_{i\cdot}$	矩阵A的第i行
$A_{\cdot j}$	矩阵A的第j列
ϕ	元素全部为$-\infty$的矩阵

目　录

第一章　线性系统概论

线性系统理论是现代控制理论的基础, 有许多这方面的专著, 如[6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 14, 17]等, 内容很丰富. 本章讨论线性系统的基本理论, 如系统的能控性、能镇定性、能观测性、能检测性、最小实现、能控能观标准形、极点配置、观测器理论、动态输出反馈控制、动态补偿器、带干扰补偿的动态补偿器、解耦控制、内模原理、二次线性最优控制等. 内容主要来自文献[6, 14].

§1.1　线性代数基础

本节将给出一些在一般的线性代数教科书中不易找到但对线性系统理论又是必不可少的代数知识,如Kronecker积、矩阵函数、矩阵方程等. 主要内容取自文献[4, 5, 12, 16].

Kronecker积

定义 1.1.1 对于任意两个矩阵$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$和$B\in\mathbb{C}^{p\times q}$,其*Kronecker*积（又称张量积）定义为：

$$A\otimes B\triangleq\begin{bmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

对Kronecker积, 成立下列基本公式

(a)数乘 设A, B为复数域$\mathbb{C}$上的矩阵, $\alpha\in\mathbb{C}$,则

$$\alpha(A\otimes B)=(\alpha A)\otimes B=A\otimes(\alpha B)$$

(b)分配律 设A, B为复数域$\mathbb{C}$上阶数相同的矩阵,则

$$(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$$
$$C\otimes(A+B)=(C\otimes A)+(C\otimes B)$$

(c)结合律

$$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$$

(d)转置

$$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$$

(e)混合积 设$A\in\mathbb{C}^{k\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{C}^{p\times q}$, $D\in\mathbb{C}^{q\times t}$,则

$$(A\otimes C)(B\otimes D)=AB\otimes CD.$$

(f)逆 对于$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 若$A^{-1}$, B^{-1}存在,则$(A\otimes B)^{-1}$也存在,且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

(g)迹

对于$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times m}$,有

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{tr}B \tag{1.1.1}$$

所谓矩阵$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$的行展开,是将$A$的各行依次横排后转置得到的$mn$ 维列向量,列展开是将各列纵排得到的mn维列向量,即

行展开:

$$V_r(A) \triangleq [a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{mn}]^T; \tag{1.1.2}$$

列展开:

$$V_c(A) \triangleq [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{mn}]^T. \tag{1.1.3}$$

行展开和列展开有如下性质

(I)转置

$$V_r(A^T) = V_c(A), \quad V_c(A^T) = V_r(A).$$

(II)积的展开

对于三个矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{C}^{p\times q}$,有

$$V_r(ABC) = (A \otimes C^T)V_r(B), \tag{1.1.4}$$

$$V_c(ABC) = (C^T \otimes A)V_c(B). \tag{1.1.5}$$

矩阵求逆公式 有时用分块矩阵求逆的方法求A^{-1}是比较方便的. 若A是一个n_1+n_2阶分块三角形矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad 或 \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中$A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$.

当A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}存在时,有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \quad 或 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

容易验证$AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

当A不是分块三角形矩阵$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 且$A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}$存在时,容易验证

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

利用分块三角形矩阵求逆公式可得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\widetilde{A}_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\widetilde{A}_{22}^{-1} \\ -\widetilde{A}_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \widetilde{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

或

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11}^{-1} & -\widetilde{A}_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\widetilde{A}_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}\widetilde{A}_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{1.1.7}$$

其中$\widetilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, $\widetilde{A}_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

比较(1.1.6)和(1.1.7)得:

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}. \tag{1.1.8}$$

矩阵函数 设$f(s)$是变量s的函数, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 令$s = X$, 得矩阵函数$f(X)$. 当$f(s)$在$s_0$附近解析时, $f(X)$可以展成一致收敛的幂级数

$$f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(X - s_0 I)^i.$$

设$f(s)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i s^i$, 当$|s|<\rho$ (ρ为收敛半径) 幂级数是收敛的, 那么对矩阵幂级数来说, 当X的所有特征值的模都小于ρ时, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i X^i$收敛. 当$X$有一个特征值的模大于$\rho$时, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i X^i$就发散.

由上述结果,易知

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X^i$$

对任意方阵X均收敛, 把极限记为e^X,即

$$e^X\triangleq\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X^i.$$

同样可定义

$$\ln(I+X)\triangleq X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+\cdots.$$

当X的所有特征值的模都小于1时,该幂级数方阵收敛, 而幂级数

$$(I+X)^{\alpha}\triangleq I+\alpha X+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}X^3+\cdots$$

当X的所有特征值的模都小于1时收敛. 特别取$\alpha=-1$, $X=-A$时,

$$(I-A)^{-1}\triangleq I+A+A^2+\cdots.$$

线性矩阵方程 现在我们讨论以实变量x的函数为元素的矩阵

$$A(x)=\begin{bmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x)\end{bmatrix},$$

式中设a_{ij}是x的实函数（或复变函数）,即对于任意$x\in R$, $A(x)\in\mathbb{R}^{m\times n}$（或$A(x)\in\mathbb{C}^{m\times n}$）. 当$a_{ij}$ ($i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$) 可微分时,称为矩阵A可微, A的各元素对x微商后,定义为A对x的微商:

$$\frac{dA(x)}{dx}\triangleq\left[\frac{da_{ij}}{dx}\right].$$

A的各元素对x的积分,定义为A对x的积分:

$$\int_{x_1}^{x_2}A(x)dx\triangleq\left[\int_{x_1}^{x_2}a_{ij}(x)dx\right].$$

考虑线性矩阵微分方程

$$\dot{X}=XD(t)+E(t)X+F(t),\quad X(t_0)=X_0, \tag{1.1.9}$$

其中$X\in\mathbb{R}^{m\times n}$为未知矩阵, $D(\cdot)$, $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ 分别为适当阶数的矩阵,其元是t的分段连续函数.

定理 1.1.1 对于任意的$t\in\mathbb{R}$,方程(1.1.9)有唯一解$X(t;t_0,X_0)$,并且

$$X(t;t_0,X_0)=\Phi_1(t,t_0)X_0\Phi_2(t,t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi_1(t,\tau)F(\tau)\Phi_2(t,\tau)d\tau,$$

其中矩阵$\Phi_1(t,\tau)$和$\Phi_2(t,\tau)$满足:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=E(t)\Phi_1,\quad \Phi_1(\tau,\tau)=I_m;$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}=\Phi_2D(t),\quad \Phi_2(\tau,\tau)=I_n.$$

在定理1.1.1中,若$n = m$, $D(t) = A$(常数矩阵), $E(t) = A^T$, $F(t) = Q$ (常数矩阵),则可得下列推论.

推论 1.1.1 对于任意$t \in \mathbb{R}$,线性定常矩阵微分方程

$$\dot{X} = XA + A^T X + Q, \quad X(t_0) = X_0 \tag{1.1.10}$$

有唯一解

$$X(t; t_0, X_0) = e^{A^T(t-t_0)} X_0 e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A^T(t-\tau)} Q e^{A(t-\tau)} d\tau, \tag{1.1.11}$$

且当$Q = Q^T$, $X_0 = X_0^T$时,有

$$X(t; t_0, X_0) = [X(t; t_0, X_0)]^T \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{1.1.12}$$

推论 1.1.2 若A渐近稳定（即A的所有特征值的实部小于零）,则对于任意实矩阵$X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$,方程(1.1.10)的解$X(t; t_0, X_0)$对$t \geq t_0$一致有界.

对于给定的矩阵$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 考察线性矩阵方程

$$XD + EX = -F. \tag{1.1.13}$$

定理 1.1.2 方程(1.1.13)存在唯一解的充分必要条件是, D及E的特征值满足

$$\lambda_i(D) + \lambda_j(E) \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1.14}$$

特别, 当$m = n$, $D = A$, $E = A^T$, $F = Q$ (其中$Q = Q^T$)时, 方程(1.1.13)成为

$$XA + A^T X = -Q. \tag{1.1.15}$$

鉴于线性矩阵方程(1.1.15)在稳定性理论等方面的重要性, 下面我们讨论其解的求法及性质.

首先,根据Q的对称性容易证明, 若(1.1.15)的解存在, 记为X, 则X^T也是(1.1.15)的解. 因此, 若(1.1.15)具有唯一解$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$,则必为实对称解.

定理 1.1.3 若A渐近稳定,则方程(1.1.15)有唯一解X, X有下列性质：

(i) X可表示为

$$X = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt; \tag{1.1.16}$$

(ii) $Q > 0 (< 0) \Longrightarrow X > 0 (< 0)$；

(iii) $Q \geq 0 (\leq 0) \Longrightarrow X \geq 0 (\leq 0)$；

(iv) 在式(1.1.13)中设$Q = Q_1 (Q = Q_2)$,令这时的解为$X_1 (X_2)$,则

$$Q_1 > Q_2 \Longrightarrow X_1 > X_2;$$

(v) $Q_1 \geq Q_2 \Longrightarrow X_1 \geq X_2$.

习题1.1

1.1.1 证明Kronecher积的性质(a)-(g).

1.1.2 一个$\mathbb{C}^{n\times n}$上的矩阵A,若满足$A^* = A$,则称为Hermite矩阵. 证明：两个对称Hermite矩阵的Kronecker积是对称Hermite矩阵.

1.1.3 证明：两个三角形矩阵的Kronecker积是三角形矩阵. 反之,若$A \otimes B$ 是不为0的三角形矩阵,则A是三角形矩阵.

1.1.4 证明：若A, B均为对角矩阵,则$A \otimes B$也是对角矩阵. 反之, 若$A \otimes B$是不为0的对角矩阵,则A, B均为对角矩阵.

1.1.5 证明：两个直交（酉）阵的Kronecker积是直交（酉）阵.

1.1.6 一个$\mathbb{C}^{n\times n}$上的矩阵A,若满足$AA^* = A^*A$,则称为正规阵(normal matrix). 证明：两个正规阵的Kronecker积也是正规阵.

1.1.7 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

试求A^n和e^A. 这里n为自然数.

1.1.8 证明定理1.1.1.

1.1.9 证明：矩阵$(D^T \otimes I_m + I_n \otimes E) \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$的特征值为

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_k(D^T \otimes I_m + I_n \otimes E) = \lambda_i(D) + \lambda_j(E), \\ k = 1, 2, \cdots, nm;\ i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m. \end{array}\right\} \tag{1.1.17}$$

1.1.10 证明定理1.1.3.

§1.2 定常线性系统的数学描述

本节介绍两种典型的描述线性控制系统模型的方法,即传递函数法和状态空间法.

传递函数描述的是系统的输入输出关系,用它描述系统时,假定对系统结构的内部信息一无所知,能够得到的只是系统的输入信息和输出信息. 在这种情况下, 系统的内部结构就像一个“黑箱”一样. 因此,传递函数只能刻画系统的输入、输出特性,它被称为系统的输入输出描述或外部描述.

该方法使用的数学工具主要是Laplace变换. 因此,它主要适用于描述定常线性系统. 对于单输入单输出系统,传递函数是指在初始条件为零的前提下, 输出的Laplace变换与输入的Laplace变换之比. 这个比值确定后,也就得到了系统的数学模型——传递函数. 对多输入多输出系统,每个输入对任何输出都有相应的传递函数,这些传递函数按一定的次序排成一个矩阵,使之把输入与输出联系起来. 这个矩阵就叫系统的传递函数矩阵.

下面在已知系统的动力学模型的前提下, 考察传递函数.

给定一个常系数常微分方程描述的线性系统

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) \\ =\ & b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 u(t), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

其中$y(t)$叫做系统的输出, $u(t)$叫做系统的输入, t表示时间, 诸a_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$和b_j $(j = 0, 1, \cdots, m)$都是实常数.

假设$y(t)$以及它的直到$n-1$阶导数和$u(t)$以及它的直到$m-1$阶导数的初始值皆为零,且不失一般性取初始时刻$t_0 = 0$. 对方程(1.2.1)两边取Laplace变换得出

$$\begin{aligned} & (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) \\ =\ & (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s), \end{aligned}$$

或者

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{1.2.2}$$

其中$Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的Laplace变换, s为Laplace算符.

令

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0},$$

称$G(s)$为系统(1.2.1)的传递函数. 如果$m \le n$,则系统(1.2.1)为物理能实现的. 今后,我们总是讨论物理能实现的系统. 因此,一个系统的传递函数如果是有理分式,则$m \le n$.

多项式$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$叫做系统(1.2.1)的特征多项式,代数方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{1.2.3}$$

叫做系统(1.2.1)的特征方程. 特征方程的根或者说特征多项式的零点叫做系统的极点.多项式$b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$的零点叫做系统(1.2.1)的零点. 如果系统(1.2.1)有相同的零点和极点,则称这个系统有零极相消. 零极相消后剩下的系统的极点和零点分别称为传递函数$G(s)$ 的极点和零点. 如果系统(1.2.1)的所有零点和极点都在复平面的左半开平面内, 则称这个系统为最小相位的.

系统(1.2.1)的特征多项式的次数称为系统的阶. 按照这个定义,系统(1.2.1)是n阶的.

用传递函数描述系统(1.2.1)时有

$$Y(s) = G(s)U(s). \tag{1.2.4}$$

因此,如果给了一个传递函数,那么也就相当于确定了一个系统. 传递函数刻画了系统的输入输出关系,反映了系统的外部联系. 两个内部结构完全不同的系统其传递函数可以完全一样. 因此,从传递函数本身无法了解系统的内部结构.

用传递函数方法描述系统有两个局限性,第一,一般来说,它只能描述定常线性系统; 第二,它只能表现系统的输入输出关系,反映系统的外部联系,而对系统的内部结构不能提供任何信息. 然而,现代工程系统日趋复杂,精度要求越来越高,因此对系统的描述应该更加精细. 对一个复杂系统的分析与综合,不仅需要了解它的输入输出关系, 而且要求知道它的内部结构. 经常遇到的受控对象有许多是时变的、非线性的或随机的. 总之,对象的多样性,要求描述系统的数学工具应有一定的适应性. 尤其是在现代许多复杂系统中, 往往都需要有数学电子计算机参与工作. 因此,为适应控制系统这种发展趋势的要求,在描述系统的数学方法上需要有相应的发展. 控制理论发展到50年代末、60年代初便产生了一种新的描述方法——状态空间方法.

状态空间方法是建立在状态变量这个概念上的. 状态变量的概念并不新鲜,它在分析力学中早被用到. 所谓一个系统的状态变量是指描述该系统的动力学行为所需要的一组最少的独立变量. 系统在t_0时刻的状态是系统在t_0时刻的信息量,它与从t_0时刻作用于系统中的输入量一起,唯一地确定系统在$t \geq t_0$时刻的动力学行为. 由系统的状态变量组成的空间称为系统的状态空间. 一个系统的状态空间的维数等于描述这个系统所需要的独立变量的个数,即系统的状态变量的个数. 为刻画系统的动力学行为,状态变量所满足的一阶常微分方程组称为系统的状态方程. 系统的状态方程刻画了系统输出与状态之间的关系. 描述系统输出与状态之间相互关系的代数方程叫做系统的量测方程或输出方程. 用状态方程和量测方程描述系统的方法称为状态空间方法. 用状态空间方法描述系统与传递函数方法不同, 由于引入了状态变量的概念,系统的输入－输出关系分成了两部分,一部分反映了输入与状态的关系,一部分反映了输出与状态的关系,从而易于明了系统的内部结构.

线性系统的状态空间方法描述为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (\text{状态方程}), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (\text{量测方程}), \end{cases} \tag{1.2.5}$$

其中$x(t) \in \mathbb{R}^n$称为系统的状态变量, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ 称为系统的控制输入变量, $y(t) \in \mathbb{R}^m$称为系统的量测输出变量, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$称为状态矩阵, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$称为控输入矩阵, $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$称为输出矩阵; $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$称为前馈矩阵.

状态变量x的维数称为系统的阶. 一个n阶系统对应的状态空间是n维的. 在系统(1.2.5)中, 当$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 和$D(t)$都是常值矩阵时, 系统(1.2.5)是定常的, 否则称为时变的. 当$r = 1$时, 系统(1.2.5)称为单输入的；当$m = 1$时, 系统(1.2.5)称为单输出的；当$m = r = 1$时, (1.2.5)就是单输入－单输出系统.

本节只讨论定常线性系统,即$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$和$D(t)$都是实常值矩阵的情况. 此时, (1.2.5)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

不失一般性,假定系统的初始时刻为$t_0=0$, 状态初始值为$x(t_0)=x_0$, 则状态方程(1.2.6)的解可以写成

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

这时系统的输出为

$$y(t)=Ce^{At}x_0+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t).$$

多输入多输出定常线性系统也可以用传递函数方法来描述. 如果对系统(1.2.6) 的状态方程和量测方程两边分别作Laplace变换,则可以得出

$$\begin{cases}X(s)=(sI_n-A)^{-1}x_0+(sI_n-A)^{-1}BU(s),\\ Y(s)=C(sI_n-A)^{-1}x_0+C(sI_n-A)^{-1}BU(s)+DU(s),\end{cases}$$

式中$X(s)$, $U(s)$和$Y(s)$分别为$x(t)$, $u(t)$和$y(t)$的Laplace变换式, x_0为状态方程(1.2.6)的初始状态. 当$x_0=0$时,有

$$Y(s)=\left[C(sI_n-A)^{-1}B+D\right]U(s).$$

当

$$W(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D$$

为真有理分式矩阵时, $W(s)$叫做系统(1.2.6)的传递函数矩阵. 而$(sI_n-A)^{-1}$称为系统矩阵A的预解矩阵.

根据$(sI_n-A)^{-1}$的定义和1.1节中的矩阵函数理论,可知

$$(sI_n-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s^{k+1}}A^k.$$

对上式两边作Laplace反变换可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left((sI_n-A)^{-1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k.$$

再由e^{At}的定义可知

$$\mathcal{L}^{-1}\left((sI_n-A)^{-1}\right)=e^{At}.$$

这里$\mathcal{L}^{-1}$表示Laplace反变换.

设系统矩阵A的特征多项式为

$$\Delta(s)=\det(sI_n-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0, \tag{1.2.7}$$

并记

$$\begin{cases}p_{n-1}(s)=1,\\ p_{n-2}(s)=s+\alpha_{n-1},\\ p_{n-3}(s)=s^2+\alpha_{n-1}s+\alpha_{n-2},\\ \qquad\vdots\\ p_0(s)=s^{n-1}+\alpha_{n-1}s^{n-2}+\cdots+\alpha_2 s+\alpha_1,\end{cases} \tag{1.2.8}$$

可以验证

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(s)}\left[p_0(s)I_n+p_1(s)A+\cdots+p_{n-1}(s)A^{n-1}\right]. \tag{1.2.9}$$

由(1.2.8)-(1.2.9)及Laplace反变换可得:

命题 1.2.1 对任给的n阶方阵A, 存在n个实值连续可微标量函数$\beta_k(t)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 使得

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(t)A^k.$$

与系统的传递函数描述一样,对系统(1.2.6)的状态空间方法描述也有特征多项式等概念.

定义 1.2.1 对线性系统(1.2.6), $\det(sI_n-A)$称为系统的特征多项式; 代数方程

$$\det(sI_n-A)=0$$

称为系统的特征方程; 特征方程的根叫做系统的极点; $W(s)$各元素的最小公分母的零点叫做传递函数矩阵的极点.

对于多输入多输出定常系统(1.2.6),系统的零点是一个复杂的概念. 这里不准备详细去讨论它. 下面只就一些常用的零点的概念简单地叙述一下它们的定义.

定义 1.2.2 已知定常线性系统(1.2.6). 定义满足

$$\mathrm{rank}[sI_n-A,\ B]<n$$

的s为系统的输入解耦零点； 满足

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_n-A \\ C \end{bmatrix}<n$$

的s为系统的输出解耦零点； 满足

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_n-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}<\min(r,m)+n$$

的s为系统的传输零点.

系统零点的物理意义将在下一节中解释.

用状态空间方法描述系统时,首先需要选取一组状态变量,建立状态方程和量测方程. 然而,一个系统的状态变量的选择及相应的状态方程和量测方程并不唯一. 人们自然要问, 不同的状态变量选择是否会改变系统的基本特征呢? 下面讨论这类问题.

已知定常线性系统(1.2.6), T是任意$n\times n$阶实非奇异常矩阵(其实, 复数矩阵也适用),令

$$\widehat{x}(t)=Tx(t), \tag{1.2.10}$$

那么变量$\widehat{x}(t)$与$x(t)$包含着相同的信息量,所以$\widehat{x}(t)$也可以选做系统的状态变量. 按照这组状态变量描述系统又可以得到系统(1.2.6)的一个状态空间描述. 为了研究新的状态方程和量测方程,对等式(1.2.10)两边求导得

$$\dot{\widehat{x}}(t)=T\dot{x}(t)=TAx(t)+TBu(t).$$

再利用$x(t)=T^{-1}\widehat{x}(t)$得

$$\begin{cases}\dot{\widehat{x}}(t)=\widehat{A}\widehat{x}(t)+\widehat{B}u(t),\\ y(t)=\widehat{C}\widehat{x}(t)+Du(t),\end{cases} \tag{1.2.11}$$

其中$\widehat{A}=TAT^{-1}$, $\widehat{B}=TB$, $\widehat{C}=CT^{-1}$.

称关系式(1.2.10)为系统(1.2.5)在状态空间中的坐标变换. 经坐标变换得到由方程(1.2.11)描述的系统称为与系统(1.2.6)的代数等价系统.

由于

$$\det(sI_n-\widehat{A})=\det T(sI_n-A)T^{-1}=\det(sI_n-A).$$

因此,坐标变换保持系统的特征多项式、特征方程和系统的极点不变,或者说代数等价系统有相同的特征多项式、特征方程和极点.

又因为

$$\operatorname{rank}[sI_n-\widehat{A},\widehat{B}]=\operatorname{rank}[sI_n-A,B],\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI_n-\widehat{A} \\ \widehat{C}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI_n-A \\ C\end{bmatrix}$$

以及

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI_n-\widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & D\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI_n-A & B \\ C & D\end{bmatrix},$$

故坐标变换保持系统的输入解耦零点、输出解耦零点和传输零点不变；换句话说,代数等价系统与原系统有相同的输入解耦零点、输出解耦零点和传输零点.

从系统(1.2.11)的状态方程和量测方程出发,可以求出它的传递函数矩阵为

$$\widehat{W}(s)=\widehat{C}(sI_n-\widehat{A})\widehat{B}+D$$

不难验证,它与系统(1.2.6)的传递函数矩阵$W(s)$相等. 因此,坐标变换保持系统的传递函数矩阵不变,或者说保持系统的输入输出特性不变. 也可以说,代数等价系统有相同的传递函数矩阵,因而有相同的输入输出特性. 这是可以理解的,因为坐标变换仅仅反映了系统内部状态变量的不同选择,而不影响系统的外部联系,所以它能保持系统的输入输出特性不变.

但是,由于坐标变换反映了状态变量的不同选择,因此可以想象坐标变换不能保持系统的状态转移矩阵不变. 事实上,在坐标变换下,代数等价系统的状态转移矩阵是相似的,其变换矩阵和坐标变换矩阵相同.

必须指出,虽然代数等价系统有相同的传递函数矩阵,但是具有相同传递矩阵的系统未必是代数等价系统. 同样,状态转移矩阵相似的系统也未必是代数等价系统.

在控制理论中,一个复合系统通常是由若干个子系统经过串联、并联和反馈联结形成的. 这里研究由三种联结方式生成的复合系统的数学模型.

并联复合系统 已知两个线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu(t), \\ y_i(t)=C_ix_i(t)+D_iu(t), \quad i=1,2; \\ y(t)=y_1(t)+y_2(t), \end{cases}$$

其中$x_i(t)$是第i个子系统的n_i维状态, $u(t)$是r维控制输入, $y_i(t)$是第i个子系统的m维量测输出, $y(t)$是复合系统的m维量测输出, A_i, B_i, C_i 和D_i都是具有相应阶数的实常值矩阵.

设并联复合系统的状态变量为$x(t)=[x_1^T(t),\ x_2^T(t)]^T$, 则并联复合系统的状态方程和量测方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix}u(t), \\ y(t)=\begin{bmatrix} C_1 & C_2\end{bmatrix}x(t)+(D_1+D_2)u(t); \end{cases}$$

并联复合系统的传递函数矩阵为

$$W(s)=W_1(s)+W_2(s),$$

其中$W_i(s)=C_i(sI_{n_i}-A_i)^{-1}B_i+D_i$, $(i=1,\ 2)$.

串联复合系统 已知两个线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+B_1u(t), \\ y_1(t)=C_1x_1(t)+D_1u(t); \end{cases} \tag{1.2.12}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 y_1(t), \\
y(t) = C_2 x_2(t) + D_2 y_1(t),
\end{cases}
\tag{1.2.13}
$$

其中$x_i(t)$是第i个子系统的n_i维状态变量；$u(t)$是r维控制输入；$y_1(t)$是第一个子系统(1.2.12)的m_1维输出变量, 又是第二个子系统(1.2.13)的输入；$y(t)$是m维量测输出；A_i, B_i, C_i和D_i $(i = 1, 2)$ 是具有相应阶数的实常值矩阵.

若串联复合系统的状态变量为$x(t) = [x_1^T(t),\ x_2^T(t)]^T$, 则串联复合系统的状态方程和量测方程为

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(t) + D_2 D_1 u(t);
\end{cases}
$$

串联复合系统的传递函数矩阵为

$$
W(s) = W_2(s) W_1(s),
$$

其中$W_i(s) = C_i(sI_{n_i} - A_i)^{-1} B_i + D_i$, $(i = 1, 2)$.

反馈联结的复合系统 设有线性系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \\
y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t),
\end{cases}
\tag{1.2.14}
$$

和

$$
\begin{cases}
\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 y_1(t), \\
u_1(t) = C_2 x_2(t) + D_2 y_1(t) + u(t).
\end{cases}
\tag{1.2.15}
$$

这里把$u(t)$看成参考输入信号或复合系统的控制输入,其余各符号意义同前.

将系统(1.2.15)代到系统(1.2.14)中去,复合系统的状态变量记为$x(t) = [x_1^T(t),\ x_2^T(t)]^T$, 则反馈系统的状态方程和量测方程为

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = A x(t) + \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 D^{-1} D_1 \\ B_2 D^{-1} D_1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) = \begin{bmatrix} D^{-1} C_1 & D^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} x(t) + D^{-1} D_1 u(t),
\end{cases}
$$

其中$D = I - D_1 D_2$,

$$
A = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 D_2 D^{-1} C_1 & B_1 C_2 + B_1 D_2 D^{-1} D_1 C_2 \\ B_2 D^{-1} C_1 & A_2 + B_1 D_2 D^{-1} C_2 \end{bmatrix}
$$

为了使反馈系统是物理能实现的, 必须假定$I - D_1 D_2$的逆存在.

记$W_i(s) = C_i(sI_{n_i} - A_i)^{-1} B_i + D_i$, $(i = 1, 2)$, 可得

$$
y_1(s) = W_1(s) u_1(s), \quad u_1(s) = W_2(s) y_1(s) + u(s).
$$

由此得出

$$
(I - W_1(s) W_2(s)) y_1(s) = W_1(s) u(s).
$$

如果$I - W_1(s) W_2(s)$非奇异,即$\det[I - W_1(s) W_2(s)] \not\equiv 0$,那么

$$
y_1(s) = (I - W_1(s) W_2(s))^{-1} W_1(s) u(s).
$$

因此,反馈系统的传递函数矩阵为

$$
W(s) = (I - W_1(s) W_2(s))^{-1} W_1(s).
$$

因为当$\det[I-W_1(s)W_2(s)]\neq 0$时,有

$$(I-W_1(s)W_2(s))^{-1}W_1(s)=W_1(s)(I-W_2(s)W_1(s))^{-1}$$

所以反馈系统的传递函数矩阵又可写成

$$W(s)=W_1(s)(I-W_2(s)W_1(s))^{-1}.$$

$\det[I-W_1(s)W_2(s)]\neq 0$是使反馈系统为物理能实现的条件, 即是反馈系统有意义的不可缺少的条件. 因此,在研究反馈系统时必须十分谨慎.

习题1.2

1.2.1 求系统$\dot{x}(t)=2x(t)+u(t)$的传递函数、系统极点. 这里$x(\cdot)$, $u(\cdot)$为时间t的标量实值函数.

1.2.2 求系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

的传递函数.

1.2.3 给出系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1&0\\3&2\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

在变换

$$\overline{x}=\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}x$$

下的代数等价系统.

§1.3 线性系统的能控性和能观测性

系统的能控性和能观测性是控制系统中的两个最基本的概念, 它们刻画了系统的结构性质.

考察下列线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\\ y(t)=C(t)x(t),\end{cases}\tag{1.3.1}$$

为简单起见, 用$(A(t),B(t),C(t))$表示系统(1.3.1); 用$(A(t),B(t))$表示(1.3.1)的第一式,即$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$. 如果系统是定常的,则分别用$(A,B,C)$, (A,B)表示.

定义 1.3.1 对线性系统$(A(t),B(t))$, 如果在t_0时刻对任意给定的初始状态$x(t_0)=x_0$, 存在某有限时刻$t_1>t_0$和定义在时间区间$[t_0,t_1]$上的容许控制[1]$u(\cdot)$, 使得系统在此控制作用下从x_0出发的轨线在t_1时刻达到零状态, 即$x(t_1)=0$,那么称该系统在t_0时刻是完全能控的, 简称能控的. 如果系统$(A(t),B(t))$在时间区间$[t_0,T]$上的每个时刻都是能控的,那么称系统在$[t_0,T]$上是完全能控的.

[1]根据控制目的的不同, 容许控制的定义也不同, 为简单起见, 本章把分段连续函数集称作容许控制集. 该集中的元称作容许控制.

与能控的概念相反,只要有一个初始状态$x(t_0)=x_0$, 无论取t_1 多么大,定义在时间区间$[t_0,t_1]$上的任意容许控制$u(\cdot)$,都不能使系统由x_0出发的运动轨线在t_1时刻达到零状态, 就称这样的系统就是不完全能控的. 所以说, 线性系统的能控性是个整体概念.

从整体来看,既然有的系统完全能控,有的系统不完全能控,而不完全能控的系统又是指从某些初始状态出发的轨线在有限时间内达不到零状态. 因此,能否把状态空间里面的点进行分类,一类是系统从这里出发的运动轨线是能控的,另一类则是不能控的. 为此,引入能控状态和能控子空间的概念.

定义 1.3.2 已知线性系统$(A(t),B(t))$, 给定t_0时刻初始状态$x(t_0)=x_0$. 如果存在某有限时刻t_1以及定义在时间间隔$[t_0,t_1]$上的容许控制$u(\cdot)$,使得系统在它的作用下,由x_0出发的运动轨线在t_1时刻达到零状态, 即$x(t_1)=0$, 则称x_0是系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的能控状态.

由定义可知,若x_1和x_2都是系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的能控状态,那么$\alpha x_1+\beta x_2$也必是该系统在t_0时刻的能控状态,其中α和β是两个任意实数. 显然0是系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的能控状态,因此系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻能控状态的全体组成状态空间中的一个线性子空间, 记为$\mathcal{X}_1$. 如果记状态空间为$\mathbb{R}^n$,那么系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻完全能控的充要条件是$\mathcal{X}_1=\mathbb{R}^n$. 一般称$\mathcal{X}_1$为系统$(A(t),B(t))$在$t_0$时刻的能控子空间. 在状态空间里,去掉能控状态剩下的就是不能控状态. 用严格的数学定义来说,凡属$\mathcal{X}_1^\perp$中的状态都是系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的不能控状态, 称$\mathcal{X}_1^\perp$为系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的不能控子空间. 这里$\mathcal{X}_1^\perp$为$\mathcal{X}_1$的直交补空间.

与能控性类似的概念是系统的能达性, 它的确切定义如下:

定义 1.3.3 对线性系统$(A(t),B(t))$, 如果对任意给定的状态x_1, 存在某有限时刻$t_1>t_0$和定义在时间间隔$[t_0,t_1]$上的容许控制$u(\cdot)$,使得系统在这个容许控制作用下,在t_0时刻从零状态出发的轨线在t_1时刻达到状态$x(t_1)=x_1$,那么称系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻是完全能达的. 如果系统$(A(t),B(t))$在时间间隔$[t_0,T]$上的每个时刻都是完全能达的,那么就称系统$(A(t),B(t))$在$[t_0,T]$上是完全能达.

从能控性和能达性的定义可以看出,对线性系统来说,两个概念是一致的. 它们都是刻画了系统$(A(t),B(t))$的结构性质,而与系统的具体输入无关.

定理 1.3.1 系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻能控的充要条件是,存在某有限时刻$t_1>t_0$, 使得矩阵

$$W(t_1,t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)d\tau$$

是正定的. 这里$\Phi(t,\tau)$是系统$\dot{x}=A(t)x$的状态转移矩阵, 即$\Phi(t,\tau)$满足

$$\frac{\partial\Phi(t,\tau)}{\partial t}=A(t)\Phi(t,\tau),\quad \Phi(\tau,\tau)=I.$$

证明 充分性. 假设存在$t_1>t_0$,使得$W(t_1,t_0)>0$,因而它是非奇异的. 又设x_0是系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻的任意初始状态,定义

$$u(t)=-B^T(t)\Phi^T(t_1,t)W^{-1}(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)x_0,\quad t_0\le t\le t_1.$$

另一方面,由定理1.1.1,

$$x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

将前面定义的控制输入$u(\cdot)$代入这个解表达式中即得$x(t_1)=0$. 于是,根据系统的能控性定义可知,系统$(A(t),B(t))$在t_0时刻是完全能控的.

必要性. 从能控性的定义可知,存在某时刻$t_1>t_0$,使得对每个初始状态x_0,都能找到一个定义在时间间隔$[t_0,t_1]$上的容许控制,使得系统在这个控制作用下, 由x_0出发的轨线,在t_1时刻达到零状态,即$x(t_1)=0$. 下证$W(t_1,t_0)>0$. 因若不然，由$W(t_1,t_0)\ge 0$知，$W(t_1,t_0)$是奇异的,于是有非零向量z使得

$$z^TW(t_1,t_0)z=0,$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1} z^T\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)zd\tau = 0.$$

由此得出

$$z^T\Phi(t_1,\tau)B(\tau) \overset{\text{a.e.}}{=} 0, \quad t_0 \le \tau \le t_1,$$

其中$\overset{\text{a.e.}}{=}$表示几乎处处相等.

另一方面,由于系统$(A(t),B(t))$完全能控,因此对初始状态$x_{0z} = -\Phi(t_0,t_1)z$,也能找到$t_2 \ge t_1$及定义在时间间隔$[t_0,t_2]$上的容许控制$u_0(t)$使得

$$0 = \Phi(t_2,t_0)x_{0z} + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2,\tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau.$$

将$x_{0z} = -\Phi(t_0,t_1)z$代入上式且两边同乘以$\Phi(t_1,t_2)$得

$$z = \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau.$$

对上式两边左乘z^T有

$$\|z\|^2 = \int_{t_0}^{t_2} z^T\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau = 0.$$

由此推出$z=0$, 而这与z为非零向量矛盾. 这个矛盾表明$W(t_1,t_0)$是非奇异的, 因而它是正定的. ∎

定理1.3.1说明判断一个线性系统的能控性问题, 归结为判别矩阵$W(t,t_0)$在某时刻t_1的正定性问题. 矩阵$W(t,t_0)$叫做系统$(A(t),B(t))$的能控性矩阵.

如果存在某时刻t_1,使得$W(t_1,t_0)$非奇异的话,那么控制函数

$$u_0(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_1,t)W^{-1}(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)x_0 \tag{1.3.2}$$

能把系统$(A(t),B(t))$的初始状态$x(t_0) = x_0$控制到$x(t_1) = 0$. 其实,能够实现这样的状态转移的控制函数并非唯一,但是可以证明,由(1.3.2)定义的容许控制是实现这种状态转移的所有控制函数中所消耗的"能量"最小的一个. 即, 若令$u(t)$是任意一个实现上述状态转移的容许控制,则

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2dt \ge \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(t)\|^2dt = x_0^T\Phi^T(t_1,t_0)W^{-1}(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)x_0. \tag{1.3.3}$$

事实上,已经知道由(1.3.2)定义的容许控制将x_0转移到0,而$u(t)$是把另一个x_0转移到零状态的容许控制,因此有

$$0 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_0(\tau)d\tau$$

和

$$0 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

上两式的左右两边分别相减得

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau = 0.$$

对上式的两边左乘$x_0^T\Phi^T(t_1,t_0)W^{-1}(t_1,t_0)$并利用(1.3.2)得

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau = 0,$$

即

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|u_0(\tau)\|^2 d\tau.$$

进而,由

$$0 \le \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau) - u_0(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - 2u_0^T(\tau)u(\tau) + \|u_0(\tau)\|^2] d\tau$$

知

$$0 \le \int_{t_0}^{t_1} [\|u(\tau)\|^2 - \|u_0(\tau)\|^2] d\tau,$$

故(1.3.3)成立.

当$(A(t), B(t))$为定常系统时,还有更方便的判别准则. 首先介绍一个引理.

引理 1.3.1 设定常线性系统(A, B)在t_0时刻完全能控,则它在$[0, \infty)$上完全能控.

证明 由于系统(A, B)是定常的,因此它的状态转移矩阵为$e^{A(t-\tau)}$. 因为它在t_0时刻完全能控,所以对某$t_1 > t_0$矩阵

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau$$

是正定的. 对任意的实数$s \ge -t_0$,令$\sigma = \tau + s$. 则对$W(t_1, t_0)$的被积函数作变量替换得

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0+s}^{t_1+s} e^{A(t_1+s-\sigma)} BB^T e^{A^T(t_1+s-\sigma)} d\sigma = W(t_1+s, t_0+s) > 0.$$

由s的任意性并由定理1.3.1知,系统(A, B)在任意时刻$t \ge 0$ 都是完全能控的,因此它在$[0, \infty)$上完全能控. ∎

引理1.3.1表明, 对于定常线性系统,只要它在某时刻完全能控,则它必定在整个时间轴上完全能控. 因此,对定常系统只说它能控或不能控就够了. 如果定常线性系统(A, B)能控,可简称(A, B)能控,或说(A, B)为能控对.

定理 1.3.2 定常线性系统(A, B)能控的充分必要条件是

$$\operatorname{rank} Q_c = n.$$

这里,

$$Q_c = [B, AB, \cdots, A^{n-1}B]. \tag{1.3.4}$$

称Q_c为定常线性系统的能控性矩阵. 它是一个$n \times nr$阶矩阵,在线性系统理论中它起着很重要的作用.

证明 充分性. 用反证法. 设$\operatorname{rank} Q_c = n$. 若系统不能控,则由定理1.3.1 和引理1.3.1知, 对任意的$t_1 > 0$, $\int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau$总是奇异的. 因此,存在非零向量$z$使得

$$\int_0^{t_1} \|z^T e^{-A\tau} B\|^2 d\tau = z^T \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau \right) z = 0,$$

从而有

$$z^T e^{-A\tau} B \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1].$$

上式对τ分别求1, 2, $\cdots$, $n-1$阶导数得

$$z^T e^{-A\tau} A^i B \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1], \quad i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即

$$z^T e^{-A\tau} Q_c \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1].$$

特别地,取$\tau=0$,则有$z^TQ_c=0$. 由此及$\operatorname{rank}Q_c=n$知$z=0$. 这与z为非零向量的假设矛盾. 所以系统能控.

必要性. 由于(A,B)能控,因此它在$t_0=0$时刻能控. 于是对任意初始状态x_0, 都有$t_1>0$,以及定义在$[0,t_1]$上的容许控制$u(\cdot)$,使得

$$0=e^{At_1}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{1.3.5}$$

由命题1.2.1知,存在连续函数$\alpha_k(t)$,使得

$$e^{-A\tau}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(\tau)A^k.$$

将它代入式(1.3.5)并记$z_k=-\int_0^{t_1}\alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau$,则得

$$x_0=-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{t_1}\alpha_k(\tau)A^kBu(\tau)d\tau=\sum_{k=0}^{n-1}A^kBz_k, \tag{1.3.6}$$

或者

$$x_0=Q_c\begin{bmatrix}z_0\\z_1\\\vdots\\z_{n-1}\end{bmatrix}. \tag{1.3.7}$$

这说明代数方程(1.3.7)对任意的x_0都有解,因此必有$\operatorname{rank}Q_c=n$. ∎

推论 1.3.1 已知定常线性系统(A,B). 如果A的最小多项式是k次的, $k\le n$, 那么系统(A,B)能控的充要条件是

$$\operatorname{rank}[B,AB,\cdots,A^{k-1}B]=n.$$

推论 1.3.2 设定常线性系统(A,B)是单输入的,那么它能控的充要条件是

$$\det Q_c\neq 0.$$

定理 1.3.3 定常线性系统(A,B)能控的充要条件是,对每个$s\in\sigma(A)$都有

$$\operatorname{rank}[A-sI_n,\quad B]=n \tag{1.3.8}$$

其中$\sigma(A)$表示A的特征值集合.

证明 必要性. 设系统(A,B)能控. 若对某$s_0\in\sigma(A)$有

$$\operatorname{rank}[A-s_0I_n,\quad B]<n,$$

则必有非零向量z（它可能是复的）,使得$z^T[A-s_0I_n,B]=0$. 于是有$z^T(A-s_0I_n)=0$和$z^TB=0$. 这说明z^T是A的对应于特征值s_0的右特征向量,它与矩阵B的每个列向量直交,从而有

$$z^TA^kB=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.3.9}$$

于是$z^TQ_c=0$. 因为$z^T\neq 0$,所以$\operatorname{rank}Q_c<n$. 而这与系统(A,B)能控矛盾. 这个矛盾表明(1.3.8)对一切$s\in\sigma(A)$成立

充分性. 假设式(1.3.8)成立, 而系统(A,B)不能控, 那么必存在非零向量z,使得$z^TQ_c=0$,即

$$z^TA^kB=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.3.10}$$

显然, $z^TA^k(k=0,1,\cdots,n-1)$都是B的左零空间的元. 于是可以断定, 存在一个最小的整数k, $0\le k< n-1$, 使得向量z^T, z^TA, $\cdots$, z^TA^k 行线性独立. 这时有不全为零的实常数$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}$, 使得

$$z^TA^k+\alpha_{k-1}z^TA^{k-1}+\cdots+\alpha_1z^TA+\alpha_0z^T=0.$$

这说明

$$f(s)=s^k+\alpha_{k-1}s^{k-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0$$

是z^T相对A的最小多项式. 令s_0是$f(s)$的一个零点,显然s_0是A 的一个特征值,这是因为$f(s)$是A的特征多项式的一个因子. 于是重新写$f(s)$为

$$f(s)=(s^{k-1}+\beta_{k-2}s^{k-2}+\cdots+\beta_1s+\beta_0)(s-s_0),$$

这里$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{k-2}$是$k-1$个复常数. 于是有

$$z^Tf(A)=z^T(A^{k-1}+\beta_{k-2}A^{k-2}+\cdots+\beta_1A+\beta_0I_n)(A-\lambda_0I_n)=0.$$

令

$$\psi^T=z^T(A^{k-1}+\beta_{k-2}A^{k-2}+\cdots+\beta_1A+\beta_0I_n). \tag{1.3.11}$$

显然$\psi^T\neq 0$,这是因为z^T相对A的最小多项式为k次的. 这样, ψ^T是A的相应于特征值s_0的特征向量. 但是,从(1.3.10)和(1.3.11)得出, $\psi^TB=0$,所以必有

$$\operatorname{rank}[A-\lambda_0I_n,\quad B]<n.$$

而这与假设(1.3.8)矛盾,这个矛盾表明系统(A,B)是能控的. ∎

推论 1.3.3 定常线性系统(A,B)能控的充要条件是它没有输入解耦零点.

从定理1.3.3还可以发现,定常线性系统(A,B)能控的充要条件是,

$$s\in\sigma(A),\ z\in\mathbb{R}^n,\ z^TB=0,\ \text{且}\ z^T(A-sI_n)=0\quad\Longrightarrow\quad z=0.$$

即系统(A,B)能控的充要条件是,对A^T的每个特征向量z,总有$z^TB\neq 0$.

按照系统的能控性,可以对定常线性系统的系统矩阵A的特征值(或系统的极点)进行分类. 当$s_0\in\sigma(A)$,并且满足

$$\operatorname{rank}[A-s_0I_n,\ B]<n$$

时, 系统(A,B)不能控,这样的s_0叫做系统(A,B)的一个不能控振型. 系统的不能控振型是它的极点,又是它的输入解耦零点.

关于定常系统的能控性,除了上述的代数判据以外,还有几何判据. 有兴趣的读者可以参考[15].

下面讨论线性系统理论中的另一重要概念, 即能观测性.

定义 1.3.4 已知线性系统$(A(t),B(t),C(t))$. 对任意给定的初始状态x_0, 如果存在某有限时刻$t_1>t_0$,使得通过量测在时间间隔$[t_0,t_1]$上的系统输出$y(\cdot)$和已知的控制输入$u(\cdot)$, 能够唯一地决定出在初始时刻t_0的初始状态$x(t_0)=x_0$,那么就称这个系统在t_0时刻是完全能观测的, 简称能观测的. 如果系统$(A(t),B(t),C(t))$在时间间隔$t_1>t_0$上的每个时刻都是完全能观测的,那么就称该系统在$[t_0,t_1]$是完全能观测的.

定义刻画了系统的输出对状态的判断能力. 能观测性也是系统的结构性质,它不依赖于系统的具体输入和量测输出的值如何.

定义 1.3.5 对定常线性系统(A,B,C)和它的一个在t_0时刻的初始状态x_0, 如果在系统的输入恒为零的条件下, 系统的输出也恒等于零, 则称这个状态x_0在t_0时刻是不能观测状态.

根据不能观测状态的定义可知,如果x_1和x_2都是系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻的不能观测状态,那么容易验证,对于任意实数α和β, $\alpha x_1+\beta x_2$也是该系统在t_0时刻的不能观测状态. 显然, 0是系统$(A(t), B(t), C(t))$在t_0时刻的不能观测状态. 所以,系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻的不能观测状态的全体构成状态空间中的一个线性子空间,记为$\mathcal{X}_2$. 易知, $\mathcal{X}_2\subset\mathbb{R}^n$,成为系统$(A(t),B(t),C(t))$ 在t_0时刻的不能观测子空间. 由定义可知,不能观测状态的物理意义是很清楚的. 因为不能观测状态在任何时刻都不能对系统输出提供任何信息,所以反过来要想通过系统的量测输出决定它们是不可能的.

由定义1.3.4和1.3.5可知,线性系统$(A(t),B(t),C(t))$ 在t_0时刻完全能观测的充分必要条件是,在状态空间中在t_0时刻没有非零不能观测状态,即$\mathcal{X}_2=0$. 相反,在状态空间中在t_0时刻只要存在非零不能观测状态,那么这样的系统就是在t_0时刻不完全能观测的. 如果状态空间中的每一个状态都是在t_0时刻的不能观测状态,那么这个系统就是在t_0时刻完全不能观测的.

和能控性一样,仅仅从定义出发判别系统的能观测性也是不方便的,需要寻找方便的判别准则.

定理 1.3.4 线性系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻完全能观测的充要条件是,存在某有限时刻$t_1>t_0$,使得矩阵

$$M(t_1,t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau$$

是正定的.

证明 不失一般性,假设对所有的$t\geq t_0$,都有$u(t)\equiv 0$.

充分性. 假设存在某有限时刻$t_1>t_0$,使得矩阵$M(t_1,t_0)$是正定的, 因而它是非奇异的. 记系统$(A(t),0)$的状态转移阵为$\Phi(t,t_0)$, 任取t_0时刻系统的初始状态为$x(t_0)=x_0$, 则有

$$y(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x_0.$$

在上式两边左乘$\Phi^T(t,t_0)C^T(t)$,再从t_0到t_1对t积分得

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)y(t)dt=M(t_1,t_0)x_0.$$

由于矩阵$M(t_1,t_0)$是非奇异的,故上式能唯一决定x_0:

$$x_0=M^{-1}(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)y(t)dt.$$

由定义知,系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻完全能观测.

必要性. 假设系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻完全能观测. 和充分性的证明一样,对任意$t_1>t_0$都有

$$M(t_1,t_0)x_0=\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)y(t)dt, \tag{1.3.12}$$

其中x_0是系统在t_0时刻的状态. 假设对任意$t_1>t_0$, $M(t_1,t_0)$ 都是奇异的,那么由(1.3.12)知,对任意固定的$t_1>t_0$,利用时间间隔$[t_0,t_1]$上的量测$y(t)$,都不能唯一决定系统在t_0时刻的状态x_0, 而这与系统在t_0时刻完全能观测矛盾. 因此, 至少存在某时刻t_1,使得$M(t_1,t_0)$是非奇异的,因而它是正定的.

矩阵$M(t_1,t_0)$称为系统$(A(t),B(t),C(t))$的能观测性矩阵.

从系统的能控性矩阵$W(t_1,t_0)$和能观测性矩阵$M(t_1,t_0)$的结构来看,它们在形式上有某些类似之处. 因此,系统的能控性和能观测性之间应该有某种联系,这种联系就是对偶原理. 能控性、能观测性和对偶原理的概念是卡尔曼(Kalman)提出的. 为了讨论对偶原理,首先引入系统$(A(t),B(t),C(t))$的对偶系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_d(t)=-A^T(t)x_d(t)+C^T(t)v(t),\\ z(t)=B^T(t)x_d(t),\end{cases} \tag{1.3.13}$$

其中$x_d(t)$是对偶系统$(-A^T(t), C^T(t), B^T(t))$的维状态变量,也叫做系统$(A(t), B(t), C(t))$的状态变量$x(t)$的协态变量, $v(t)$是控制输入变量, $z(t)$是量测输出变量. 下面的定理就是对偶原理.

定理 1.3.5 系统$(A(t),B(t),C(t))$在t_0时刻完全能控的充要条件是它的对偶系统$(-A^T(t),\ C^T(t),\ B^T(t))$在$t_0$时刻完全能观测. 系统$(A(t),B(t),C(t))$在$t_0$时刻完全能观测的充要条件是它的对偶系统$(-A^T(t),C^T(t),B^T(t))$在$t_0$时刻完全能控.

证明 首先令$\Psi(t,t_0)$为对偶系统$(-A^T(t),C^T(t),B^T(t))$的状态转移矩阵,那么依定义有

$$\dot{\Psi}(t,t_0)=-A^T(t)\Psi(t,t_0),\quad \Psi(t_0,t_0)=I_n. \tag{1.3.14}$$

现说明$\Psi(t,t_0)$与系统$(A(t),B(t),C(t))$的状态转移矩阵$\Phi(t,t_0)$ 之间的关系. 研究矩阵$\Psi(t_0,t)$所满足的微分方程. 由于$\Psi^T(t_0,t)\Psi^T(t,t_0)=I_n$, 两边对$t$求导得

$$\dot{\Psi}^T(t_0,t)\Psi^T(t,t_0)+\Psi^T(t_0,t)\dot{\Psi}^T(t,t_0)=0.$$

将(1.3.14)代入上式得

$$\dot{\Psi}^T(t_0,t)=A(t)\Psi^T(t_0,t).$$

注意到

$$\Psi^T(t_0,t_0)=I_n,$$

由常微分方程解的唯一性定理可知,

$$\Psi^T(t_0,t)=\Phi(t,t_0).$$

这说明线性系统$(A(t),\ B(t),\ C(t))$的状态转移矩阵$\Phi(t,t_0)$是它的对偶系统$(-A^T(t),\ C^T(t),\ B^T(t))$的状态转移矩阵$\Psi(t,t_0)$的转置逆,这是线性系统对偶关系的主要特征.

根据定义,系统$(A(t),B(t),C(t))$的能控性矩阵为

$$\begin{aligned}
W(t_1,t_0)\ &=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)d\tau,\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\Psi(\tau,t_1)B(\tau)B^T(\tau)\Psi^T(\tau,t_1)d\tau,\\
&=\Psi^T(t_0,t_1)M_d(t_1,t_0)\Psi(t_0,t_1).
\end{aligned}$$

这里$M_d(t_1,t_0)$是系统$(-A^T(t),\ C^T(t),\ B^T(t))$的能观测性矩阵. 因为矩阵$\Psi(t_0,t_1)$ 是非奇异的,所以矩阵$W(t_1,t_0)$和$M_d(t_1,t_0)$的正定性是等价的. 因此,系统$(A(t),\ B(t),\ C(t))$在t_0时刻完全能控的充要条件是它们的对偶系统$(-A^T(t),\ C^T(t),\ B^T(t))$在$t_0$时刻完全能观测.

同样可以证明,系统$(A(t),\ B(t),\ C(t))$在t_0时刻完全能观测的充要条件是它的对偶系统$(-A^T(t),\ C^T(t),\ B^T(t))$在$t_0$时刻完全能控. ∎

对定常线性系统,如果系统在某时刻完全能观测,则它必在$[0,\infty)$上也是完全能观测的,所以就不再说"在t_0时刻"了.

定理 1.3.6 定常线性系统(A,B,C)能观测的充要条件是

$$\operatorname{rank}Q_o=n,$$

这里

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}. \tag{1.3.15}$$

称Q_o为定常线性系统(A,B,C)的能观测性矩阵.

该定理和定理1.3.2是对偶的. 通过对偶原理不难得到它的证明.

推论 1.3.4 已知定常线性系统(A,B,C),如果A的最小多项式是k次的,且$k<n$, 那么系统(A,B,C)完全能观测的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} = n.$$

推论 1.3.5 如果定常线性系统(A,B,C)是单输出的,那么它完全能观测的充要条件是

$$\det Q_o \neq 0.$$

在研究系统的完全能控性时,可用系统的输入解耦零点来判断系统的能控性, 对于系统的完全能观测性,则可以通过输出解耦零点来判别.

定理 1.3.7 定常线性系统(A,B,C)完全能观测性的充要条件是,对每个$s\in\sigma(A)$ 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-sI_n \\ C \end{bmatrix} = n.$$

证明 由对偶原理可知,系统(A,B,C)完全能观测性的充要条件是它的对偶系统$(-A^T,C^T,B^T)$完全能控. 由定理1.3.3知, 对偶系统$(-A^T,\ C^T,\ B^T)$完全能控的充要条件是对每个$s\in\sigma(-A^T)$都有$\operatorname{rank}[-A^T-sI_n, C]=n$. 这又等价于

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -A-sI_n \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A+sI_n \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = n.$$

可见,系统(A,B,C)完全能观测性的充要条件是,对每个$s\in\sigma(-A^T)$都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A+sI_n \\ C \end{bmatrix} = n.$$

因为$\sigma(-A^T)=-\sigma(A^T)=-\sigma(A)$, 所以系统$(A,B,C)$完全能观测的充要条件是,对每个$s\in\sigma(A)$都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-sI_n \\ C \end{bmatrix} = n.$$

推论 1.3.6 定常线性系统(A,B,C)完全能观测的充要条件是它没有输出解耦零点.

根据系统的能观测性,可以对定常线性系统(A,B,C)的矩阵A的特征值（或系统的极点）进行分类. 当$s_0\in\sigma(A)$,并且满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-s_0I_n \\ C \end{bmatrix} < n$$

时, 系统(A,B,C)是不完全能观测的. 这样的s_0叫做这个系统的一个不能观测振型. 这和不能控振型相对应,它们都是系统的极点. 同时容易看出,不能控振型必是系统的输入解耦零点,不能观测振型必是系统的输出解耦零点；反之亦然.

关于定常线性系统能观测性的判别定理1.3.6和1.3.7 都是从代数观点出发的,其判据反映了系统的一种结构性质. 通常说系统(A,B,C) 能观测也可以说(A,C)能观测. 关于(A,C)能观测的判别定理1.3.6和1.3.7成为能观测性的代数判据. 不过,在检验定常线性系统的能观测性, 有时不一定需要计算能观测性矩阵Q_0的秩,而只需计算它的前面若干行组成的矩阵的秩便可（见习题1.3）.

上面对状态空间按照能控性和能观测性进行了划分,分为能控子空间、不能控子空间、能观测子空间和不能观测子空间. 在这样的划分下,如果适当选取系统的一组状态变量,系统的结构具有哪些特征呢? 这就是所要研究的定常线性系统的标准结构问题.

引理 1.3.2 已知定常线性系统(A,B,C). 取坐标变换$\overline{x}=Tx$, T是一个$n\times n$阶非奇异矩阵. 那么在这个坐标变换下,系统(A,B,C)的能控性和能观测性保持不变.

证明 在坐标变换$\overline{x}=Tx$下,系统(A,B,C)变成

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}x(t)+\overline{B}u(t),\\ y(t)=\overline{C}x(t),\end{cases}$$

其中$\overline{A}=TAT^{-1}$, $\overline{B}=TB$, $\overline{C}=CT^{-1}$.

由于

$$[\overline{B},\overline{AB},\cdots,\overline{A}^{n-1}\overline{B}]=T[B,AB,\cdots,A^{n-1}B],$$

$$\begin{bmatrix}\overline{C}\\ \overline{CA}\\ \vdots\\ \overline{CA}^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}T^{-1},$$

则由T的非奇异性知引理的结论成立.

假设系统(A,B,C)不完全能控,则$\mathcal{X}_1=\mathrm{span}[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]$的维数$\mu$小于$n$. 取$\mathcal{X}_1$的一组基$e_1$, e_2, $\cdots$, e_μ, 则可将$\mathbb{R}^n$分解为$\mathbb{R}^n=\mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_1^{\perp}$. 这里$\mathcal{X}_1^{\perp}$表示$\mathbb{R}^n$中$\mathcal{X}_1$的直交补空间. 取$\mathcal{X}_1^{\perp}$的一组基$e_{\mu+1}$, $e_{\mu+2}$, $\cdots$, e_n, 并记

$$T=[e_1,e_2,\cdots,e_n].$$

显然,这样构成的矩阵T是非奇异的. 利用Cayley-Hamilton定理不难证明,子空间$\mathcal{X}_1$是A的不变子空间,即$A\mathcal{X}_1\subset\mathcal{X}_1$. 因此有

$$\begin{cases}Ae_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{\mu1}e_\mu,\\ Ae_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{\mu2}e_\mu,\\ \qquad\vdots\\ Ae_\mu=a_{1\mu}e_1+a_{2\mu}e_2+\cdots+a_{\mu\mu}e_\mu,\\ Ae_{\mu+1}=a_{1\mu+1}e_1+a_{2\mu+1}e_2+\cdots+a_{\mu\mu+1}e_\mu+\cdots+a_{n\mu+1}e_n,\\ \qquad\vdots\\ Ae_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{\mu n}e_\mu+\cdots+a_{nn}e_n,\end{cases}$$

其中a_{ij}都是实数, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n$.

如果记

$$\overline{A}_1=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1\mu}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2\mu}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{\mu1}&a_{\mu2}&\cdots&a_{\mu\mu}\end{bmatrix},\quad \overline{A}_2=\begin{bmatrix}a_{\mu+1\mu+1}&a_{\mu+1\mu+2}&\cdots&a_{\mu+1n}\\ a_{\mu+2\mu+1}&a_{\mu+2\mu+2}&\cdots&a_{\mu+2n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n\mu+1}&a_{n\mu+2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_3=\begin{bmatrix}a_{1\mu+1}&a_{1\mu+2}&\cdots&a_{1n}\\ a_{2\mu+1}&a_{2\mu+2}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{\mu\mu+1}&a_{\mu\mu+2}&\cdots&a_{\mu n}\end{bmatrix},\quad 且\quad \overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{A}_1&\overline{A}_3\\ 0&\overline{A}_2\end{bmatrix},$$

则有$AT=T\overline{A}$,即$\overline{A}=T^{-1}AT$. 由于B的每一列都是能控子空间$\mathcal{X}_1$中的元,而$\mathcal{X}_1$又是A的不变子空间,因此用与前面类似的方法可以证明

$$\overline{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\0\end{bmatrix},$$

其中$\overline{B}_1$为一个$\mu\times r$阶矩阵.

如果对系统(A,B,C)取坐标变换$\overline{x}=T^{-1}x$, 那么系统(A,B,C)将变成

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_1 & \overline{A}_3\\ 0 & \overline{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\0\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\overline{C}_1\overline{x}_1(t)+\overline{C}_2\overline{x}_2(t),\end{cases}\tag{1.3.16}$$

其中$\overline{x}_1(t)$为μ维状态变量, $\overline{x}_2(t)$为$n-\mu$维状态变量, 并且$[\overline{C}_1,\overline{C}_2]=CT$.

对系统$(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$,它的能控性矩阵为

$$\overline{Q}_c=[\overline{B},\overline{AB},\cdots,\overline{A}^{n-1}\overline{B}]=\begin{bmatrix}\overline{B}_1 & \overline{A}_1\overline{B}_1 & \cdots & \overline{A}_1^{n-1}\overline{B}_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=T^{-1}Q_c$$

由于假设$\mathcal{X}_1$是μ维的,而它又是由Q_c各列所构成的线性子空间, 因此必有$\operatorname{rank}Q_c=\mu$. 同时,又因为$T^{-1}$为非奇异矩阵,所以有$\operatorname{rank}\overline{Q}_c=\operatorname{rank}Q_c=\mu$. 从而有

$$\operatorname{rank}[\overline{B}_1,\overline{A}_1\overline{B}_1,\cdots,\overline{A}_1^{\mu-1}\overline{B}_1]=\mu.$$

即(A_1,B_1)能控.

定理 1.3.8 假设定常线性系统(A,B,C)不完全能控,它的能控性矩阵的秩为$\mu<n$,那么存在一个坐标的变换$\overline{x}=T^{-1}x$, T是$n\times n$阶非奇异矩阵,使得在这个坐标变换下,系统(A,B,C)变成代数等价的标准结构(1.3.16),同时(A_1,B_1)是完全能控的.

系统(A,B,C)的传递函数阵为

$$W(s)=\overline{C}(sI_n-\overline{A})^{-1}\overline{B}=\overline{C}_1(sI_\mu-\overline{A}_1)^{-1}\overline{B}_1$$

其中坐标变换保持系统的传递函数矩阵不变,因此,若令$\overline{W}(s)$为系统(1.3.16)的传递函数矩阵,那么

$$W(s)=\overline{W}(s)=\overline{C}_1(sI_\mu-\overline{A}_1)^{-1}\overline{B}_1.$$

因为$(\overline{A}_1,\overline{B}_1)$能控,而$\overline{W}(s)$恰好是在系统$(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$中不能控状态变量$\overline{x}_2(t)$不出现时,子系统$(\overline{A}_1,\overline{B}_1,\overline{C}_1)$的传递函数矩阵. 这表明系统的传递函数矩阵不能反映系统的不能控子系统的特性.

对任给$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,用$\mathcal{N}(A)$记$X$的零子空间:

$$\mathcal{N}(A)=\{x:\ Ax=0,x\in\mathbb{R}^n\}.$$

如果系统(A,B,C)不完全能观测,那么它的不能观测子空间

$$\mathcal{X}_2=\mathcal{N}\begin{bmatrix}C\\CA\\ \vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

是一个非零子空间. 设该子空间的维数为$n-\nu$, 于是状态空间可作如下分解

$$\mathbb{R}^n=\mathcal{X}_2\oplus\mathcal{X}_2^{\perp}.$$

这里直交补空间$\mathcal{X}_2^{\perp}$的维数为ν. 应用对偶原理和定理1.3.8,可以获得系统(A,B,C)的又一种代数等价的结构形式.

定理 1.3.9 设定常线性系统(A,B,C)是不完全能观测的,它的能观测矩阵的秩为ν, $\nu<n$. 那么,存在一个坐标变换$\widetilde{x}=Tx$, T为一个$n\times n$阶非奇异矩阵,使得在这个坐标变换下,系统(A,B,C)变成如下代数等价的标准结构:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\widetilde{x}}_1(t)\\ \dot{\widetilde{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_1 & 0\\ \widetilde{A}_4 & \widetilde{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{x}_1(t)\\ \widetilde{x}_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\widetilde{C}_1\widetilde{x}_1(t).\end{cases} \tag{1.3.17}$$

这里$\widetilde{x}_1(t)$, $\widetilde{x}_2(t)$分别为ν维和$n-\nu$维状态变量, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{A}_4$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ 和$\widetilde{C}_1$分别为$\nu\times\nu$, $(n-\nu)\times(n-\nu)$, $(n-\nu)\times\nu$, $\nu\times(n-\nu)$, $(n-\nu)\times(n-\nu)$和$m\times\nu$ 阶常值矩阵,并且

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_1 & 0\\ \widetilde{A}_4 & \widetilde{A}_2\end{bmatrix}=TAT^{-1},\quad \widetilde{B}=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\end{bmatrix}=TB,$$
$$\widetilde{C}=\begin{bmatrix}\widetilde{C}_1 & 0\end{bmatrix}=CT^{-1}.$$

同时, $(\widetilde{A}_1,\widetilde{C}_1)$是能观测的.

对系统(A,B,C),称代数等价系统(1.3.16)为它的能控标准分解, 而(1.3.17)为它的能观测标准分解.

设系统(1.3.17)的传递函数矩阵为$\widetilde{W}(s)$,显然$\widetilde{W}(s)=\widetilde{C}_1(sI_{n-\nu}-\widetilde{A}_1)^{-1}\widetilde{B}_1$. 由于坐标变换不改变系统的传递函数矩阵,所以有$W(s)=\widetilde{C}_1(sI_{n-\nu}-\widetilde{A}_1)^{-1}\widetilde{B}_1$. 这表明定常线性系统的传递函数矩阵不包含系统的不能观测子系统的特征.

从以上两个定理并注意到系统的传递函数矩阵的性质可以看出,一个不完全能控和不完全能观测的定常线性系统的传递函数矩阵,只能刻画它的既能控又能观测子系统的特性.

定理 1.3.10 已知定常线性系统(A,B,C),它的能控性矩阵Q_c的秩为μ,能观测矩阵Q_0的秩为ν,那么存在一个坐标变换$\overline{x}=T^{-1}x$, T是一个$n\times n$阶非奇异矩阵,使得系统(A,B,C)在这个坐标变换下变成如下代数等价的标准结构形式:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\\ \dot{\overline{x}}_3(t)\\ \dot{\overline{x}}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{13} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{23} & \overline{A}_{24}\\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \overline{A}_{43} & \overline{A}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\\ \overline{x}_3(t)\\ \overline{x}_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\begin{bmatrix}\overline{C}_1 & 0 & \overline{C}_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\\ \overline{x}_3(t)\\ \overline{x}_4(t)\end{bmatrix},\end{cases} \tag{1.3.18}$$

其中$\overline{x}_1(t)$, $\overline{x}_2(t)$, $\overline{x}_3(t)$, $\overline{x}_4(t)$分别为n_1, n_2, n_3, n_4维的状态变量, $n_1+n_2+n_3+n_4=n$, $n_1+n_2=\mu$, $n_1+n_3=\nu$. 而相应常值矩阵$\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_l$和$\overline{C}_k$ $(i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ l=1,\ 2,\ k=1,3)$的阶数与状态变量的维数相适应. 同时$\overline{x}_1(t)$, $\overline{x}_2(t)$是能控状态变量, $\overline{x}_1(t)$, $\overline{x}_3(t)$是能观测状态变量, 由$(\overline{A}_{11},\overline{B}_1,\overline{C}_1)$组成的子系统是完全能控和完全能观测的. 如果令

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{13} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{23} & \overline{A}_{24}\\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \overline{A}_{43} & \overline{A}_{44}\end{bmatrix},\quad \overline{B}=\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \overline{C}=\begin{bmatrix}\overline{C}_1 & 0 & \overline{C}_3 & 0\end{bmatrix},$$

那么有

$$\overline{A}=T^{-1}AT,\quad \overline{B}=T^{-1}B,\quad \overline{C}=CT.$$

证明 首先选择子空间$\mathcal{X}_{12}$, $\mathcal{X}_{11}$, $\mathcal{X}_{22}$, $\mathcal{X}_{21}$:

$$\mathcal{X}_{12} \triangleq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{X}_{11} \oplus \mathcal{X}_{12} \triangleq \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_{22} \oplus \mathcal{X}_{12} \triangleq \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{X}_{21} \oplus (\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2) \triangleq \mathbb{R}^n.$$

显然,对系统(A, B, C), $\mathcal{X}_{12}$是它的能控不能观测的子空间, $\mathcal{X}_{11}$是它的既能控又能观测的子空间, $\mathcal{X}_{21}$是它的不能控但能观测的子空间, $\mathcal{X}_{22}$是它的既不能控又不能观测的子空间. 不难看出

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_{11} \oplus \mathcal{X}_{12} \oplus \mathcal{X}_{21} \oplus \mathcal{X}_{22}.$$

由于$\mathcal{X}_1$和$\mathcal{X}_2$都是A的不变子空间,因此$\mathcal{X}_{12}$也是A的不变子空间.

在子空间$\mathcal{X}_{11}$, $\mathcal{X}_{12}$, $\mathcal{X}_{21}$, $\mathcal{X}_{22}$ 中分别取一组基,使之构成状态空间$\mathbb{R}^n$中的一组基,令$\mathcal{X}_{11}$, $\mathcal{X}_{12}$, $\mathcal{X}_{21}$, $\mathcal{X}_{22}$的维数分别为n_1, n_2, n_3, n_4,则$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. 于是这组基可记为$e_1$, e_2, $\cdots$, e_n, 其中前n_1个为$\mathcal{X}_{11}$的基,从第$n_1 + 1$到第$n_1 + n_2$个为$\mathcal{X}_{12}$的基,从第$n_1 + n_2 + 1$到第$n_1 + n_2 + n_3$个为$\mathcal{X}_{21}$的基,最后n_4个为$\mathcal{X}_{22}$的基. 把A作用在每个变量e_i上有

$$\begin{cases} Ae_1 = \overline{a}_{11}e_1 + \overline{a}_{21}e_2 + \cdots + \overline{a}_{n1}e_n, \\ Ae_2 = \overline{a}_{12}e_1 + \overline{a}_{22}e_2 + \cdots + \overline{a}_{n2}e_n, \\ \vdots, \\ Ae_n = \overline{a}_{1n}e_1 + \overline{a}_{2n}e_2 + \cdots + \overline{a}_{nn}e_n, \end{cases} \tag{1.3.19}$$

由于$\mathcal{X}_1$是A的不变子空间,因此,当$i = 1, 2, \cdots, \mu$, $j = \mu + 1, \mu + 2, \cdots, n$时有$\overline{a}_{ij} = 0$. 又因为$\mathcal{X}_2$是$A$的不变子空间,因此,当$i = 1, 2, \cdots, n_1$, $j = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \cdots, n$, $i = \mu + 1, \mu + 2, \cdots, \mu + n_3$, $j = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \cdots, n$时有$\overline{a}_{ij} = 0$. 同理,由于$\mathcal{X}_{12}$是$A$的不变子空间,因此,当$i = 1, 2, \cdots, n_1$, $j = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n$时有$\overline{a}_{ij} = 0$. 于是,可以把式(1.3.19)右边的系数排成一个具有如下形式的矩阵:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{13} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{23} & \overline{A}_{24} \\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A}_{43} & \overline{A}_{44} \end{bmatrix},$$

其中$\overline{A}_{ij}$是不能肯定为0的适当维数的矩阵. 而这时(1.3.19)式可改写成

$$A[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]\overline{A}.$$

取

$$T = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n].$$

显然,它是一个非奇异矩阵. 不难看出

$$\overline{A} = T^{-1}AT.$$

由于B的各列都在子空间$\mathcal{X}_1$中,因此有:

$$\overline{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

又因为$\mathcal{N}(C) \supset \mathcal{X}_2$, 所以$\mathcal{X}_2$中的每个元都在$C$的零空间中, 从而当$i = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n_1 + n_2$, 或者$i = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \cdots, n$时,必有$Ce_i = 0$. 所以有

$$\overline{C} = CT = \left[\overline{C}_1 \;\; 0 \;\; \overline{C}_3 \;\; 0\right].$$

不难发现,在矩阵$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$中, $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{22}$, $\overline{A}_{33}$, $\overline{A}_{44}$分别是$n_1\times n_1$, $n_2\times n_2$, $n_3\times n_3$, $n_4\times n_4$阶矩阵, $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{C}_1$, $\overline{C}_3$分别为$n_1\times r$, $n_2\times r$, $m\times n_1$, $m\times n_3$阶矩阵,则其余的$\overline{A}_{ij}$都有相应的阶数.

作坐标转换$\overline{x}=T^{-1}x$. 于是$\overline{x}(t)$按维数n_1, n_2, n_3, n_4分成四组:

$$\overline{x}(t)=\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\\ \overline{x}_3(t)\\ \overline{x}_4(t)\end{bmatrix}.$$

这时用所取的坐标转换可将系统(A,B,C)化成所要求的代数等价形式.

最后,证明

(a) $\left(\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}\right)$ 能控;

(b) $\left(\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{13}\\ 0 & \overline{A}_{33}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{C}_1 & \overline{C}_3\end{bmatrix}\right)$ 能观测;

(c) 子系统$(\overline{A}_{11},\overline{B}_1,\overline{C}_1)$既能控又也能观测.

依定义有

$$\begin{aligned}\mu &= \operatorname{rank}[\overline{B},\overline{AB},\cdots,\overline{A}^{n-1}\overline{B}]\\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\overline{B}_1 & \overline{A}_{11}\overline{B}_1 & \cdots & \overline{A}_{11}^{n-1}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2 & \overline{A}_{21}\overline{B}_1+\overline{A}_{22}\overline{B}_2 & \cdots & *\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ &= \operatorname{rank}\left[\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}^{\mu-1}\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}\right].\end{aligned}$$

由此可见,矩阵对

$$\left(\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & 0\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}\right)\quad 能控.$$

同时,还可以看出,

$$\operatorname{rank}[\overline{B}_1,\overline{A}_{11}\overline{B}_1,\cdots,\overline{A}_{11}^{n_1-1}\overline{B}_1]=n_1.$$

这说明$(\overline{A}_{11},\overline{B}_1)$能控.

同理,由能观测性矩阵出发可以证明,矩阵对

$$\left(\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{13}\\ 0 & \overline{A}_{33}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{C}_1 & \overline{C}_3\end{bmatrix}\right)\quad 能观测,$$

并且$(\overline{A}_{11},\overline{C}_1)$能观测. 这就完成了定理的证明. ∎

定理1.3.10说明,一个定常线性系统经适当的坐标变换, 可以把它分解成四个子系统,一个是既能控又能观测子系统,一个是能控但不能观测子系统, 一个是不能控但能观测子系统,一个是既不能控又不能观测子系统. 这就是定常线性系统的标准结构.

假设系统(1.3.18)的传递函数矩阵为$\overline{W}(s)$,不难计算

$$\overline{W}(s)=\overline{C}_1(sI_{n_1}-\overline{A}_{11})^{-1}\overline{B}_1.$$

由于坐标变换保持系统的传递函数矩阵不变,因此有

$$W(s)=\overline{C}_1(sI_{n_1}-\overline{A}_{11})^{-1}\overline{B}_1. \tag{1.3.20}$$

这表明定常线性系统的传递函数矩阵仅仅刻画了系统的既能控又能观测的子系统的特性, 而反映不出那些不能控或不能观测的子系统的特性.

习题1.3

1.3.1 已知一阶线性系统

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t).$$

假设$x(t_0) = x_0$, $u(t)$为系统的控制输入. 给定初始状态x_0,寻找一个容许控制输入$u(t)$,以及某有限时刻$t_1 > t_0$,使得在控制输入$u(t)$作用之下, 在t_1时刻系统的状态$x(t_1) = 0$.

1.3.2 试判别定常线性系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

的能控性.

1.3.3 试问定常线性系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

是否能控? 若不能控,求出它的能控子空间和不能控子空间.

1.3.4 分析定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} x(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = [1 \ -1 \ 1] x(t) \end{cases}$$

的能控性、能观测性,并求出传递函数.

1.3.5 设A, B, C分别为$n \times n$, $n \times r$和$m \times n$阶实矩阵, I为$n \times n$阶单位矩阵.

(a). 如果(A, B)是能控的, $K_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$为半正定阵, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$满足$BB^T + K = D_1 D_1^T$, 那么$(A, D_1)$是否是能控的? 若是,请证明之. 若不是,请举例说明.

(b). 如果(A, C)是能观测的, $K_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$为半正定阵, $D_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$满足$C^T C + K = D_2^T D_2$,那么$(A, D_2)$是否能观测? 若是,请证明之. 若不是,请举例说明.

1.3.6 对给定定常线性系统(A, B, C), 假设$\operatorname{rank} B = r$, $\operatorname{rank} C = m$, 证明

$$\operatorname{rank} Q_c = \operatorname{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-r}B],$$

$$\operatorname{rank} Q_o = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-m} \end{bmatrix}.$$

1.3.7 已知自然数n及实数a_i, b_i $(i = 1, ..., n)$. 记

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

证明: (A, B)能控的充分必要条件是多项式$s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n$ 与$b_1 s^{n-1} + ... + b_n$互质.

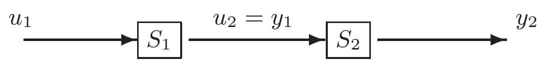
1.3.8 已知如下两个能控能观单输入、单输出系统S_1和S_2:

$$S_1: \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1, \\ y_1 = C_1x_1; \end{cases} \qquad\qquad S_2: \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2, \\ y_2 = C_2x_2; \end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned} &A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad &&B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad &&C_1 = [2 \quad 1], \\ &A_2 = -2, &&B_2 = 1, &&C_2 = 1. \end{aligned}$$

(a). 如果将系统S_1和S_2串联起来:



试求出$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$的状态方程.

(b). 分析串联系统S_2S_1的能控能观测性.

(c). 求出串联系统S_2S_1的传递函数.

1.3.9 对定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = [1 \ \ -1 \ \ 1]x(t), \end{cases} \tag{1.3.21}$$

(i) 求一非奇异状态变换T_1使得在状态变换$\overline{x} = T_1^{-1}x$, 系统(1.3.21)代数等价与一个形如(1.3.16)的系统;

(ii) 求一非奇异状态变换T_2使得在状态变换$\widetilde{x} = T_2x$, 系统(1.3.21)代数等价与一个形如(1.3.17) 的系统;

(iii) 求一非奇异状态变换T使得在状态变换$\overline{x} = T^{-1}x$, 系统(1.3.21)代数等价与一个形如(1.3.18)的系统.

§1.4 定常线性系统的能控能观标准形

本节研究单输入单输出定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \end{cases} \tag{1.4.1}$$

这里$u(t)$为标量控制输入, $y(t)$为标量量测输出, b为n维列向量, c为n维行向量.

令A的特征多项式为

$$\det(sI_n - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0. \tag{1.4.2}$$

系统(1.4.1)的能控性矩阵和能观测性矩阵分别为

$$Q_c = [b, \ Ab, \ \cdots, \ A^{n-1}b],$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

定理 1.4.1 已知定常线性系统(1.4.1),设它是完全能控的,则存在一个$n \times n$阶非奇异矩阵T, 使得在坐标变换$\overline{x} = Tx$下系统(1.4.1)变成如下的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{b}u(t), \\ y(t) = \overline{c}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.4.3}$$

其中$\overline{A} = TAT^{-1}$, $\overline{b} = Tb$, $\overline{c} = cT^{-1}$,并且

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4.4}$$

通常称系统(1.4.3)-(1.4.4)为系统(1.4.1)的第一能控标准形.

证明 因为系统(1.4.1)完全能控,所以矩阵Q_c是非奇异的. 令$T = Q_c^{-1}$, 则在坐标变换$\overline{x} = Tx$下,有

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{b}u(t), \\ y(t) = \overline{c}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.4.5}$$

其中$\overline{A} = TAT^{-1}$, $\overline{b} = Tb$, $\overline{c} = cT^{-1}$. 不难计算,

$$\begin{aligned} \overline{A} &= TAQ_c = T[Ab, A^2b, \cdots, A^{n-1}b, A^nb] \\ &= T[Ab, A^2b, \cdots, A^{n-1}b, -\alpha_{n-1}A^{n-1}b - \cdots - \alpha_1 Ab - \alpha_0 b] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \\ \overline{b} &= Tb = Q_c^{-1}b = [1\ 0\ \cdots\ 0]^T. \end{aligned}$$

这表明由方程(1.4.5)给出的系统有所要求的形式. 显然,它与系统(1.4.1)代数等价,因而也是完全能控的. ∎

定理 1.4.2 设定常线性系统(1.4.1)是完全能控的,则存在一个$n\times n$阶非奇异矩阵P, 使得系统(1.4.1)在坐标变换$\overline{x} = Px$下变成如下的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{b}u(t), \\ y(t) = \overline{c}\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.4.6}$$

其中$\overline{A}=PAP^{-1}$, $\overline{b}=Pb$, $\overline{c}=cP^{-1}$,并且

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.4.7}$$

通常称系统(1.4.6)-(1.4.7)为系统(1.4.1)的第二能控标准形, 也称Brunovsky标准形.

证明 令q^T为Q_c^{-1}中最后一行所组成的向量,取

$$P=\begin{bmatrix} q^T \\ q^T A \\ \vdots \\ q^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

可以证明,这个矩阵P是非奇异的. 事实上,如果有向量x_0使得$Px_0=0$,则有

$$q^T A^i x_0=0, \quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.4.8}$$

当$i=0$时,有$q^T x_0=0$. 而若q与b, Ab, $\cdots$, $A^{n-2}b$直交, 那么x_0必能表成b, Ab, $\cdots$, $A^{n-2}b$的线性组合,从而有不全为零的实数β_0, β_1, $\cdots$, β_{n-2}使得

$$x_0=\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k A^k b. \tag{1.4.9}$$

在上式的两边左乘$q^T A$,并利用等式(1.4.8)得出

$$\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k q^T A^{k+1} b=0. \tag{1.4.10}$$

利用q的性质由(1.4.10)推知$\beta_{n-2}=0$. 同理,在式(1.4.9)的两边左乘$q^T A^2$,并利用等式(1.4.8) 可得, $\beta_{n-3}=0$. 以此类推得出

$$\beta_k=0, \quad k=0,1,\cdots,n-2.$$

这表明$x_0=0$,故P是非奇异的.

取坐标变换$\overline{x}=Px$, 则系统(1.4.1)在这个坐标变换下变成如下代数等价系统

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{b}u(t), \\ y(t)=\overline{cx}(t), \end{cases} \tag{1.4.11}$$

其中$\overline{A}=PAP^{-1}$, $\overline{b}=Pb$, $\overline{c}=cP^{-1}$. 利用矩阵P的性质,并使用Cayley-Hamilton定理可以证明, $\overline{A}$和$\overline{b}$有我们所希望的结构形式. 再由坐标变换保持系统的能控性不变知,系统(1.4.11)是完全能控的,从而定理得证. ∎

按照对偶原理, 能观测系统也有两个相应的标准形.

定理 1.4.3 设系统(1.4.1)是完全能观测的,则存在一个$n\times n$阶非奇异矩阵T, 使得系统(1.4.1)在坐标变换$\overline{x}=Tx$下变成如下的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{b}u(t), \\ y(t)=\overline{cx}(t), \end{cases} \tag{1.4.12}$$

其中$\overline{A}=TAT^{-1}$, $\overline{b}=Tb$, $\overline{c}=cT^{-1}$,并且

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}, \quad \overline{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}. \tag{1.4.13}$$

通常系统(1.4.12)-(1.4.13)叫做系统(1.4.1)的第一能观测标准形.

证明留作习题.

定理 1.4.4 设系统(1.4.1)是完全能观测的,则在一个$n\times n$阶非奇异矩阵P, 使得系统(1.4.1)在坐标变换$\overline{x}=Px$下变成如下的标准形式:

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{b}u(t),\\ y(t)=\overline{c}\overline{x}(t),\end{cases} \tag{1.4.14}$$

其中$\overline{A}=PAP^{-1}$, $\overline{b}=Pb$, $\overline{c}=cP^{-1}$,并且

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_1\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}, \quad \overline{c}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{1.4.15}$$

通常称系统(1.4.14)–(1.4.15)为系统(1.4.1)的第二能观测标准形.

证明留作习题.

从定常线性系统的标准形很容易求出它的传递函数. 假设给定单输入单输出定常线性系统(1.4.1),它的第二能控标准形为系统(1.4.6),并设$\overline{c}=[\beta_0,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{n-1}]$. 由于坐标变换不改变系统的传递函数,因此为求系统(1.4.1)的传递函数,只要计算系统(1.4.6) 的传递函数即可. 根据定义,系统(1.4.6)的传递函数为$W(s)=\overline{c}(sI_n-\overline{A})^{-1}\overline{b}$, 其中$\overline{A}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$分别是系统(1.4.6)的系统矩阵、控制矩阵、量测矩阵.

为计算$W(s)$,首先计算$(sI_n-\overline{A})^{-1}\overline{b}$,容易算出

$$(sI_n-\overline{A})^{-1}\overline{b}=\left[\frac{1}{\Delta(s)},\ \frac{s}{\Delta(s)},\ \cdots,\ \frac{s^{n-1}}{\Delta(s)}\right]^T,$$

其中$\Delta(s)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$是矩阵$A$(或者$\overline{A}$)的特征多项式. 于是

$$W(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}.$$

从这里看出,只要有了系统的标准形,就可直接写出它的传递函数来,这是定常线性系统标准形的优点之一. 其实, 无论是从能控标准形, 还是从能观测标准形出发, 得到的传递函数都是一样的. 这是因为代数等价系统具有相同的传递函数.

现在研究多输入多输出定常线性系统的Luenberger标准形. 考察定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\\ y(t)=Cx(t),\end{cases} \tag{1.4.16}$$

假设系统(1.4.16)完全能控和完全能观测,并且$\operatorname{rank} B = r$, $\operatorname{rank} C = m$. 令$B = [b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r]$, 其中$b_i$为矩阵$B$的第$i$列组成的向量, $i = 1, 2, \cdots, r$. 因为系统(1.4.16)完全能控,所以它的能控性矩阵Q_c满秩. 展开Q_c各列有

$$Q_c = [b_1, \cdots, b_r, Ab_1, \cdots, AB_r, \cdots, A^{n-1}b_1, \cdots, A^{n-1}b_r].$$

为了把系统(1.4.16)化成某种标准形,可以从Q_c的各列中选取状态空间中的一组基. 选基时可按如下原则进行：

首先取$b_1, b_2, \cdots, b_r$. 然后再取$Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_r$. 如果在诸Ab_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$中有某Ab_i与前面已选出的向量线性相关,那么就把它舍去,再继续选取A^2b_1, $A^2b_2, \cdots, A^2b_r$. 容易证明,如果A^kb_i已被舍去,那么对任意的$j \geq k$, A^jb_i 也一定会被舍去. 依照这样的办法总可以选取状态空间的一组基,重新排列为

$$b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{r_1-1}b_1,\ b_2,\ Ab_2,\ \cdots,\ A^{r_2-1}b_2,\ \cdots,\ b_r,\ AB_r,\ \cdots,\ A^{r_r-1}b_r.$$

这里$r_1 + r_2 + \cdots + r_r = n$. 取

$$T_1 = [b_1,\ \cdots,\ A^{r_1-1}b_1,\ \cdots,\ b_r,\ \cdots,\ A^{r_r-1}b_r]. \tag{1.4.17}$$

显然矩阵T_1是非奇异的,且在坐标变换$\overline{x} = T_1^{-1}x$下,系统(1.4.16)变成如下代数等价的标准形式：

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = \overline{A}_1\overline{x}(t) + \overline{B}_1u(t), \\ y(t) = \overline{C}_1\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.4.18}$$

其中$\overline{A}_1 = T_1^{-1}AT_1$, $\overline{B}_1 = T_1^{-1}B$, $\overline{C}_1 = CT_1$, 并且$\overline{A}_1$和$\overline{B}_1$有如下特殊结构：

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{A}_{r1} & \overline{A}_{r2} & \cdots & \overline{A}_{rr} \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_1 = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \vdots \\ \overline{B}_{rr} \end{bmatrix};$$

$$\overline{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & * \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \end{bmatrix}_{r_i \times r_i},$$

$$\overline{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}_{r_i \times r_j}, \quad i \neq j,$$

$$\overline{B}_{ii} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r} \\ \uparrow \\ \text{第}i\text{列} \end{array}, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

其中$*$代表数字.

定理 1.4.5 设定常线性系统(1.4.16)是完全能控的. 则在坐标变换$\overline{x} = T_1^{-1}x$下, 系统(1.4.16)变成标准形式(1.4.18). 这里T_1由(1.4.17)给出. 通常称这种标准形为系统(1.4.16) 的Luenberger第一能控标准形.

关于Luenberger标准形还有一种形式. 用$q_i^T(i=1,2,\cdots,r)$表示由(1.4.17) 定义的非奇异矩阵T_1的逆矩阵T_1^{-1}的第$r_1+r_2+\cdots+r_i$行,并取T_2为

$$T_2 = [q_1,\ A^Tq_1,\ \cdots,\ (A^{r_1-1})^Tq_1,\ \cdots,\ q_r,\ A^Tq_r,\ \cdots,\ (A^{r_r-1})^Tq_r]^T. \tag{1.4.19}$$

不难验证T_2是非奇异的. 实际上,如果有x_0使得$T_2x_0=0$,则有

$$q_i^TA^jx_0 = 0,\quad j=1,2,\cdots,r_i,\quad i=1,2,\cdots,r. \tag{1.4.20}$$

显然, x_0属于$[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_r]$的零空间. 由定义可知,这个零空间是由向量$b_1$, Ab_1, $\cdots$, $A^{r_1-2}b_1$, $\cdots$, b_r, Ab_r, $\cdots$, $A^{r_r-2}b_r$构成的,因此有

$$x_0 = \sum_{i=0}^{r_1-2}\alpha_{1i}A^ib_1 + \sum_{i=0}^{r_2-2}\alpha_{2i}A^ib_2 + \cdots + \sum_{i=0}^{r_r-2}\alpha_{ri}A^ib_r, \tag{1.4.21}$$

其中α_{ji}, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ r$都是实数. 在(1.4.21)两边左乘q_1^TA, 由(1.4.20)知

$$q_1^TAx_0 = \sum_{i=0}^{r_1-2}\alpha_{1i}q_1^TA^{i+1}b_1 + \sum_{i=0}^{r_2-2}\alpha_{2i}q_1^TA^{i+1}b_2 + \cdots + \sum_{i=0}^{r_r-2}\alpha_{ri}q_1^TA^{i+1}b_r = 0.$$

由q_1^T的定义推知$\alpha_{1r_1-1}q_1^TA^{r_1-1}b_1 = 0$. 因为$q_1^TA^{r_1-1}b_1 \neq 0$,所以$\alpha_{1r_1-1} = 0$. 用类似方法可以证明$\alpha_{2r_2-2} = \cdots = \alpha_{rr_r-2} = 0$. 然后继续在(1.4.21)的两边左乘$q_i^TA^2$, $i=2,\ 3,\ \cdots,\ r$,可以证明,(1.4.21)中的诸系数全为零. 于是$x_0=0$. 这表明T_2是非奇异的. 现在取坐标变换$\overline{x} = T_2x$,则在此坐标变换下,系统(1.4.16)可以化成如下标准形式:

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = \overline{A}_2\overline{x}(t) + \overline{B}_2u(t), \\ y(t) = \overline{C}_2\overline{x}(t), \end{cases} \tag{1.4.22}$$

其中$\overline{A}_2 = T_2AT_2^{-1}$, $\overline{B}_2 = T_2B$, $\overline{C}_2 = CT_2^{-1}$,而且$\overline{A}_2$和$\overline{B}_2$有如下具体形式

$$\overline{A}_2 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{A}_{r1} & \overline{A}_{r2} & \cdots & \overline{A}_{rr} \end{bmatrix},\quad \overline{B}_2 = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \vdots \\ \overline{B}_{rr} \end{bmatrix};$$

$$\overline{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ * & * & \cdots & \cdots & * & * \end{bmatrix}_{r_i\times r_i},\quad \overline{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}_{r_i\times r_j},\quad i\neq j;$$

$$\overline{B}_{ii} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_i\times r} \\ \uparrow \\ \text{第}i\text{列} \end{array},\quad i=1,2,\cdots,r.$$

定理 1.4.6 设定常线性系统(1.4.16)是能控的,则在坐标变换(1.4.19)下,系统(1.4.16)变成标准形(1.4.22). 通常把这种标准形式称为系统(1.4.16)的Luenberger第二能控标准形, 也称Brounovsky标准形.

和单输入单输出系统一样,依照对偶引理也有Luenberger能观测标准形.

定理 1.4.7 设定常线性系统(1.4.16)是完全能观测的,则存在一个非奇异坐标变换$\overline{x} = T_3x$使得系统(1.4.16)在这个坐标变换下变成如下标准形式:

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t),\\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t),\end{cases} \tag{1.4.23}$$

其中$\overline{A} = T_3AT_3^{-1}$, $\overline{B} = T_3B$, $\overline{C} = CT_3^{-1}$,并且

$$\overline{A} = \begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \overline{A}_{m1} & \overline{A}_{m2} & \cdots & \overline{A}_{mm}\end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix}\overline{C}_{11} & \overline{C}_{22} & \cdots & \overline{C}_{mm}\end{bmatrix};$$

$$\overline{A}_{ii} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ * & * & \cdots & \cdots & * & *\end{bmatrix}_{r_i\times r_i},$$

$$\overline{A}_{ij} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & * & \cdots & *\end{bmatrix}_{r_i\times r_j}, \quad i \neq j;$$

$$\overline{C}_{ii} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \leftarrow 第i行; \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

通常把系统(1.4.23)叫做系统(1.4.16)的Luenberger第一能观测标准形.

定理 1.4.8 设定常线性系统(1.4.16)是完全能观测的,则存在一个非奇异坐标变换$\overline{x} = T_4x$使得系统(1.4.16)在此坐标变换下变成如下标准形式:

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t),\\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t),\end{cases} \tag{1.4.24}$$

其中$\overline{A} = T_4AT_4^{-1}$, $\overline{B} = T_4B$, $\overline{C} = CT_4^{-1}$,并且

$$\overline{A} = \begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \cdots & \overline{A}_{1m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \overline{A}_{m1} & \overline{A}_{m2} & \cdots & \overline{A}_{mm}\end{bmatrix};$$

$$\overline{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0&*\\1&0&\ddots&\ddots&0&*\\0&1&\ddots&\ddots&0&*\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1&0&*\\0&\cdots&\cdots&0&1&*\end{bmatrix}_{r_i\times r_i},$$

$$\overline{A}_{ij}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&*\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&*\end{bmatrix}_{r_i\times r_j},\quad i\neq j;$$

$$\overline{C}_{ii}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0\end{bmatrix}\leftarrow \text{第}i\text{行},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

通常称这个系统(1.4.24)为系统(1.4.16)的Luenberger第二能观测标准形.

注意到, 当化系统(1.4.16)为Luenberger标准形时,选取了一组坐标基为

$$b_1,\ Ab_1,\ \cdots,\ A^{r_1-1}b_1,\ \cdots,\ b_r,\ Ab_r,\ \cdots,\ A^{r_r-1}b_r.$$

而且$r_1+r_2+\cdots+r_r=n$. 可以证明, $r_1, r_2, \cdots, r_r$是坐标变换下的不变量. 通常称它们为Kronecker不变量.

习题1.4

1.4.1 化下列能控系统为第二能控标准形：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x(t).\end{cases}$$

1.4.2 已知定常线性系统(1.4.16),其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&-2\\-22&-11&-4&0\\-23&-6&0&-6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

求该系统的Luenberger第二能控标准形.

1.4.3 证明定理1.4.3.

1.4.4 证明定理1.4.4.

§1.5 定常线性系统的实现

已知由定常线性系统的状态空间描述可以求出它的传递函数矩阵. 反过来,如果给定一个系统的传递函数矩阵,是否能够找到它的一个状态空间描述呢? 这就是传递函数矩阵的实现问题. 这个问题的

数学描述是,已知有理分式矩阵$W(s)$,求满足

$$W(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \tag{1.5.1}$$

的常值矩阵A, B, C, D. 如果这个问题有解,则由矩阵A, B, C, D 决定的定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.5.2}$$

叫做$W(s)$的一个状态空间实现,简称实现. 矩阵A的阶数叫做$W(s)$的实现的阶数. 为简单起见,总是用(A,B,C,D)或(A,B,C)表示$W(s)$的实现. 实现问题是线性系统理论中的一个很有意义的问题.

首先要问, 给定一个有理分式矩阵, 怎样判断它能否实现? 为此,有如下定理.

定理 1.5.1 $m\times r$阶有理分式矩阵$W(s)$能实现的充要条件是它的每个元的分子次数不高于分母次数.

证明 必要性是显然的,下面证明充分性. 首先假设$W(s)$是一个标量传递函数的情况, 这时,总可以把它写成

$$W(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} + d. \tag{1.5.3}$$

很容易说明,如果取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$b = [0,\ \cdots,\ 0,\ 1]^T, \quad c = [\beta_{n-1}, \beta_{n-2},\ \cdots,\ \beta_0],$$

那么由(A,b,c,d)组成的系统就是$W(s)$的一个实现.

当$W(s)$为$m\times r$阶真有理分式阵时,它的每个元都有这样的实现,从而mr个这样的实现就可决定$W(s)$的一个实现. ∎

推论 1.5.1 $m \times r$阶有理分式矩阵$W(s)$存在使得$D = 0$的实现的充要条件是它为真有理分式矩阵,即它的每一个元的分母的次数比分子的次数高.

不失一般性,下面总是研究真有理分式阵的实现问题.

显然,给定一个传递函数矩阵$W(s)$后,它的实现并不唯一. 通常把$W(s)$的所有实现中阶数最低的一个叫做它的最小实现. 将要说明, $W(s)$的最小实现在代数等价意义下是唯一的.

已知单输入单输出定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \end{cases} \tag{1.5.4}$$

其中诸符号的意义同前. 它的传递函数为

$$W(s) = c(sI_n - A)^{-1}b. \tag{1.5.5}$$

系统(1.5.4)的特征多项式为$\Delta(s) = \det(sI_n - A)$. 注意到

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathrm{Adj}(sI_n - A), \tag{1.5.6}$$

这里Adj$(\cdot)$表示矩阵的伴随,它是由$sI_n - A$的代数余子式组成的矩阵. 若令

$$p(s) = c\mathrm{Adj}(sI_n - A)b,$$

那么有

$$W(s) = \frac{p(s)}{\Delta(s)}. \tag{1.5.7}$$

定理 1.5.2 系统(1.5.4)完全能控和完全能观测的充要条件是$W(s)$没有零极相消,即$\Delta(s)$与$p(s)$互质.

证明 必要性. 假设系统(1.5.4)是完全能控和完全能观测的. 由(1.2.8)-(1.2.9)知, 存在s的多项式$p_k(s)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$使得$(sI_n - A)^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(s)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k(s)A^k$. 记$G(s) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k(s)A^k$,则有

$$\Delta(s)I_n = (sI_n - A)G(s). \tag{1.5.8}$$

设s_0是$\Delta(s)$的一个零点，则由(1.5.8)知

$$(s_0 I_n - A)G(s_0) = 0. \tag{1.5.9}$$

所以

$$cAG(s_0)b = s_0 cG(s_0)b. \tag{1.5.10}$$

若$p(s_0) = 0$,则由$p(s_0) = cG(s_0)b$及(1.5.10)知

$$cAG(s_0)b = 0.$$

利用等式(1.5.9)和(1.5.10)可以递推地证明

$$cA^kG(s_0)b = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

因此,有

$$Q_o^T Q_o G(s_0)b = 0. \tag{1.5.11}$$

由(A, C)能观测知$Q_o^T Q_o$为满秩方阵. 所以从(1.5.11)知

$$G(s_0)b = 0, \tag{1.5.12}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k(s_0)A^k b = 0,$$

或等价地

$$Q_c \begin{bmatrix} p_0(s_0) \\ p_1(s_0) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

这表明b, Ab, $\cdots$, $A^{n-1}b$线性相关. 这与(A, b)完全能控矛盾, 所以$p(s_0) \neq 0$.

因此, $\Delta(s)$与$p(s)$互质,即$W(s)$没有零极相消.

充分性. 假设系统(1.5.4)的传递函数没有零极相消,而系统(1.5.4) 不能控或不能观测,则由定理1.3.10 和(1.3.20)知,存在一个坐标变换,使得它变成形如(1.3.18)的系统,且有$n_1 < n$和传递函数(1.3.20). 由于$W(s)$的特征多项式$\det(sI_{n_1} - \overline{A}_{11})$的次数$n_1$小于$n$,这与$W(s)$的特征多项式$\Delta(s)$为$n$次相矛盾. ∎

对多输入多输出系统,有

定理 1.5.3 定常线性系统(1.4.16)完全能控且完全能观测的充要条件是, sI_n-A与B 左互质; sI_n-A与C右互质.

这个定理是定理1.3.3和定理1.3.7的直接推论,在此不再详细讨论.

定理 1.5.4 设$W(s)$是一个$m\times r$阶真有理分式矩阵, (A,B,C)是它的一个实现. (A,B,C)是一个最小实现的充分必要条件是(A,B)能控和(A,C)能观测.

证明 充分性. 设(A,B)能控, (A,C)能观测,那么由定理1.5.3 知, sI_n-A与B左互质, sI_n-A与C右互质,从而$C(sI_n-A)^{-1}B$没有零极相消. 如果(A,B,C)不是$W(s)$的最小实现,那么,必有$(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$是$W(s)$的最小实现. 若$A$是$n\times n$阶矩阵, $\overline{A}$是$\overline{n}\times\overline{n}$阶矩阵,则$\overline{n}<n$. 根据定义

$$W(s)=\overline{C}(sI_n-\overline{A})^{-1}\overline{B}=C(sI_n-A)^{-1}B.$$

这与$C(sI_n-A)^{-1}B$没有零极相消矛盾. 因此, (A,B,C)是$W(s)$的一个最小实现.

必要性. 设(A,B,C)是$W(s)$的最小实现. 如果(A,B)不能控,则由定理1.3.10知,$W(s)$必存在一个阶数更低的实现,而这与(A,B,C)为最小实现矛盾.所以, (A,B)能控. 同理可知(A,C)能观测. ∎

定理 1.5.5 $W(s)$的两个最小实现(A_1,B_1,C_1)和(A_2,B_2,C_2)是代数等价的.

证明 预解矩阵的无穷级数表达式为

$$(sI_n-A_i)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}A_i^js^{-(j+1)},\quad i=1,2, \tag{1.5.13}$$

这里n表示矩阵A_i的阶数,或者说$W(s)$的最小实现的阶数.

因为(A_1,B_1,C_1)和(A_2,B_2,C_2)都是$W(s)$的最小实现,所以有

$$W(s)=C_1(sI_n-A_1)^{-1}B_1=C_2(sI_n-A_2)^{-1}B_2.$$

将(1.5.13)代入上式,然后比较等式两边s同次幂的系数后得出

$$C_1A_1^jB_1=C_2A_2^jB_2\quad j=0,1,2,\cdots. \tag{1.5.14}$$

令(A_i,B_i,C_i)的能控性矩阵为Q_{ci},能观测性矩阵为Q_{oi}, $i=1,2$, 则

$$Q_{ci}=[B_i,AB_i,\cdots,A^{n-1}B_i],\quad Q_{oi}=\begin{bmatrix}C_i\\C_iA\\\vdots\\C_iA^{n-1}\end{bmatrix}.$$

利用(1.5.14)可得

$$Q_{o1}Q_{c1}=Q_{o2}Q_{c2}. \tag{1.5.15}$$

由于(A_i,B_i)能控, (A_i,C_i)能观测,因此必有$Q_{oi}^TQ_{oi}$和$Q_{ci}Q_{ci}^T$是非奇异矩阵. 令

$$T_1=Q_{c2}Q_{c1}^T(Q_{c1}Q_{c1}^T)^{-1},\quad T_2=(Q_{o1}^TQ_{o1})^{-1}Q_{o1}^TQ_{o2}.$$

于是由(1.5.15)有

$$\begin{aligned}T_2T_1&=(Q_{o1}^TQ_{o1})^{-1}Q_{o1}^TQ_{o2}Q_{c2}Q_{c1}^T(Q_{c1}Q_{c1}^T)^{-1}\\&=(Q_{o1}^TQ_{o1})^{-1}Q_{o1}^TQ_{o1}Q_{c1}Q_{c1}^T(Q_{c1}Q_{c1}^T)^{-1}=I_n.\end{aligned}$$

因此$T_2=T_1^{-1}$. 再由(1.5.15)得

$$Q_{c1}=T_2Q_{c2},\quad Q_{o1}=Q_{o2}T_1.$$

因而有

$$B_1 = T_2 B_2, \quad C_1 = C_2 T_2^{-1}.$$

又由(1.5.14)推知,

$$Q_{o1} A_1 Q_{c1} = Q_{o2} A_2 Q_{c2} = Q_{o1} T_2 A_2 T_2^{-1} Q_{c1}.$$

在上式两边分别左乘$(Q_{o1}^T Q_{o1})^{-1} Q_{o1}^T$,右乘$Q_{c1}^T (Q_{c1} Q_{c1}^T)^{-1}$则得

$$A_1 = T_2 A_2 T_2^{-1}$$

这说明(A_1, B_1, C_1)与(A_2, B_2, C_2)是代数等价的. ∎

定理1.5.4和定理1.5.5是最小实现的基本性质. 它说明一个真有理分式矩阵$W(s)$的最小实现是完全能控和完全能观测的, 两个不同最小实现之间是代数等价的,因而在代数等价意义下最小实现是唯一的.

习题1.5

1.5.1 求习题1.4所给出的系统的传递函数矩阵.

1.5.2 求下列严格真有理分式矩阵$W(s)$的最小实现,其中

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{s-1}{s(s+1)} \end{bmatrix}.$$

§1.6 定常线性系统的极点配置

前几节讨论了线性控制系统的结构性质,介绍了线性系统的能控性、能观测性等重要概念. 下面考察线性控制系统的设计问题. 首先研究定常线性系统的极点配置问题.

考虑定常线性系统

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1.6.1}$$

反馈是线性控制系统设计中的一种基本思想,通过反馈能够改变系统的内部结构,改善系统的品质. 反馈有两大类:状态反馈和输出反馈. 输出反馈又分为静态输出反馈和动态输出反馈. 本节仅涉及状态反馈.

已知定常线性系统(1.6.1),如果取控制规律为

$$u(t) = Kx(t), \tag{1.6.2}$$

其中K是一个$r \times n$阶常值矩阵,那么称这个控制规律为状态反馈, K为状态反馈增益矩阵. 若取控制规律为

$$u(t) = Kx(t) + Gv, \tag{1.6.3}$$

其中K的意义同前, G为一个$r \times q$阶常值矩阵, v为q维向量, 可以看作一个新的外加控制输入向量,这个控制规律也是一种状态反馈.

将反馈控制规律(1.6.3)用于系统(1.6.1)得到新的系统为

$$\begin{cases} x(t) = (A + BK)x(t) + BGv, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1.6.4}$$

这个系统称为由反馈控制规律(1.6.3)产生的闭环系统.

相对于该系统,系统(1.6.1)称为开环系统. 在这个闭环系统中,它的系统矩阵为$A+BK$, 特征多项式为$\det(sI-A-BK)$,极点为代数方程

$$\det(sI_n-A-BK)=0$$

的根. 显然,在状态反馈作用之下,系统的极点将发生某些变化. 从极点位置来看,状态反馈使系统极点产生了位移,这种现象叫做极点移动. 因此,可以说,状态反馈可以移动系统的极点. 这是状态反馈的一个重要性质.

特别, 当G是一个非奇异方矩阵时,状态反馈(1.6.3)保持系统的能控性不变. 事实上,对任意$\lambda\in\mathbb{C}$,

$$[\lambda I_n-(A+BK),BG]=[\lambda I_n-A,B]\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -K & G\end{bmatrix}.$$

由于矩阵

$$\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -K & G\end{bmatrix}$$

是非奇异的,因此必有

$$\mathrm{rank}[\lambda I_n-(A+BK),BG]=\mathrm{rank}[\lambda I_n-A,B]. \tag{1.6.5}$$

如果开环系统(1.6.1)完全能控,则对每个$\lambda\in\mathbb{C}$都有

$$\mathrm{rank}[\lambda_0 I_n-A,B]=n.$$

由此可见,闭环系统(1.6.4)也是完全能控的.

状态反馈保持系统的能控性不变,这是状态反馈的又一个重要性质.

如果开环系统(1.6.1)不完全能控, λ_0是它的一个不能控振型, 即输入解耦零点,那么必有

$$\mathrm{rank}[\lambda_0 I_n-A,B]<n.$$

于是由等式(1.6.5)可知,对这个λ_0也有

$$\mathrm{rank}[\lambda_0 I_n-(A+BK),BG]<n.$$

这说明λ_0也是闭环系统(1.6.4)的不能控振型,或者说是它的输入解耦零点. 反之,若λ_0是闭环系统(1.6.4)的输入解耦零点,那么同样可以说明,它也是开环系统(1.6.4)的输入解耦零点. 因此,状态反馈的第三个重要性质是,它保持系统的输入解耦零点不变. 由于系统的输入解耦零点都是系统的极点,因此,状态反馈至多能够移动系统的一部分极点. 其实,从定常线性系统的能控标准结构也可以看出,状态反馈只能影响能控子系统的极点,它不会改变不能控子系统的极点,而不能控子系统的极点恰恰是系统的输入解耦零点. 这一点请读者自己进行验证.

下文中,用Image(A)记A的像(或值域)空间,即

$$\mathrm{Image}(A)=\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\}.$$

状态反馈的第四个性质是保持能控子空间不变. 事实上,如果令

$$Q_c=[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]$$

$$\overline{Q}_c=[BG,(A+BK)BG,\cdots,(A+BK)^{n-1}BG]$$

那么可以证明$\mathrm{Image}(Q_c)=\mathrm{Image}(\overline{Q}_c)$.

要想说明$\mathrm{Image}(Q_c)=\mathrm{Image}(\overline{Q}_c)$,只需证明$\mathcal{N}(Q_c^T)=\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)$便可. 任取$x_0\in\mathcal{N}(Q_c^T)$,则有$Q_c^Tx_0=0$.于是对每个$i$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$有

$$B^T(A^T)^ix_0=0. \tag{1.6.6}$$

由此容易验证

$$G^TB^T(A^T+K^TB^T)^ix_0=0,\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{1.6.7}$$

因此有$\overline{Q}_c^Tx_0=0$,即$x_0\in\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)$,于是由$x_0$任意性可知, $\mathcal{N}(Q_c^T)\subset\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)$.

反之,若$x_0\in\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)$,那么对每个$i(i=0,1,\cdots,n-1)$等式(1.6.7)皆成立. 由于$G$是非奇异矩阵,从而有

$$B^T(A^T+K^TB^T)^ix_0=0,\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

由此不难得出式(1.6.6)成立,从而$x_0\in\mathcal{N}(Q_c^T)$,这就是$\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)\subset\mathcal{N}(Q_c^T)$.

综上所述, $\mathcal{N}(Q_c^T)=\mathcal{N}(\overline{Q}_c^T)$. 这就是所要求的结论.

状态反馈最重要的性质是它能够移动系统的极点. 如果结合它保持系统能控性不变的性质, 可以说,状态反馈能够移动能控子系统的极点. 但状态反馈是否能够移动能控子系统的全部极点呢？这是下面要讨论的问题.

定义 1.6.1 已知定常线性系统(1.6.1). 如果对任意给定的由n个复数组成的对称集合Λ（即若$\lambda_0\in\Lambda$,则它的共轭复数$\overline{\lambda}_0\in\Lambda$）,总存在$r\times n$阶常值矩阵$K$,使得$A+BK$的特征值集合为$\Lambda$, 那么就说系统(1.6.1)能任意极点配置,或者说(A,B)能任意极点配置.

在定义1.6.1中所说的任意极点配置,实际上是说通过状态反馈把系统(1.6.1)的极点移动到预先指定的位置上.由于状态反馈移动极点的能力受系统能控性的限制,故若系统能任意极点配置的话,一定要求这个系统完全能控.

定理 1.6.1 定常线性系统(1.6.1)能任意极点配置的充分必要条件是,它为完全能控系统.

证明 充分性. 假设系统(1.6.1)是完全能控的,证明它能任意极点配置. 为此分两步进行, 第一步讨论单输入情况,第二步讨论多输入情况.

a) 假设系统(1.6.1)是单输入的,即$r=1$,这时B为$n\times 1$阶矩阵, 记$B=b$. 由于(A,b)能控,因此存在一个坐标变换$\overline{x}=Tx$, 使得系统(1.6.1)变成第二能控标准形

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{b}u(t),\\ y(t)=\overline{C}\overline{x}(t),\end{cases} \tag{1.6.8}$$

其中

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\&&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2&\cdots&-\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\quad \overline{b}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix},\quad \overline{C}=CT^{-1}.$$

任给一个复数对称集合

$$\Lambda_0=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

希望寻找一个状态反馈规律,使得闭环系统的全部极点为Λ_0,而这组极点对应于闭环系统的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0,\end{aligned}$$

其中诸β_i由$\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$唯一决定；反之,由诸$\beta_i$又可唯一决定每个$\lambda_j$.

对系统(1.6.8)取状态反馈控制规律

$$u(t) = -\overline{k}^T\overline{x}(t) \tag{1.6.9}$$

其中$\overline{k}^T = (\overline{k}_0, \overline{k}_1, \cdots, \overline{k}_{n-1})$为实的行向量. 将状态反馈控制规律(1.6.9)作用于系统(1.6.8)得

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = (\overline{A} - \overline{b}\overline{k}^T)\overline{x}(t), \\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t). \end{cases} \tag{1.6.10}$$

闭环系统(1.6.10)的系统矩阵为

$$\overline{A} - \overline{b}\overline{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(\alpha_0 + \overline{k}_0) & -(\alpha_1 + \overline{k}_1) & -(\alpha_2 + \overline{k}_2) & \cdots & -(\alpha_{n-1} + \overline{k}_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

不难计算,闭环系统(1.6.10)的特征多项式为

$$f_c(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} + \overline{k}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 + \overline{k}_1)\lambda + (\alpha_0 + \overline{k}_0).$$

如果要求$f_c(\lambda) = f(\lambda)$,可以通过比较系数得出

$$\beta_i = \alpha_i + \overline{k}_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

从而有

$$\overline{k}_i = \beta_i - \alpha_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

由此可见,系统(1.6.8)通过状态反馈控制规律(1.6.9),使得闭环系统(1.6.10)的极点集合为Λ_0.

再取坐标反变换$x = T^{-1}\overline{x}$,这时闭环系统(1.6.10)变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - bk^T)x(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.6.11}$$

其中$k^T = \overline{k}^T T$. 由于坐标变换不改变系统的极点,因此系统(1.6.11)与系统(1.6.10)有相同的极点,于是有$\sigma(A - bk^T) = \Lambda_0$. 这就说明,对单输入系统(1.6.1),对任意给定的复对称集合Λ_0,都能找到一个k^T,使得$A - bk^T$的特征值集合为Λ_0,即系统(1.6.1)能任意极点配置.

b) 假设系统(1.6.1)是多输入的. 此时希望把它变成一个能控的单输入系统. 取反馈规律

$$u(t) = K_1x(t) + e_1v(t), \tag{1.6.12}$$

其中K_1为一个$r \times n$阶常值矩阵, $e_1^T = [1, 0, \cdots, 0]$, $v(t)$ 为一个标量. 于是将这个控制规律(1.6.12)作用于系统(1.6.1)中得到单输入系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK_1)x(t) + b_1v(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.6.13}$$

其中b_1是矩阵B的第一列组成的向量. 如果存在某K_1,使得$(A + BK_1, b_1)$完全能控,那么系统(1.6.13)就是一个单输入能控系统. 用已证明的第一部分得出的结论, 若任意给定复对称集合Λ_0,其个数为n,则

必存在某向量k_2,使得$A+BK_1+b_1k_2^T$的特征值集合为Λ_0. 注意$b_1=Be_1$,我们有$A+BK_1+b_1k_2^T=A+B(K_1+e_1k_2^T)$. 令

$$K=K_1+e_1k_2^T,$$

那么$A+BK$的特征值集合为Λ_0,这说明系统(1.6.1)能任意极点配置.

因此,问题的关键就在于证明,是否存在矩阵K_1,使得$(A+BK_1,b_1)$完全能控. 下面用构造性方法将K_1找出来.

设k_1是使

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{k_1-1}b_1$$

是线性独立的最大整数. 若$k_1=n$, 则$K_1=0$就是所求. 若$k_1<n$, 则采取如下方式构造K_1: 取

$$\begin{aligned} &x_1=b_1,\\ &x_i=Ax_{i-1}+b_1, \quad i=2,3,\cdots,k_1. \end{aligned}$$

从$b_1, Ab_1, \cdots, A^{k_1-1}b_1$的线性独立性容易推知, $x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}$也是线性独立的.

由于(A,B)能控,因此在B的列元中存在某列向量,比如说是b_2,使得它与$x_1,x_2,\cdots,x_{k_1}$线性独立. 设k_2是使

$$x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}, b_2, Ab_2, \cdots, A^{k_2-1}b_2$$

线性独立的最大正整数,并令

$$x_{k_1+i}=Ax_{k_1+i-1}+b_2, \quad i=1,2\cdots,k_2.$$

同样可以证明, $x_1,x_2,\cdots,x_{k_1},\cdots,x_{k_1+k_2}$也是线性独立的. 若$k_1+k_2=n$,就取这$n$个向量作为状态空间的一组基,否则,按上述方法继续做下去,由于(A,B)能控,那么总存在矩阵B的某列向量, 比如第l列构成的向量$b_l(l\le r)$,使得$k_1+k_2+\cdots+k_l=n$,并令

$$x_{j+i}=Ax_{j+i-1}+b_l, \quad i=1,2\cdots,k_l, \quad j=\sum_{\nu=1}^{l-1}k_\nu.$$

显然由此得到的$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性独立的.

根据x_i的定义,可以统一写成如下形式:

$$x_{i+1}=Ax_i+\widetilde{b}_i, \quad i=1,2\cdots,n-1, \tag{1.6.14}$$

其中$\widetilde{b}_i$是矩阵B的某一列. 因此必有γ_i,使得

$$\widetilde{b}_i=B\gamma_i \tag{1.6.15}$$

这时由式(1.6.14)和(1.6.15)得出

$$x_{i+1}=Ax_i+B\gamma_i, \quad i=1,2\cdots,n-1. \tag{1.6.16}$$

取

$$K_1=[\gamma_1\ \gamma_2\ \cdots\ \gamma_n][x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^{-1}. \tag{1.6.17}$$

于是

$$K_1x_i=\gamma_i.$$

从而改写式(1.6.16)为

$$x_{i+1}=(A+BK_1)x_i, \quad i=1,2\cdots,n-1.$$

而$x_1=b_1$是已经知道的事实. 由此看出向量

$$b_1,(A+BK_1)b_1,\cdots,(A+BK_1)^{n-1}b_1$$

是线性独立的. 从而说明$(A+BK_1,b_1)$是完全能控的. 于是由式(1.6.17)定义的矩阵K_1就是所求. 至此,定理的充分性就得到了证明.

必要性. 假设系统(1.6.1)能够任意极点配置, 要证(A,B)完全能控. 这里采用反证法. 如果(A,B)不完全能控,即系统(1.6.1)不完全能控. 前面曾经说过,由于状态反馈不能改变系统的输入解耦零点,因此,总有$\lambda_0\in\sigma(A)$,无论K取什么值, 必有$\lambda_0\in\sigma(A+BK)$. 这与系统(1.6.1)能任意极点配置矛盾. 所以(A,B) 一定是完全能控的. ∎

定理1.6.1是线性系统理论中的一个非常重要而有用的结果. 它说明,对一个完全能控系统,用状态反馈可以任意移动它的极点,这就体现了状态反馈对系统极点的移动能力.

在反馈控制系统设计中,最重要的问题之一是闭环系统的稳定性. 从极点配置的观点来看, 就是要把开环系统的极点经状态反馈移动到左半开平面内. 这就是系统镇定问题.

定义 1.6.2 已知定常线性系统(1.6.1). 如果存在一个状态反馈控制规律

$$u(t)=Kx(t),$$

使得闭环系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+BK)x(t),\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

稳定,即$A+BK$的特征值都在复平面的左半开平面内,那么就称这个系统是能稳的或能镇定的, 有时也简称矩阵对(A,B)是能稳的或能镇定的.

需要指出的是,极点配置和系统镇定是两个不完全相同的概念,前者要求在整个复平面内能够任意移动系统的极点,而后者只要求存在一个反馈增益矩阵K,使得闭环系统稳定就够了. 因此系统镇定问题比极点配置问题的能解性条件弱得多. 当然,当系统完全能控时,它必也能稳. 反之则不然. 由系统能稳的定义不难得出如下定理.

定理 1.6.2 定常线性系统(1.6.1)能稳的充分必要条件是,它的不能控振型都是稳定的, 或者说它的输入解耦零点都是系统的能稳振型.

证明留作习题.

系统的振型是指系统的极点,因此不稳定振型就是系统在右半闭平面内的极点.

从系统能稳的概念,通过对偶原理可以得到系统的能检测性概念. 假设定常线性系统(1.6.1)是完全能观测的,那么(A^T,C^T)必是完全能控的,从而它能任意极点配置,即存在矩阵G^T,使得$A^T+C^TG^T$或者等价地说$A+GC$有事先给定的特征值. 如果(A^T,C^T)能稳,那么就称(A,C)能检测,或者说系统(1.6.1)能检测. 能检测性是比能观测性弱的一个系统性质. 由定理1.6.2 不难得出如下推论:

推论 1.6.1 定常线性系统(1.6.1)能检测的充分必要条件是,它的不能观测振型都是稳定的, 或者说它的输出解耦零点都是系统的稳定振型.

能稳性和能检测性是系统的两个比能控性和能观测性弱的概念,但这两个概念是有用的,在后面的讨论中常常会用到它们.

最后指出,在一般情况下,做极点配置时,所寻找的反馈增益矩阵K并不唯一. 而这种不唯一性恰好为设计系统时, 使之具有其它性能带来更多选择的余地.

极点配置和系统镇定问题都是建立在状态反馈的基础之上的. 但是,一般来说,由于状态变量不总是完全能量测的,使得状态反馈在物理上不能实现. 由于系统的量测输出可以通过量测仪表量测得到,故物理上能实现的反馈通常是输出反馈. 输出反馈可分为静态输出反馈和动态输出反馈. 首先讨论静态输出反馈的性质和作用.

已知定常线性系统(1.6.1). 如果取反馈控制规律为

$$u(t)=Ky(t)+Gv(t), \tag{1.6.18}$$

其中K是一个$r\times m$阶常值矩阵, G是一个$r\times q$阶常值矩阵, $v(t)$是一个q维外加控制输入变量,那么闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+BKC)x(t)+BGv,\\ y(t)=Cx(t).\end{cases} \tag{1.6.19}$$

通常把反馈控制规律(1.6.18)叫做静态输出反馈, 矩阵K叫做静态输出反馈的增益矩阵.

显然,用静态输出反馈可以移动系统的极点. 但是,它不能象状态反馈那样,在能控子空间里任意移动极点. 这一点,可以通过一个具体例子来解释.

例 1.6.1 已知定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=u(t),\\ y(t)=x_1(t).\end{cases}$$

如果取状态反馈

$$u(t)=k_1x_1(t)+k_2x_2(t),$$

那么闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=k_1x_1(t)+k_2x_2(t),\\ y(t)=x_1(t).\end{cases}$$

原来开环系统的特征多项式为s^2,因此它的极点在坐标原点,即$s=0$. 经状态反馈后,闭环系统的特征多项式为$s^2-k_2s-k_1$. 由此可见,适当选择k_1和k_2,可以任意配置系统的极点,这正是状态反馈的优越性.

然而, 如果取静态输出反馈

$$u(t)=ky(t),$$

那么闭环系统变为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=kx_1(t),\\ y(t)=x_1(t).\end{cases}$$

这时,闭环系统的特征多项式为s^2-k. 显然, 当k的值变化时,闭环系统的极点只能在复平面的实轴和虚轴上变化. 这表明,静态输出反馈不能任意配置系统的极点.

当然,对有的系统,通过静态输出反馈有可能做到任意配置系统的极点,但这只是很个别的现象. 比如说,当B为可逆方阵时,只要系统完全能观测,用静态输出反馈就能实现任意极点配置.

静态输出反馈一般不能任意移动系统的极点,这是状态反馈和静态输出反馈最重要的区别.

前面说过,静态输出反馈一般不保持系统的能控性不变.但是静态输出反馈保持系统的能观测性不变. 这是它与状态反馈又一个明显的区别.

同样可以证明,静态输出反馈保持系统的不能观测振型不变,或者说保持系统的输出解耦零点不变.

此外还可以证明,静态输出反馈保持系统的不能观测子空间不变.

关于静态输出反馈的这些性质不再详细论证,读者会自行证明.

考察如下控制规律

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy(t),\\ u(t)=F_cx_c(t)+F_0y(t),\end{cases} \tag{1.6.20}$$

其中$x_c(t)$为l维状态, A_c, B_c, F_c, F_0分别为$l\times l$, $l\times m$, $r\times l$, $r\times m$阶常值矩阵. 这个控制规律是由一个动力学系统给出的,其输入是原来开环系统的量测输出,输出则正是所要求的原来开环系统的控制输入. 这类反馈控制规律叫做动态输出反馈. 把这种反馈控制规律作用于系统(1.6.1)得闭环系统为:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BF_0C & BF_c\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{1.6.21}$$

这时闭环系统的极点由矩阵

$$\begin{bmatrix}A+BF_0C & BF_c\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}$$

的特征值决定.

显然,在动态输出反馈作用下,闭环系统比开环系统提高了l阶,因而闭环系统的极点也增加了l个. 动态输出反馈规律(1.6.20)又叫做系统(1.6.1)的一个动态补偿器.

今后为叙述简单起见,把静态输出反馈简称为输出反馈,这不会与动态输出反馈相混淆.

用静态输出反馈一般不能任意移动系统极点,即不能任意极点配置. 于是,人们想到用动态输出反馈做极点配置.

假设系统(1.6.1)是完全能控和完全能观测的,因此有

$$\operatorname{rank}Q_c=n,\quad \operatorname{rank}Q_o=n.$$

如果存在最小的正整数μ_0和ν_0,使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{\mu_0-1}B\end{bmatrix}=n,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{\nu_0-1}\end{bmatrix}=n,$$

那么分别称μ_0和ν_0为系统(1.6.1)的能控指数和能观测指数.

为了讨论用动态输出反馈做极点配置的问题,先介绍一个有用的引理.

引理 1.6.1 [1, 15] 已知定常线性系统(1.6.1). 假设(A,B)能控,(A,C)能观测,则存在$r\times m$阶矩阵H,使得$(A+BHC,B)$能控,$(A+BHC,C)$能观测, 并且$A+BHC$是循环矩阵,即它的最小多项式是n次的.

需要指出的是, 给定矩阵A, B, C后,几乎所有的$r\times m$阶矩阵都可以用作H. 所以在某种意义上说,这样的H可以随便取.

本节的主要定理如下:

定理 1.6.3 已知定常线性系统(1.6.1). 假设这个系统完全能控和完全能观测,并且它的能观测指数为ν_0,那么对任给的含有$n+\nu_0-1$个复数的对称集合Λ, 都存在一个动态输出反馈控制规律(1.6.20),使得闭环系统(1.6.21)的极点集合为Λ,其中矩阵A_c, B_c, F_c和F_0分别是$(\nu_0-1)\times(\nu_0-1)$, $(\nu_0-1)\times m$,$r\times(\nu_0-1)$和$r\times m$ 阶常值矩阵.

证明 要解决的问题实际上是,在定理的假设下,寻找矩阵A_c, B_c, F_c和F_0,使得

$$\sigma\left(\begin{bmatrix}A+BF_0C & BF_c\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}\right)=\Lambda.$$

为使证明简单,不妨假设A是循环矩阵,否则由引理1.6.1知,存在矩阵H, 使得$A+BHC$是循环的,同时保持系统的能控性和能观测性不变.

由于(A,B)完全能控,并且A是循环矩阵,因此必有向量$b\in \mathrm{Image}(B)$, 使(A,b)完全能控[1, 15].

任取$(\nu_0-1)\times(\nu_0-1)$阶循环矩阵E,以及向量$g,h\in\mathbb{R}^{\nu_0-1}$,使得

$$h^Tg=h^TEg=\cdots=h^TE^{\nu_0-3}g=0,\quad h^TE^{\nu_0-2}g=1.$$

容易检验,矩阵对

$$\left(\begin{bmatrix}A & bh^T\\ 0 & E\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ g\end{bmatrix}\right)$$

是完全能控的. 根据定理1.6.1, 必存在向量$a\in\mathbb{R}^n$和$v\in\mathbb{R}^{\nu_0-1}$, 使得

$$\sigma\left(\begin{bmatrix}A & bh^T\\ ga^T & E+gv^T\end{bmatrix}\right)=\Lambda.$$

因为$b\in \mathrm{Image}(B)$,所以存在向量z,使得$b=Bz$. 令$F_c=zh^T$,这里F_c为$r\times(\nu_0-1)$阶矩阵. 于是$bh^T=BF_c$.

为了寻找所要求的矩阵,只需求$(\nu_0-1)\times m$阶矩阵B_c, $(\nu_0-1)\times(\nu_0-1)$阶矩阵A_c和向量$a\in \mathrm{Image}(C^T)$,使得矩阵

$$\begin{bmatrix}A & bh^T\\ ga^T & E+gv^T\end{bmatrix}\text{与}\begin{bmatrix}A+bd^T & bh^T\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}$$

相似. 如果有$(\nu_0-1)\times n$阶矩阵R,使得

$$\begin{bmatrix}A & bh^T\\ ga^T & E+gv^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ R & I_{\nu_0-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ R & I_{\nu_0-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A+bd^T & bh^T\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}$$

那么问题也就解决了. 而上述等式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}h^TR=d^T,\quad TR=R(A+bd^T)+B_cC-ga^T,\\ A_c=T-Rbh^T,\quad T=E+gv^T.\end{cases}\tag{1.6.22}$$

可见,如果能够从等式(1.6.22)中求出d^T, R和B_c,那么A_c自然就确定了.

假设等式(1.6.22)有解,然后具体地把d^T, R和B_c解出来,这样所得到的解一定满足要求. 为此,在(1.6.22)第二个等式的两边左乘h^TT^{i-1}, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu_0-2$,于是得出

$$h^TR\triangleq d^T\tag{1.6.23}$$

$$h^TT^iR=h^TT^{i-1}R(A+bd^T)+h^TT^{i-1}B_cC,\quad i=1,2,\cdots,\nu_0-2\tag{1.6.24}$$

$$h^TT^{\nu_0-1}R=h^TT^{\nu_0-2}R(A+bd^T)+h^TT^{\nu_0-2}B_cC-a^T.\tag{1.6.25}$$

将(1.6.23)-(1.6.24)代入式(1.6.25),并经简单计算得

$$\begin{aligned}h^TT^{\nu_0-1}R=\ & d^T(A+bd^T)^{\nu_0-1}+h^TB_cC(A+bd^T)^{\nu_0-2}\\ & +\cdots+h^TT^{\nu_0-3}B_cC(A+bd^T)+h^TT^{\nu_0-2}B_cC-a^T.\end{aligned}\tag{1.6.26}$$

由于(A,C)的能观测指数为ν_0,因此存在向量e和$\overline{e}_i, i=0,1,\cdots,\nu_0-2$,使得

$$a^T-e^TCA^{\nu_0-1}=\overline{e}_0^TC+\overline{e}_1^TCA+\cdots+\overline{e}_{\nu_0-2}^TCA^{\nu_0-2}$$

取$d^T=e^TC$,那么同时也存在向量$e_i, i=0,1,\cdots,\nu_0-2$,使得

$$a^T-e^TC(A+bd^T)^{\nu_0-1}=e_0^TC+e_1^TC(A+bd^T)+\cdots+e_{\nu_0-2}^TC(A+bd^T)^{\nu_0-2}\tag{1.6.27}$$

将式(1.6.27)代入式(1.6.26)得出

$$\begin{aligned}h^T T^{\nu_0-1} R = &(h^T B_c - e^T_{\nu_0-2})C(A+bd^T)^{\nu_0-2}\\&+(h^T T B_c - e^T_{\nu_0-3})C(A+bd^T)^{\nu_0-3}\\&+\cdots+(h^T T^{\nu_0-3} B_c - e^T_1)C(A+bd^T)\\&+(h^T T^{\nu_0-2} B_c - e^T_0)C\end{aligned} \tag{1.6.28}$$

另一方面,假设矩阵T的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^{\nu_0-1}-\theta_{\nu_0-2}\lambda^{\nu_0-2}-\cdots-\theta_1\lambda-\theta_0,$$

则有

$$T^{\nu_0-1}=\theta_{\nu_0-2}T^{\nu_0-2}+\cdots+\theta_1 T+\theta_0 I_{\nu_0-1}.$$

于是

$$h^T T^{\nu_0-1} R = h^T(\theta_{\nu_0-2}T^{\nu_0-2}+\cdots+\theta_1 T+\theta_0 I_{\nu_0-1})R \tag{1.6.29}$$

将等式(1.6.23)-(1.6.24)代入(1.6.29)得

$$\begin{aligned}h^T T^{\nu_0-1} R = &\theta_{\nu_0-2} d^T (A+bd^T)^{\nu_0-2}\\&+(\theta_{\nu_0-3} d^T+\theta_{\nu_0-2}h^T B_c C)(A+bd^T)^{\nu_0-3}\\&+\cdots+(\theta_1 d^T+\theta_2 h^T B_c C+\cdots+\theta_{\nu_0-2}h^T T^{\nu_0-4}B_c C)(A+bd^T)\\&+(\theta_0 d^T+\theta_1 h^T B_c C+\cdots+\theta_{\nu_0-2}h^T T^{\nu_0-3}B_c C)\end{aligned} \tag{1.6.30}$$

比较等式(1.6.30)和(1.6.28)的右边得出递推等式

$$\begin{aligned}a_0^T &= h^T B_c = e^T_{\nu_0-2}+\theta_{\nu_0-2}e^T\\a_1^T &= h^T T B_c = e^T_{\nu_0-3}+\theta_{\nu_0-3}e^T+\theta_{\nu_0-2}h^T B_c\\a_2^T &= h^T T^2 B_c = e^T_{\nu_0-4}+\theta_{\nu_0-4}e^T+\theta_{\nu_0-3}h^T B_c+\theta_{\nu_0-2}h^T T B_c\\&\ \ \vdots\\a^T_{\nu_0-2} &= h^T T^{\nu_0-2} B_c = e^T_0+\theta_0 e^T+\theta_1 h^T B_c+\cdots+\theta_{\nu_0-2}h^T T^{\nu_0-3}B_c\end{aligned} \tag{1.6.31}$$

由于矩阵

$$\begin{bmatrix}h^T\\h^T T\\\vdots\\h^T T^{\nu_0-2}\end{bmatrix}$$

是非奇异的,因此,可以从(1.6.31)解出

$$B_c=\begin{bmatrix}h^T\\h^T T\\\vdots\\h^T T^{\nu_0-2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_0^T\\a_1^T\\\vdots\\a^T_{\nu_0-2}\end{bmatrix} \tag{1.6.32}$$

然后再从等式(1.6.23)和(1.6.24)得出递推公式

$$\begin{aligned}
r_0^T &= h^T R = d^T\\
r_1^T &= h^T T R = r_0^T(A+bd^T) + a_0^T C,\\
r_2^T &= h^T T^2 R = r_1^T(A+bd^T) + a_1^T C,\\
&\vdots\\
r_{\nu_0-2}^T &= h^T T^{\nu_0-2} R = r_{\nu_0-3}^T(A+bd^T) + a_{\nu_0-3}^T C.
\end{aligned}$$

由此得出

$$R = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T T \\ \vdots \\ h^T T^{\nu_0-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_0^T \\ r_1^T \\ \vdots \\ r_{\nu_0-2}^T \end{bmatrix} \tag{1.6.33}$$

从而由(1.6.23), (1.6.32)和(1.6.33)便得到了要求的d^T, R和B_c.

取$F_0 = ze^T$,由b和d^T的定义知, $A + bd^T = A + BHC$, $bh^T = BF_c$. 于是

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} A + BF_0C & BF_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}\right) = \Lambda.$$

这就完成了定理的证明. ∎

从定理的证明中看出,用动态输出反馈做极点配置的问题,最终归结为寻找矩阵A_c, B_c, F_c和F_0. 现把求这些矩阵的步骤归纳如下：

(1) 取H_1,使得$A + BH_1C$为循环矩阵,令

$$A_1 = A + BH_1C;$$

(2) 取$b \in \mathrm{Image}(B)$,使得(A_1, b)完全能控,并取z,使得$b = Bz$;

(3) 取$(\nu_0 - 1)\times(\nu_0 - 1)$阶矩阵$E$,向量$g$和$h$为

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

(4) 按照极点配置方法求向量$a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^{\nu_0-1}$,使得矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & bh^T \\ ga^T & E + gv^T \end{bmatrix}$$

有预先指定的$n + \nu_0 - 1$个复特征值;

(5) 计算向量e^T和$\overline{e}_i^T, i = 0, 1, \cdots, \nu_0 - 2$,使得

$$a^T - e^T CA_1^{\nu_0-1} = \overline{e}_0^T C + \overline{e}_1^T CA_1 + \cdots + \overline{e}_{\nu_0-2}^T CA_1^{\nu_0-2};$$

然后,取

$$d^T = e^T C$$

请注意,其解不唯一;

(6) 计算向量$e_i^T, i=0,1,\cdots,\nu_0-2$,使得

$$a^T - e^T C(A_1+bd^T)^{\nu_0-1} = e_0^T C + e_1^T C(A_1+bd^T) + \cdots + e_{\nu_0-2}^T C(A_1+bd^T)^{\nu_0-2};$$

(7) 令$T=E+gv^T$,并求出它的特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^{\nu_0-1} - \theta_{\nu_0-2}\lambda^{\nu_0-2} - \cdots - \theta_1\lambda - \theta_0;$$

(8) 计算a_i和$r_i, i=0,1,\cdots,\nu_0-2$,

$$\begin{aligned}
&a_{\nu_0-i-2}^T = e_i^T + \theta_i e^T + \theta_{i+1} a_0^T + \cdots + \theta_{\nu_0-2} a_{\nu_0-i-2}^T, \quad i=0,1,\cdots,\nu_0-2\\
&r_0^T = e^T C\\
&r_{i+1}^T = r_i^T(A_1+bd^T) + a_i^T C, \quad i=0,1,\cdots,\nu_0-2;
\end{aligned}$$

(9) 计算

$$\begin{bmatrix} B_c & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T T \\ \vdots \\ h^T T^{\nu_0-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 & r_0 \\ a_1 & r_1 \\ \vdots & \\ a_{\nu_0-2} & r_{\nu_0-2} \end{bmatrix};$$

(10) 计算

$$A_c = T - Rbh^T, \quad F_c = zh^T, \quad F_0 = ze^T + H_1.$$

定理 1.6.4 设定常线性系统(1.6.1)完全能控且完全能观测,并且它的能控指数为μ_0,那么对任意给定的含有$n+\mu_0-1$个复数的对称集合Λ,都存在一个动态输出反馈控制规律(1.6.20),使得闭环系统(1.6.21)的极点集合为Λ, 其中A_c, B_c, F_c和F_0分别是$(\mu_0-1)\times(\mu_0-1)$, $(\mu_0-1)\times m$, $r\times(\mu_0-1)$和$r\times m$阶常值矩阵.

从定理1.6.3和1.6.4可以看出,由能控指数和能观测指数决定的动态输出反馈控制规律的动态阶数是不相同的,一个为μ_0-1阶的,一个为ν_0-1阶的. 它们是系统(1.6.1)的一类动态补偿器的阶数.

习题1.6

1.6.1 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + u_2(t), \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

证明：在状态反馈

$$\begin{cases} u_1(t) = -2x_2(t) + v_1(t), \\ u_2(t) = -3x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

下,闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + v_2(t), \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

是能控的,但不能观测.

1.6.2 证明定理1.6.2.

1.6.3 设系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

是能控的. 证明：对任意的$T>0$, 状态反馈控制

$$u=-B^TW^{-1}(0,T)x$$

使闭环系统

$$\dot{x}=[A-BB^TW^{-1}(0,T)]x$$

具有稳定极点. 这里,

$$W(0,T)=\int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt.$$

1.6.4 对给定形式的实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

证明: 如果系统

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

是能控的, 则必存在形如$u=Kx+w$的状态反馈控制使闭环系统

$$\dot{x}=(A+BK)x+Bw$$

等价于系统

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}w.$$

这里$\overline{A}_2$和$\overline{B}_1$是适当维数的实矩阵, 且$\overline{A}_2$和A_1具有互不相同的特征值.

1.6.5 证明：若(A,B)能控,且A稳定,则方程

$$A^TP+PA+BB^T=0$$

有唯一正定对称解P, 且类似于(1.1.16)该解P可由下式给出

$$P=\int_0^\infty e^{A^Tt}BB^Te^{At}dt.$$

1.6.6 已知定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t), \\ y(t)=Cx(t), \end{cases}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

如果预先给定复数集合$\Lambda=\{-1,-1,-1,-1,-1\}$,试用动态输出反馈配置系统的极点, 使闭环系统的极点集合为Λ.

§1.7 定常线性系统的状态观测器设计

虽然对完全能控的定常线性系统,通过状态反馈可以任意配置系统的极点,但是实际应用时, 由于客观条件的限制,系统的状态有时不能直接量测. 为克服此困难, 可以利用系统的输出和控制输入重构系统的状态,然后利用重构的状态设计所要求的控制律, 以实现极点任意配置和镇定系统等设计目标.这就是本节所要讨论的所谓状态重构, 有时也称状态估计问题.

研究定常线性系统(1.6.1). 假设它完全能控和完全能观测.

为了重构系统的状态,可以考虑使用系统量测输出和控制输入的导数. 由量测方程有

$$\dot{y}(t)=C\dot{x}(t). \tag{1.7.1}$$

再将状态方程引入等式(1.7.1)得

$$\dot{y}(t) - CBu(t) = CAx(t). \tag{1.7.2}$$

然后对等式(1.7.2)两边再取导数得

$$\ddot{y}(t) - CB\dot{u}(t) = CA\dot{x}(t). \tag{1.7.3}$$

于是得到

$$\ddot{y}(t) - CB\dot{u}(t) - CABu(t) = CA^2x(t)$$

按照这种方法继续下去,加上系统的量测方程,总可以得到一组代数方程:

$$Q_o x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CBu(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) - \sum_{i=0}^{n-2} CA^i Bu^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{1.7.4}$$

由于系统(1.6.1)完全能观测,因此有

$$\operatorname{rank} Q_o = n$$

于是矩阵$Q_o^T Q_o$是非奇异的,其逆存在,这样可以从方程(1.7.4)中解出

$$x(t) = (Q_o^T Q_o)^{-1} \left(C^T y(t) + \sum_{i=1}^{n-1} (A^T)^i C^T [y^{(i)}(t) - CBu^{(i-1)}(t) - \cdots - CA^{i-1}Bu(t)] \right). \tag{1.7.5}$$

从等式(1.7.5)看出,只要系统(1.6.1)完全能观测,那么系统状态就可以表示成系统输出、输入及其各阶导数的线性组合,从而被重构出来. 由此可见,对于完全能观测系统来说,尽管状态本身不能直接被量测得到,但是,总可以通过输入输出数据把它重构出来. 从理论上看,这种状态重构思想是合理而可行的,但是从实用角度考虑,这种方法是不可取的, 因为它必须用到输入输出的导函数,而这在量测和输入中包含高噪声时,它将使$x(t)$的重构值中包含很大的误差.

为了寻找一种实用可行的重构状态的方法,不要求重构状态在每个瞬时都能精确地与系统状态完全一致,而只要求它渐近地一致.这种重构出来的状态实际上是系统原状态的一种渐近估计. 如果考虑状态的渐近估计问题,自然可以从古典调节的伺服系统理论得到某种启发.假设把产生原系统(1.6.1)的状态估计的装置看成一个新的系统,这个新系统的输入是原系统的控制输入和量测输出,把原系统的状态看成新系统的参考输入信号,然后把新系统的状态看成它的输出,使之能跟踪这个参考输入信号.如果这种跟踪是可能的,那么这个新系统的输出就是原系统状态的一种渐近估计.现在设法把这种想法用数学语言描述出来.

设新系统的系统方程为

$$\dot{x}_e(t) = Fx_e(t) + Nu(t) + Gy(t), \tag{1.7.6}$$

其中$x_e(t)$为n维状态变量,也可以看作新系统的输出, $u(t)$和$y(t)$分别是原系统(1.6.1)的控制输入变量和量测输出变量, F, N和G分别为$n \times n$, $n \times r$ 和$n \times m$阶常值矩阵. 又令

$$e(t) = x_e(t) - x(t)$$

为新系统状态跟踪原系统状态的误差信号. 因为希望新系统能跟上原系统的状态,所以必须要求对任意初始状态$x(t_0)$, $x_e(t_0)$和控制输入$u(t)$都有

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0. \tag{1.7.7}$$

如果这种跟踪能实现,则称系统(1.7.6)是系统(1.6.1)的一个全状态观测器, 简称状态观测器, $x_e(t)$为系统(1.6.1)的状态估计, $e(t)$为估计误差.

下面研究状态观测器的结构.

假设系统(1.7.6)是系统(1.6.1)的一个状态观测器,即对任意初始状态$x(t_0)$, $x_e(t_0)$和控制输入$u(t)$,式(1.7.7)成立. 由$e(t)$的定义及系统(1.6.1)和(1.7.6)得出

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (F - A + GC)x(t) + (N - B)u(t). \tag{1.7.8}$$

根据假设,取$u(t) \equiv 0$, $x(t_0) = 0$,那么必有$x(t) \equiv 0$,这时由式(1.7.8)得

$$\dot{e}(t) = Fe(t). \tag{1.7.9}$$

而对(1.7.9)也应该有

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.$$

由此可见,矩阵F的所有特征值必都有负实部. 再由$u(t)$和$x(t)$的任意性可从式(1.7.8) 得出

$$F = A - GC, \quad N = B.$$

可见,观测器的结构应该为

$$\dot{x}_e(t) = (A - GC)x_e(t) + Bu(t) + Gy(t), \tag{1.7.10}$$

并且$A - GC$的所有特征值都有负实部,这时估计误差满足方程

$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t). \tag{1.7.11}$$

通常称G为观测器的增益矩阵.

反之,如果给定系统(1.7.6),并且$F = A - GC$, $N = B$, F的特征值都有负实部, 则由(1.7.8)可以看出,对任意$x(t_0)$, $x_e(t_0)$和$u(t)$都有式(1.7.11)成立. 所以(1.7.6)的确是系统(1.6.1)的一个状态观测器.

综合以上的讨论,可以给出关于状态观测器结构的定理.

定理 1.7.1 已知定常线性系统(1.6.1)和(1.7.6). 系统(1.7.6)成为系统(1.6.1)的一个状态观测器的充分必要条件是

(1) $F = A - GC$;

(2) F的所有特征值都有负实部;

(3) $N = B$.

从定理1.7.1来看,设计系统(1.6.1)的状态观测器,关键在于确定观测器增益矩阵G,使得$A-GC$的所有特征值都有负实部. 当给定系统(1.6.1)后,什么时候它存在状态观测器呢？下面的定理是显见的.

定理 1.7.2 定常线性系统(1.6.1)有一个状态观测器的充分必要条件是(A, C)能检测.

显然,如果系统(1.6.1)完全能观测,那么它必存在状态观测器. 对完全能观测的系统, 观测器的极点可以在复平面的左半开平面内任意配置. 因此,能够做到观测器的状态以任意快的速度逼近系统(1.6.1)的状态. 往后,把特征值都有负实部的矩阵叫做稳定矩阵.

例 1.7.1 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases}$$

试对它设计一个状态观测器.

解: 不难验证,所给出的系统是完全能观测的,因而它存在状态观测器. 问题是如何确定观测器的增益矩阵G,使得$A - GC$是稳定的. 这里A和C是系统的系统矩阵和观测矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

如果令G为

$$G=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix}$$

那么

$$A-GC=\begin{bmatrix}-g_1 & 1\\1-g_2 & 0\end{bmatrix}$$

假设要求观测器的极点为$-\alpha\pm\beta j\ (\alpha,\ \beta>0)$,那么,观测器的特征多项式应为

$$f(\lambda)=\lambda^2+2\alpha\lambda+(\alpha^2+\beta^2)$$

而它就是矩阵$A-GC$的特征多项式,即

$$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A-GC)]=\det\begin{bmatrix}\lambda+g_1 & -1\\g_2-1 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+g_1\lambda+(g_2-1)$$

由此可见, $g_1=2\alpha$, $g_2=\alpha^2+\beta^2+1$.

于是,在G决定之后,由观测器的结构定理可知,所给系统的状态观测器为

$$\begin{cases}\dot{x}_{1e}(t)=-2\alpha x_{1e}(t)+x_{2e}(t)+u_1(t)+2\alpha y(t),\\\dot{x}_{2e}(t)=-(\alpha^2+\beta^2)x_{1e}(t)+u_2(t)+(1+\alpha^2+\beta^2)y(t).\end{cases}$$

$\blacksquare$

例 1.7.2 已知定常线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\mu x_2+u_1(t),\\\dot{x}_2(t)=-\mu x_1(t)+u_2(t),\\\dot{x}_3(t)=u_3(t),\\y_1(t)=x_1(t),\\y_2(t)=x_2(t)-x_3(t),\end{cases}$$

其中$\mu>0$为常数,试做它的状态观测器.

解: 不难验证,这个系统是完全能观测的. 令

$$A=\begin{bmatrix}0 & \mu & 0\\-\mu & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix},\quad u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{bmatrix},\quad y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix},$$

则上述系统可改写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+u(t),\\y(t)=Cx(t).\end{cases}$$

依定理1.7.1,观测器结构为

$$\dot{x}_e(t)=(A-GC)x_e(t)+u(t)+Gy(t).$$

现在要确定增益矩阵G,使矩阵$A-GC$是稳定的. 假设要求观测器的极点为$-\alpha,\ \alpha\pm\beta j\ (\alpha,\ \beta>0)$,则观测器的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda+\alpha)(\lambda^2+2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2).$$

另一方面,观测器的特征多项式又为

$$f(\lambda)=\det[\lambda I_3-(A-GC)].$$

于是有

$$\det[\lambda I_3-(A-GC)]=(\lambda+\alpha)(\lambda^2+2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2).$$

由此可以决定矩阵G的诸元. 但是,这样做比较复杂,常常需要解关于G的元的非线性代数方程,且其解不唯一.当然,这种不唯一性是有利的,它有可能照顾到系统其它性能的要求. 对于求G问题不再多谈,这实际上是做极点配置的一种方法.当然,还有其它方法可达到同样的目的.

在一些情形下, 可以将原系统分为两个子系统,然后对每个子系统单独设计观测器,最后再把两个观测器合起来成为原系统的观测器,而每个子系统的观测器都是比较容易设计的,并且阶数较低.

观察本例所给系统发现,系统状态变量之间存在着解耦关系,即前两个状态变量不受第三个状态变量的影响. 根据这个特点,考虑将系统分解为如下两个子系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\mu x_2+u_1(t),\\ \dot{x}_2(t)=-\mu x_1(t)+u_2(t),\\ y_1(t)=x_1(t),\end{cases}\tag{1.7.12}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_3(t)=u_3(t),\\ y_2(t)=-x_3(t)+x_2(t).\end{cases}\tag{1.7.13}$$

首先,研究子系统(1.7.12)的状态观测器. 这是一个二阶系统,它的量测输出是一维的, 故增益系数只有两个,设为g_1和g_2. 这时,系统的观测器方程应为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1e}(t)\\ \dot{x}_{2e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-g_1 & \mu\\ -g_2-\mu & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1e}(t)\\ x_{2e}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}y_1(t).$$

现在决定增益常数g_1和g_2.

观测器的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda+g_1 & -\mu\\ \mu+g_2 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+g_1\lambda+\mu(\mu+g_2).$$

如果希望这个观测器的极点为$\alpha\pm\beta j\ (\alpha,\ \beta>0)$, 那么又有

$$f(\lambda)=\lambda^2+2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2=\lambda^2+g_1\lambda+\mu^2+\mu g_2.$$

由此可见,

$$g_1=2\alpha,\quad g_2=\frac{1}{\mu}[(\alpha^2+\beta^2)-\mu^2].$$

于是子系统(1.7.12)的观测器就设计出来了.

然后,研究子系统(1.7.13)的观测器. 在这个子系统中, $x_2(t)$不能量测,今用子系统(1.7.12)的观测器得到的$x_{2e}(t)$代替它. 于是子系统(1.7.13) 又可写成

$$\begin{cases}\dot{x}_3(t)=u_3(t),\\ y_2(t)-x_{2e}(t)=-x_3(t),\end{cases}\tag{1.7.14}$$

而相应的子系统的观测器方程为

$$\dot{x}_{3e}(t) = -g_3 x_{3e}(t) + u_3(t) + g_3(y_2(t) - x_{2e}(t)),$$

这里要求$g_3 > 0$.

将两个子系统的观测器组合在一起得出：

$$\begin{cases} \dot{x}_{1e}(t) = -g_1 x_{1e}(t) + \mu x_{2e}(t) + u_1(t) + g_1 y_1(t), \\ \dot{x}_{2e}(t) = -(g_2 + \mu) x_{1e}(t) + u_2(t) + g_2 y(t), \\ \dot{x}_{3e}(t) = -g_3 x_{3e}(t) - g_3 x_{2e}(t) + u_3(t) + g_3 y_2(t). \end{cases}$$

今证上述三个方程组成原系统的一个状态观测器. 事实上,令

$$e_i(t) = x_{ie}(t) - x_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

于是得出

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & \mu & 0 \\ -(\mu + g_2) & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & -g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}.$$

显然

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + g_1 & -\mu & 0 \\ \mu + g_2 & \lambda & 0 \\ 0 & g_3 & \lambda + g_3 \end{bmatrix} = (\lambda + g_3)(\lambda^2 + g_1 \lambda + \mu(\mu + g_2)).$$

因为$g_3 > 0$, 并且$\lambda^2 + g_1\lambda + \mu(\mu + g_2)$的零点为$-\alpha \pm \beta j$ $(\alpha > 0)$,所以矩阵

$$\begin{bmatrix} -g_1 & \mu & 0 \\ -(\mu + g_2) & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & -g_3 \end{bmatrix}$$

是稳定的,从而必有

$$\lim_{t \to \infty} e_i(t) = 0.$$

这表明组合起来的两个子系统观测器确是原系统的状态观测器. ∎

这样做可以简化问题,便于参数选择. 但是必须注意,不是所有系统的观测器都能这样拆成两个子系统分别设计的.

例1.7.1研究了设计所给系统的状态观测器的问题. 这里有一个状态变量就是系统的量测输出,也就是说,这个状态变量是直接可以量测的,为得到系统的状态估计,只要再估计出另一个状态变量就可以了. 这样,相应的系统可改写成

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = u(t) + y(t), \\ z(t) = x_2(t). \end{cases}$$

这里$z(t) = \dot{x}_1(t) - u_1(t) = \dot{y}(t) - u_1(t)$. 在这个系统中,新的量测变量为$z(t)$,用它可设计出观测器

$$\dot{x}_{2e}(t) = -g x_{2e}(t) + u_2(t) + y(t) + g z(t).$$

只要$g > 0$,就有$\lim\limits_{t \to \infty}(x_{2e}(t) - x_2(t)) = 0$. 将$z(t)$ 的表达式代到观测器方程中去,得出

$$\dot{x}_{2e}(t) = -g x_{2e}(t) + (u_2(t) - g u_1(t)) + y(t) + g \dot{y}(t).$$

在这个观测器方程中,用到了量测数据的导数,这在物理上是不可实现的. 为此令

$$w(t) = x_{2e}(t) - gy(t),$$

于是

$$\dot{w}(t) = -gw(t) + (u_2(t) - gu_1(t)) + (1 - g^2)y(t).$$

这时系统的状态观测器方程为

$$\begin{cases} x_{1e}(t) = y(t), \\ x_{2e}(t) = w(t) + gy(t), \\ \dot{w}(t) = -gw(t) + (u_2(t) - gu_1(t)) + (1 - g^2)y(t). \end{cases}$$

这个观测器比原来系统的观测器少了一阶,所以称它为原系统的降阶观测器. 就这个例子中所给的系统来说,降阶观测器的阶数不能再降低了, 这样的观测器称为极小阶观测器.

下面对一般系统讨论极小阶观测器问题.

已知定常线性系统(1.6.1). 假设$\operatorname{rank} C = m$. 令

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},$$

其中A_{11}, A_{22}, B_1, C_1分别为$m \times m$, $(n-m) \times (n-m)$, $m \times r$, $m \times m$阶矩阵, 而A_{12}, A_{21}, B_2, C_2为相应阶数的矩阵. 不失一般性,设$\operatorname{rank} C_1 = m$, 还可假设$C = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$. 否则,经坐标变换

$$\overline{x} = Px$$

总可以将C化成这种形式,这里

$$P = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

于是, 系统(1.6.1)可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \tag{1.7.15}$$

由系统(1.7.15)看出,状态变量$x_1(t)$是直接能量测的. 记

$$z(t) \triangleq \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t) = \dot{y}(t) - A_{11}y(t) - B_1u(t),$$

则可将系统(1.7.15)写成

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t), \\ z(t) = A_{12}x_2(t). \end{cases} \tag{1.7.16}$$

这里把$y(t)$和$u(t)$都作为已知输入信号处理.

对系统(1.7.16)设计状态观测器. 需要说明(A_{22}, A_{12})是完全能观测的.

引理 1.7.1 已知系统(1.7.15)和(1.7.16). (A_{22}, A_{12})完全能观测的充分必要条件是(A, C)完全能观测.

证明 由于

$$(A, C) = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \right),$$

所以

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank} Q_o &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A_{11} & A_{12} \\ A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A_{12} \\ 0 & A_{12}A_{22} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & A_{12}A_{22}^{n-m-1} \end{bmatrix} = m + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ \vdots \\ A_{12}A_{22}^{n-m-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

由此可见, $\operatorname{rank} Q_0 = n$的充分必要条件是

$$
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ \vdots \\ A_{12}A_{22}^{n-m-1} \end{bmatrix} = n - m.
$$

这说明(A, C)完全能观测的充分必要条件是(A_{22}, A_{12})完全能观测,从而引理得证. ▮

假设系统(1.6.1)是完全能观测的,则(A_{22}, A_{12})也是完全能观测的,从而系统(1.7.16)的状态观测器是存在的. 也就是说,存在一个$(n-m)\times m$阶常值矩阵G_2, 使得$A_{22}-G_2A_{12}$是稳定的. 这样,系统(1.7.16)的状态观测器方程可写成

$$
\dot{x}_{2e}(t) = (A_{22} - G_2A_{12})x_{2e}(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t) + G_2z(t). \tag{1.7.17}
$$

将$z(t)$的表达式代到观测器方程(1.7.17)中去得出

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{2e}(t) &= (A_{22} - G_2A_{12})x_{2e}(t) + (A_{21} - G_2A_{11})y(t) \\
&\quad + (B_2 - G_2B_1)u(t) + G_2\dot{y}(t).
\end{aligned} \tag{1.7.18}
$$

然而,由于在观测器方程(1.7.18)中,输入数据包含着量测数据的导数$\dot{y}(t)$, 因此, 在物理上不可实现. 为此, 令

$$
z_c(t) = x_{2e}(t) - G_2y(t),
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_c(t) &= (A_{22} - G_2A_{12})z_c(t) + (B_2 - G_2B_1)u(t) \\
&\quad + [(A_{21} - G_2A_{11}) + (A_{22} - G_2A_{12})G_2]y(t).
\end{aligned}
$$

这时

$$
x_{2e}(t) = z_c(t) + G_2y(t).
$$

综合所述,有如下定理:

定理 1.7.3 已知定常线性系统(1.6.1). 假设它是完全能观测的,并且$C = [I_m\ 0]$,那么存在一个极小阶观测器

$$
x_{2e}(t) = z_c(t) + G_2y(t) \tag{1.7.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_c(t) &= (A_{22} - G_2A_{12})z_c(t) + (B_2 - G_2B_1)u(t) \\
&\quad + [(A_{21} - G_2A_{11}) + (A_{22} - G_2A_{12})G_2]y(t),
\end{aligned} \tag{1.7.20}
$$

其中G_2为极小阶观测器的增益常数矩阵,它使得$A_{22} - G_2A_{12}$是稳定的.

例 1.7.3 找出例1.7.2中定常线性系统的一个极小阶观测器.

解: 首先写出系统的状态空间表达式,为此令

$$A=\begin{bmatrix}0 & \mu & 0\\ -\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix},\quad u(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{bmatrix},\quad y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+u(t),\\ y(t)=Cx(t),\end{cases}$$

这里$C=[C_1\ C_2]$,而且

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}.$$

取

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

那么

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

做坐标变换$\overline{x}=Px$, 得代数等价系统

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{B}u(t),\\ y(t)=\overline{C}\overline{x}(t),\end{cases}\tag{1.7.21}$$

其中

$$\overline{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \mu & \mu\\ -\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \overline{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\overline{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

令

$$\overline{A}_{11}=\begin{bmatrix}0 & \mu\\ -\mu & 0\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{12}=\begin{bmatrix}\mu\\ 0\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{22}=0,$$

$$\overline{C}_1=I,\quad \overline{C}_2=0,\quad \overline{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad \overline{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

于是系统(1.7.21)又可写成

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\overline{x}_1(t).\end{cases}\tag{1.7.22}$$

根据极小阶观测器的设计原则得到

$$\begin{cases} \overline{x}_{2e}(t) = z_c(t) + G_2 y(t), \\ \dot{z}_c(t) = -G_2 \overline{A}_{12} z_c(t) + (\overline{B}_2 - G_2 \overline{B}_1) u(t) \\ \qquad\qquad -G_2[\overline{A}_{11} + \overline{A}_{12} G_2] y(t). \end{cases} \tag{1.7.23}$$

由$\overline{A}_{12}$的具体形式发现G_2是一个二维行向量,令$G_2 = [g_1,\ g_2]$, 则观测器方程(1.7.23)可写为

$$\begin{cases} \overline{x}_{2e}(t) = z_c(t) + g_1 y_1(t) + g_2 y_2(t), \\ \dot{z}_c(t) = -\mu g_1 z_c(t) - g_1 u_1(t) - g_2 u_2(t) + (1 + g_2) u_3(t) \\ \qquad\qquad -\mu(g_1^2 - g_2) y_1(t) - g_1 \mu (1 + g_2) y_2(t). \end{cases}$$

为保证由上述方程给定的系统成为一个观测器,只要$g_1 > 0$即可, g_2可任意选取. 为了简单起见,取$g_2 = 0$,于是得出

$$\begin{cases} \overline{x}_{2e}(t) = z_c(t) + g_1 y_1(t), \\ \dot{z}_c(t) = -\mu g_1 z_c(t) - g_1 u_1(t) + u_3(t) - \mu g_1^2 y_1(t) - g_1 \mu y_2(t), \end{cases} \tag{1.7.24}$$

这就是系统(1.7.21)的极小阶观测器方程. 将它代回原系统有

$$\begin{bmatrix} x_{1e}(t) \\ x_{2e}(t) \\ x_{3e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \overline{x}_{2e}(t) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_{1e} = y_1(t), \\ x_{2e} = g_1 y_1(t) + y_2(t) + z_c(t), \\ x_{3e} = g_1 y_1(t) + z_c(t), \end{cases}$$

其中$z_c(t)$满足方程(1.7.24), $x_{1e}(t)$, $x_{2e}(t)$和$x_{3e}(t)$分别是$x_1(t)$, $x_2(t)$和$x_3(t)$的渐近估计状态变量.

按照极小阶观测器的设计方法所得到的观测器系统是一阶的,这比分成两个子系统单独设计还要简单.

习题1.7

1.7.1 已知某系统的传递函数为

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

(a) 给出该系统的一个最小实现;

(b) 为该最小实现设计一个状态观测器, 使系统状态与观测器状态之间的误差收敛到零.

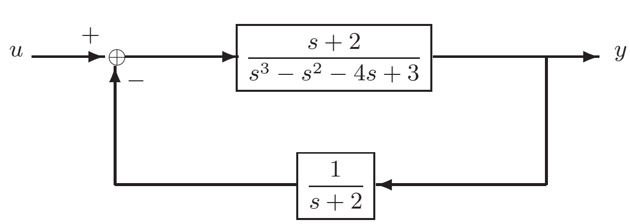
1.7.2 已知某系统的传递函数为

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2},$$

(a) 给出该系统的一个最小实现;

(b) 为该最小实现设计一个状态观测器, 使系统状态与观测器状态之间的误差以不低于e^{-t}的速度收敛到零.

1.7.3 已知某系统的输出y和输入u的关系由如下框图确定



(a) 求出该系统的输入输出传递函数.

(b) 为该传递函数设计一个最小状态空间实现.

(c) 为该最小实现设计一个最小阶状态观测器,使该观测器状态与系统状态之间的误差以不低于e^{-2t}的速度收敛到零.

§1.8 定常线性系统的输出调节问题

本节讨论线性控制系统的调节问题.调节理论在工程中实际有十分广泛的应用, 它是控制系统设计的核心内容之一.

最一般线性调节系统的数学模型为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_3x_2(t) + B_1u(t),\\ \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t),\\ y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),\\ z(t) = D_1x_1(t) + D_2x_2(t),\end{cases} \tag{1.8.1}$$

其中$x_1(t)$为n_1维系统状态, $x_2(t)$为n_2维外部输入, 它可能是干扰输入, 也可能是参考输入, $u(t)$为r维控制输入, $y(t)$为m维量测输出, $z(t)$为q维调节输出; A_1, A_2, A_3, B_1, C_1, C_2, D_1和D_2分别是具有相应维数的常值矩阵.

如果$C_2 = 0$, $D_2 = 0$,那么系统(1.8.1)代表一个纯调节系统； 如果$A_3 = 0$,那么系统(1.8.1)代表纯跟踪系统； $z(t)$表示跟踪误差. 一般来说,系统(1.8.1)表示一个带有干扰输入和参考输入的跟踪系统. 因为跟踪问题与调节问题没有本质上的区别,所以总是把系统(1.8.1) 看成一个调节系统.

这个模型与前面几节所研究的系统不同之处在于,这里考虑了系统外部干扰输入或参考输入对系统的影响. 同时在一般系统中,被调节变量和量测变量可能不同,因此也把它们区分开来.

对一个实际系统,存在外部干扰是不可避免的. 在研究调节问题时注意到这一点是有实际工程意义的. 对于系统的精度,稳定的外部输入信号是可以忽略不计的,因此总可以假设$x_2(t)$是不稳定的. 在本节里,始终假设

$$\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}}^+$$

这里及今后$\mathbb{C}^+$表示复平面的右半开平面, $\mathbb{C}^-$表示复平面的左半开平面, 而$\overline{\mathbb{C}}^+$表示复平面的右半闭平面. 同时,还假设

$$\operatorname{rank} B_1 = r, \quad \operatorname{rank} D_1 = q, \quad \operatorname{rank}[C_1 \quad C_2] = m.$$

解决输出调节问题的主要目的是,对系统(1.8.1)设计一个动态补偿器

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cy(t),\\ u(t) = F_cx_c(t) + Fy(t),\end{cases} \tag{1.8.2}$$

其中$x_c(t)$是l维状态变量, A_c, B_c, F_c和F分别是$l \times l$, $l \times m$, $r \times l$和$r \times m$阶常值矩阵,使得闭环系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_3 + B_1FC_2\\ B_cC_2\end{bmatrix}x_2\\ z(t) = D_1x_1(t) + D_2x_2(t)\end{cases} \tag{1.8.3}$$

具有如下性质：

(1) 它是内部稳定的, 即

$$\sigma\left(\begin{bmatrix}A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{C}^-;$$

(2) 它是输出调节（或输出无静差）的, 即对任意$x_{20}=x_2(t_0)$, 都有

$$\lim_{t\to\infty} z(t)=0.$$

定义 1.8.1 已知定常线性系统(1.8.1)和动态补偿器(1.8.2). 如果这个动态补偿器使得闭环系统(1.8.3)是内部稳定的和输出调节的, 那么(1.8.2)就叫做系统(1.8.1)的一个综合（或无静差补偿器）. 带有无静差补偿器的闭环系统叫做无静差系统, 或者叫做稳定的输出调节系统.

为分析输出调节系统的结构性质,令

$$A_L=\begin{bmatrix} A_1+B_1FC_1 & B_1F_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix},\quad B_L=\begin{bmatrix} A_3+B_1FC_2\\ B_cC_2\end{bmatrix},$$
$$D_L=\begin{bmatrix} D_1 & 0\end{bmatrix},\quad x_L(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix},$$

那么闭环系统(1.8.3)可写成

$$\begin{cases}\dot x_L(t)=A_Lx_L(t)+B_Lx_2(t),\\ \dot x_2(t)=A_2x_2(t),\\ z(t)=D_Lx_L(t)+D_2x_2(t).\end{cases}\tag{1.8.4}$$

假设$\sigma(A_L)\subset\mathbb{C}^-$, $\sigma(A_2)\subset\overline{\mathbb{C}}^+$. 于是,对系统(1.8.4)有如下一个重要引理：

引理 1.8.1 （输出调节系统的结构定理）已知系统(1.8.4),设$\sigma(A_L)\subset\mathbb{C}^-$, $\sigma(A_2)\subset\overline{\mathbb{C}}^+$. 使系统(1.8.4)是输出调节的充分必要条件是,存在一个$(n_1+l)\times n_2$阶常值矩阵V,使得

$$A_LV-VA_2=B_L,\quad D_LV=D_2.\tag{1.8.5}$$

证明 充分性. 假设存在相应的常值矩阵V, 使得等式(1.8.5)成立. 令

$$\widehat{x}_L=x_L(t)+Vx_2(t).$$

将它代入系统(1.8.4)得出

$$\dot{\widehat{x}}_L=A_L\widehat{x}_L(t),\quad z(t)=D_L\widehat{x}_L(t).$$

由于$\sigma(A_L)\subset\mathbb{C}^-$,因此对任意$\widehat{x}_L(t_0)$都有

$$\lim_{t\to\infty}\widehat{x}_L(t)=0,$$

从而对任意$x_{20}=x_2(t_0)$, 有

$$\lim_{t\to\infty} z(t)=0.$$

根据定义, 系统(1.8.4)是输出调节的.

必要性. 设系统(1.8.4)是输出调节的,那么对任意$x_2(t_0)=x_{20}$都有

$$\lim_{t\to\infty} z(t)=0.\tag{1.8.6}$$

另一方面,由于$\sigma(A_L)\cap\sigma(A_2)=\emptyset$,其中$\emptyset$表示空集. 那么由定理1.1.2必存在唯一常值矩阵V,使得

$$A_LV-VA_2=B_L.$$

令

$$\widehat{x}_L=x_L(t)+Vx_2(t),$$

于是有

$$\dot{\widehat{x}}_L = A_L\widehat{x}_L(t). \tag{1.8.7}$$

由于$\sigma(A_L) \subset \mathbb{C}^-$,因此由方程(1.8.7)可知,对任意$\widehat{x}_L(t_0)$ 都有

$$\lim_{t\to\infty} \widehat{x}_L(t) = 0. \tag{1.8.8}$$

又由(1.8.6)和(1.8.4)的第三式知

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{t\to\infty} z(t) &= \lim_{t\to\infty}(D_L x_L(t) + D_2 x_2(t)) \\ &= \lim_{t\to\infty}(D_L\widehat{x}_L(t) + (D_2 - D_L V)x_2(t)) \\ &= \lim_{t\to\infty}(D_2 - D_L V)x_2(t). \end{aligned}$$

注意当$x_{20} \neq 0$时,或者$\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$不存在, 或者$\lim\limits_{t\to\infty} |x_2(t)| = \infty$. 所以有

$$D_L V = D_2.$$

必要性得证. ∎

推论 1.8.1 已知闭环系统是内部稳定的. 那么它是输出调节的充分必要条件是,存在$n_1 \times n_2$和$l \times n_2$阶常值矩阵V_1和V_2,使得等式

$$\begin{cases} (A_1 + B_1 F C_1)V_1 - V_1 A_2 + B_1 F_c V_2 = A_3 + B_1 F C_2, \\ B_c C_1 V_1 + A_c V_2 - V_2 A_2 = B_c C_2, \\ D_1 V_1 = D_2 \end{cases} \tag{1.8.9}$$

成立.

前面说过,调节器理论中的基本问题是动态补偿器的设计. 为便于理解, 暂时不考虑干扰信号对系统的影响,同时认为量测输出就是被调节输出. 于是在这些假设下,对系统(1.8.1)作如下假设：

$$A_3 = 0, \quad C_1 = D_1, \quad C_2 = D_2 = 0,$$

这时$y(t) = z(t)$. 为书写简单,这一节把下标1都省略去,因此系统(1.8.1)就是在前几节研究的系统(1.6.1). 下面介绍三种关于系统(1.6.1)的动态补偿器的设计方法：

1. 由状态反馈加全状态观测器构成的动态补偿器

假设系统(1.6.1)是完全能控和完全能观测的,即(A, B)能控, (A, C)能观测,那么依定理1.6.1,存在状态反馈控制规律

$$u(t) = Kx(t) \tag{1.8.10}$$

使得矩阵$A + BK$是稳定的,其中K是$r \times n$阶常值控制增益矩阵.

但是,由于状态反馈控制规律(1.8.10)在物理上不能实现,因此需要重构状态$x(t)$. 由于(A, C)能观测,那么存在$n \times m$阶常值观测器增益矩阵G,使得$A - GC$是稳定的. 由观测器的结构性质可以看出,系统(1.6.1)的状态观测器为

$$\dot{x}_e(t) = (A - GC)x_e(t) + Bu(t) + Gy(t).$$

于是,取系统(1.6.1)的动态补偿器为

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = (A - GC)x_e(t) + Bu(t) + Gy(t), \\ u(t) = Kx_e(t). \end{cases}$$

这是一个物理上能实现的动态输出反馈控制规律. 若将$u(t)=Kx_e(t)$代到观测器方程中, 得出所要求的动态补偿器为

$$\begin{cases}\dot{x}_e(t)=(A-GC+BK)x_e(t)+Gy(t),\\ u(t)=Kx_e(t).\end{cases} \tag{1.8.11}$$

现说明动态补偿器(1.8.11)的确是系统(1.6.1)的一个无静差补偿器.

事实上,如果将动态补偿器用于系统(1.6.1),那么可以得到闭环系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_e(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BK\\ GC & A-GC+BK\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_e(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_e(t)\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{1.8.12}$$

令

$$e(t)=x_e(t)-x(t),$$

可得

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -I_n & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_e(t)\end{bmatrix}.$$

在这个坐标变换下,系统(1.8.12)变成代数等价系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BK & BK\\ 0 & A-GC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}.\end{cases}$$

由于矩阵$A+BK$和$A-GC$都是稳定的,因此矩阵

$$\begin{bmatrix}A+BK & BK\\ 0 & A-GC\end{bmatrix}$$

也是稳定的,从而必有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}e(t)=0,$$

于是有$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. 这说明动态补偿器(1.8.11)是系统(1.6.1)的一个无静差补偿器. 其实,这个动态补偿器不仅使调节输出是无静差的,而且使状态变量也是无静差的,它是一个性能相当强的动态补偿器.

2. 由状态反馈加极小观测器构成的动态补偿器

假设$C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}$,并且$\operatorname{rank}C_1=m$, C_1是一个$m\times m$阶矩阵,因而它是非奇异的. 如果对系统(1.6.1)做坐标变换

$$\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \tag{1.8.13}$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}$$

记

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \overline{x}=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix},$$

则系统(1.6.1)变成

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1(t)\\ \dot{\overline{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}u(t),\\ y(t)=\overline{x}_1(t),\end{cases} \tag{1.8.14}$$

其中

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}=PAP^{-1},$$

$$\overline{B}=\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}=PB.$$

下面仍假设(A,B)能控，(A,C)能观测. 要设计系统(1.6.1)的一个动态补偿器，首先由定理1.6.1取状态反馈控制规律

$$u(t)=Kx(t), \tag{1.8.15}$$

其中K是一个$r\times n$阶常值控制增益矩阵,使得$A+BK$是稳定的矩阵. 由坐标变换(1.8.13)知

$$x(t)=P^{-1}\overline{x}(t).$$

因此，有

$$u(t)=KP^{-1}\overline{x}(t)=K_1C_1^{-1}y(t)+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)\overline{x}_2(t). \tag{1.8.16}$$

为使控制规律(1.8.16)成为物理上能实现的,必须对$\overline{x}_2(t)$设计观测器.

由于系统(1.8.14)是能观测的,因此由引理1.7.1知$(\overline{A}_{22},\overline{A}_{12})$也是能观测的,从而由定理1.7.3知存在极小阶观测器,即有常值增益矩阵G_2,使得$\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12}$是稳定的矩阵,且极小阶观测器方程为：

$$\overline{x}_{2e}(t)=x_c(t)+G_2y(t), \tag{1.8.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t)=&(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})x_c(t)+(\overline{B}_2-G_2\overline{B}_1)u(t)\\ &+[(\overline{A}_{21}-G_2\overline{A}_{11})+(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})G_2]y(t),\end{aligned} \tag{1.8.18}$$

其中$x_{2e}(t)$是$\overline{x}_2(t)$的状态估计.取物理上能实现的控制规律为

$$\begin{aligned}u(t)&=K_1C_1^{-1}y(t)+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)\overline{x}_{2e}(t)\\ &=[K_1C_1^{-1}+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)G_2]y(t)\\ &\quad+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)x_c(t).\end{aligned} \tag{1.8.19}$$

令

$$\begin{cases}F=K_1C_1^{-1}+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)G_2,\\ F_c=K_2-K_1C_1^{-1}C_2,\end{cases} \tag{1.8.20}$$

则由式(1.8.19)得

$$u(t)=F_cx_c(t)+Fy(t). \tag{1.8.21}$$

将这个控制规律代入方程(1.8.17),并令

$$\begin{cases}A_c=(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})+(\overline{B}_2-G_2\overline{B}_1)F_c,\\ B_c=(\overline{A}_{21}-G_2\overline{A}_{11})+(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})G_2+(\overline{B}_2-G_2\overline{B}_1)F,\end{cases} \tag{1.8.22}$$

那么方程(1.8.17)又可写成

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t). \tag{1.8.23}$$

由此及(1.8.21)便给出动态补偿器

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = F_c x_c(t) + F y(t). \end{cases} \tag{1.8.24}$$

这是一个$n-m$阶系统. 将它代入系统(1.6.1)得到闭环系统为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BFC & BF_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1.8.25}$$

现在,需要说明(1.8.25)是内部稳定的,从而动态补偿器(1.8.24)是合乎要求的. 为此令

$$e(t) = \begin{bmatrix} -G_2 & I_{n-m} \end{bmatrix} Px(t) - x_c(t).$$

由(1.8.13)和(1.8.17)的第一式直接计算可得

$$e(t) = \overline{x}_2(t) - \overline{x}_{2e}.$$

对$e(t)$取导数并利用(1.8.14)和(1.8.23)得

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \begin{bmatrix} -G_2 & I_{n-m} \end{bmatrix} \dot{\overline{x}}(t) - \dot{x}_c(t), \\ &= \begin{bmatrix} -G_2 & I_{n-m} \end{bmatrix} \overline{A}\overline{x}(t) + \begin{bmatrix} -G_2 & I_{n-m} \end{bmatrix} \overline{B}u(t) - A_c x_c(t) - B_c y(t). \end{aligned}$$

将A_c和B_c的表达式(1.8.22)代入上式可以算出

$$\dot{e}(t) = (\overline{A}_{22} - G_2\overline{A}_{12})e(t). \tag{1.8.26}$$

对系统(1.8.25)做坐标变换

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ [-G_2 \ I_{n-m}]P & -I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{aligned} &\overline{x}(t) = Px(t), \\ &e(t) = \begin{bmatrix} -G_2 & I_{n-m} \end{bmatrix} \overline{x}(t) - x_c(t). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{A}_{22} - G_2\overline{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

注意到$P^{-1}=\begin{bmatrix}C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}$及$e=[-G_2\ I_{n-m}]Px-x_c$, 由(1.8.20)可得

$$\begin{aligned}
u(t) &= \begin{bmatrix}F & F_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}\\
&= K\begin{bmatrix}C_1^{-1}(I_m-C_2G_2) & -C_1^{-1}C_2\\ G_2 & I_{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}\\
&= KP^{-1}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ G_2 & I_{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}\\
&= KP^{-1}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ G_2 & I_{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ -G_2C_1 & I_{n-m}-C_2G_2\end{bmatrix}x(t)\\
&\quad -KP^{-1}\begin{bmatrix}I_m & 0\\ G_2 & I_{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ e(t)\end{bmatrix}\\
&= KP^{-1}\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}x(t)-K\begin{bmatrix}-C_1^{-1}C_2\\ I_{n-m}\end{bmatrix}e(t)\\
&= KP^{-1}\overline{x}(t)-F_ce(t).
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}+\overline{B}\overline{K} & -\overline{B}F_c\\ 0 & \overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}(t)\\ e(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=\begin{bmatrix}I_m & 0\end{bmatrix}\overline{x}(t),\end{cases}\tag{1.8.27}$$

其中$\overline{K}=KP^{-1}$.

显然$\sigma(\overline{A}+\overline{B}\overline{K})=\sigma(A+BK)\subset\mathbb{C}^-$,又由$\sigma(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})\subset\mathbb{C}^-$知系统(1.8.27) 是输出调节的. 由于这个系统与闭环系统(1.8.26)代数等价,因此

$$\sigma\left(\begin{bmatrix}A+BFC & BF_c\\ B_cC & A_c\end{bmatrix}\right)=\sigma(A+BK)\cup\sigma(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})\subset\mathbb{C}^-.$$

由此可见闭环系统(1.8.25)是内部稳定的,从而对$x(t)$是输出调节的. 这表明系统(1.8.24)是系统(1.6.1)的一个无静差补偿器.

采用极小阶观测器方法可以给系统提供一个$n-m$阶动态补偿器. 如果抛开具体设计过程,可以归纳如下:

已知定常线性系统(1.6.1)是完全能控和完全能观测的,并且$\operatorname{rank}C=m$,那么对这个系统总可以设计一个$n-m$阶的动态补偿器

$$\begin{cases}\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_cy(t),\\ u(t)=F_cx_c(t)+Fy(t)\end{cases}$$

使得由它和(1.6.1)构成的闭环系统(1.8.25)是内部稳定的和输出调节的,即这个闭环系统是一个无静差系统. 它的极点由$A+BK$和$\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12}$的特征值完全决定. 动态补偿器的设计步骤如下:

第一步:由(A,B)能控, 依定理1.6.1,可选择$r\times n$阶常值控制增益矩阵K,使得$A+BK$是稳定的;

第二步:假设$\operatorname{rank}C_1=m$, $C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}$,并形成矩阵

$$P=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix},$$

计算出

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}.$$

第三步：按下列公式计算$\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_i$ $(i,j=1,2)$,

$$\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2\\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\overline{A}_{11}=(C_1A_{11}+C_2A_{21})C_1^{-1},\\
&\overline{A}_{12}=C_1[A_{12}-A_{11}C_1^{-1}C_2]+C_2[A_{22}-A_{21}C_1^{-1}C_2],\\
&\overline{A}_{21}=A_{21}C_1^{-1},\quad \overline{A}_{22}=A_{22}-A_{21}C_1^{-1}C_2,\\
&\overline{B}_1=CB,\quad \overline{B}_2=B_2;
\end{aligned}$$

第四步：依定理1.6.1选择$(n-m)\times m$阶矩阵G_2,使得$\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12}$是稳定的；

第五步：按照下列公式计算矩阵$\overline{A}_c$, $\overline{B}_c$, F_c和F:

$$\begin{aligned}
&\overline{A}_c=(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})+(\overline{B}_2-G_2\overline{B}_1)F_c,\\
&\overline{B}_c=(\overline{A}_{21}-G_2\overline{A}_{11})+(\overline{A}_{22}-G_2\overline{A}_{12})G_2+(\overline{B}_2-G_2\overline{B}_1)F,\\
&F_c=K_2-K_1C_1^{-1}C_2,\quad F=K_1C_1^{-1}+(K_2-K_1C_1^{-1}C_2)G_2.
\end{aligned}$$

根据对偶原理, 当$\operatorname{rank}B=r$时, 对系统(1.6.1)还可以设计一个$n-r$阶动态补偿器

$$\begin{cases}\dot{x}_0(t)=A_0x_0(t)+B_0y(t),\\ u(t)=E_0x_0(t)+Ey(t),\end{cases}$$

其中$x_0(t)$是$n-r$维状态变量, A_0, B_0, E_0和E分别是$(n-r)\times(n-r)$, $(n-r)\times m$, $r\times(n-r)$和$r\times m$阶常值矩阵. 这时闭环系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_0(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BEC & BE_0\\ B_0C & A_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_0(t)\end{bmatrix},\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

是内部稳定的和输出调节的.

从以上的讨论可以看出,对一个完全能控和完全能观测的系统,用状态反馈加极小阶观测器补偿的办法,可以设计出最低阶数为$\min\{n-r,n-m\}$的动态补偿器.

3. 按照能观测指数或能控指数设计动态补偿器

在§1.7关于用动态输出反馈做极点配置的讨论中,已给出了设计方法(详见定理1.6.3和定理1.6.4),这里不再赘述.按照这种原则设计的动态补偿器,其最低阶数为$\min\{\nu_0-1,\mu_0-1\}$,这里ν_0和μ_0分别为系统(1.6.1)的能观测指数和能控指数.

在反馈控制系统理论中,两个最重要的问题是系统的稳定性和抗干扰能力,而稳定性设计也是为提高系统的抗干扰能力所采取的技术措施.因此,可以这样说,一个反馈控制系统的精度好坏主要取决于它抗干扰能力的强弱.一般来说,人们在进行反馈控制系统设计时,为了消除外部干扰,有三种不同的工作方式,一种是干扰补偿方式,一种是干扰适应方式,还有一种是采用随机控制方式. 最后一种方式是为了消除随机干扰对系统的影响, 它已超出本书的范围, 对此有兴趣的读者可查阅[2, 3]. 这里只讨论干扰补偿工作方式.

对于干扰补偿问题,有两个必要的前提,一是干扰本身能够被量测,二是补偿干扰的控制输入能加给系统. 干扰补偿工作方式局限性较大. 因为量测干扰很难做到,而补偿干扰控制能加给系统的要求,实际上限制了受控对象的结构. 如果不能直接量测干扰, 要想补偿它几乎是不可能的. 往下主要讨论补偿一类有规律的干扰问题, 对这类干扰即使它不能直接量测,也能间接被估计出来. 在系统(1.8.1)中,为简单起见,令$y(t) = z(t)$, $C_2 = D_2 = 0$. 于是所研究的受控系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_3x_2(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t), \\ y(t) = C_1x_1(t), \end{cases} \tag{1.8.28}$$

其中诸符号意义同前. 这里把$x_2(t)$视为系统的外部干扰输入.

所谓干扰补偿工作方式的基本思想是,把控制输入$u(t)$分成两部分,一部分用于控制系统,使其内部稳定,一部分用于补偿外部干扰. 令

$$u(t) = u_c(t) + u_e(t),$$

其中$u_c(t)$用于控制系统, $u_c(t)$用于补偿干扰. 假设系统的外部干扰$x_2(t)$可以被量测得到,而且存在一个$r \times n_2$阶矩阵E,使得

$$A_3 = B_1E \tag{1.8.29}$$

那么只要取

$$u_e(t) = -Ex_2(t),$$

外部干扰便得到补偿. 而$u_c(t)$则按前面介绍的方法进行设计.

条件(1.8.29)等价于

$$\operatorname{rank}[B_1, A_3] = \operatorname{rank} B_1 \tag{1.8.30}$$

即A_3的每一列都可以表成B_1的诸列的线性组合. 条件(1.8.30)就是干扰能补偿条件.

除了干扰能补偿的条件之外,还要求干扰能量测,只有这样才能真正实现干扰补偿. 假若干扰$x_2(t)$不能直接量测,可以考虑通过量测输出把它估计出来. 如果把干扰$x_2(t)$也视为一个状态变量,那么(1.8.28)就成了一个复合系统,只要这个复合系统能观测,就能构造状态观测器, 从而得到干扰的估计. 由定理1.3.7易知复合系统(1.8.28)完全能观测的充分必要条件是

A) (A_1, C_1) 能观测;

B) 对所有$\lambda \in \sigma(A_2)$都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

如果不考虑外干扰x_2,系统(1.8.28)完全能控,即(A_1, B_1)能控的话,条件A)和B) 称为干扰能估计条件.

当干扰能补偿条件和干扰能估计条件成立时,有希望设计出带有干扰补偿的动态补偿器. 于是有

定理 1.8.1 对定常线性系统(1.8.28),假设

1) (A_1, B_1)能稳,(A_1, C_1)能检

2) $\operatorname{rank} B_1 = \operatorname{rank}(B_1, A_3)$;

3) 对所有$\lambda \in \sigma(A_2)$都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2,$$

那么存在干扰动态补偿器,使得闭环系统是内部稳定和输出调节的.

证明 定理的证明过程实际上给出了设计带干扰补偿的动态补偿器的方法,所以证明方法是构造性的并分以下几步进行:

第一步:将控制输入变量分成两部分

$$u(t) = u_c(t) + u_e(t)$$

由于(A_1, B_1)能稳,可选择$r \times n_1$阶常值矩阵K_1,使得$A_1 + B_1K_1$是稳定的. 由于条件2), 总可以找到一个$r \times n_2$阶常值矩阵K_2,使得

$$A_3 = B_1K_2. \tag{1.8.31}$$

取控制规律

$$u_c(t) = K_1x_1(t), \quad u_e(t) = -K_2x_2(t),$$

于是

$$u(t) = K_1x_1(t) - K_2x_2(t).$$

第二步:由于复合系统(1.8.28)能检,对状态变量$x_1(t)$和$x_2(t)$设计状态观测器时, 当然也可以设计极小阶观测器.为简单起见,仅给出用状态观测器估计干扰的办法. 根据定理1.6.1,总存在$n_1 \times m$和$n_2 \times m$阶常值矩阵G_1和G_2, 使得

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - G_1C_1 & A_3 \\ -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

是稳定的. 于是状态观测器方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1e}(t) \\ \dot{x}_{2e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - G_1C_1 & A_3 \\ -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1e}(t) \\ x_{2e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} y(t). \tag{1.8.32}$$

有了观测器之后,取物理上能实现的控制规律为:

$$u(t) = K_1x_{1e}(t) - K_2x_{2e}(t). \tag{1.8.33}$$

第三步:计算带干扰补偿的动态补偿器. 将控制规律(1.8.33)代入观测器方程(1.8.32)后, 与这个控制规律一起构成所要求的动态补偿器. 注意等式(1.8.31),得出

$$\dot{x}_{1e}(t) = (A_1 - G_1C_1 + B_1K_1)x_{1e}(t) + G_1y(t), \tag{1.8.34}$$

$$\dot{x}_{2e}(t) = -G_2C_1x_{1e}(t) + A_2x_{2e}(t) + G_2y(t), \tag{1.8.35}$$

$$u(t) = K_1x_{1e}(t) - K_2x_{2e}(t).$$

这就是所要求的动态补偿器,它与通常动态补偿器的不同在于,在控制规律中包含了一个干扰补偿项$-K_2 x_{2e}(t)$,而$x_{2e}(t)$由观测器方程(1.8.35) 确定.从观测器的结构看,如果系统没有外部干扰,(1.8.34)就是通常对系统状态所设计的观测器.

第四步:说明闭环系统是内部稳定和输出调节的. 为此将动态补偿器(1.8.33)-(1.8.35)作用于系统(1.8.28)得到闭环系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{1e} \\ \dot{x}_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1K_1 & -B_1K_2 \\ G_1C_1 & A_1 - G_1C_1 + B_1K_1 & 0 \\ G_2C_1 & -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2, \tag{1.8.36}$$

$$y(t) = C_1x_1(t). \tag{1.8.37}$$

由于

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ -I_{n_1} & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1K_1 & -A_3 \\ G_1C_1 & A_1 - G_1C_1 + B_1K_1 & 0 \\ G_2C_1 & -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ I_{n_1} & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 & B_1K_1 & -A_3 \\ 0 & A_1 - G_1C_1 & A_3 \\ 0 & -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix},$$

所以闭环系统的特征值集合为

$$\sigma(A_1 + B_1K_1) \cup \sigma\left(\begin{bmatrix} A_1 - G_1C_1 & A_3 \\ -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{C}^-$$

故闭环系统(1.8.36)-(1.8.37)是内部稳定的.

此外,如果取$V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = -I_{n_2}$,那么有

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1K_1 & -A_3 \\ G_1C_1 & A_1 - G_1C_1 + B_1K_1 & 0 \\ G_2C_1 & -G_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1V_1 = 0.$$

根据引理1.8.1可知,闭环系统是输出调节的.可见按上述步骤设计的动态补偿器是合乎要求的. 这就完成了定理的证明. ∎

对带有干扰补偿的动态补偿器可作如下解释. 当把控制规律(1.8.33)-(1.8.35) 代入系统(1.8.28)后,有

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1K_1x_{1e}(t) + B_1K_1(x_2 - x_{2e})$$

或者

$$\dot{x}_1(t) = (A_1 + B_1K_1)x_1(t) + B_1K_1\widetilde{x}_{1e}(t) - B_1K_1\widetilde{x}_{2e}$$

这里$\widetilde{x}_{1e}(t) = x_{1e}(t) - x_1(t)$, $\widetilde{x}_{2e}(t) = x_{2e}(t) - x_2(t)$.当估计误差为0时,也就是说当系统达到稳态时,外部干扰就被完全补偿了.

如果$A_2 = 0$,那么$x_2(t)$为常值外干扰,由(1.8.35)知$\dot{x}_{2e} = -G_2C\widetilde{x}_{1e}$. 这说明干扰补偿信号是估计误差$\widetilde{x}_{1e}$通过一个具有常增益阵的积分器给出的. 这是大家熟知的.稳定的闭环系统如果对常值干扰是无静差的,那么在它的补偿器回路中必包含有积分器.一般情况下,为补偿外部干扰,在它的补偿器回路中应包含一个与外部模型相同的动力学模型.

定理1.8.1只是给出了系统(1.8.28)存在一个带有干扰补偿的动态补偿器的充分条件,并给出了设计方法. 但这些条件是否必要呢?答案是肯定的. 由定理1.8.1知动态补偿器(1.8.33)-(1.8.35)对状态$x_1(t)$是输出调节的,所以也称这个动态补偿器为全状态输出调节器. 下面通过分析带有全状态输出调节器的结构,说明定理1.8.1的条件也是必要的.

考虑系统(1.8.28),并且规定$z(t) = x_1(t), C_2 = 0, D_1 = I_{n_1}, D_2 = 0$. 这时这个系统可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_3x_2 + B_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_2x_2 \quad y(t) = C_1x_1(t), \\ z(t) = x_1(t). \end{cases} \tag{1.8.38}$$

设系统(1.8.2)是(1.8.38)的一个动态补偿器. 如果(1.8.2)使闭环系统内部稳定和输出调节,那么这个动态补偿器叫做系统(1.8.38)的一个全状态输出调节器. 关于全状态输出调节器的结构性质,有以下定理:

定理 1.8.2 已知定常线性系统(1.8.38)和它的动态补偿器(1.8.2). (1.8.2)成为系统(1.8.38)的一个全状态输出调节器的充分必要条件是,闭环系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1FC_1 & B_1F_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_3\\ 0\end{bmatrix}x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=A_2x_2,\\ z(t)=x_1(t)\end{cases}$$

是内部稳定的,并且存在$l\times n_2$阶矩阵V_2,使得

$$B_1F_cV_2=A_3,\quad A_cV_2=V_2A_2. \tag{1.8.39}$$

证明 必要性. 设动态补偿器(1.8.2)是系统(1.8.38)的一个全状态输出调节器,那么闭环系统是内部稳定的,即

$$\sigma\left(\begin{bmatrix}A_1+B_1FC_1 & B_1F_c\\ B_cC_1 & A_c\end{bmatrix}\right)\subset\mathbb{C}^-,$$

同时对任意$x_2(t_0)=x_{20}$都有$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$. 依引理1.8.1知,存在$n_1\times n_2$, $l\times n_2$阶矩阵V_1和V_2,使得

$$\begin{cases}(A_1+B_1FC_1)V_1-V_1A_2+B_1F_cV_2=A_3,\\ B_cC_1V_1+A_cV_2-V_2A_2=0,\\ V_1=0.\end{cases} \tag{1.8.40}$$

因此有

$$B_1F_cV_2=A_3,\quad A_cV_2=V_2A_2.$$

这就是所要的结论.

充分性. 设(1.8.39)成立,并且闭环系统(1.8.38)内部稳定,那么等式(1.8.40)成立. 再依引理1.8.1知,对任意$x_2(t_0)=x_{20}$都有$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$. 这说明动态补偿器(1.8.2)是系统(1.8.38)的一个全状态输出调节器. ∎

下面分析定理1.8.2的两个条件. 由等式$B_1F_cV_2=A_3$知, 如果$\operatorname{rank}A_3=n_2$, 那么必有$\operatorname{rank}V_2=n_2$. 取$l\times l$阶可逆矩阵

$$T=\begin{bmatrix}T_1 & V_2\end{bmatrix}$$

并对补偿器(1.8.2)做坐标变换

$$z_c=T^{-1}x_c.$$

这时(1.8.2)变成

$$\begin{aligned}\dot{z}_c(t)&=\overline{A}_cz_c(t)+\overline{B}_cy(t),\\ u(t)&=\overline{F}_cz_c(t)+Fy(t),\end{aligned}$$

其中$\overline{A}_c=T^{-1}A_cT$, $\overline{B}_c=T^{-1}B_c$, $\overline{F}_c=F_cT$, 并且

$$\overline{A}_c=\begin{bmatrix}A_{c_1} & 0\\ A_{c_2} & A_2\end{bmatrix},$$

而A_{c_1}, A_{c_2}分别为$l_1\times l_1$, $l_1\times n_2$阶矩阵, $l_1+n_2=l$. 这时,动态补偿器(1.8.2)代数等价于

$$\begin{cases}\dot{z}_{c_1}(t)=A_{c_1}z_{c_1}(t)+B_{c_1}y(t),\\ \dot{z}_{c_2}(t)=A_{c_2}z_{c_1}(t)+A_2z_{c_2}(t)+B_{c_2}y(t),\\ u(t)=F_{c_1}z_{c_1}(t)+F_{c_2}z_{c_2}(t)+Fy(t),\end{cases}$$

这里

$$\overline{B}_c = \begin{bmatrix} B_{c_1} \\ B_{c_2} \end{bmatrix} \quad \overline{F}_c = \begin{bmatrix} F_{c_1} & F_{c_2} \end{bmatrix}.$$

同时在这个坐标变换下,有

$$A_3 = B_1 \overline{F}_c T^{-1} V_2, \quad T^{-1} V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

于是有

$$B_1 F_{c_2} = A_3.$$

所以控制分量$F_{c_2} z_{c_2}(t)$就是干扰补偿部分.

另外,在这个坐标变换下,闭环系统为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_{c_1}(t) \\ \dot{z}_{c_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 & B_1 F_{c_1} & A_3 \\ B_{c_1} C_1 & A_{c_1} & 0 \\ B_{c_2} C_1 & A_{c_2} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_{c_1}(t) \\ z_{c_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2, \\ z(t) = x_1(t). \end{cases}$$

考虑到闭环系统的稳定性,因此对任意$\lambda \in \mathbb{C}^+$必有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 F_{c_1} & A_3 \\ B_{c_1} C_1 & A_{c_1} - \lambda I_{l_1} & 0 \\ B_{c_2} C_1 & A_{c_2} & A_2 - \lambda I_{n_2} \end{bmatrix} = n_1 + l_1 + n_2.$$

由此得出,对$\lambda \in \sigma(A_2)$有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ B_{c_1} C_1 & 0 \\ B_{c_2} C_1 & A_2 - \lambda I_{n_2} \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

又因为

$$\begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ B_{c_2} C_1 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ B_{c_1} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & B_1 F \\ 0 & I_{n_2} & B_{c_2} \\ 0 & 0 & B_{c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix},$$

所以必有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

这就是前面所说的干扰能估计的条件B). 可见定理1.8.1的条件(1.8.30) 和B)也是必要的. 归纳起来我们得到

定理 1.8.3 已知定常线性系统(1.8.38). 它存在全状态输出调节器的充分必要条件是

(1) (A_1, B_1)能稳, (A_1, C_1)能检测;

(2) $\operatorname{rank} B_1 = \operatorname{rank}[B_1, A_3]$;

(3) 对任意$\lambda \in \sigma(A_2)$都有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & A_3 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

证明 充分性证明在定理1.8.1中已给出。先只证必要性. 事实上,若(1.8.2)是一个全状态输出调节器,那么由闭环系统(1.8.38) 的稳定性可知对一切$\lambda \in \mathbb{C}^+$有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 - \lambda I_{n_1} & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c - \lambda I_l \end{bmatrix} = n_1 + l.$$

由此推出

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 \end{bmatrix} = n_1,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} \\ C_1 \end{bmatrix} = n_1.$$

这说明(A_1, B_1)能稳, (A_1, C_1)能检测. ∎

需要指出,带有干扰补偿的动态补偿器和全状态输出调节器是同一回事. 设计这样的动态补偿器除在控制分量中多一个干扰补偿项外,其余与一般动态补偿器的设计方法完全相同.

对待系统的外部干扰，除了上面提到的干扰补偿方式之外, 还可以采用干扰适应方式. 按照内模原理设计的动态补偿器, 就是一种对外部干扰的适应方法. 所谓内模原理, 就是为设计某种抗干扰能力的系统所确定的一般原则. 内模原理的直观意义是说, 任何一个具有良好的抵消外部干扰或跟踪参考输入信号能力的闭环系统,在它的动力学结构中都必须包含一个与外部输入信号相同的动力学模型. 按照内模原理设计的动态补偿器, 不仅在标称参数下使闭环系统能达到内部稳定和输出调节, 而且当系统参数发生微小摄动时, 也能保持闭环系统的内部稳定和输出调节. 换句话说, 这样设计出来的动态补偿器使闭环系统具有某种“鲁棒性”, 因此, 也称作“鲁棒调节器”. 研究内模原理就是研究鲁棒调节器的设计原则和方法.

考虑单输入－单输出系统:

$$y(s) = \frac{m_0(s)}{n_0(s)}(u(s) + f(s)), \tag{1.8.41}$$

这里$m_0(s)$和$n_0(s)$分别是s的多项式, $n_0(s)$的首项系数为1, 它与$m_0(s)$ 互质, $\deg(n_0(s)) = \alpha, \deg(m_0(s)) = \beta$, $\beta < \alpha$; $u(s)$为系统的控制输入, $y(s)$为系统的输出, $f(s) = \dfrac{g(s)}{k(s)}$为系统的干扰输入, $k(s)$是s的次数为ν的首项系数为1的多项式, 它的零点都在复平面的右半闭平面内, $g(s)$是s的次数不大于$\nu - 1$的任意未知多项式.

取系统(1.8.41)的一个动态补偿器

$$u(s) = -\frac{m_1(s)}{n_1(s)}y(s), \tag{1.8.42}$$

$m_1(s)$与$n_1(s)$分别为s的多项式, $\deg(m_1(s)) = \beta_1$, $\deg(n_1(s)) = \alpha_1$, $\alpha_1 \geq \beta_1$, $n_1(s)$的是首项系数为1, 它与$m_1(s)$ 互质. 不难计算, 由$f(s)$到$y(s)$的闭环系统传递函数为

$$W_c = \frac{n_1(s)m_0(s)}{n_0(s)n_1(s) + m_0(s)m_1(s)}.$$

于是有

$$y(s) = \frac{n_1(s)m_0(s)}{n_0(s)n_1(s) + m_0(s)m_1(s)} \cdot \frac{g(s)}{k(s)}. \tag{1.8.43}$$

由$\beta < \alpha$和$\beta_1 \leq \alpha_1$可知$\deg(n_0(s)n_1(s) + m_0(s)m_1(s)) = \alpha + \alpha_1$. 这说明闭环系统是非退化的.

动态补偿器(1.8.42)中的$W_1(s) = \dfrac{m_1(s)}{n_1(s)}$应有如下性质：

(i)闭环系统是内部稳定的, 即多项式$n_0(s)n_1(s) + m_0(s)m_1(s)$的零点都在复平面的左半开平面内；

(ii)闭环系统是输出调节的, 即对任意次数不超过$\nu - 1$的多项式$g(s)$都有$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$；

(iii)当开环系统的参数（即$n_0(s)$和$m_0(s)$的系数）在标称参数点的某邻域内发生微小变化时, 仍使闭环系统保持内部稳定和输出调节.

如果满足上述三种性质的动态补偿器$W_1(s)$存在, 那么就把它叫做系统(1.8.41) 的一个鲁棒调节器. 下面讨论鲁棒调节器的结构性质、存在条件和设计方法.

首先假设动态补偿器(1.8.42)是系统(1.8.41)的一个鲁棒调节器, 那么$n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)$是一个稳定的多项式. 同时, 存在包含$n_0(s)$和$m_0(s)$ 的标称参数的某邻域U, 使得当参数在这个邻域内变化时, 多项式$n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)$仍然是稳定的,而且保持$\deg(n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s))=\alpha+\alpha_1$不变, 并且对任意次数不超过$\nu-1$的多项式$g(s)$总有$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. 显然, 总可以在这个邻域$U$内选取一组参数, 当$m_0(s)$的参数变到这组参数时, 记为$m_0'(s)$, 使得$m_0'(s)$与$k(s)$互质. 假若$n_1(s)$与$k(s)$ 也互质, 那么由式(1.8.43)可知, 无论如何也不会保持闭环系统的输出调节性质. 而这与$W_1(s)$是一个鲁棒调节器的假设矛盾. 这说明, $k(s)$必须是$n_1(s)$的一个因子. 设

$$n_1(s)=k(s)\bar{n}_1(s), \tag{1.8.44}$$

其中$\bar{n}_1(s)$是s的一个多项式. 这说明, 如果$W_1(s)$是系统(1.8.41) 的鲁棒调节器, 那么它的传递函数分母多项式一定能被$k(s)$整除, 或者说$n_1(s)$ 包含$k(s)$为一个因子.

反之, 如果(1.8.44)式成立, 或者说动态补偿器(1.8.42)的传递函数分母多项式$n_1(s)$中包含了因子$k(s)$, 那么从(1.8.43)式可得

$$y(s)=\frac{\bar{n}_1(s)m_0(s)g(s)}{n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)}.$$

由此可见, 只要闭环系统稳定, 那么$y(s)$必在复平面的右半闭平面内解析, 于是由终值定理可得

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to\infty}sy(s)=0 \tag{1.8.45}$$

由于$n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)$稳定, 因此总存在以$n_0(s)$, $m_0(s)$的参数所排成的矢量的某邻域, 当参数在这个邻域内变化时, 它仍然是稳定的, 于是(1.8.45) 同样成立. 所以说动态补偿器(1.8.42)是系统(1.8.41)的一个鲁棒调节器.

综上所述, 假设动态补偿器(1.8.42)使闭环系统(1.8.43)是内部稳定的, 那么为使它成为系统(1.8.41)的一个鲁棒调节器的充分必要条件是, $k(s)$能整除$n_1(s)$. 这就是鲁棒调节器的结构性质. 这个性质就是内模原理的基本思想.

假设动态补偿器(1.8.42)是系统(1.8.41)的一个鲁棒调节器, 那么

$$W_1(s)=\frac{m_1(s)}{k(s)\bar{n}_1(s)}$$

利用有理分式的部分分式分解法可知, 存在多项式$p_1(s)$和$p_2(s)$, 使得

$$W_1(s)=\frac{p_1(s)}{k(s)}+\frac{p_2(s)}{\bar{n}_1(s)} \tag{1.8.46}$$

其中$p_1(s)$和$p_2(s)$满足方程

$$m_1(s)=p_1(s)\bar{n}_1(s)+p_2(s)k(s)$$

并且在(1.8.46)式右边的两个有理分式都是真的. 这样, 鲁棒调节器可写成

$$u(s)=-\frac{p_1(s)}{k(s)}y(s)-\frac{p_2(s)}{\bar{n}_1(s)}y(s).$$

将上式用于开环系统, 得到如图1.8.1所示闭环系统:

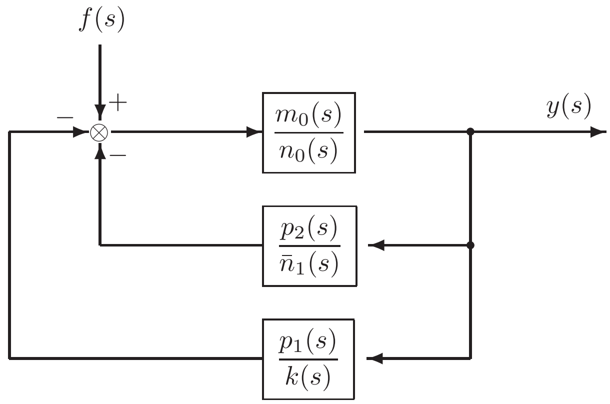


图1.8.1

从图中看到, 反馈回路包括两个通道, 一个通道的传递函数为

$$W_{11}(s)=\frac{p_1(s)}{k(s)},$$

它的主要作用是抵消外部干扰, 称为伺服通道, $W_{11}(s)$叫做伺服补偿器的传递函数; 另一个通道的传递函数为

$$W_{12}(s)=\frac{p_2(s)}{\bar{n}_1(s)},$$

它的主要作用是保证闭环系统稳定, 称为镇定通道, $W_{12}(s)$叫做镇定补偿器的传递函数. 因此可以说, 鲁棒系统靠伺服补偿抵消外部干扰, 靠镇定补偿器稳定系统. 所谓鲁棒系统是指带有鲁棒调节器的闭环系统. 同时还可以看出, 鲁棒系统是通过闭环系统传递函数的零点与外部干扰输入信号的极点之间的零极相消实现抵消外部干扰的.

现在我们讨论鲁棒调节器的存在性和设计方法. 给定开环系统(1.8.41), 则它存在鲁棒调节器的充分必要条件是$m_0(s)$与$k(s)$互质. 事实上, 若动态补偿器(1.8.42)是系统(1.8.41)的一个鲁棒调节器, 那么从(1.8.43) 可以看出, $m_0(s)$与$k(s)$必互质. 否则, 因为$k(s)$是$n_1(s)$的因子, 所以$n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)$必与$k(s)$有非常数公因子. 这与$n_0(s)n_1(s)+m_0(s)m_1(s)$ 是稳定的多项式矛盾. 反之, 若$m_0(s)$与$k(s)$互质, 则可以为(1.8.41)设计一个鲁棒调节器. 这说明开环系统(1.8.41)存在鲁棒调节器. 设计方法可分以下两步进行. 在设计过程中, 暂时假设$f(s)=0$.

第一步：设计伺服补偿器.

取补偿器的传递函数为

$$W_{11}(s)=\frac{p_1(s)}{k(s)},$$

其中$p_1(s)$与$k(s)$互质, $\deg(p_1(s))<\deg(k(s))$.

第二步：设计镇定补偿器.

取控制规律为

$$u(s)=u_c(s)-W_{11}(s)y(s),$$

其中$u_c(s)$为待定的控制输入. 将这个控制规律代入系统(1.8.41)得

$$y(s)=\frac{m_0(s)}{n_0(s)}u_c(s)-\frac{m_0(s)p_1(s)}{n_0(s)k(s)}y(s).$$

于是

$$y(s)=\frac{m_0(s)k(s)}{n_0(s)k(s)+m_0(s)p_1(s)}u_c(s). \tag{1.8.47}$$

由于$n_0(s)$与$m_0(s)$互质, $k(s)$与$p_1(s)$互质, 因此$n_0(s)k(s)+m_0(s)p_1(s)$与$m_0(s)k(s)$互质. 任给次数不小于$n_0(s)k(s)$的稳定多项式$n(s)$,总存在多项式$\bar{n}_1(s)$和$p_2(s)$使得

$$n(s)=\bar{n}_1(s)[n_0(s)k(s)+m_0(s)p_1(s)]+p_2(s)m_0(s)k(s),$$

且$\deg(n(s))=\deg(n_0(s)\bar{n}_1(s)k(s))$, $\deg(\bar{n}_1(s))>\deg(p_2(s))$.

取动态补偿器

$$u_c(s)=-\frac{p_2(s)}{\bar{n}_1(s)}y(s), \tag{1.8.48}$$

并将它代入(1.8.47)得$n(s)y(s)=0$. 这说明$n(s)$是闭环系统的特征多项式. 由于它是稳定的, 可见动态补偿器(1.8.48)的确保证了闭环系统的稳定性, 所以它是镇定补偿器. 最后取

$$u(s)=-\frac{m_1(s)}{n_1(s)}y(s), \tag{1.8.49}$$

其中$n_1(s)=\bar{n}_1(s)k(s)$, $m_1(s)=p_1(s)\bar{n}_1(s)+p_2(s)k(s)$, 则(1.8.49) 就是所要求的鲁棒调节器.

可以看出, 当系统的外部干扰信号为常值时, 则$k(s)=s$, 即在鲁棒系统中必包含一个积分器, 它的作用就是消除常值阶跃干扰对系统的影响.

这里只从传递函数的观点出发描述了单输入－单输出系统的内模原理, 分析了鲁棒调节器的结构性质, 给出了它的存在条件和设计方法. 对多输入－多输出系统的内模原理，有兴趣的读者可进一步参阅[15, 14]等.

习题1.8

1.8.1 已知二阶系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_2(t)+u_1(t),\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+u_2(t),\\ y(t)=x_1(t).\end{cases}$$

试做该系统的动态补偿器,使得闭环系统是内部稳定的.

1.8.2 已知二阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_2(t)+u_1(t),\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+f+u_2(t),\\ y(t)=x_1(t),\end{cases} \tag{1.8.50}$$

其中f是外部干扰输入且满足$\dot{f}=0$. 试对系统(1.8.50)设计一个带有干扰补偿的动态补偿器.

§1.9 定常线性系统的解耦控制

解耦问题是多输入多输出定常线性控制系统综合理论中的一个重要组成部分.寻求适当的反馈控制律和线性定常非奇异输入变换,使对多输入多输出受控系统所构成的闭环控制系统的每个输出仅由一个输入所完全控制,且不同的输出由不同的输入所控制,这样的问题称之为解耦问题.显然,在实现了解耦以后,一个多输入多输出系统,就化成了多个独立的单输入单输出系统.要完全解决上述问题,首先应确定系统能够被解耦的充分必要条件,这是要解决能解耦性的判别问题；其次应确定解耦控制律和解耦系统的结构,这是要解决系统的综合问题. 本节我们将围绕这两个问题,介绍目前获得的有关定常线性控制系统解耦方面的主要研究成果.有兴趣的读者也可参看文献[6, 9, 8, 10, 15, 17].

考虑多输入多输出线性定常系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases} \tag{1.9.1}$$

其中x为n维状态向量, u, y分别为系统的输入和输出,且具有相同的维数m.

设$Y(s)$和$U(s)$分别表示系统输出y和输入u的Laplace变换式, 并令$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$, 它是(1.9.1)的传递函数阵, 则有$Y(s)=G(s)U(s)$. 一般来讲, $G(s)$不是对角阵,因此系统的每一个输入都可能同时影响所有其他输出. 我们称这种现象为输入输出耦合. 此时, 如果想调整系统的某一输出的话,需要同时协调系统的m个输入. 这可能会同时影响系统的某些其他输出. 相反, 如果$G(s)$是一个对角阵的话, 那么一个输入只对一个输出产生影响,一个输出只受一个输入的控制, 我们称这种现象为输入输出解耦. 此时, 如果想调整某一输出, 则只须改变相对应的那一个输入变量即可.

考虑状态反馈加非奇异输入变换的控制律, 其形式为

$$u=-Kx+Lv, \tag{1.9.2}$$

其中K为$m\times n$反馈增益阵, L为$m\times m$非奇异输入变换阵, v为外加控制输入. 解耦控制的问题是：找出一对矩阵(K,L)使得在状态反馈加非奇异输入变换控制(1.9.2) 下, 闭环系统输入输出解耦, 即$G_{KL}(s)=C(sI-A+BK)^{-1}BL$为非奇异对角阵（有理分式阵）：

$$G_{KL}(s)=\mathrm{diag}(g_{11}(s),g_{22}(s),\cdots,g_{mm}(s)),\quad g_{ii}(s)\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

引理 1.9.1 闭环系统传递函数$G_{KL}(s)$与开环传递函数$G(s)$有如下关系:

$$\begin{aligned} G_{KL}(s) &= G(s)\left[I-K(sI-A+BK)^{-1}B\right]L \\ &= G(s)\left[I+K(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}L. \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

证明 由

$$\begin{aligned} G_{KL}(s) &= C(sI-A+BK)^{-1}BL \\ &= C(sI-A)^{-1}[(sI-A+BK)-BK](sI-A+BK)^{-1}BL \\ &= C(sI-A)^{-1}[I-BK(sI-A+BK)^{-1}]BL \\ &= G(s)[I-K(sI-A+BK)^{-1}B]L \end{aligned}$$

知(1.9.3)的第一个等式成立. 为证第二个等式,只需证明

$$I-K(sI-A+BK)^{-1}B=\left[I+K(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}.$$

此式是1.1节中的式(1.1.8)在$A_{11}=I$, $A_{12}=-K$, $A_{21}=B$和$A_{22}=sI-A$时的特例. ∎

定理 1.9.1 采用形如(1.9.2)的态反馈加非奇异输入变换控制使系统(1.9.1)输入输出解耦的充要条件是矩阵

$$E=\begin{bmatrix} c_1A^{d_1}B \\ c_2A^{d_2}B \\ \vdots \\ c_mA^{d_m}B \end{bmatrix}$$

非奇异, 其中c_i表示C的第i行, 而d_i定义为

$$d_i=\begin{cases} n, & \text{如果} c_iB=c_iAB=\cdots=c_iA^{n-1}B=0; \\ \min\{k:\ c_iA^kB\neq 0,\ k=0,1,\cdots,n-1\}, & \text{否则}. \end{cases}$$

证明 必要性. 将$G(s)$的第i行以s的负幂次展开,

$$
\begin{aligned}
&c_i(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s}c_i\left[I-\frac{A}{s}\right]^{-1}B\\
=\ &\frac{1}{s}c_i\left[I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\cdots\right]B\\
=\ &s^{-d_i-1}c_i\left[A^{d_i}+\frac{A^{d_i+1}}{s}+\cdots\right]B\\
=\ &s^{-d_i-1}\left(c_iA^{d_i}B+c_iA^{d_i+1}\frac{1}{s}\left[I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\cdots\right]B\right)\\
=\ &s^{-d_i-1}\left(c_iA^{d_i}B+c_iA^{d_i+1}(sI-A)^{-1}B\right).
\end{aligned}
\tag{1.9.4}
$$

于是有

$$
G(s)=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{s^{d_1+1}},\ \cdots,\ \frac{1}{s^{d_m+1}}\right)\left[E+F(sI-A)^{-1}B\right],
\tag{1.9.5}
$$

其中

$$
F=\begin{bmatrix} c_1A^{d_1+1}\\ c_2A^{d_2+1}\\ \vdots\\ c_mA^{d_m+1}\end{bmatrix}.
$$

由引理1.9.1得

$$
\begin{aligned}
&G_{KL}(s)=G(s)\left[I-K(sI-A+BK)^{-1}B\right]L\\
=\ &\operatorname{diag}\left(\frac{1}{s^{d_1+1}},\ \cdots,\ \frac{1}{s^{d_m+1}}\right)\left[E+F(sI-A)^{-1}B\right]\left[I-K(sI-A+BK)^{-1}B\right]L.
\end{aligned}
$$

因此$G_{KL}(s)$为非奇异对角阵必导致$\left[E+F(sI-A)^{-1}B\right]\left[I-K(sI-A+BK)^{-1}B\right]L$为非奇异对角阵. 特别地,

$$
EL=\lim_{s\to\infty}\left[E+F(sI-A)^{-1}B\right]\left[I-K(sI-A+BK)^{-1}B\right]L
$$

亦为对角阵,并且EL的对角线上各元素非零. 事实上,由于L非奇异,若EL对角线的第i个元为零,则由$E=(EL)L^{-1}$知E的第i行为零. 此与E的定义矛盾. 所以EL,进而E非奇异.

充分性. 设E非奇异,取

$$
K=E^{-1}F,\quad L=E^{-1}.
\tag{1.9.6}
$$

由引理1.9.1知,相应闭环系统的传递函数$G_{KL}(s)$为:

$$
\begin{aligned}
G_{KL}(s)&=G(s)\left[I+K(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}L\\
&=G(s)\left[L^{-1}+L^{-1}K(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}\\
&=G(s)\left[E+F(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

将(1.9.5)代入上式即得

$$
G(s)=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{s^{d_1+1}},\ \cdots,\ \frac{1}{s^{d_m+1}}\right).
\tag{1.9.7}
$$

这说明能对系统(1.9.1)实现解耦控制. ∎

根据定理1.9.1,受控系统(1.9.1)可否采用形如(1.9.2)的状态反馈和非奇异输入变换实现解耦控制,关键在于矩阵E的非奇异性,而与系统的能控性、能镇定性或能观测性无关. 但是,从解耦后的系统要能正常地运行并具有良好的动态性能而言,仍需要求受控系统是能控的,或至少是能镇定的. 否则,甚至不能保证闭环系统的稳定性,此时解耦也就失去了实际意义.

通过定理1.9.1的充分性证明部分,可以看出如果选取形如(1.9.6) 所示的状态反馈阵K和非奇异输入变换L, 则闭环控制系统可以实现解耦,且有形如(1.9.7)的传递函数. 此时,由于解耦后每个单输入单输出闭环控制系统的传递函数均具有多重积分器的特性,因此通常称这类形式的解耦为积分型解耦. 积分型解耦系统虽然因其不能令人满意的动态性能, 本身没有多少实际应用价值,但它常常是综合具有满意性能的解耦控制的一个中间性步骤,因而仍有研究的价值. 事实上,可以做到在实现闭环解耦的同时任意配置极点. 方法也多种多样,例如,可以采用附加反馈法,在积分解耦的基础上为各个子系统配置极点[7, 9, 17]；也可以根据所配极点,适当选取(1.9.5)中的F,进而利用(1.9.6)给出状态反馈阵K和非奇异输入变换L,直接完成输入输出解耦和极点配置两项任务.

定理 1.9.2 设在采用形如(1.9.2)的态反馈加非奇异输入变换控制, 使系统(1.9.1)输入输出解耦,则可选

$$K = E^{-1}F, \quad L = E^{-1} \tag{1.9.8}$$

使得闭环系统传递函数阵为

$$G_{KL}(s) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1(s)},\ \cdots,\ \frac{1}{\Delta_m(s)}\right),$$

其中$\Delta_i(s) = s^{d_i+1} + \alpha_{i1}s^{d_i} + \cdots + \alpha_{i(d_i+1)}$, α_{jk} $(j = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, d_m + 1)$ 为实数,可按配置所希望极点的要求任意选择, F为由下式定义的$m \times n$阵：

$$F = \begin{bmatrix} c_1\Delta_1(A) \\ c_2\Delta_2(A) \\ \vdots \\ c_m\Delta_m(A) \end{bmatrix}.$$

证明 用$g_i(s)$表示$G(s)$的第i行,并对所有$k \geq d_i + 2$令$\alpha_{ik} = 0$, 则由(1.9.4)和d_i的定义得

$$\begin{aligned}
\Delta_i(s)g_i(s) &= [s^{d_i+1} + \alpha_{i1}s^{d_i} + \cdots + \alpha_{i(d_i+1)}]s^{-d_i-1}c_i\left[A^{d_i} + \frac{A^{d_i+1}}{s} + \cdots\right]B \\
&= c_iA^{d_i}B + \left[c_iA^{d_i+1} + \alpha_{i1}c_iA^{d_i}\right]Bs^{-1} \\
&\quad + \left[c_iA^{d_i+2} + \alpha_{i1}c_iA^{d_i+1} + \alpha_{i2}c_iA^{d_i}\right]Bs^{-2} + \cdots \\
&\quad + \left[c_iA^{d_i+k} + \alpha_{i1}c_iA^{d_i+k-1} + \cdots + \alpha_{ik}c_iA^{d_i}\right]Bs^{-k} + \cdots \\
&= c_iA^{d_i}B + c_i\left(A^{d_i+1} + \alpha_{i1}A^{d_i} + \cdots + \alpha_{i(d_i+1)}I\right)Bs^{-1} \\
&\quad + c_i\left(A^{d_i+1} + \alpha_{i1}A^{d_i} + \cdots + \alpha_{i(d_i+1)}I\right)ABs^{-2} + \cdots \\
&\quad + c_i\left(A^{d_i+1} + \alpha_{i1}A^{d_i} + \cdots + \alpha_{i(d_i+1)}I\right)A^{k-1}Bs^{-k} + \cdots \\
&= c_iA^{d_i}B + c_i\Delta_i(A)\frac{1}{s}\left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \cdots\right)B \\
&= c_iA^{d_i}B + c_i\Delta_i(A)(sI - A)^{-1}B.
\end{aligned}$$

所以有

$$G(s) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1(s)}, \cdots, \frac{1}{\Delta_m(s)}\right)\left[E + F(sI - A)^{-1}B\right].$$

进而由(1.9.8)得

$$\begin{aligned}
G_{KL}(s) &= G(s)\left[I + K(sI - A)^{-1}B\right]^{-1}L \\
&= G(s)\left[L^{-1} + L^{-1}K(sI - A)^{-1}B\right]^{-1} \\
&= G(s)\left[E + F(sI - A)^{-1}B\right]^{-1} \\
&= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1(s)}, \cdots, \frac{1}{\Delta_m(s)}\right).
\end{aligned}$$

以上讨论了控制系统的输入输出解耦问题,要求闭环控制系统的传递函数为对角阵. 对于许多系统来说,这可能难于实现或不可能实现. 退一步, 考虑只要求闭环控制系统的输出达到稳态后输入输出是解耦的. 具体而言,对输出输入维数相等的线性定常系统(1.9.1), 如果存在状态反馈和非奇异输入变换(1.9.2), 使得所导出的闭环控制系统

$$\begin{cases}\dot{x} = (A - BK)x + BLv, \\ y = Cx\end{cases} \tag{1.9.9}$$

具有如下性质:

(i)闭环控制系统(1.9.9)是渐近稳定的.

(ii)当$s \to 0$时, 闭环系统的传递函数矩阵$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BL$为非奇异对角阵,即

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \overline{g}_{11}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g}_{mm}(0) \end{bmatrix}, \quad \overline{g}_{ii}(0) \neq 0,$$

则称系统(1.9.1)静态能解耦的. 与此相区别,通常称前面所研究的解耦问题为动态解耦问题.

静态解耦的概念只适用于参考输入v的各个分量为阶跃信号的情况. 令

$$v(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 1(t) \\ \vdots \\ \beta_m 1(t) \end{bmatrix},$$

其中β_i为非零常数, $1(t)$为单位阶跃函数. 利用Laplace变换的终值定理,在系统(1.9.9)为渐近问题的前提下,可得到系统为稳态时的输出为:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sG_{KL}(s) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \frac{1}{s} = [\lim_{s\to 0} G_{KL}(s)] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{g}_{11}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{g}_{mm}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{g}_{11}(0)\beta_1 \\ \vdots \\ \overline{g}_{mm}(0)\beta_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

也即有

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = \overline{g}_{ii}(0)\beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

这表明,相对于分量为阶跃信号的参考输入,当系统实现静态解耦时,可做到稳态下每个输出都只受同序号的一个输入而完全控制. 但在过渡过程中,则输出和输入间的交叉耦合关系并没有消除. 这也正是静态解耦和动态解耦之间的基本区别.

定理 1.9.3 存在形如(1.9.2)的状态反馈加非奇异输入变换的控制律,使受控系统(1.9.1) 实现静态解耦的充分必要条件是

(i)系统(1.9.1)是用状态反馈能镇定的.

(ii)系统(1.9.1)的系数矩阵满足秩关系式

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m, \tag{1.9.10}$$

其中n为系统的维数, m为输出（和输入）的维数,且L为非奇异.

证明 当$(A-BK)$非奇异时, 由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C(A-BK)^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C(A-BK)^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} (A-BK)^{-1} & (A-BK)^{-1}B \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} A-BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_m \end{bmatrix},$$

所以

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C(A-BK)^{-1}B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.9.11}$$

充分性. 因系统(1.9.1)能用状态反馈镇定,故可取K使$(A-BK)$的特征值均具有负实部,从而保证了$(A-BK)$为非奇异,进而由(1.9.10)和(1.9.11)得

$$\operatorname{rank} C(A-BK)^{-1}B = m.$$

这表明$C(A-BK)^{-1}B$非奇异,故可取

$$L = -[C(A-BK)^{-1}B]^{-1}\widetilde{D},$$

其中

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \widetilde{d}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{d}_{mm} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{d}_{ii} \neq 0,$$

并且在上述K, L的选取下,闭环系统为渐近稳定,同时成立

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} G_{KL}(s) &= \lim_{s\to 0} C(sI-A+BK)^{-1}BL \\ &= -[C(A-BK)^{-1}B] \cdot \{-[C(A-BK)^{-1}B]^{-1}\widetilde{D}\} = \widetilde{D}, \end{aligned}$$

且为非奇异对角线常阵. 在满足条件i), ii)下,必存在(K, L), 使系统(1.9.1)实现静态解耦.

(必要性). 根据定义,系统(1.9.1)可实现静态解耦,当且仅当存在(K, L)使闭环系统为渐近稳定,且$G_{KL}(0) = -C(A-BK)^{-1}BL$为非奇异对角阵. 于是由闭环系统的渐近稳定要求知条件(i)成立. 再由L的非奇异性知, $G_{KL}(0)$非奇异等价于$C(A-BK)^{-1}B$非奇异. 进而由(1.9.11)知条件(ii)成立. 所以必要性得证. ∎

习题1.9

1.9.1 对给定的开环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

(i) 试求反馈控制律$u=-Kx+Lv$使上述系统的闭环系统实现积分解耦控制.

(ii) 试求反馈控制律$u=-Kx+Lv$, 使上述系统的闭环系统实现解耦控制, 并有形如$\operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{s+1}, \dfrac{1}{s+2}\right)$的传递函数.

1.9.2. 对给定的开环系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}u,\\
y=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x,
\end{cases}
\tag{1.9.12}
$$

(i) 问能否找到(K, L)使在形如$u=-Kx+Lv$的控制下,闭环系统实现输入输出解耦.

(ii) 若能,找(K, L), 使在形如$u=-Kx+Lv$的控制下,闭环系统实现输入输出解耦,并使闭环传递函数有极点-1和-2.

(iii) 能否找到(K, L)使在形如$u=-Kx+Lv$的控制下,使闭环系统实现输入输出解耦,并使闭环传递函数有极点-2和-2,或者$-1\pm j$.

(iv) 证明(ii)中实现的闭环系统不是能控能观的.

(v) 对于开环系统(1.9.12), 证明找不到(K, L)使在形如$u=-Kx+Lv$ 的控制下,闭环系统既实现输入输出解耦,又能控能观.

1.9.3 对开环系统(1.9.1), E, d_i $(i=1, \cdots, m)$如定理1.9.1中定义,并假定E满秩.

(i) 证明: $d_1+d_2+\cdots+d_m\le n-m$.

(ii) 若$d_1+d_2+\cdots+d_m=n-m$, 问:

(a) 能否在实现输入输出解耦的同时,对闭环传递函数任意配置n个互异实极点.

(b) 能否在实现输入输出解耦的同时,对闭环传递函数配置一个n重极点.

(c) 能否在实现输入输出解耦的同时,使闭环系统能控能观,且使闭环特征值全在左半平面.

1.9.4 对开环系统(1.9.1), E, d_i $(i=1, \cdots, m)$如定理1.9.1中定义,并假定E满秩. 证明：找不到(K, L)使在形如$u=-Kx+Lv$的控制下,闭环系统有如下形式的传递函数

(i) $$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1+2}+\alpha_{11}s^{d_1+1}+\cdots+\alpha_{1(d_1+2)}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{d_m+2}+\alpha_{m1}s^{d_m+1}+\cdots+\alpha_{m(d_m+2)}}\end{pmatrix};$$

(ii) $$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1}+\alpha_{11}s^{d_1-1}+\cdots+\alpha_{1d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{d_m}+\alpha_{m1}s^{d_m-1}+\cdots+\alpha_{md_m}}\end{pmatrix}.$$

1.9.5 对给定的开环系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}u,\\
y=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}x,
\end{cases}
$$

试求反馈控制律$u=-Kx+Lv$,使上述系统的闭环实现静态解耦.

参考文献

[1] Brach, F. M. and J. B. Pearson, Pole Placement Using Dynamic Compensators, IEEE. Trans. on Automatic Control, 15:1(1970), 34–43.

[2] Caines, P. E., Linear Stochastic Systems, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[3] Che, H. F. and L. Guo, Identification and Stochastic Adaptive Control, Birkhäuser, Boston, 1991.

[4] 陈景良、陈向晖, 特殊矩阵, 清华大学出版社, 北京, 2001.

[5] 程云鹏、张凯院、徐仲, 矩阵论, 西北工业大学出版社, 西安, 2001. (第二版)

[6] 程兆林, 线性控制系统理论, 山东大学数学系控制论专业讲义, 济南, 1983.

[7] 段广仁, 线性系统理论, 哈尔滨工业大学出版社, 哈尔滨, 1996.

[8] Falb, P. L. and W. A. Wolovich, Decoupling in the design and synthesis of multivariable systems, IEEE Trans. on Automatic Control, 12(1967), 651–659.

[9] 佛特曼、海兹, 线性控制系统引论, 机械工业出版社, 北京, 1980. (吕林、郑学坚、吴秋峰、吴澄等译)

[10] Gilbert, E., The decoupling of multivariable systems by state feedback, SIAM J. Control, 7(1969), 50-63.

[11] 韩京清、何关钰、许可康, 线性系统理论代数基础, 辽宁科学技术出版社, 沈阳, 1987.

[12] 黄琳, 系统与控制理论中的线性代数, 科学出版社, 北京, 1984.

[13] Kailath, T., Linear systems, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.

[14] 王恩平、秦化淑、王世林, 线性控制系统理论引论, 广东科技出版社, 广州, 1991.

[15] Wonham, W. M., 线性多变量控制–一种几何方法, 科学出版社, 北京, 1984. (姚景尹、王恩平译)

[16] 须田信英、児玉慎三、池田雅夫, 自动控制中的矩阵理论, 科学出版社, 北京, 1979. (曹长修译)

[17] 郑大钟, 线性系统理论, 清华大学出版社, 北京, 1990. (2000年9月第6次印刷)

第二章　概率论及随机控制初步

§2.1　概率论的一般概念

早在十七世纪, 欧洲数学家已开始用可能性分析来解决赌博中的一些问题, 但概率论的真正历史始于Bernoulli(1713)及De Moivre(1730)的极限定理. 到19世纪末, Chebyshev, Markov, Lyapunov及20世纪Lévy, Khinchin 建立大数法则, 中心极限定量, 把分析概率发展到一个新水平. 但直到1933年Kolmogorov建立概率论的公理化体系, 概率论基于集合论、测度论的严密理论基础才得以奠定.

这一节主要介绍基于集合论、测度论的概率论的基本概念. 由于篇幅所限, 有关实变函数论及测度论的一些基本事实不加证明, 但都有明确交代, 并辅以实例. 有需要的读者, 可看有关参考文献.[5, 7, 10, 12]

可测函数、Lebesgue积分

设$f(\cdot)$为定义在区间$[a,b]$上的函数, 在微积分中把区间$[a,b]$分割

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

并在$[x_k, x_{k+1}]$中任取点ξ_k, $k = 0, \ldots, n-1$, 构成Riemann和

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

如果当$\max\limits_{0\le k\le n-1}(x_{k+1} - x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$时, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ 有有穷极限, 并且该极限既不依赖区间$[a,b]$的分割也不依赖于点ξ_k的选取, 那么该极限就是Riemann积分$\int_a^b f(x)dx$. 大家熟知对连续函数$f(\cdot)$存在Riemann积分.

现在来看Dirichlet函数$f(\cdot)$. 该函数定义在[0,1]上, 在有理点取值为1, 在无理点上取值为0. 那么, 当ξ_k都取在无理点上时, Riemann和为0, 而当ξ_k都取在有理点上时, Riemann和为1, 所以对Dirichlet函数Riemann 积分不存在. 这就自然地导致需要拓宽函数和积分的概念.

一个开区间(a,b)的长度$b-a$称为它的测度, 即$\mu(a,b) = b-a$. 设Δ_i, $i = 0, 1, \ldots$为互不相交的开区间列, 那么$\mu\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta_i\Big) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu(\Delta_i)$.

如果对任一$x \in G$, 必可找到的一个小邻域$\delta(x)$使$\delta(x) \in G$, 那么G叫开集. 对任一开集G, 可用不相交区间列来覆盖它, 这个覆盖有测度. 这种覆盖测度的下确界叫开集G的测度. 设F为有界集, $F \subset (a,b)$, 用F^c表示F的余集, 即$F^c = \{x : x \notin F, -\infty < x < \infty\}$. 如果$(a,b) \cap F^c$为开集, 则$F$ 称为闭集. 符号$\cap$表示交：$A \cap B = \{x : x \in A; x \in B\}$.

对开集定义了测度后, 就可以定义闭集F的测度

$$\mu F \triangleq (b-a) - \mu\big((a,b) \cap F^c\big).$$

上面已定义了集合A的余集A^c, 定义了两个集合的交$A \cap B$, 还要定义并$\cup$的运算：$A \cup B = \{x : x \in A$ 或$x \in B\}$.

设$\mathcal{B}$是一个集合类, 它具有以下性质：

1. 它包含一切开区间, 并且对可列次交、并运算及取余集都封闭；

2. 如果$\mathcal{B}_1$是任一具有上述性质1的集合类, 则必有$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$, 那么$\mathcal{B}$中的集合叫Borel集, $\mathcal{B}$叫Borel σ-代数. 任一Borel 集合B可用不相交区间来覆盖它, 那么B的测度μB定义为这类覆盖的测度的下确界.

测度为零的Borel集合(零测集)的子集不一定是Borel集合。我们把$\mathcal{B}$的集合作一个扩充：把任一零测集的任一子集都归到集合类$\mathcal{B}$中, 并且经这样归并所得集合的测度仍定义为相应Borel集合的测度. 把

经过这样扩充后的集合类记为$\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$中的集合叫Lebesgue可测集, 或简称可测集. 上面定义的Lebesgue可测集的测度叫Lebesgue测度, 记为λ. 也就是说, 对任一Lebesgue可测集Λ, 必可找到Borel集A及B, 使

$$A \subset \Lambda \subset B, \quad 并且\lambda(A) = \lambda(B).$$

据上面定义, 可测集对可列次交、并运算及取余集都封闭, 并且Lebesgue测度λ有以下性质：下面用A, A_i, $i = 1, 2, \ldots$, 等表示Lebesgue集.

1. $\lambda(A) \geq 0$;
2. 如果A_i互不相交, 则$\lambda\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$.

有了可测集后, 就可以定义可测函数. 设$f(\cdot)$定义在$\mathbb{R}^1 \triangleq (-\infty, \infty)$上. 如果对任一Borel集$B$, $\{x : f(x) \in B\}$为可测集

$$\{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{L},$$

即么称$f(\cdot)$为可测函数. 如果$\{x : f(x) \in B\}$是Borel集, 即它属$\mathcal{B}$, 那么称$f(\cdot)$为Borel函数. 这里$\{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{L}$ (或$\mathcal{B}$)等价于对任一实数a, $\{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{L}$ (或$\mathcal{B}$).

设$f(\cdot)$和$g(\cdot)$为可测函数, 如果$\lambda(x : f(x) \neq g(x)) = 0$, 则$f(\cdot)$和$g(\cdot)$属同一等价类, 或叫$f(\cdot)$和$g(\cdot)$几乎处处相等, 写作$f(x) = g(x)$ a.e. 在以后的讨论中属同一等价类中的函数$f(\cdot)$和$g(\cdot)$ 将不作区分. 例如, 我们写$f(\cdot) = 0$, 实际上$f(\cdot)$可以在某一零测集上不等于0. 若除了一个零测集外, 函数列$f_n(\cdot)$收敛到$f(\cdot)$, 则称$f_n(\cdot)$几乎处处收敛到$f(\cdot)$, 记作$f_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\cdot)$ a.e.

对可测函数$f(\cdot)$, $\{x : f(x) > a\}$也是可测集：这因为$\{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c$. 进而, $\{x : f(x) \geq a\}$也是可测集, 这因为$\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\}$, 由此知$\{x : f(x) = a\}$也是可测集.

由以上这些性质, 可以推出可测函数集在算术运算及极限运算下是封闭的, 也就是说若$\{f_n(\cdot)\}$为可测函数列, 则$f_i(\cdot) \pm f_j(\cdot)$, $f_i(\cdot)f_j(\cdot)$, $f_i(\cdot)/f_j(\cdot)$ $(f_j(\cdot) \neq 0)$都是可测函数, 若$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ a.e., 则$f(\cdot)$也是可测函数.

除了几乎处处收敛外, 依测度收敛是另一种重要的收敛形式, 设$\{f_n(\cdot)\}$是可测函数列, 如果对任一$\epsilon > 0$有$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} = 0$, 则称$f_n(\cdot)$依测度收敛到$f(\cdot)$.

设$f_n(\cdot)$依测度收敛到$f(\cdot)$, 那么必可选子列$\{f_{n_k}(\cdot)\}$, 使

$$f_{n_k}(\cdot) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\cdot) \qquad a.e.$$

因此极限函数$f(\cdot)$也是可测函数.

注意到分段常值函数是可测函数, 而连续函数可用分段常值函数逼近(a.e.收敛), 所以连续函数一定是可测函数. 这样, 函数的概念从连续函数扩展到了可测函数. 下面我们把Riemann积分扩展到对可测函数的Lebesgue积分.

设$f(\cdot)$为定义在可测集$C \subset (-\infty, +\infty)$上非负可测函数. $f(\cdot)$的取值可能在$[0, n]$上, 也可能大于n. 把$[0, n]$区间均分为$n2^n$等分, 每个小区间长度为2^{-n}. 因为$f(\cdot)$为可测函数, 所以

$$A_{ni} \triangleq \{x : x \in C, \quad i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\}, \quad i = 0, \cdots, n2^n - 1, \tag{2.1.1}$$

为可测集. $f(\cdot)$在C上的Lebesgue积分定义为

$$\int_C f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{i=0}^{n2^n-1} i2^{-n}\lambda(A_{n_i}) + n\lambda(x : f(x) \geq n)\Big], \tag{2.1.2}$$

这个极限一定存在, 但可能无穷.

当$f(\cdot)$不一定是非负时, 则定义

$$f^+(x) \triangleq \max(f(x), 0), \quad f^-(x) \triangleq \max(-f(x), 0).$$

由于$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 并且$f^+(\cdot)$及$f^-(\cdot)$都是非负函数, 所以$\int_C f^+(x)dx$及$\int_C f^-(x)dx$都有定义. 当这两个积分至少有一个有穷时, 则定义$f(\cdot)$在C上的Lebesgue积分为

$$\int_C f(x)dx = \int_C f^+(x)dx - \int_C f^-(x)dx.$$

当$f(\cdot)$几乎处处连续时, 则$f(\cdot)$为Riemann可积, 其积分值等于它的Lebesgue积分.

由于有理数是可数集, 所以它的Lebesgue测度是0. 因此, 上面提到的Dirichlet函数几乎处处等于1, 它在[0,1] 上虽然在Riemann积分意义下没有积分, 但它的Lebesgue 积分取值为1

我们虽然只对$\mathbb{R}^1$给出了可测集, 可测函数及Lebesgue积分这些概念, 但它们都可平行地推广到$\mathbb{R}^n$上去.

集合、空间、测度

我们要把可测集、可测函数等概念, 进一步推广到一般的空间中去.

设Ω为全空间, 它的元素称为点, 记作ω. 用A, B, C等表示点集. 用ϕ表示空集.

和$\mathbb{R}^1$类似, 对Ω中的集合也可引进并$\cup$、交$\cap$及求余集的运算：

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}; \quad A \cap B = \{\omega : \omega \in A, \omega \in B\};$$

$A^c = \Omega \backslash A = \{\omega : \omega \in \Omega \text{ 但 } \omega \notin A\}$.

设$\mathcal{F}$为一个集合类, 即$\mathcal{F}$中的元都是Ω中的集合, 且满足以下条件

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, 即全空间也是$\mathcal{F}$的元;
2. 若$A \in \mathcal{F}$, 则$A^c \in \mathcal{F}$, 即若A是$\mathcal{F}$的元, 则它的余集也是$\mathcal{F}$的元;
3. 若$A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, 则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, 即$\mathcal{F}$ 对求可列并封闭.

那么$\mathcal{F}$叫σ-代数或σ-域, 而$(\Omega, \mathcal{F})$叫可测空间.

我们来证$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$, 也就是要证$\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c$.

设$\omega \in$上式左端, 即ω不属于$\{A_i\}$的公共部分, 也就是说ω至少不属于某个A_i, 即$\omega \in A_i^c$, 所以$\omega \in$上式右端. 反之若$\omega \in$ 上式右端, 那么ω必属于某个A_i^c, 也就是ω不属于A_i, 那么$\omega \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 所以$\omega$属于上式左端. 这样就证明上面集合之间的等式.

设$\mathcal{F}$为σ-代数, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$. 据条件2, $A_i^c \in \mathcal{F}$, 据条件3, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$, 又据条件2, $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F}$. 所以$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. 这就是说$\sigma$-代数对可列个交也封闭.

有了σ-代数的概念后, 我们回到上面定义的Borel σ-代数, 它就是包含所有开区间的最小σ-代数.

设$\{A_n\}$是可测集合序列$A_i \in \mathcal{F}$, 除了有穷个A_i外, 属于其余所有A_i的点ω构成$\{A_n\}$的下确界

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{2.1.3}$$

类似地, 属于无穷多个A_i的点构成$\{A_i\}$的上确界

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{2.1.4}$$

显然, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 并且

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

若两者相等地, 则称$\{A_n\}$收敛:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A (= \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n).$$

设P是定义在$\mathcal{F}$上的集合函数, 它有以下性质

1. P为非负函数, $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;

2. $P(\Omega) = 1$, 即当集合为全空间时, P的取值为1;

3. P为可列可加: 对互不相交的集合序列$\{A_i\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $A_i \in \mathcal{F}$, $\forall i$, $P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P\big(A_i\big)$.

满足上述条件的集合函数P叫定义在$\mathcal{F}$上的概率测度, 或简称概率, 而$(\Omega, \mathcal{F}, P)$叫概率空间, 也叫概率三要素. Ω中的点ω也叫基本事件, 也叫样本点, 或样本. $\mathcal{F}$中的集合叫可测集, 也叫事件.

例 2.1.1 取$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$为包含在$[0,1]$中的Lebesgue可测集, 即$\mathcal{L} \cap [0,1]$, 而P为$[0,1]$上的Lebesgue测度λ, 那么$([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], \lambda)$就是一个概率空间.

例 2.1.2 仍取$\Omega = [0,1]$, 但取$\mathcal{F}$只有4个元, $\mathcal{F} = \{\phi, \Omega, (0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, 1]\}$, 并取$P([0, \frac{1}{3}]) = p$, $P([\frac{1}{3}, 1]) = 1 - p$, $p \geq 0$, 那么$(\Omega, \mathcal{F}, P)$也构成一个概率空间.

例 2.1.3 设一个盒子里装有10个球, 分别标号$0, 1, \ldots, 9$. 那么可取Ω为这10个球, $\mathcal{F}$中的集合为这10个球及空集的任意组合. 并赋予每个球的概率为$\frac{1}{10}$, 那么这就组成一个概率空间.

对任一$A \in \mathcal{F}$, 若$PA = 0$, 但A的子集不一定属$\mathcal{F}$. 此时, 直线上的Borel可测集完备成Lebesgue可测集一样, 需要把$\mathcal{F}$完备化. 把概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, A)$中任一零概率集$A\,(PA = 0)$的任一子集都算作$\mathcal{F}$中的集合, 并定义其概率为0. 这样的概率空间叫完备概率空间. 今后我们所提到的概率空间一律认为是已完备化了的.

设$A \in \mathcal{F}$, $A' \in \mathcal{F}$, $P(A \neq A') = 0$, 则称A和A'属等价类, 记为$A = A'$ a.s., 或以概率1, $A = A'$.

随机变量、分布函数

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间, $\xi(\omega)$为定义在Ω上的实值函数.

如果对任一Borel集B, $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, 那么称$\xi$（为了简化符号, 有时不写$(\omega)$）为对$\mathcal{F}$可测, 或简称为可测, 记为$\xi \in \mathcal{F}$. 其实, $\xi \in \mathcal{F}$等价于对任一实数a, $\{\omega : \xi(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$.

设ξ为定义在Ω上的可测函数, 并且$P(|\xi| < \infty) = 1$, 那么ξ称为随机变量.

以后如下作特别说明, 总认为$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间, 单独用到Ω, $\mathcal{F}$或P时, 不再阐明它们的含义.

例 2.1.4 设$A \in \mathcal{F}$, 定义

$$I_A = \begin{cases} 1, \omega \in A, \\ 0, \omega \notin A. \end{cases}$$

I_A叫A的示性函数. 显然, 示性函数为随机变量.

例 2.1.5 设概率空间由例2.1.1定义, 那么定义在[0,1]上任一a.e.有穷的Lebesgue可测函数都是随机变量.

例 2.1.6 设概率空间由例2.1.2定义, 定义

$$\xi(\omega) = \begin{cases} a, & \omega \in [0, \frac{1}{3}), \\ b, & \omega \in [\frac{1}{3}, 1], \end{cases}$$

a和b为常数. 那么ξ为随机变量. 但除此外, 定义在[0,1]上的任何函数都不是随机变量. 例如简单的线性函数$\xi(\omega) = \omega$, $\omega \in [0,1]$, 注意到当$0 < x < 1$时, $\{\omega : \xi(\omega) < x\} = [0, x)$, 只要$x \neq \frac{1}{3}$. 它就不是可测集, 所以在此概率空间中线性函数不是随机变量.

当ξ是多维时, $\xi = [\xi^1, \ldots, \xi^l]^\tau$, 如果每个分量$\xi^i$, $i = 1, \ldots, l$都随机变量, 那么ξ称为l维随机向量.

对随机变量ξ可定义分布函数

$$F_\xi(x) \triangleq P(\omega : \xi(\omega) < x),$$

相应地对随机向量可定义多维的分布函数

$$F_\xi(x^1, \ldots, x^l) \triangleq P(\omega : \xi^1(\omega) < x^1, \ldots, \xi^l(\omega) < x^l).$$

如果$F_\xi(x)$可微分, 那么它的导数$f_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}$叫$\xi$的密度:

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}f_\xi(t)dt,$$
$$F_\xi(x^1,\ldots,x^l)=\int_{-\infty}^{x^1}\cdots\int_{-\infty}^{x^l}f_\xi(t^1,\ldots,t^l)dt^1\cdots dt^l. \tag{2.1.5}$$

分布函数有下列简单性质:

1. 左连续$\lim\limits_{\epsilon\to+0}F_\xi(x-\epsilon)=F_\xi(x)$;
2. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$;
3. 单调非降;
4. $F(\cdot)$的不连续点最多可列个.

例 2.1.7 在例2.1.4中给出的随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1, & 1<x<\infty,\\ P(A^c), & 0<x\le 1,\\ 0, & -\infty<x\le 0.\end{cases}$$

例 2.1.8 在例2.1.6中的随机变量的分布函数为(设$a<b$)

$$F(x)=\begin{cases}1, & b<x<\infty,\\ p, & a<x\le b,\\ 0, & -\infty<x\le a.\end{cases}$$

分布函数中最重要者是正态分布, 也叫Gauss分布, 它有密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\},\quad x\in\mathbb{R}^1,\quad \sigma>0.$$

它的多维形式为

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}(\det R)^{\frac{1}{2}}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\tau R^{-1}(x-\mu)\Big\},\quad R>0,\quad x,\mu\in\mathbb{R}^l. \tag{2.1.6}$$

数学期望、特征函数

在概率空间上可定义积分. 设ξ为非负随机变量, 完全和(2.1.1)类似地, 记

$$A_{ni}\triangleq\{\omega: i2^{-n}\le\xi<(i+1)2^{-n}\},\quad i=0,1,\ldots,n2^n-1.$$

由于ξ是随机变量, 所以$A_{ni}\in\mathcal{F}$. 定义

$$E\xi=\int_\Omega\xi dP\triangleq\lim_{n\to\infty}\Bigg[\sum_{i=0}^{n2^n-1}i2^{-n}P(A_{ni})+nP(\xi\ge 1)\Bigg], \tag{2.1.7}$$

这个极限可能无穷, 叫ξ的数学期望, 或期望.

当ξ不一定非负时, 定义

$$\xi^+\triangleq\max(\xi,0),\quad \xi^-\triangleq\max(-\xi,0).$$

当$E\xi^+$和$E\xi^-$不同时为零时, 则ξ的期望定义为

$$E\xi\triangleq E\xi^+-E\xi^-.$$

注意到(2.1.7)的右端可用ξ的分布函数$F_\xi(x)$来表达:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n2^n-1} i2^{-n}\big(F_\xi((i+1)2^{-n})-F_\xi(i2^{-n})\big)+n(1-F_\xi(n))\right],$$

而上式正是Lebesgue-Stieltjes积分$\int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x)$的定义。

所以ξ的期望可用分布函数来表达

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x).$$

当ξ有密度$f_\xi(\cdot)$时, 则$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx$.

当ξ服从正态分布时, 它的密度由(2.1.6)给出,

$$\begin{aligned}E\xi=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}(\det R)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\tau R^{-1}(x-\mu)\}\\ \cdot\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^l\end{bmatrix}dx^1\cdots dx^l=\mu,\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

而

$$E(\xi-\mu)(\xi-\mu)^\tau=R.\tag{2.1.9}$$

数学期望表示随机变量的加权平均, 而$E(\xi-\mu)^2$叫ξ的方差, 它表示随机变量的散布。当多维时, $E(\xi-\mu)(\xi-\mu)^\tau$叫ξ的协方差阵.

对随机变量ξ, $E\xi=\mu$, $E\xi^k$叫它的k阶矩, 而$E(\xi-\mu)^k$叫k阶中心矩, $E|\xi|^k$叫k阶绝对矩.

设随机变量ξ的分布函数为$F(\cdot)$, $F(\cdot)$的Fourier-Stieltjes变换$\phi(\lambda)$叫ξ的特征函数:

$$\phi(\lambda)=Ee^{i\lambda\xi}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}dF(x),\tag{2.1.10}$$

这里i是虚数单位, 即$i^2=-1$.

特征函数有以下性质:

1. $|\phi(\lambda)|\le\phi(0)=1$;
2. $\phi(\lambda)$对$\lambda\in\mathbb{R}$一致连续;
3. $\phi(\lambda)=\overline{\phi}(-\lambda)$;
4. 若对某个$n\ge1$及$\delta\in[0,1]$, $E|\xi|^{n+\delta}<\infty$, 则$\phi(\lambda)$ 可n次微分,

$$\begin{aligned}&\phi^{(r)}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^r e^{i\lambda x}dF(x),\quad \forall r\le n,\quad E\xi^r=\frac{\phi^{(r)}(0)}{i^r},\\ &\phi(\lambda)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(i\lambda)^r}{r!}E\xi^r+\rho_n(\lambda),\end{aligned}$$

这里

$$\rho_n(\lambda)=\begin{cases}\theta E|\xi|^n\frac{|\lambda|^n}{n!}, & \theta\in[0,1],\delta\ge0,\\ 2^{1-\delta}\theta' E|\xi|^{2+\delta}\frac{|\lambda|^{n+\delta}}{(1+\delta)\cdots(n+\delta)}, & \theta'\in[0,1],\delta>0.\end{cases}$$

分布函数和特征函数.

反过来, 如果给出了ξ的特征函数$\phi(\lambda)$, 则可用下面的反演公式, 求出ξ的分布函数F. 设$b > a$为$F(\cdot)$的连续点, 那么

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda} \phi(\lambda) d\lambda. \tag{2.1.11}$$

因此分布函数和特征函数相互一一对应.

设$F_n(\cdot)$及$F(\cdot)$都是分布函数. 如果在$F(\cdot)$的所有连续点x上都有$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$, 那么称$F_n(\cdot)$弱收敛到$F(\cdot)$, 或相应的随机变量依分布收敛, 记作$F_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} F$.

定理 2.1.1 设$F_n \xrightarrow{w} F$,则相应的特征函数也收敛$\phi_n(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^1$. 反之, 若特征函数$\phi_n(\lambda)$收敛到某一函数$\phi(\lambda)$, $\phi(\lambda)$在$\lambda = 0$处连续, 那么和ϕ_n 相应的分布函数F_n必弱收敛到某一分布函数F, 并且$\phi(\lambda)$是F的特征函数.

定理 2.1.2 (Bochner-Khinchin) 设$\phi(\lambda)$对$\lambda \in \mathbb{R}^1$连续, $\phi(0) = 1$, 则$\phi(\lambda)$为特征函数的充分必要条件是$\phi(\lambda)$ 非负定, 即对任意实数$\lambda_1, \dots, \lambda_n$及任意复数$z_1, \dots, z_n$, $n = 1, 2, \dots$都有

$$\sum_{i,j=1}^{n} \phi(\lambda_i - \lambda_j) z_i \overline{z}_j \geq 0.$$

定理 2.1.3 (Polya) 设$\phi(\lambda)$为连续偶函数, $\phi(\lambda) \geq 0$, $\phi(0) = 1$, 当$\lambda \to \infty$时$\phi(\lambda) \to 0$, 且$\phi(\lambda)$在$\lambda \in (0, \infty)$上为凸函数, 那么$\phi(\lambda)$为特征函数.

例 2.1.9 $\phi(\lambda) = e^{-|\lambda|}$ 是特征函数.

例 2.1.10 $\phi(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|, & |\lambda| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$

是特征函数.

对随机向量$\xi \in R^l$也可定义特征函数, 设$\lambda \in \mathbb{R}^l$, ξ的特征函数$\phi(\lambda)$定义为

$$\phi(\lambda) \triangleq E e^{i\lambda^\tau \xi} \tag{2.1.12}$$

随机向量的特征函数和分布函数也是相互一一对应的.

与由(2.1.6)定义的正态密度相应的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^\tau x} \frac{1}{(2\pi)^{l/2} (\det R)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^\tau R^{-1} (x-\mu) \right\} dx \\ &= e^{i\lambda^\tau \mu} \exp\left\{ -\frac{\lambda^\tau R \lambda}{2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

由于特征函数和分布函数的相互对应关系, 所以用(2.1.13)可以定义正态分布: 如果ξ的特征函数由(2.1.13)给出, 那么称ξ的分布函数服从正态分布, 或ξ为正态或Gauss随机向量, 或ξ为正态, 记作$\xi \in \mathcal{N}(\mu, R)$.

注意到(2.1.13)中不出现R的逆阵, 所以用(2.1.13)来定义正态随机向量比用(2.1.6) 来定义更广, 它包括了退化情形. 例如一个常量, 它的方差为0, 可看成是退化的正态变量.

基本不等式

设$g(\cdot)$为Borel函数, 即对任一Borel集B, $\{x : g(x) \in B\}$也是Borel集. 若ξ为随机变量, 那么$g(\xi)$也是随机变量. 所以下面提到的随机变量的函数也是随机变量.

注意到当$0 \leq a < b$时, $|\xi|^a \leq 1 + |\xi|^b$, 所以当$E|\xi|^b < \infty$时, 必有$E|\xi|^a < \infty$. 也就是说, 高阶绝对矩有穷时, 低阶绝对矩也有穷.

C_r-不等式 设ξ和η为随机变量, 那么

$$E|\xi + \eta|^r \leq c_r (E|\xi|^r + E|\eta|^r), \tag{2.1.14}$$

其中常数$c_r = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ 2^{r-1}, & r > 1. \end{cases}$

证明: 只要对$a > 0$, $b > 0$证明下列初等不等式

$$(a+b)^r \le c_r(a^r + b^r). \tag{2.1.15}$$

设$r \ge 1$. 考察函数

$$g(x) = (a+x)^r - 2^{r-1}(a^r + x^r).$$

求导得

$$g'(x) = r(a+x)^{r-1} - r2^{r-1}x^{r-1}.$$

那么

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & x < a, \\ = 0, & x = a \\ < 0, & x > a \end{cases}$$

所以

$$g(b) \le \max g(x) = g(a) = 0.$$

由此得(2.1.15).

设$r < 1$, 不失一般性可设$b \ge a$, 那么用Taylor展式知

$$(a+b)^r = b^r\Big(1 + \frac{a}{b}\Big)^r \le b^r\Big(1 + (\frac{a}{b})^r\Big),$$

由此也得(2.1.15). 由(2.1.15)立即得到(2.1.14). ∎

Hölder 不等式 设$1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 若$E|\xi|^p < \infty$, $E|\eta|^q < \infty$, 那么

$$E|\xi\eta| \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1.16}$$

证明 如果$E|\xi|^p = 0$或$E|\eta|^q = 0$, 则$\xi\eta = 0$ a.s., (2.1.16)显然. 所以只考虑$E|\xi|^p \ne 0$, $E|\eta|^q \ne 0$.

由于$\log x$为凹函数, 所以当$r + s = 1$, $r > 0$, $s > 0$时, 有

$$\log(rx + sy) \ge r\log x + s\log y = \log x^r y^s.$$

在这个不等式中取

$$x = \frac{|\xi|^p}{E|\xi|^p}, \quad y = \frac{|\eta|^q}{E|\eta|^q}, \quad r = \frac{1}{p}, \quad s = \frac{1}{q},$$

就得到

$$\frac{|\xi|}{(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|\eta|}{(E|\eta|^q)^{1/q}} \le \frac{|\xi|^p}{pE|\xi|^p} + \frac{|\eta|^q}{qE|\eta|^q}.$$

对上式取期望后就得(2.1.16)

$$\frac{E|\xi\eta|}{(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1.$$

∎

注 2.1.1 当$p = q = 2$时, Hölder不等式也叫Schwarz不等式:

$$E|\xi\eta| \le (E|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}(E|\eta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Minkowski不等式 设$r \geq 1$, 那么

$$(E|\xi+\eta|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (E|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} + (E|\eta|^r)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.1.17}$$

证明 $r=1$是不足道的情形, 不妨设$r>1$. 对不等式

$$E|\xi+\eta|^r \leq E(|\xi|\ |\xi+\eta|^{r-1}) + E(|\eta|\ |\xi+\eta|^{r-1})$$

的右端的两项分别用Hölder不等式, 取s满足$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, 就有

$$E|\xi+\eta|^r \leq [(E|\xi|^r)^{1/r} + (E|\eta|^r)^{1/r}](E|\xi+\eta|^{(r-1)s})^{1/s}.$$

注意到$(r-1)s=r$, 对上式除以$(E|\xi+\eta|^r)^{1/s}$后, 便得(2.1.17). ∎

Jensen不等式 设$g(\cdot)$为凸Borel函数, $E|\xi|<\infty$ 则

$$g(E\xi) \leq Eg(\xi). \tag{2.1.18}$$

证明 当$g(\cdot)$是可微分的凸函数时, 它的导数必非降, 当它不一定可微时, 对任意固定的x_0,

$$\lambda_{x_0}(x) \triangleq \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

作为x的函数也是不降的. 记

$$\mu(x_0) = \lim_{x\uparrow x_0} \lambda_{x_0}(x),$$

那么

$$\mu(x_0) \leq \lambda_{x_0}(x), \quad \forall x > x_0,$$
$$\mu(x_0) \geq \lambda_{x_0}(x), \quad \forall x < x_0.$$

由此知

$$\mu(x_0)(x-x_0) \leq g(x)-g(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

今取$x_0=E\xi$, $x=\xi$, 取期望后便得

$$\mu(E\xi)E(\xi-E\xi) \leq Eg(\xi)-g(E\xi),$$

由此便得(2.1.18). ∎

Lyapunov不等式 设$0<s<t$, 则

$$(E|\xi|^s)^{1/s} \leq (E|\xi|^t)^{1/t},$$

即$(E|\xi|^t)^{1/t}$对t是非降函数.

证明 记$r=t/s$, $\eta=|\xi|^s$, 对$g(x)=|x|^r$用Jensen不等式得

$$|E\eta|^r \leq E|\eta|^r,$$

即

$$(E|\xi|^s)^r \leq E|\xi|^{sr} \ \text{ 或 } \ (E|\xi|^s)^{t/s} \leq E|\xi|^t.$$

∎

Chebyshev不等式 对任一$\epsilon>0$ 都有

$$P(|\xi| \geq \epsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\epsilon}.$$

证明

$$E|\xi| \geq E(|\xi| I_{[|\xi| \geq \epsilon]}) \geq \epsilon E(I_{[|\xi| \geq \epsilon]}) = \epsilon P(|\xi| \geq \epsilon).$$

∎

收敛性及收敛定理

设$\{\xi_k\}$为随机变量序列.

以概率1或a.s.收敛 设除了一个可能的零概率集外, 对一切$\omega \in \Omega$, $\xi_k(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi(\omega)$, 那么叫$\xi_k$ a.s. (以概率1) 收敛到ξ.

ξ_k收敛到有穷的ξ的ω集为

$$[\xi_k \to \xi] = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[|\xi_{k+s} - \xi| < \frac{1}{j} \right] \tag{2.1.19}$$

它是可测集. 和实数列一样, ξ_k收敛到ξ, 等价于ξ_kCauchy收敛. Cauchy收敛的ω集为

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} [\xi_{k+s} - \xi_k \to 0] = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[|\xi_{k+s} - \xi_k| < \frac{1}{j} \right] \tag{2.1.20}$$

显然它也是可测集.

随机变量$\xi_k \to \xi < \infty$ a.s.的充分必要条件是对任意$\epsilon > 0$,

$$P \bigcup_{s=1}^{\infty} \left[|\xi_{k+s} - \xi| \geq \epsilon \right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{2.1.21}$$

$\{\xi_k\}$a.s. Cauchy收敛的充分必要条件是对任意$\epsilon > 0$,

$$P \bigcup_{s=1}^{\infty} [|\xi_{k+s} - \xi_k| \geq \epsilon] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

依概率收敛 如果对任意$\epsilon > 0$,

$$P[|\xi_{k+s} - \xi| \geq \epsilon] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{2.1.22}$$

那么称ξ_k依概率收敛到ξ, 记作$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi$. 它等价于$\xi_k$依概率相互收敛

$$P[|\xi_{k+s} - \xi_k| \geq \epsilon] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \text{对} s \text{ 一致}.$$

比较(2.1.21)及(2.1.22)可看出, ξ_k a.s.收敛到ξ, 包含ξ_k依概率收敛到ξ.

均方收敛 如果$E|\xi_k - \xi|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, 则称$\xi_k$均方收敛到$\xi$.

用Chebyshev不等式知

$$P[|\xi_k - \xi|^p \geq \epsilon] \leq \frac{E|\xi_k - \xi|^p}{\epsilon^p}, \quad p > 0.$$

所以均方收敛包含依概率收敛.

我们在上面已定义了

依分布收敛 如果在ξ的分布函数$F_\xi(\cdot)$的所有连续点x上, ξ_k的分布函数$F_{\xi_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_\xi(x)$, 那么称$\xi_k$依分布收敛到$\xi$, 或$\xi_k$弱收敛到$\xi$.

设$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi$, 那么$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \xi$.

为证此点, 设x为ξ的分布函数$F_\xi(\cdot)$的连续点.

由于

$$[\xi < x'] = [\xi_k < x, \xi < x'] \cup [\xi_k \geq x, \xi < x'] \quad \subset [\xi_k < x] \cup [\xi_k \geq x, \xi < x'],$$

所以当$x' < x$时, 就有

$$F_\xi(x') \le F_{\xi_k}(x) + P[|\xi_k - \xi| \ge x - x'],$$
$$F_\xi(x') \le \liminf_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x), \quad x' < x.$$

类似地, 有对$x'' > x$,

$$[\xi_k < x] \subset [\xi < x''] \cup [\xi \ge x'', \xi_k < x],$$
$$F_{\xi_k}(x) \le F_\xi(x'') + P[|\xi_k - \xi| > x'' - x].$$

所以

$$\limsup_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) \le F_\xi(x'').$$

因此

$$F_\xi(x') \le \liminf_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) \le \limsup_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) \le F_\xi(x'').$$

令$x' \uparrow x$, $x'' \downarrow x$, 由于x是$F_\xi(\cdot)$的连续点, 所以

$$\lim_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) = F_\xi(x),$$

也就是$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \xi$.

收敛性之间的关系可总结成下面定理.

定理 2.1.4 成立如下包含关系:

$$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi \text{ a.s. } \Rightarrow \xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi,$$
$$E|\xi_k - \xi|^p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, p > 0 \Rightarrow \xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi,$$
$$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi \Rightarrow \xi_k \xrightarrow{w} \xi.$$

现在来看取极限和求期望的交换问题.

单调收敛定理 设$0 \le \xi_k \uparrow \xi$, 那么$EX_k \uparrow E\xi$, 这里$\uparrow$表示单调上升地收敛.

推论 2.1.1 当$P(A_k) \to 0$时$\int_{A_k} |\xi| dP \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Fatou 引理 设$E|\eta| < \infty$, $E|\zeta| < \infty$. 当$\eta \le \xi_n$(或$\xi_n \le \zeta$)时,

$$E \liminf_{k\to\infty} \xi_k \le \liminf_{k\to\infty} E\xi_k \ (\text{或} \limsup_{k\to\infty} E\xi_k \le E \limsup_{k\to\infty} \xi_k).$$

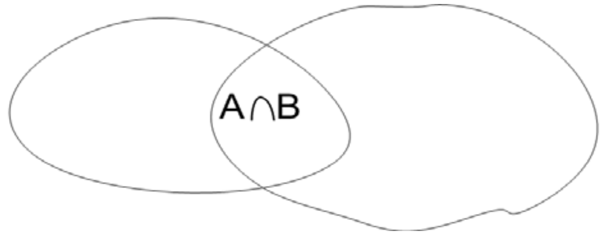
如果$\eta \le \xi_k \uparrow \xi$, 或$\eta \le \xi_k \le \zeta$且$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi$ a.s., 那么

$$E\xi_k \to E\xi.$$

控制收敛定理 设$|\xi_k| \le \eta$ a.s., $E|\eta| < \infty$, 且$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \xi$, 则$E\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} E\xi$, $E|\xi_k - \xi| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

条件期望

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $PB > 0$. 给定B时A的条件概率定义为$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{PB}$, 从几何图形上看



它的含义非常直观易懂.

固定B, A在$\mathcal{F}$内任意变化时得到集合函数

$$P^B(A) \triangleq P(A|B).$$

显然$P^B(A)$也是定义在$\mathcal{F}$上的概率测度, 有了测度, 就可以定义相对$P^B(A)$的积分: $E^B\xi \triangleq \int \xi dP^B$, 它就是给定$B$时, ξ的条件期望.

注意到给定B^c, 类似地可定义$P^{B^c}(A)$及$E^{B^c}\xi$, 而给定集合B, 实际上就是给定了σ-代数$\mathcal{F}_1 \triangleq \{\Omega, \phi, B, B^c\}$.

所以我们可以定义给定σ-代数$\mathcal{F}_1$时的条件概率

$$P^{\mathcal{F}_1}(A) \triangleq (P^B A)I_B + (P^{B^c} A)I_{B^c},$$

以及给定$\mathcal{F}_1$时ξ的条件期望

$$E^{\mathcal{F}_1}\xi \triangleq (E^B\xi)I_B + (E^{B^c}\xi)I_{B^c}.$$

但这里的σ-代数是$\mathcal{F}$的一个特殊的子σ-代数, 它仅由集合B生成. 今后我们要在一般的σ-代数$\mathcal{F}_1(\subset F)$的条件下定义条件期望. 为此我们要用

Radon-Nikodym定理. 设$\phi(A)$是定义在σ-代数$\mathcal{F}_1$上的集合函数, 它P-连续, 即当$PA \to 0$时, $\phi(A) \to 0$, 并且σ-可加, 即对互不相交的$A_i \in \mathcal{F}_1$, $i = 1, 2, \ldots$, 成立$\phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$, 那么必存在唯一（精确到等价类）$\mathcal{F}_1$可测函数$\eta$, 使$\phi(A)$是$\eta$的一个不定积分：

$$\phi(A) = \int_A \eta dP = E(\eta I_A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_1.$$

设ξ是定义在$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的一个随机变量, $E\xi$有意义. 那么定义在$\mathcal{F}_1(\subset \mathcal{F})$上的集合函数$\phi(A) \triangleq \int_A \xi dP$ 为P-连续, σ一可加. 所以, 据Radon-Nikodym定理, 存在唯一（精确到等价类, 即只可能在零概率集上有差异）对$\mathcal{F}_1$可测的函数（随机变量）, 记为$E^{\mathcal{F}_1}\xi$或$E(\xi|\mathcal{F}_1)$使

$$\int_A \xi dP = \int_A E^{\mathcal{F}_1}\xi dP, \quad \text{a.s.} \tag{2.1.23}$$

$E^{\mathcal{F}_1}\xi$ $(E(\xi|\mathcal{F}_1))$叫给定$\mathcal{F}_1$时ξ的条件期望.

当$\xi = I_A$, $A \in \mathcal{F}$时, 记$P^{\mathcal{F}_1}A \triangleq E^{\mathcal{F}_1}I_A$, $P^{\mathcal{F}_1}A$或$P(A|\mathcal{F}_1)$叫给定$\mathcal{F}_1$时, A的条件概率.

例 2.1.11 $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$由$[0, 1]$上的Lebesgue集构成, P为$[0, 1]$的Lebesgue测度. 设$\mathcal{F}_1$由$[0, \frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3}, 1]$生成. $\xi = \omega$, 即ξ为定义在$[0, 1]$上的倾角为45^0的线性函数.

我们来验证

$$E^{\mathcal{F}_1}\xi = \frac{1}{6}I_{[0,\frac{1}{3})} + \frac{2}{3}I_{[\frac{1}{3},1]}.$$

首先对$\mathcal{F}_1$中的任一集A, 例如$A = [0, \frac{1}{3})$

$$\int_A \xi dP = \int_0^{\frac{1}{3}} \omega d\omega = \frac{1}{18}, \quad \int_A E^{\mathcal{F}_1}\xi dP = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} d\omega = \frac{1}{18},$$

两者确实相等, 当A取$\mathcal{F}_1$中的其他集合时也同样验证. 再则, $\frac{1}{6}I_{[0,\frac{1}{3}]} + \frac{2}{3}I_{[\frac{1}{3},1)}$确实对$\mathcal{F}_1$可测. 由唯一性知, 它就是$E^{\mathcal{F}_1}\xi$.

同样,

$$P^{\mathcal{F}_1}(A) = 3\int_{A\bigcap[0,\frac{1}{3}]} d\lambda I_{[0,\frac{1}{3}]} + \frac{3}{2}\int_{A\bigcap[\frac{1}{3},1]} d\lambda I_{[\frac{1}{3},1]}.$$

条件期望可由ξ对条件概率积分得来：

$$\int \xi dP^{\mathcal{F}_1} = 3\int_0^{\frac{1}{3}} \omega d\omega I_{[0,\frac{1}{3}]} + \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^1 \omega d\omega I_{[\frac{1}{3},1]} = \frac{1}{6}I_{[0,\frac{1}{3}]} + \frac{2}{3}I_{[\frac{1}{3},1]} = E^{\mathcal{F}^1}\xi.$$

例 2.1.12 设$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$由$\{A_1, A_2, \dots,\}$生成, 这里$A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i, j$, $PA_i > 0$, $\forall i$, 那么,

$$P^{\mathcal{F}_1}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) I_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(B \bigcap A_i)}{P(A_i)} I_{A_i}$$

$$E^{\mathcal{F}_1}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(\xi I_{A_i})}{P(A_i)} I_{A_i}.$$

上述两式右端显然对$\mathcal{F}_1$可测, 并且很容易验证(2.1.23). 根据条件期望的唯一性, 便知它们正分别是$P^{\mathcal{F}_1}(B)$及$E^{\mathcal{F}_1}\xi$.

上面定义了对子σ-代数$\mathcal{F}_1$取条件期望. 这个概念可推广到对一个随机变量取条件期望. 设η为随机变量. 用$\mathcal{F}^\eta$表示包含一切形如$\{\omega : \eta(\omega) \in B$, B为任一Borel集$\}$集合的最小σ-代数. 那么$E(\xi|\mathcal{F}^\eta)$称在η条件下ξ的条件期望, 有时也写成$E^\eta\xi$.

注 2.1.2 $E\xi$是一个实数, 但条件期望$E(\xi|\mathcal{F}_1)$是一个随机变量.

下面列举条件期望的性质, 设下面涉及的期望都有意义, 即不出现"$+\infty - \infty$"的情形.

1. 设ξ和η为随机变量, a和b为常数, 那么

$$E((a\xi + b\eta)|\mathcal{F}_1) = aE(\xi|\mathcal{F}_1) + bE(\eta|\mathcal{F}_1).$$

2. 若$\xi \le \eta$, 则$E(\xi|\mathcal{F}_1) \le E(\eta|\mathcal{F}_1)$.

3.对$E(\xi|\eta)$, 必存在Borel可测函数$f(\cdot)$使$E(\xi|\eta) = f(\eta)$ a.s.

4. $E(E^{\mathcal{F}_1}\xi) = E\xi$.

5. 如η为$\mathcal{F}_1$可测且$|\eta| < \infty$ a.s., 那么$E(\eta\xi|\mathcal{F}_1) = \eta E(\xi|\mathcal{F}_1)$.

6. 如$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$, 那么$E^{\mathcal{F}_1}(E^{\mathcal{F}_2}\xi) = E^{\mathcal{F}_1}\xi$.

7. 如$\mathcal{F}_1 = (\Omega, \phi)$, 　则$E^{\mathcal{F}_1}\xi = E\xi$.

8. 对几乎所有$\omega \in \Omega$, $P^{\mathcal{F}_1}$是定义在$\mathcal{F}$上的一个概率.

在单调收敛定理、Fatou引理及控制收敛定理中, 把期望E换成条件期望$E^{\mathcal{F}_1}$后, 它们照样成立. 在C_r一不等式、Hölder不等式、Minkovski不等式、Jensen不等式、Lyapunov不等式及Chebyshev不等式中把期望"E"换成条件期望"$E^{\mathcal{F}_1}$"后, 它们也仍成立.

习题4.1

4.1.1 设在可测集A上a.e.有穷的可测函数$f_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\cdot)$ a.e., $|f(\cdot)| < \infty$ a.e., 证明对任意给定的$\delta > 0$,存在可测集A_δ, 使$\lambda(A_\delta) > \lambda(A) - \delta$, 并且$f_n(\cdot)$在$A_\delta$上向$f(\cdot)$一致收敛.

4.1.2 设$f(\cdot)$是定义在区间$[a, b]$上a.e.有穷的可测函数, 证明对任意$\epsilon > 0$, 存在定义在$[a, b]$上的连续函数$\phi(\cdot)$使$\lambda(f(\cdot) \neq \phi(\cdot)) < \epsilon$.

4.1.3 设对任意固定的n, 可测函数列$f_k^{(n)}(\cdot)$, 当$k \to \infty$时依测度收敛到$f^{(n)}(\cdot)$, 而当$n \to \infty$时, $f^{(n)}(\cdot)$ 依测度收敛到$f(\cdot)$, 证明从$\{f_k^{(n)}(\cdot)\}$中可选子列依测度收敛到$f(\cdot)$.

4.1.4 设可测函数$f_n(\cdot) \ge 0$, $\int_A f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. 证明$f_n(\cdot)$依测度收敛到0, 但$f_n(\cdot)$不一定a.e.收敛到0.

4.1.5 证明$\int_A \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$等价于$f_n(\cdot)$依测度收敛到零.

4.1.6 设$f(\cdot)$为定义在$[a, b]$上的可测函数, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, 若对任意$c \in [a, b]$, $\int_a^c f(x)dx = 0$, 证明$f(\cdot) = 0$ a.e.

4.1.7 证明

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n,$$

$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n.$$

4.1.8 设a_n为实数列, $0 \le a_n \le \infty$, 证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, a_n) = \big[0, \sup_{n\ge1} a_n), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[0, (\frac{n+1}{n})^n\Big] \neq \Big[0, \sup_{n\ge1} (\frac{n+1}{n})^n\Big]$$

4.1.9 设$f_1(\cdot)$和$f_2(\cdot)$为定义在Ω上的实函数, 证明对任意实数x及有理数r成立

$$\{\omega : f_1(\omega)+f_2(\omega)<x\}=\bigcup_{\text{一切有理数}r}\{\omega : f_1(\omega)<r\}\bigcap\{\omega : f_2(\omega)<x-r\}.$$

4.1.10 证明任意一非负随机变量可用形如$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$的简单函数逼近（即简单函数的a.s.极限）, 这里x_i是实数, $A_i\in\mathcal{F}$是互不相交的可测集.

4.1.11 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间, X和Y为随机变量, c为一实数, 证明$\{\omega : X<Y+c\}$, $\{\omega : X\le Y+c\}$及$\{\omega : X=Y\}$均为可测集($\in\mathcal{F}$).

4.1.12 设$F(x)$为分布函数, 定义一个概率空间及随机变量, 使它的分布函数就是$F(x)$.

4.1.13 设$g(x)$为定义在$\mathbb{R}$上的实连续偶函数, $g(0)=1$, $g(u)\xrightarrow[u\to\infty]{}0$. 证明当$g(\cdot)$在$[0,\infty)$上为凸函数时, $g(\cdot)$为特征函数.

4.1.14 设随机变量的n阶矩m_n有穷,用$f(u)$表示它的特征函数, 证明成立如下展式：

$$\log f(u)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k!}(iu)^k+o(u^n),$$

并且a_k和m_k形式上有如下关系:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n=\log\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{n!}z^n.$$

4.1.15 证明$\log E|x|^r$对r线性的充要条件是X为退化的随机变量.

4.1.16 证明i)若对任意$\epsilon>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P[|X_n-X|>\epsilon]<\infty$, 则$X_n\xrightarrow[n\to\infty]{}X$ a.s. 若对任意$\epsilon>0$及某个$r>0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E|X_n-X|^r<\infty$, 则$X_n\xrightarrow[n\to\infty]{}X$ a.s.

4.1.17 $X_n\to X$ a.s. 的充要条件是存在数列$\epsilon_n>0$, $\epsilon_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, 使$P\bigcup_{k\ge n}[|X_k-X|\ge\epsilon_k]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

4.1.18 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P[|X_{n+1}-X_n|\ge\epsilon_n]<\infty$, $\epsilon_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\epsilon_n<\infty$, 证明$X_n$ a.s. 收敛到一个随机变量.

4.1.19 设对任意$\epsilon>0$, $\sup_p P[|X_{n+p}-X_n|\ge\epsilon]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\liminf\limits_{p}P[|X_{n+p}-X_n|\ge\epsilon]<\infty$, 证明$X_n$ a.s.收敛到一个随机变量.

4.1.20 设$\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\Omega$, $B_i\cap B_j=\emptyset$, $\forall i\ne j$, $P(B_j)>0$ $\forall j$, 证明Bayes公式:

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(A|B_j)P(B_j)}$$

4.1.21 设(X,Y)联合正态, 求$E(X|Y)$及条件方差$E((X-E(X|Y))^2|Y)$.

4.1.22 设$\mathcal{F}_1$是概率空间中的子σ-代数, 如果$E|X_n-X|^p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $p\ge1$, 证明$E|E(X_n|\mathcal{F}_1)-E(X|\mathcal{F}_1)|^p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

§2.2 从独立性到鞅差列

独立性是对一族随机量关系的假设, 在很多情况下, 符合实际. 在研究事件出现次数、累积效应、算术平均等随机量时, 有了独立性假设就可以得到大数法则、中心极限定理等有用结果.

鞅是随机分析中的重要工具. 鞅差序列比独立变量序列广, 对鞅差的分析在递推算法、适应控制等领域中有广泛的应用. 这一节的定理都给出了详细证明. 这一节的参考书为[4, 5, 7, 8, 10].

独立性及中心极限定理

在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$中, $A\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{F}$, 如果$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, 那么事件$A$和$B$ 称为相互独立.

一族σ-代数$\mathcal{F}_t$, $t\in[0,T)$为相互独立是指对任意坐标$t_i\in[0,T)$, $i=1,2,\ldots,n$及任意$A_i\in\mathcal{F}_{t_i}$成立

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i)=\prod_{i=1}^n P(A_i).$$

用$\mathcal{F}^\xi$及$\mathcal{F}^\eta$分别表示随机变量ξ和η生成的σ-代数, 如果$\mathcal{F}^\xi$和$\mathcal{F}^\eta$相互独立, 那么称随机变量ξ和η独立.

设$\{\xi_t\}$, $t\in[0,T)$为随机变量族, 若对任意坐标集$t_i\in[0,T)$, $i=1,\ldots,n$, $\{\mathcal{F}^{\xi_{t_i}}\}$, $i=1,\ldots,n$ 为相互独立的σ-代数, 那么称$\{\xi_t, t\in[0,T)\}$为相互独立的随机变量.

注 2.2.1 一串事件$\{A_i\}$, $i=1,\ldots,n$,相互独立, 当然包含这些事件的两两独立, 但反过来并不成立. 即对任意$1\le i\le n$和$1\le j\le n$, $i\ne j$, A_i和A_j独立, $\{A_i\}$不见得相互独立. 这从下面的例子中可以看出. 设有四张卡片. 在其中一张上写A_1, A_2, A_3, 而在其余三张上分别A_1, A_2及A_3. 设任意抽取一张的概率为$\frac{1}{4}$. 用B_i表示抽取的卡片上有A_i. 那么$P(B_i)=\frac{1}{2}$, $i=1,2,3$. 而且$B_1B_2=B_2B_3=B_1B_3=B_1B_2B_2$ 它们都表示抽取了同时写有A_1, A_2, A_3的那张卡片. 所以$P(B_1B_2)=P(B_2B_2)=P(B_1B_3)=P(B_1B_2B_3)=\frac{1}{4}$. 但$P(B_1)P(B_2)P(B_3)=\frac{1}{8}$. 这说明$B_1$, B_2, B_3两两独立, 但并不相互独立.

注 2.2.2 设随机变量ξ和子σ-代数$\mathcal{F}_1$独立, 那么$E(\xi|\mathcal{F}_1)=E\xi$. 这是因为由独立性, 对任意$A\in\mathcal{F}_1$, $\int_A\xi dP=EI_A\xi=EI_AE\xi=\int_A E\xi dP$.

设ξ_1和ξ_2为独立随机变量, 那么它们的联合分布函数为

$$F_\xi(x_1,x_2)\triangleq P[\xi_1<x_1,\xi_2<x_2]=P[\xi_1<x_1]\cdot P[\xi_2<x_2]=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2).$$

也就是说, 它们的联合分布等于分布函数的乘积. 因此

$$E\xi_1\xi_2=E\xi_1E\xi_2.$$

一般地, 设$\{\xi_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$为相互独立的变量, 那么

$$E\prod_{i=1}^n\xi_i=\prod_{i=1}^n E\xi_i.$$

设$g_i(\cdot)$为Borel可测函数, 那么据定义$\{g_i(\xi_i)\}$, $i=1,\ldots,n$也相互独立, 并且$E\prod\limits_{i=1}^n g_i(\xi_i)=\prod\limits_{i=1}^n Eg_i(\xi_i)$.

当量测一个物体的长度时, 所得的量测数据往往有随机误差, 所以通常的做法是多量测几次, 然后求量测数据的平均, 以求达到较高的精度。这里就涉及到求随机变量和的平均.

定理 2.2.1 一个随机向量$\xi^\tau=[\xi_1,\ldots,\xi_n]$各分量相互独立的充分必要条件是$\xi$的特征函数是其分量特征函数的乘积.

证明 必要性直接从上面的讨论中得出. 现证充分性. 设ξ的分布函数为$F(x_1,\ldots,x_k)$, ξ_k的分布函数为$F_k(x_k)$, $k=1,\ldots,n$. 记$G(x_1,\ldots,x_n)\triangleq F_1(x_1)\cdots F_n(x_n)$, $\lambda^\tau\triangleq[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$, $x^\tau=[x_1,\ldots,x_n]$, 那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\lambda^\tau x}dG(x_1,\ldots,x_n)&=\prod_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda_kx_k}dF_k(x_k)=\prod_{k=1}^n Ee^{i\lambda_k\xi_k}\\&=Ee^{i(\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n)}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)}dF(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

由于分布函数由特征函数唯一地确定, 所以

$$F(x_1,\ldots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n),$$

也就是说$\xi_1,\ldots,\xi_n$相互独立. ∎

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为相互独立的随机变量, 记$S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$. 据(2.1.11), 求$S_n$的分布函数, 等同于求$S_n$的特征函数

$$Ee^{i\lambda S_n} = Ee^{i\lambda \sum\limits_{j=1}^{n} X_j}.$$

根据独立性, 便知

$$Ee^{i\lambda S_n} = E\prod_{j=1}^{n} e^{i\lambda X_j} = \prod_{j=1}^{n} Ee^{i\lambda X_j} = \prod_{j=1}^{n} f_j(\lambda),$$

这里$f_j(\lambda)$表示X_j的特征.

所以为求独立变量和的分布函数, 只要求它们的特征函数的乘积, 这就是推导下面的极限定理的主要方法.

收敛到正态分布的极限定理, 称为中心极限定理. 下面定理2.2.2的第2部分就是一个中心极限定理.

定理 2.2.2 设$\{X_i\}, i = 1, 2, \ldots$为相互独立的随机变量.

1. 设对某一$\delta \in (0, 1]$, $\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\sum\limits_{j=1}^{n} E|X_j - EX_j|^{1+\delta} \to 0$, 那么下列弱大数定律成立:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j) \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0.$$

2. 记$s_n = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E(X_j - EX_j)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. 设对某$\delta \in (0, 1]$, $\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum\limits_{j=1}^{n} E|X_j - EX_j|^{2+\delta} \to 0$, 那么,

$$P\Big(s_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j) < x\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

也就是左边的分布函数收敛到正态分布$\mathcal{N}(0, 1)$.

证明 1. 设$f_k(\lambda)$为$X_k - EX_k$的特征函数, 那么$\frac{X_j - EX_j}{n}$的特征函数为$f_j(\frac{\lambda}{n})$.

注意到

$$\max_{1\le j\le n}\frac{E|x_j - EX_j|^{1+\delta}}{n^{1+\delta}} \le \frac{1}{n^{1+\delta}}\sum_{j=1}^{n} E|X_j - EX_j|^{1+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

根据特征函数的性质4 ($\delta > 0$), 对任一固定的λ, 对$j \le n$一致地有

$$f_j\Big(\frac{\lambda}{n}\Big) = 1 + \frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\theta_{nj}\frac{E|X_j - EX_j|^{1+\delta}}{n^{1+\delta}} \cdot |\lambda|^{1+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

这里$|\theta_{nj}| \in (0, 1]$. 所以只要n充分大, 存在$\theta_n \in (0, 1]$使

$$\sum_{j=1}^{n}\log f_j\Big(\frac{\lambda}{n}\Big) = 2\theta_n|\lambda|^{1+\delta}\frac{1}{n^{1+\delta}}\sum_{j=1}^{n} E|X_j - EX_j|^{1+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

即$\prod\limits_{j=1}^{n} f_j(\frac{\lambda}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, 或$\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - EX_j)$的分布函数趋于在0点退化的分布函数.

2. 记$\sigma_j^2 = E(X_j - EX_j)^2$. 从定理的条件及Lyapunov不等式知

$$\max_{j\le n}\Big(\frac{\sigma_j}{s_n}\Big)^{2+\delta} \le \max_{j\le n}\frac{E|X_j - EX_j|^{2+\delta}}{s_n^{2+\delta}} \le \frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n} E|X_j - EX_j|^{2+\delta} \to 0.$$

所以对任一固定的λ, 对$j \le n$一致地有

$$f_j\Big(\frac{\lambda}{s_n}\Big) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\sigma_j^2}{s_n^2} + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}\theta_{nk}|\lambda|^{2+\delta}\frac{E|X_j - EX_j|^{2+\delta}}{s_n^{2+\delta}} \to 1, \quad |\theta_{nk}| \le 1.$$

所以对充分大的n

$$\sum_{j=1}^{n}\log f_j\big(\frac{\lambda}{s_n}\big)=-\frac{\lambda^2}{2}(1+o(1))+2\theta_n|\lambda|^{2+\delta}\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}E|X_j-EX_j|^{2+\delta},\quad |\theta_n|\le 1.$$

当$n\to\infty$时, 上式右端趋于$-\frac{\lambda^2}{2}$, 即$\prod\limits_{j=1}^{n}f_j(\frac{\lambda}{s_n})\to e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. ∎

推论 2.2.1 若$\{X_j\}$, $j=1,2,\cdots$, 为相互独立同分布(iid), 则当$E|X_1|^{1+\delta}<\infty$时, 弱大数定理的条件成立; 当$E|X_1|^{2+\delta}<\infty$时, 则中心极限定理的条件成立.

定理2.2.2所阐述的中心极定理要求$2+\delta$-阶矩$E|X_j|^{2+\delta}<\infty$, 其实只要求$EX_j^2<\infty$, 也可以得到中心极限定理。我们可以证明下面的定理。

定理 2.2.3 设$\{X_j\}$, $j=1,2,\cdots$, 为相互独立的随机变量, $\sigma_j^2=E(X_j-EX_j)^2$, $s_n=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. 则

$$P\Big\{s_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-EX_j)<x\Big\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{-t^2}{2}}dt \text{ 及 } \max_{1\le j\le s}\frac{\sigma_s}{s_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

的充分必要条件是成立Lindeberg条件：对任意$\epsilon>0$,

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\ge\epsilon s_n}x^2dF_j(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

这里$F_j(\cdot)$表示X_j的分布函数.

鞅及收敛定理

鞅比独立变量和更广, 应用也更广泛.

下面总设$\{\mathcal{F}_k\}$为非降σ-代数族, 即$\mathcal{F}_i\subset\mathcal{F}_j$, $\forall i<j$.

设ξ_k为随机变量序列, 如果对每个k, ξ_k都对$\mathcal{F}_k$可测：$\xi_k\in\mathcal{F}_k$, 那么称$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为适应过程.

对任意$j\le k$, 如果$E(\xi_k|\mathcal{F}_j)=\xi_j$ a.s., 则适应过程$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$叫鞅. 如果$E(\xi_k|\mathcal{F}_j)\le\xi_j$ a.s., 则$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$叫上鞅, 如果$E(\xi_k|\mathcal{F}_j)\ge\xi_j$ a.s., 则$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$叫下鞅.

例 2.2.1 设$\{X_j\}$为iid序列, $EX_j=0,\forall j$, 记$\xi_k\triangleq\sum\limits_{j=1}^{k}X_j$, $\mathcal{F}_k\triangleq\sigma\{X_1,\dots,X_k\}$, 那么$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为适应序列. 现证它是鞅:

$$E(\xi_k|\mathcal{F}_j)=E(X_k+X_{k-1}+\cdots+X_{j+1}+\xi_j|\mathcal{F}_j),$$

注意到X_{j+s}和$\mathcal{F}_j$之间的独立性, 用注2.2.2, 便知$E(X_{j+s}|\mathcal{F}_j)=EX_{j+s}=0,\forall s\ge 1$, 所以

$$E(\xi_k|\mathcal{F}_j)=\xi_j.$$

例 2.2.2 设ξ_k仍由例2.2.1定义. 那么$\eta_k\triangleq\xi_k^2$为上鞅.

这是因为对$k\ge j$,

$$\begin{aligned}E(\eta_k|\mathcal{F}_j)&=E\{[\eta_j+(\sum_{i=j+1}^{k}X_i)^2+2\xi_j\sum_{i=j+1}^{k}X_i]|\mathcal{F}_j\}\\&=\eta_j+E(\sum_{i=j+1}^{k}X_i)^2+2\xi_jE(\sum_{i=j+1}^{k}X_i|\mathcal{F}_j)=\eta_j+\sum_{i=j+1}^{k}EX_i^2\ge\eta_j\qquad\text{a.s.}\end{aligned}$$

设随机变量τ取值整数集$\{0,1,2,\dots,\infty\}$. 如果$\{\eta=n\}\in\mathcal{F}_n$, $\forall n$, 那么称τ为Markov时间. 如果进一步, $P(\tau<\infty)=1$, 那么τ叫停时.

引理 2.2.1 设$\{\xi_k,\mathcal{F}_k\}$为适应过程, τ为Markov时间, B为Borel集. 那么τ以后首达B的时间

$$\tau_B=\begin{cases}\inf\{n:\tau<n,\,\xi_n\in B\},\\ \infty,\quad 如\quad \xi_n\notin B,\forall n>\tau\end{cases}$$

为Markov时间.

证明 只要把$\{\tau_B=n\}$表达出来:

$$\{\tau_B=n\}=\bigcup_{i=0}^{n-1}\{\{\tau=i\}\bigcap\{\xi_{i+1}\notin B,\dots,\xi_{n-1}\notin B,\xi_n\in B\}\}\in\mathcal{F}_n,\forall n\geq 0.$$

∎

设$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为下鞅, 我们来定义$\{\xi_k\}$,$k=1,\dots,N$,从左到右穿越区间(a,b) 的次数$N<\infty$. 先定义序列$\{\tau_i\}$:

$$\begin{aligned}&\tau_0=0,\\&\tau_1=\begin{cases}\min\{k:0<k<N,\,\xi_k\leq a\},\\ N,\ 若\ \xi_k>a,\forall k=1,\dots,N,\end{cases}\\&\tau_2=\begin{cases}\min\{k:\tau_1<k\leq N,\,\xi_k\geq b\},\\ N,\quad 若\ \xi_k<b,\forall k=\tau_1+1,\dots,N,\end{cases}\\&\cdots\\&\tau_{2m-1}=\begin{cases}\min\{k:\tau_{2m-2}<k\leq N,\,\xi_k\geq a\},\\ N,\ 若\ \xi_k>a,\forall k\in\tau_{2m-2}+1,\dots,N,\end{cases}\\&\tau_{2m}=\begin{cases}\min\{k:\tau_{2m-1}<k\leq N,\,\xi_k\geq b\},\\ N,\ 若\ \xi_k<b,\forall k\in\tau_{2m-1}+1,\dots,N.\end{cases}\end{aligned}$$

这样使$\xi_{\tau_{2m}}\geq b$的最大的m称为$\{\xi_k\}$, $k=1,\dots,N$从左穿越(a,b)的次数, 记为$\beta(a,b)$.

从引理2.2.1知对$k<N$, $\{\tau_1=k\}\in\mathcal{F}_k$, 而$\{\tau_1=N\}=\left\{\bigcup_{i=1}^{N-1}\{\tau_1=i\}\right\}^c\in\mathcal{F}_N$, 所以$\tau_1$是Markov时间.

设τ_i为Markov时间, 再用引理2.2.1知, 对$k<N$, $\{\tau_{i+1}=k\}\in\mathcal{F}_k$, 并且$\{\tau_{i+1}=N\}=\left\{\bigcup_{j=0}^{N-1}\{\tau_{i+1}=j\}\right\}^c\in\mathcal{F}_N$, 所以$\tau_i$, $i=0,1,\dots,2m$全是Markov时间.

定理 2.2.4 (Doob) 对下鞅$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$成立下面不等式

$$E\beta(a,b)\leq\frac{E(\xi_N-a)^+}{b-a}\leq\frac{E\xi_N^++|a|}{b-a}. \tag{2.2.1}$$

这里$\xi^+=\begin{cases}\xi,\ 若\ \xi>0\\ 0,\ 若\ \xi\leq 0.\end{cases}$.

证明 由于$\{\xi_k,\mathcal{F}_k\}$是下鞅, 所以$[\xi_k-a,\mathcal{F}_k)$也是下鞅, 进而从下面的一串不等式看出, $((\xi_k-a)^+,\mathcal{F}_k)$也是下鞅:

对$j\leq k$

$$\begin{aligned}(\xi_j-a)^+\leq&[E((\xi_k-a)|\mathcal{F}_j)]^+=\{E[(\xi_k-a)^+-(\xi_k-a)^-|\mathcal{F}_j]\}^+\\ \leq&\,E((\xi_k-a)^+|\mathcal{F}_j).\end{aligned}$$

注意到$\{\xi_k\}$ 从左穿越(a,b)的次数$\beta(a,b)$等于$\{\xi_k-a\}$从左穿越$(0,b-a)$的次数$\beta(0,b-a)$, 而这也是$((\xi-a)^+,\mathcal{F}_k)$从左穿越$(0,b-a)$的次数. 所以不失一般性, 为证定理只要证明, 对非负下鞅$\{\xi_k,\mathcal{F}_k\}$穿越$(0,b)$的次数$\beta(0,b)$有如下估计

$$E\beta(0,b)\le\frac{E\xi_N}{b}. \tag{2.2.2}$$

定义$\xi_0=0$,

$$\eta_k=\begin{cases}0 & \text{如 } \tau_{m-1}<k\le\tau_m,\ \text{且}m\text{为奇数}\\ 1, & \text{如 } \tau_{m-1}<k\le\tau_m,\ \text{且}m\text{为偶数.}\end{cases}$$

如m为偶数, 那么从τ_{m-1}到τ_m轨线ξ_k穿越$(0,b)$一次. 因此

$$\sum_{k=\tau_{m-1}+1}^{\tau_m}\eta_k(\xi_k-\xi_{k-1})=\sum_{k=\tau_{m-1}+1}^{\tau_m}(\xi_k-\xi_{k-1})=\xi_{\tau_m}-\xi_{\tau_m-1}\ge\xi_{\tau_m}\ge b,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{N}\eta_k(\xi_k-\xi_{k-1})\ge b\beta(0,b). \tag{2.2.3}$$

注意到τ_k是Markov时间, 并且

$$\{\eta_k=1\}=\bigcup_{m\ge1}\Big\{\{\tau_{2m-1}<k\}\bigcap\{\tau_{2m}<k\}^c\Big\},$$

所以$\{\eta_k=1\}$对$\mathcal{F}_{k-1}$可测.

对(2.2.3)取期望然后用(2.1.23)得

$$\begin{aligned}bE\beta(0,b)\le&E\sum_{k=1}^{N}\eta_k(\xi_k-\xi_{k-1})=\sum_{k=1}^{N}\int_{\{\eta_k=1\}}(\xi_k-\xi_{k-1})dP\\ =&\sum_{k=1}^{N}\int_{\{\eta_k=1\}}E[(\xi_k-\xi_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}]dP\\ =&\sum_{k=1}^{N}\int_{\{\eta_k=1\}}[E(\xi_k|\mathcal{F}_{k-1})-\xi_{k-1}]dP\\ \le&\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega}[E(\xi_k|\mathcal{F}_{k-1})-\xi_{k-1}]dP.\end{aligned}$$

上面最后一个不等式因为$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$是下鞅, 上式右端等于$\sum\limits_{k=1}^{N}(E\xi_k-E\xi_{k-1})=E\xi_N$. 由此便得(2.2.2). ∎

定理 2.2.5 (Doob) 设$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为下鞅, 且$\sup_k E\xi_k^+<\infty$ a.s., 那么存在随机变量ξ, $E|\xi|<\infty$, 使

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k=\xi\quad\text{a.s.}$$

证明 记

$$\limsup_{k\to\infty}\xi_k\triangleq\xi^*,\qquad\liminf_{k\to\infty}\xi_k\triangleq\xi_*.$$

反设

$$P(\xi^*>\xi_*)>0. \tag{2.2.4}$$

那么当a和b取遍有理数时

$$(\xi^* > \xi_*) = \bigcup_{a<b} (\xi^* > b > a > \xi_*).$$

从(2.2.4)知必存在有理数a及b, 使

$$P(\xi^* > b > a > \xi_*) > 0. \tag{2.2.5}$$

用$\beta_N(a,b)$表示$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$, $k \geq N$穿越(a,b)的次数, 用定理2.2.4知

$$E\beta_N(a,b) \leq \frac{E\xi_N^+ + |a|}{b-a}.$$

记

$$\beta_\infty(a,b) = \lim_{N\to\infty} \beta_N(a,b).$$

用单调收敛定理知

$$E\beta_\infty(a,b) = \lim_{N\to\infty} E\beta_N(a,b) \leq \frac{\sup_N E\xi_N^+ + |a|}{b-a} < \infty.$$

从(2.2.5)知$P(\beta_N(a,b) = \infty) > 0$, 这和上式相矛盾, 所以

$$P(\xi^* = \xi_*) = 1,$$

即ξ_k收敛到某一极限ξ.

现证$E|\xi| < \infty$. 用Fatou引理

$$\begin{aligned}
E\xi^+ =& E \liminf_{k\to\infty} \xi_k^+ \leq \liminf_{k\to\infty} E\xi_K^+ \leq \sup_k E\xi_k^+ < \infty, \\
E\xi^- =& E \liminf_{k\to\infty} \xi_k^- \leq \liminf_{k\to\infty} E\xi_k^- \leq \sup_k E\xi_k^- \\
=& \sup_k (E\xi_k^+ - E\xi_k) \leq \sup_k (E\xi_k^+ - E\xi_1) < \infty,
\end{aligned}$$

上面用了下鞅性质$E\xi_1 \leq E\xi_k$, $\forall k \geq 1$. 所以$E|\xi| < \infty$. ∎

推论 2.2.2 若$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$为非负上鞅或非正下鞅, 则

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi \quad \text{a.s. 且 } E|\xi| < \infty.$$

证明 若$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$为非正下鞅, 则$E\xi_k^+ = 0$, 那么推论直接从定理2.2.4得出. 若$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$为非负上鞅, 则$(-\xi_k, \mathcal{F}_k)$为非正下鞅. ∎

推论 2.2.3 若$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$为鞅且$\sup_k E|\xi_k| < \infty$,则$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi$ a.s. 且$E|\xi| < \infty$.

证明 由于$(\xi_k, \mathcal{F}_k)$是鞅, 所以$E\xi_k = E\xi_1$, $\forall k$. 因此

$$E|\xi_k| = E\xi_k^+ + E\xi_k^- = 2E_k^+ - E\xi_k = 2E\xi_k^+ - E\xi_1.$$

所以

$$\sup_k E\xi_k^+ = \frac{1}{2}\sup_k (E|\xi_k| - E\xi_1) = \frac{1}{2}\sup_k E|\xi_k| - \frac{1}{2}E\xi_1 < \infty. \tag{2.2.6}$$

由于鞅也是下鞅, 那么从(2.2.6)及定理2.2.5直接得出推论. ∎

鞅差局部收敛及Borel-Cantelli引理

设$(x_k, \mathcal{F}_k)$为适应序列, 且$E(x_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$, $\forall k \geq 1$, 则$(x_k, \mathcal{F}_k)$叫鞅差列(m.d.s.).

实际上, 如果$(x_k, \mathcal{F}_k)$为鞅差列, 那么$\xi_k \triangleq \sum_{j=1}^k x_j$为鞅.

引理 2.2.2 设$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为适应序列, $\xi_k\in\mathbb{R}^m$, G是$\mathbb{R}^m$中的Borel集, 那么, 从G初出时间τ 为Markov时间:

$$\tau=\begin{cases}\inf\{k:\xi_k\notin G\},\\ \infty,\ \text{如}\ \xi_k\in G,\forall k.\end{cases}$$

证明 注意到

$$\{\tau=k\}=\{\xi_0\in G,\xi_1\in G,\ldots,\xi_{k-1}\in G,\xi_k\notin G\}\in\mathcal{F}_k,$$

所以τ是Markov时间. ∎

引理 2.2.3 设τ为Markov时间, $(\xi_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅(上鞅或下鞅), 那么$(\xi_{\tau\wedge k},\mathcal{F}_k)$ 仍是鞅(上鞅或下鞅), 这里$\tau\wedge k\triangleq\min(\tau,k)$, 所以$\xi_{\tau\wedge k}$表示停止在$\tau$的过程$\xi_k$.

证明 从下面的表达

$$\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}=\xi_k I_{\{\tau=0\}}+\cdots+\xi_{k-1}I_{\{\tau=k-1\}}$$

中可看出, $\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}$ 为$\mathcal{F}_{k-1}$–可测.

设$(\xi_k,\mathcal{F}_k)$为鞅, 那么

$$\begin{aligned}E(\xi_{\tau\wedge k}|\mathcal{F}_{k-1})&=E\{(\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}+\xi_k I_{\{\tau>k-1\}})|\mathcal{F}_{k-1}\}\\&=\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}+E(\xi_k I_{\{\tau\le k-1\}^c}|\mathcal{F}_{k-1})\\&=\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}+I_{\{\tau>k-1\}}E(\xi_k|\mathcal{F}_{k-1})\\&=\xi_\tau I_{\{\tau\le k-1\}}+I_{\{\tau>k-1\}}\xi_{k-1}\\&=\xi_{\tau\wedge(k-1)},\end{aligned}$$

所以$(\xi_{\tau\wedge k},\mathcal{F}_k)$是鞅. 对上鞅和下鞅也类似证明. ∎

定理 2.2.6 设$(x_k,\mathcal{F}_k)$为一维鞅差列, 那么当$n\to\infty$时, $\xi_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$在

$$A\triangleq\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}$$

上收敛.

证明 注意到$\sum\limits_{k=1}^{n+1}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$为$\mathcal{F}_n$可测, 根据引理2.2.2初出时间

$$\tau_M\triangleq\begin{cases}\min\{n:n\ge1,\sum\limits_{k=1}^{n+1}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})>M\},\\ \infty,\ \text{若}\ \sum\limits_{k=1}^{n+1}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})\le M\end{cases}$$

为Markov时间. 据引理2.2.3 $\xi_{n\wedge\tau_M}$ 为鞅.

注意到$\{k\le\tau_M\}=\{\tau_M<k\}^c=\{\tau_M\le k-1\}^c$ 对$\mathcal{F}_{k-1}$ 可测, 所以对$k>j$

$$\begin{aligned}&Ex_kI_{\{k\le\tau_M\}}x_jI_{\{j\le\tau_m\}}\\=&E(E(x_kI_{\{x_k\le\tau_M\}}x_jI_{\{j\le\tau_M\}}|\mathcal{F}_{k-1}))\\=&E(I_{\{x_k\le\tau_M\}}x_jI_{\{j\le\tau_M\}}\cdot E(x_k|\mathcal{F}_{k-1}))\\=&0.\end{aligned}$$

用引理2.2.3便知当$n\to\infty$时, $\xi_{n\wedge\tau_M}$收敛到有穷极限. 在$\{\tau_M=\infty\}$上, $\xi_{n\wedge\tau_M}=\xi_n$, 所以当$n\to\infty$时, ξ_n在$\{M=\infty\}$上收敛到有穷极限. 由于M是任意的, 所以ξ_n在$\bigcup\limits_{M=1}^{\infty}\{\tau_M=\infty\}$上收敛. 但$A=\bigcup\limits_{M=1}^{\infty}\{\tau_M=\infty\}$, 这就证明了定理. ∎

定理 2.2.7 设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$是鞅差列.

i) 若$E(\sup\limits_k x_k)^+<\infty$, 则$\xi_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^n x_k$在$A_1\triangleq\{\sup_k\xi_k<\infty\}$ 上收敛;

ii) 若$E(\inf_k x_k)^-<\infty$, 则ξ_n在$A_2\triangleq\{\inf_k\xi_k>-\infty\}$上收敛.

证明. 只要证明i)就够了, 因为用$-x_k$取代x_k后, ii)就归结为i).

记

$$\tau_M\triangleq\begin{cases}\min\{n:\xi_n>M,n\geq 1\},\\ \infty,\ 若\ \xi_n<M,\forall n.\end{cases}$$

从引理4.2.2, 4.2.3知$(\xi_{k\wedge\tau_M},\mathcal{F}_k)$是鞅. 容易看到

$$\xi_{n\wedge\tau_M}=\begin{cases}\leq M,\ 若\ n<\tau_M,\\ =\xi_{\tau_M-1}+x_{\tau_M}\leq M+\sup_k x_k,\ 若 n\geq\tau_M.\end{cases}$$

由此及定理条件知

$$\sup_n E(\xi_{n\wedge\tau_M})^+\leq E[\sup_n(\xi_{n\wedge\tau_M})^+]\leq E[M+(\sup_k x_k)^+]<\infty.$$

由定理2.2.5知当$n\to\infty$时, $\xi_{n\wedge\tau_M}$ a.s. 收敛到有穷极限.

注意到在$\{\tau_M=\infty\}$上, $\xi_{n\wedge\tau_M}=\xi_n$, 所以$\xi_n$在$\{\tau_M=\infty\}$ 上收敛. 由于$A_1=\bigcup\limits_{M=1}^{\infty}\{\tau_M=\infty\}$, 所以$\xi_n$在$A_1$上收敛.

定理 2.2.8 (Borel-Cantelli-Lévy) 设$B_k\in\mathcal{F}_k,\forall k$. 那么$\sum\limits_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty$的充分必要条件是$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})<\infty$. 换句话说

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}B_j=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})=\infty\right\}.\tag{2.2.7}$$

证明 记

$$\xi_n=\sum_{k=1}^n(I_{B_k}-E(I_{B_k}|\mathcal{F}_{k-1})).\tag{2.2.8}$$

显然$(I_{B_k}-E(I_{B_k}|\mathcal{F}_{k-1}),\mathcal{F}_k)$是鞅差列, 而$(\xi_n,\mathcal{F}_n)$是鞅.

注意到

$$|I_{B_k}-E(I_{B_k}|\mathcal{F}_{k-1})|\leq 1,$$

用定理2.2.7知ξ_n在

$$\{\sup_k\xi_k<\infty\}\bigcup\{\inf_k\xi_k>-\infty\}\tag{2.2.9}$$

上a.s.收敛.

设$\sum\limits_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty$, 那么从(2.2.8)知$\sup_n\xi_n<\infty$, 所以$\xi_n$收敛. 由此从(2.2.8)看出$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})<\infty$.

现设$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})<\infty$, 那么从(2.2.8)知$\inf_n\xi_n>-\infty$, 据(2.2.9), 在$\{\inf_k\xi_k>-\infty\}$上$\xi_n$a.s.收敛. 又从(2.2.8)知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty$. 这样就证明了充分必要条件.

注意到

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty\right\}\quad 和\quad\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}B_j^c$$

不过是$\{\omega$属于有穷个$B_k\}$这个集合的不同写法, 所以

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}B_j^c=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty\right\}.$$

据刚证明的充要条件, 便知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}B_j^c=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

对上式左右端取补集, 便得(2.2.7). ∎

定理 2.2.9 (Borel-Cantelli引理) 设$\{B_k\}$是事件列. i)若$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k)<\infty$, 则$B_k$无穷次出现的概率为0, 即$P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}B_j\Big)=0$. ii)若$\{B_k\}$相互独立, 则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k)<\infty$的充分必要条件是$P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}B_j\Big)=0$.

证明 用$\mathcal{F}_n$表示$\{B_1,\dots,B_n\}$生成的σ-代数.

i) $\infty>\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k)=E\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(I_{B_k}|\mathcal{F}_{k-1})\Big)$, 也就是$\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(I_{B_k}|\mathcal{F}_{k-1})<\infty$ a.s. 用定理2.3.3知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty$ a.s. 所以$P\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}B_j^c\Big)=1$, 或$P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}B_j\Big)=0$.

ii) 只需证明当$\{B_k\}$相互独立时, 从$P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}B_j\Big)=0$可推出$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k)<\infty$. 反设$\sum\limits_{k=1}^{\infty}PB_k=\infty$. 从独立性知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}PB_k$. 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|\mathcal{F}_{k-1})=\infty\text{ a.s.}$$

从(2.2.7)知

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}B_j\right)=1.$$

这和定理条件矛盾. 所以必须有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(B_k)<\infty$. ∎

三级数准则及鞅差局部收敛（续）

引理 2.2.4 设$(x_k,\mathcal{F}_k)$为适应序列, $\{b_k\}$为正实数序列, 记

$$A\triangleq\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(|x_k|>b_k)|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

在A上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kI_{[|x_k|\le b_k]}$收敛.

证明 记$B_k\triangleq\{|x_k|>b_k\}$. 用定理2.3.3知

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}I_{B_k}<\infty\right\}.$$

这说明A表示B_k只出现有穷次的集合, 也就是说, 固定ω, 只要k充分大, 必有$I_{[|x_k|\le b_k]}=1$, 所以在A上定理结论中两级数的收敛性等价. ∎

定理 2.2.10 (三级数准则). 设$(x_k,\mathcal{F}_k)$为适应序列. 用S表示下面三个级数同时收敛的ω集:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|x_k|\ge c|\mathcal{F}_{k-1}),\quad \sum_{k=1}^{\infty}E(x_kI_{[|x_k|\le c]}|\mathcal{F}_{k-1}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{E(x_k^2 I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1})-\Big(E(x_k I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1})\Big)^2\Big\},$$

其中c为正常数. 那么

$$\xi_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ 在}S\text{上收敛.}$$

证明 记

$$A\triangleq\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(|x_k|\ge c|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

据引理2.2.4, 在A上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k I_{[|x_k|\le c]}$收敛. 由于$S\subset A$, 所以在$S$上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k I_{[|x_k|\le c]}$收敛. 记

$$y_k = x_k I_{\{|x_k|\le x\}} - E[x_k I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

据S的定义, 在S上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}E[x_k I_{\{|x_k|\le x\}}|\mathcal{F}_{k-1}]$收敛, 所以在$S$上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k I_{\{|x_k|\le c\}}$收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$收敛, 因此在$S$上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$收敛. 但$(y_k,\mathcal{F}_k)$是鞅差列, 并且

$$E(y_k^2|\mathcal{F}_{k-1})=E(x_k^2 I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1})-(E(x_k I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1}))^2.$$

据S的定义, $S\subset\Big\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(y_k^2|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\Big\}$.

用定理2.2.6知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$在$S$上收敛, 但在$S$上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛等价于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$收敛,所以在$S$上$\xi_n$收敛. ∎

推论 2.2.4 设$\{x_k\}$为相互独立随机变量序列, $\mathcal{F}_k=\sigma\{x_1,\ldots,x_k\}$. 若对于某个常数$c>0$, 下列三级数收敛, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(|x_k|>c)<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}Ex_k I_{[|x_k|\le c]}<\infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{Ex_k^2 I_{[|x_k|\le c]}-(Ex_k I_{\{|x_k|\le c\}})^2\Big\}<\infty,$$

则$\xi_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ a.s. 收敛.

这是定理2.2.10的直接推论. 反之, 可以证明, 如果ξ_n a.s. 收敛, 那么推论中所列的三个级数对任意$c>0$都收敛. 换句话说, 上述三个级数对某个$c>0$收敛是使ξ_n a.s. 收敛的充分必要条件. 这是著名的Kolmogorov三级数准则.

定理 2.2.11 (周元燊) 设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅差列, 记

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}]<\infty\right\},\quad p\in(0,2].$$

鞅$\xi_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$在$A$上收敛.

证明 i) 先设$p\in[1,2]$. 利用三级数准则, 只要证明A 包含在由定理2.2.10中定义的S中, 也就是要证在A上, 定理2.2.10 中的三个级数收敛.

注意到

$$\begin{aligned}P(|x_k|\ge c|\mathcal{F}_{k-1})&=E(I_{\{|x_k|\ge c\}}|\mathcal{F}_{k-1})\\&\le\frac{1}{c^p}E[|x_k|^p I_{\{|x_k|\ge c\}}|\mathcal{F}_{k-1}]\\&\le\frac{1}{c^p}E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}]\end{aligned}$$

所以三级数中的第一个级数在A上收敛.

注意到$E(x_k|\mathcal{F}_{k-1})=0$, 就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|E[x_kI_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1}]\Big| &= \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|E[x_kI_{\{|x_k|>c\}}|\mathcal{F}_{k-1}]\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\Big[E[\frac{|x_k|}{c}I_{\{|x_k|>c\}}|\mathcal{F}_{k-1}] \\ &\le \frac{1}{c^p}\sum_{k=1}^{\infty}E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}\Big],\end{aligned}$$

所以三级数中的第二个级数在A上也收敛.

最后, 由于

$$\frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{\infty}E\Big[x_k^2I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1}\Big] \le \frac{1}{c^p}\sum_{k=1}^{\infty}E[x_k^2I_{\{|x_k|\ge c\}}|\mathcal{F}_{k-1}],$$

同时用Lyapunov不等式

$$\Big(E[x_kI_{\{[|x_k|\le c]\}}|\mathcal{F}_{k-1}\Big)^2 \le E[x_k^2I_{\{|x_k|\le c\}}|\mathcal{F}_{k-1}]$$

所以三级数中的最后一个级数在A上收敛. 因此对$p\in[1,2]$, ξ_n在A上收敛

ii) 现在考察A中的$p\in(0,1)$情形

记

$$y_k=|x_k|^p-E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}].$$

由于在A上

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}E\Big[|y_k||\mathcal{F}_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{\infty}E[(|x_k|^p+E(|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}))|\mathcal{F}_{k-1}\Big] \\ &\le 2\sum_{k=1}^{\infty}E(|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1})<\infty,\end{aligned}$$

所以根据已证的i), 对鞅差$\{y_k,\mathcal{F}_k\}$, 其和$\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k$在$A$上收敛. 也就是说

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}\subset\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|^p-E(|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}))\text{收敛}\right\},$$

而这个包含关系意味着

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\right\}\subset\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}.$$

也就是说, 在A上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$.

而对$p\in(0,1)$, 从$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$可知对充分大$k$, $|x_k|<1$. 所以$|x_k|^p>|x_k|$. 因此$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$, 从而知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛. 所以在$A$上$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛. ∎

推论 2.2.5 设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅差列, 并对某个$p\in(1,2]$, $\sup\limits_k E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}]<\infty$ a.s.或$\sup\limits_k E|x_k|^p<\infty$, 则对$q>1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k^{q/p}}\quad a.s.\ \text{收敛}.$$

证明 当$\sup\limits_k E|x_k|^p<\infty$时.由于

$$E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E[|\frac{x_k}{k^{q/p}}|^p|\mathcal{F}_{k-1}]\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}E\Big|\frac{x_k}{k^{q/p}}\Big|^p<\infty,$$

所以在两种条件下都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}E[|\frac{x_k}{k^{q/p}}|^p|\mathcal{F}_{k-1}]<\infty\quad \text{a.s.},$$

对鞅差列$(\frac{x_k}{k^{q/p}},\mathcal{F}_k)$用定理2.2.11便得推论. ∎

鞅差和估计

我们先证常用的Kronecker引理.

引理 2.2.5 设$b_k>0$, $b_k\uparrow\infty$, M_k 为任一数列. 如果级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{M_k}{b_k}$ 收敛, 则$\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n}M_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

证明 记$N_0\triangleq 0$, $N_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{M_k}{b_k}$, $n\geq 1$, $N\triangleq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{M_k}{b_k}$. 据条件对任意$\epsilon>0$, 存在$n_\epsilon$, 只要$n>n_\epsilon$,必有

$$|N_k-N|<\epsilon,\quad \forall k\geq n_\epsilon.$$

那么我们得到

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}M_k\Big|&=\Big|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}b_k(N_k-N_{k-1})\Big|=|N_n+\frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n}(b_{k-1}-b_k)N_{k-1}|\\&=|N_n-\frac{b_n-b}{b_n}N+\frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n}(b_{k-1}-b_k)(N_{k-1}-N)|\\&\leq|N_n-N|+\frac{b_1}{b_n}|N|+\frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n_\epsilon}(b_{k-1}-b_k)|N_{k-1}-N|+\epsilon\xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ \epsilon\to 0}]{}0.\end{aligned}$$

∎

定理 2.2.12 (强大数法则)设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅差列, 对某个$p>1$, $\sup\limits_k E|x_k|^p<\infty$或$\sup\limits_k E[|x_k|^p|\mathcal{F}_{k-1}]<\infty$ a.s., 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad a.s.$$

证明 在推论2.2.5中取$q=p$, 便知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{k}$ a.s. 收敛. 用引理2.2.5便得定理结论. ∎

注 2.2.3 Kolmogorov强大数法则针对$\{x_k\}$相互独立相同分布的随机变量序列, 当$E|x_1|<\infty$时, 断定$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\xrightarrow[n\to\infty]{}Ex_1$ a.s. 和定理2.2.11相比, 把鞅差增强到iid, 但把$p(>1)$阶矩减弱为1阶矩. 对鞅差列, 也成立中心极限定理. 设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅差列. 我们沿用上面的符号, $s_n\triangleq\left(\sum\limits_{j=1}^{n}Ex_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
若$\frac{1}{s_n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})\xrightarrow[n\to\infty]{p}1$, 并且成立Lindeberg条件, 即对任意$\epsilon>0$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}Ex_k^2I_{\{|x_k|>\epsilon s_n\}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\tag{2.2.10}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}Ex_k<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.\tag{2.2.11}$$

对鞅差列, 还成立重对数律. 设$(x_k,\mathcal{F}_k)$为鞅差列, 且同分布,$Ex_k^2=\sigma^2$, 那么

$$\limsup_{n\to\infty}(2\sigma^2 n\log\log n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}x_k=+1 \quad a.s. \tag{2.2.12}$$

$$\liminf_{n\to\infty}(2\sigma^2 n\log\log n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}x_k=-1 \quad a.s. \tag{2.2.13}$$

当“同分布”换成“一致有界性”后, 在$[r_n\to\infty]$上仍成立上述重对数律, 只是应把$n\sigma^2$换成$r_n^2\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}E(x_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$.

在牵涉到随机量的分析时, 下述加权鞅差和估计很有用.

定理 2.2.13 设$\{X_k,\mathcal{F}_k\}$为鞅差列, X_k可以是一个阵. 设$(M_k,\mathcal{F}_k)$为适应过程, M_k也可以是阵, $\|M_k\|<\infty$ a.s. $\forall k$. 设对某$\alpha\in(0,2]$

$$\sup_n E[\|X_{n+1}\|^{\alpha}|\mathcal{F}_n]<\infty \quad a.s.,$$

那么若记$s_n(\alpha)=(\sum\limits_{k=0}^{n}\|M_k\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$, 当$n\to\infty$时, 有

$$\sum_{k=0}^{n}M_kX_{k+1}=O(s_n(\alpha)\log^{\frac{1}{\alpha}+\eta}(s_n^{\alpha}(\alpha)+e)) \quad \text{a.s. } \forall\eta>0. \tag{2.2.14}$$

证明 不失一般性可认为$M_0\neq 0$. 记

$$\sigma=\sup_{n\geq 0}E[\|X_{n+1}\|^{\alpha}|\mathcal{F}_n].$$

由于$s_k(\alpha)$及M_k对$\mathcal{F}_k$可测, 所以用定理条件知

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}E[\|(s_n(\alpha)\log^{\frac{1}{\alpha}+\eta}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e))^{-1}M_kX_{k+1}\|^{\alpha}|\mathcal{F}_k]\\
&\leq\sigma\sum_{k=1}^{\infty}(s_k^{\alpha}(\alpha)\log^{1+\eta\alpha}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e))^{-1}\|M_k\|^{\alpha}\\
&=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}(s_k^{\alpha}(\alpha)\log^{1+\eta\alpha}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e))^{-1}\int_{s_{k-1}^{\alpha}(\alpha)}^{s_k^{\alpha}(\alpha)}dx\\
&\leq\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\int_{s_{k-1}^{\alpha}(\alpha)}^{s_k^{\alpha}(\alpha)}\frac{dx}{x\log^{1+\eta\alpha}(x+e)}\leq\sigma\int_{s_0^{\alpha}(\alpha)}^{\infty}\frac{dx}{x\log^{1+\eta\alpha}(x+e)}<\infty.
\end{aligned}$$

用定理2.2.11知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s_k(\alpha)\log^{\frac{1}{\alpha}+\eta}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e)}M_kX_{k+1} \quad \text{a.s. 收敛.} \tag{2.2.15}$$

记$a_k=s_k(\alpha)\log^{\frac{1}{\alpha}+\eta}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e)$, a_k单调非降. 从(2.2.15)知序列$y_n\triangleq\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^{-1}M_kX_{k+1}$对$n$有界,即存在可

能依赖于ω 的$\zeta<\infty$使$\|y_n\|\le\zeta, \forall n$. 这样我们有

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{k=1}^{n}M_kX_{k+1}\|=\|\sum_{k=1}^{n}a_k(y_k-y_{k-1})\|\\
=&\|a_ny_n-a_0y_0-\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})y_{k-1}\|\\
\le&O(a_n)+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\|y_{k-1}\|\\
=&O(a_n)+O\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\right)=O(a_n).
\end{aligned}$$

∎

注 2.2.4 设$\{X_n,\mathcal{F}_n\}$为鞅差列, $\sup_n E[\|X_{n+1}\|^\alpha|\mathcal{F}_k]<\infty$ a.s. 并且$X_k\neq 0$ a.s. 记

$$M_k\triangleq E[\|x_{k+1}\|^\alpha|\mathcal{F}_k]\neq 0\quad \text{a.s.},\qquad X'_{k+1}\triangleq\frac{X_{k+1}}{M_k^{\frac{1}{\alpha}}}\quad\forall k.$$

那么$(X'_k,\mathcal{F}_k)$仍为鞅差列, 并且$E(\|X'_{k+1}\|^\alpha|\mathcal{F}_k)=1$,

$$X_{k+1}=M_k^{\frac{1}{\alpha}}X'_{k+1}.$$

所以估计鞅差和$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, 等价于估计$\sum\limits_{k=1}^{n}M_k^{\frac{1}{\alpha}}X'_{k+1}$, 而后者适用定理2.2.13. 当$\alpha=1$时, 就有

$$\sum_{k=1}^{n}X_k=O\Big(s_n(2)\log^{\frac{1}{2}+\eta}(s_n^2(2)+e)\Big).$$

和(2.2.12), (2.2.13)相比, 这里估计较粗, 但所用条件更为一般.

习题4.2

4.2.1 设$\{X_n\}$为iid随机变量列, $E|X_1|>0$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 如果$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}0$, 证明$\inf\{n\ge1: S_n\ge0\}<\infty$ a.s., $\inf\{n\ge1:\ S_n<0\}<\infty$, 且

$$P\{\limsup_n S_n=\infty\}=1=P\{\liminf_{n\to\infty}S_n=-\infty\}.$$

4.2.2 设$\{X_n\}$为iid并对某个$p\in(0,\infty)$, $E|X_1|^p=\infty$, 证明$P\{\limsup\limits_{n\to\infty}|S_n|/n^{\frac{1}{p}}=\infty\}=1$, 这里$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

4.2.3 设$\{X_n\}$相互独立, $P\{x_n=1\}=P(x_n=-1)=1/2$. 证明对任意$p>2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E|X_n/\sqrt{n}|^p<\infty$, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n/\sqrt{n}$ a.s.发散.

4.2.4 设$\{X_n\}$为iid. 证明对任一$\alpha\in(0,\frac{1}{2}]$, 必成立下列i), ii), iii)三者之一:

i) $S_n/n^\alpha\to\infty$ a.s., ii) $S_n/n^\alpha\to-\infty$a.s., iii) $\limsup\limits_{n\to\infty}S_n/n^\alpha=\liminf_{n\to\infty}S_n/n^\alpha=-\infty$, 这里$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

4.2.5 设$\{X_n\}$为iid, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $\{\mathcal{F}_n\}$为σ-代数族, $\mathcal{F}_n\uparrow$, $\mathcal{F}_n$和X_{n+1}独立. 如果EX_1存在, τ对$\{\mathcal{F}_n\}$的停时, $E\tau<\infty$, 证明$ES_\tau=EX_1\cdot E\tau$.

4.2.6 设$\{X_n\}$为iid, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 证明能找到常数列$c_n$使$\frac{(S_n-c_n)}{n}\to0$ a.s.的充要条件是$E|X_1|<\infty$.

4.2.7 设$\{X_n\}$为iid, $E|X_1|>0$,证明$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/2}}|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|=\infty$ a.s.

4.2.8 设$\{X_n\}$为iid, 在$[0,1]$上均匀分布, 记$T=\inf\{n>1:\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\ge1\}$,证明$ET=e=2ES_T$.

4.2.9 设$\{X_n\}$为iid, 证明$E\sup_n|\frac{X_n}{n}|<\infty$的充要条件是$E|X_1|\log^+|X_1|<\infty$.

4.2.10 设$\{X_n\}$为iid, $EX_1=1$, $\{a_n\}$为实数列, 证明$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j\to 1$的充要条件是$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_jX_j\to 1$ a.s.

4.2.11 设$\{X_n\}$相互独立, $EX_n=0$, $EX_n^2=\sigma_n^2$, $s_n^2\triangleq\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\to\infty$.证明对$\alpha>\frac{1}{2}$, $s_n^{-1}(\log s_n^2)^{-\alpha}\sum_{i=1}^n X_i\to 0$ a.s.

4.2.12 对任一随机变量列$\{X_n\}$, 证明必可找到常数列a_n, $0<a_n\uparrow\infty$使$X_n/a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$a.s.

4.2.13 设$\{X_n\}$为iid, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$,证明对任一$p\in(0,2)$使对某一常数c, $\frac{S_n-nc}{n^{1/p}}\to 0$ a.s.的充要条件是$E|X_1|^p<\infty$.

4.2.14 证明对$r>0$,使$E|X|^r<\infty$的充要条件是$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}(\log n)^rP\{|X|\geq n\log n\}<\infty$.

4.2.15 设$\{S_n,\mathcal{F}_n\}$为鞅（或正下鞅）, 证明对任一停时τ, $E|S_\tau|\leq\varliminf_{n\to\infty}E|S_n|$.

4.2.16 设$\{X_n\}$为iid, $EX_1=0$, $E|X_1|^p<\infty$, $p\in[1,2)$, 记$S_n=\sum_{j=1}^n X_j$, 证明

$$\sum_{j=2}^\infty\frac{1}{j^{2/p}}X_jS_{j-1}<\infty\quad\text{a.s.},$$

4.2.17 设$\{X_k\}$相互独立, $EX_i=0$, $i\geq 1$, $\sup_i EX_i^2<\infty$. 证明$\sum_{i=1}^\infty\frac{X_iX_{i+1}}{i}<\infty$ a.s.

4.2.18 设$\{X_n\}$相互独立, $EX_n=0$, $n\geq 1$, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. 证明$E\max_{1\leq i\leq n}|S_i|\leq 8E|S_n|$.

4.2.19 设$\{A_n\}$是事件列, $A_n\in\mathcal{F}_n\uparrow$, 证明

$$P\{A_n\text{ 出现无穷多次 }\Delta[\sum_{n=1}^\infty P\{A_{n+1}|\mathcal{F}_n\}=\infty]\}=0,$$

这里$A\Delta B=A\cap B^c\cup B\cap A^c$.

4.2.20 设$\{S_n,\mathcal{F}_n\}$为非负鞅, $ES_1=1$, 证明

$$P\{S_n\geq\lambda,\text{对某个}n\}\leq\frac{1}{\lambda}.$$

§2.3 随机过程初步

在上一节中讨论了独立变量序列以及它的推广鞅差序列, 及鞅差列之和. 这一节简单介绍平稳过程、Markov过程和混合过程. 它们是另一类相关性, 在通讯及信号处理、时间序列分析、排队网络等众多领域中有广泛应用.

有些实际过程不能用确定性的微分方程来描述, 而用Brown运动驱动的随机微分方程来描述较为贴切. 对这些内容本节也作一个简单介绍. 许多结果将不给出证明. 参考书见[4, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

平稳性、遍历性

下面讨论离散时间的过程,但对连续时间都有相应的结果.设$\{\xi_k\}$为m维随机向量列. 若$E\xi_k=\mu$不依赖时间k, 并且相关函数$R(k,j)\triangleq E\xi_k\xi_j^*=R(k-j)$只依赖于时间差$k-j$, 那么$\{\xi_k\}$叫宽平稳过程. 这里“*”表示转置并取复共轭.

例 2.3.1 设$\{\xi_k\}$为实iid序列, $E\xi_k=\mu$, $E\xi_k\xi_k^\tau=R$, 那么

$$E\xi_k\xi_j^\tau=\begin{cases}\mu\mu^\tau, & \text{若}|k-j|>0\\ R, & \text{若}k-j=0\end{cases}$$

所以$\{\xi_k\}$是宽平稳过程.

例 2.3.2 设$\{w_k\}$是零均值、不相关的随机序列：$Ew_k=0, \forall k$, $E|w_k|^2=1$, $Ew_kw_j^*=0, \forall k\neq j$, $-\infty<k<\infty$, $-\infty<j<\infty$.

设c_k为复数列；$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty$, 那么$\xi_k=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}c_{k-j}w_j$为宽平稳过程. 这里求和到无穷是指均方意义下的极限. 这是因为

$$E\xi_k\xi_s^*=E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_{k-j}w_j\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_{s-l}w_l\right)^*=\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_{k-s+j}c_j^*.$$

我们引进直交增量过程的概念. 设对任意$t\in(-\infty,\infty)$, $E\|\eta_t\|^2<\infty$, 并对任意$t_2>s_2\geq t_1>s_1$, 有

$$E(\eta_{t_2}-\eta_{s_2})(\eta_{t_1}-\eta_{s_1})^*=0,$$

那么η_t叫正交增量过程.

和直交增量过程对应有函数阵$F(t)$

$$E(\eta_t-\eta_s)(\eta_t-\eta_s)^*\triangleq F(t)-F(s).$$

$F(t)$ 叫谱函数.

设$f(t)$为确定性函数, 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dF(t)<\infty,$$

则称$f\in L_2(dF)$.

设$f(t)$为阶梯函数

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n-1}c_iI_{(t_i,t_{i+1}]}(t),\quad I_{(t_i,t_{i+1}]}(t)=\begin{cases}1, & \text{若 } t\in(t_i,t_{i+1}],\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad t_1<t_2<\cdots<t_n,$$

那么可定义随机积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\eta_t\triangleq\sum_{i=1}^{n-1}c_i(\eta_{t_{i+1}+0}-\eta_{t_i-0}).\tag{2.3.1}$$

对任一$f\in L_2(dF)$, 必存在阶梯函数$f_n(t)$, 使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)-f_n(t)\|^2dF(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

可以证明, $\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)d\eta_t$存在均方极限, 也就是存在随机变量$\zeta$, 使$E\|\zeta-\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)d\eta_t\|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

定义随机积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\eta_t\triangleq\zeta\left(=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)d\eta_t\right),$$

"l.i.m."表示均方极限.

可以证明对$f,g\in L_2(dF)$

$$E\int_{-\infty}^{\infty}f(t)d\eta_t\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(t)d\eta_t\right)^*=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)dF(t).$$

宽平稳过程有 谱表示, 对任意p维宽平稳过程ξ_t, 存在p维直交增量过程η_t, 使

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}d\eta_\lambda,\quad -\infty<t<\infty.$$

对离散时间的宽平稳过程$\{\xi_k\}$, 有

$$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} d\eta_\lambda, \tag{2.3.2}$$

$$E\xi_k\xi_j^* = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(k-j)} dF(\lambda).$$

由此看出, 相关函数$R(\tau)$是谱函数的Fourier-Stieltjes变换

$$R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda). \tag{2.3.3}$$

当$\tau = 0$时, $R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} dF(\lambda)$, 也就是说, 谱函数的全变差等于$\{\xi_k\}$ 的二阶矩.

可以证明ξ_k的时间平均均方收敛到随机变量$\xi \triangleq (\eta_{0^+} - \eta_{0^-})$, 即

$$E\Big\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi_k - \xi\Big\|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

当N趋于无穷时, 若时间平均$\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\xi_k$, 趋于$E\xi_k$时, 则称$\{\xi_k\}$具有遍历性, 或对$\{\xi_k\}$成立遍历定理. $f(\lambda) \triangleq \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$称为谱密度, 这时(2.3.2)成为

$$R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda.$$

对平稳过程的预报、内插、滤波在上了世纪40年代到60年代做过详细研究, 并有许多重要应用. 根据对ξ_j, $0 \le j \le k$ 的观测, 要对$\xi_{k+\tau}$, $\tau > 0$做线性估计, 使估计误差在均方意义下达到最小, 叫预报. 当观测带有噪声时, 要去伪存真, 这就是滤波. 也可能k以前观测值中丢了一些数据, 则就要内插.

这类问题的解决主要基于已知相应过程的谱函数或谱密度上, 当谱密度为有理函数时, 可用密度因式分解的办法, 求出最优预报、或最优滤波的传递函数. 对一般的过程, 则要求$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$, 也可得到最优预报等有关结果.

设对任意足标$k_1, \ldots, k_n$及任意j,

$$(\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_n}) \quad \text{和} \quad (\xi_{k_1+j}, \ldots, \xi_{k_n+j})$$

的分布函数相同, 则$\{\xi_k\}$称为狭义平稳过程.

显然, 当$E\|\xi_k\|^2 < \infty$时, 狭义平稳过程一定也宽平稳.

例 2.3.3 设$\{\xi_k\}$是正态宽平稳过程, 那么它一定是狭义平稳过程. 这是因为联合正态分布只取决于一、二阶矩, 而宽平稳性决定了二阶矩经时间推移后不变, 所以它必定是狭义平稳.

狭义平稳过程的分布不随推移变化, 这就使人想到(可以证明), 有些集合是 “推不动” 的, 这些集合叫不变集, 不变集构成一个子σ-代数, 记作$\mathcal{C}$.

对狭义平稳过程$\{\xi_k\}$, 当$E\xi_1$存在时,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\xi_1|\mathcal{C}) \quad \text{a.s.} \tag{2.3.4}$$

当$\mathcal{C} = (\Omega, \phi)$ a.s. 时, 则称狭义平稳过程$\{\xi_k\}$具有遍历性, 这时

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\xi_1) \text{ a.s.} \tag{2.3.5}$$

当$\{\xi_k\}$为iid序列时, 据Kolmogorov强大数法则, 当$E|\xi_1|<\infty$时, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\to E\xi_1$, 也就是具有遍历性.

Markov过程

设对任意Borel集B, 任意n及任意$0\le t_1<t_2\cdots<t_n<t_{n+1}$, 若

$$P(\xi_{t_{n+1}}\in B|\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_n})=P(\xi_{t_{n+1}}\in B|\xi_{t_n}),$$

则称$\{\xi_t\}$为Markov过程, 这里t可以是离散时间也可以是连续时间. 换句话, 给定了现在状态, Markov过程将来的概率分布不依赖过去.

以后要用到下面事实, 我们把它归结为定理.

定理 2.3.1 设$f(\lambda,\mu)$为定义在$(\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m,\mathcal{B}^l\times\mathcal{B}^m)$ 上的可测函数. 设l维随机向量ξ和m维随机向量η独立, 如对ξ值域中的任一$\lambda\in\mathbb{R}^l$, $Ef(\lambda,\eta)\triangleq g(\lambda)$存在. 那么

$$E(f(\xi,\eta)|\xi)=g(\xi).$$

特别, 当$f(\xi,\eta)=\eta$时, $E(\eta|\xi)=E\eta$.

例 2.3.4 设对$t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^n$及$y\in\mathbb{R}^m$, $\phi(t,x,y)$是可测函数, $\xi_0,w_1,w_2,\ldots$相互独立. 那么

$$\xi_{k+1}=\Phi(k+1,\xi_k,w_{k+1}),k\ge 0$$

是Markov过程. 这是因为对任一Borel集B, 用定理2.3.1知

$$\begin{aligned}&P(\Phi(k+1,\xi_k,w_{k+1})\in B|\xi_0,\ldots,\xi_k)=P(\Phi(k+1,x,w_{k+1})\in B)|_{x=\xi_k}\\=&P(\Phi(k+1,\xi_k,w_{k+1})\in B|\xi_k).\end{aligned}$$

如果ξ_t的取值为可列个, 不妨用正整数来表示ξ_t的取值, 那么Markov过程称为Markov链.

对$\forall s\le t$, $p(s,t;i,j)\triangleq P(\xi_t=j|\xi_s=i)$, 称为Markov链的转移概率. $p(0,j)\triangleq P(\xi_0=j)$ 称为Markov链的初始分布.

显然

$$p(s,t;i,j)\ge 0,\quad \sum_{j=0}^{\infty}p(s,t;i,j)=1.$$

对任意$s\le t\le\tau$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}p(s,t;j,k)p(t,\tau;k,l)=p(s,\tau;j,l)\tag{2.3.6}$$

称为Kolmogorov-Chapman方程.

记第j行k列的元为$p(s,t;j,k)$的矩阵为$P(s,t)$. 那么Kolmogorov-Chapman方程可改写成

$$P(s,t)P(t,\tau)=P(s,\tau)\quad\forall s<t<\tau.\tag{2.3.7}$$

当ξ_t平稳时: $P(s,s+t)=P(0,t),\forall s,t\ge 0$. 记$P(t)\triangleq P(0,t)$.

当t为离散时间时, $P(k)=(P(1))^k$, k为正整数, 这时把$P(1)$记为P, 它的i行j列的元记为p_{ij}, 而$P^n=P(n)$的i行j列元记为$p_{ij}(n)$. 对离散时间时齐Markov链, 转移概率阵就是指P.

如果存在$n\ge 0$, 使$p_{ij}(n)>0$, 称状态i可达j, 记为$i\to j$. 如果$i\to j$, 且$j\to i$, 称i和j互通, 记为$i\leftrightarrow j$. 设A为状态集, 如果对任一$i\in A$, $\sum\limits_{j\in A}p_{ij}=1$, 则称$A$ 为闭集. 如果Markov链的状态集不含真的的闭子集, 则称Markov链为不可约.

如果从状态i出发, 在有限步内必回到i, 则称i为常返的, 也就是

$$P(\text{存在}n \in [1,\infty)\text{使}\xi_n = i|\xi_0 = i) = 1.$$

按互通关系, 在状态集中得到一个等价类H. 若$i_0 \in H$, i_0常返, 则$H = \{\text{一切 } i : i \leftrightarrow i_0\}$, H中的状态都常返, 而且从H中任一状态出发, 有限时间后, 一定到达i_0, 并且不可能到达H以外的状态. 如果m不是d的整数倍时, $p_{ii}(m) = 0$, 而且存在k_0, 当$k > k_0$时, $p_{ii}(kd) > 0$, 称d 为状态i的周期. 当$d = 1$时, 称i为非周期的. 同一常返类中的状态有相同的周期.

当$n \to \infty$时,极限$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k$存在, 记为$L$. 它满足方程

$$PL = LP = L\ (= L^2). \tag{2.3.8}$$

设$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \ldots)$, $\pi_j \geq 0$, $\forall j$, π_j不全为0, 若$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_i p_{ij} = \pi_j$, 则称$\pi$为$P$的一个不变测度.

又若$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$, 则称$\pi$为不变概率测度.

设$\{\xi_k\}$为不可约常返Markov链, 转移阵为P, 则L的行为相同的不变测度π, π全为0或全不为0. 当π不为0 时, π是P的唯一不变概率测度.

对P存在不变概率测度的充分必要条件是至少有一个正常返类 (至少存在i, 使L阵的第i个对角元$L_{ii} > 0$). 这时, 在非正常返类上的不变概率测度为0.

设P为不可约、正常返、非周期有限状态Markov 链, 则

$$\lim_{n\to\infty} P^n = L. \tag{2.3.9}$$

$\phi-$混合过程

设$\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, 是随机向量列. 对任意非负整数$s \geq 0$ 及$h \geq 0$ 定义σ-代数$\mathcal{F}_0^s \triangleq \sigma\{\xi_k, 0 \leq k \leq s\}$及$\mathcal{F}_{s+h}^\infty \triangleq \sigma\{\xi_k, s+h \leq k < \infty\}$, 这里用$\sigma\{\xi_k, 0 \leq k \leq s\}$表示随机向量$\{\xi_k, 0 \leq k \leq s\}$生成的$\sigma$-代数.

如果存在确定性数列$\phi(h) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, 使

$$\sup_{A\in\mathcal{F}_{s+h}^\infty, B\in\mathcal{F}_0^s} |P(A|B) - P(A)| \leq \phi(h), \forall s \geq 0, \forall h \geq 0, \tag{2.3.10}$$

那么称$\{\xi_k\}$ 为ϕ-混合过程, $\phi(k)$叫混合系数.

当$\{\xi_k\}$为相互独立的随机变量序列时, 只要取$\phi(h) \equiv 0, \forall h \geq 1$ (2.3.10)显然成立. 所以这时$\{\xi_k\}$是ϕ-混合过程. 因此ϕ 混合过程是对独立序列的一种推广. 事实上, ϕ-混合过程包含了相当广的一类过程, 下面举两个例子.

例 2.3.5 h-相依过程. 如果对任何$k \geq 0$, ξ_k和$\{\xi_{k+h+j}, j = 0, 1, \cdots\}$ 相互独立, 那么称$\{\xi_k\}$ 为h-相依过程. 很明显, h-相依过程是ϕ-混合过程.

例 2.3.6 滑动平均(MA) 过程. 设$\{w_k\}$ 为相互独立的随机变量序列, $c_1, c_2, \cdots, c_r$为常数, 设

$$\xi_k = w_k + c_1 w_{k-1} + \cdots + c_r w_{k-r},$$

由于ξ_k和$\{\xi_{k+r+1+j}, j = 0, 1, \cdots\}$相互独立, 所以$\{\xi_k\}$ 是$(r+1)$-相依过程, 因此是ϕ-混合过程.

ϕ-混合过程刻划了过程的一种弱相关性, (2.3.10) 表明, 当h 增大时, $\mathcal{F}_0^s$ 和$\mathcal{F}_{s+h}^\infty$两个σ-代数之间的相关性逐渐减弱. 这样一类过程经常用来描述实际中出现的一些弱相关过程.

设$(\phi_k, \mathcal{F}_k)$为适应过程, 设ϕ_k是r维的. 不妨设$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_0^k$. 我们证明对任何$\mathcal{F}_{m+h}^\infty$可测的随机变量$x_{m+h}$, 只要$|x_{m+h}| \leq 1$ 就有

$$|E(x_{m+h}|\mathcal{F}_m) - Ex_{m+h}| \leq 2\phi(k), \tag{2.3.11}$$

这里$\phi(k)$为(2.3.10)的混合系数.

我们用简单函数逼近x_{m+h}来证. 先设x_{m+h}为示性函数: $x_{m+h}=I_A, A\in\mathcal{F}_{m+h}^\infty$. 反设存在$B\in\mathcal{F}_m$, $P(B)>0$ 使得除B上的零测集外

$$|E(x_{m+h}|\mathcal{F}_m)-Ex_{m+h}|>\phi(k),\quad \forall\omega\in B.$$

用ϕ-混合性(2.3.10) 就有

$$\begin{aligned}\phi(h)&<\Big|\frac{1}{P(B)}\int_B\Big(E(x_{m+h}|\mathcal{F}_m)-P(A)\Big)dP\Big|\\&=\Big|\frac{1}{P(B)}\Big(P(AB)-P(B)P(A)\Big)\Big|\le\phi(h).\end{aligned}$$

所得矛盾证明(2.3.11) 对示性函数成立, 并且(2.3.11)右端的系数可取为1而不是2.

由此知对非负的简单函数$x_{m+h}=\sum\limits_i a_iI_{A_i}$, $0<a_i\le 1$(因为$|x_{m+h}|\le 1$) 同样的不等式也成立. 用单调收敛定理知对非负的x_{m+h}, 只要它是$\mathcal{F}_{m+h}^\infty$可测, 且$|x_{m+h}|\le 1$, (2.3.11)必成立, 并且右端系数可取为1. 对于一般的满足条件的x_{m+h}, 可以分解为正部x_{m+h}^+和负部x_{m+h}^-: $x_{m+h}=x_{m+h}^+-x_{m+h}^-$. 根据上述结果,$|E(x_{m+h}^+|\mathcal{F}_m)-Ex_{m+h}^+|\le\phi(k)$, 对$x_{m+h}^-$ 同样的不等式也成立, 所以(2.3.11) 成立.

Wiener过程(Brown运动)及随机积分

上面在Markov过程的定义中, 曾提到时间可以是连续的, 但我们主要讨论了随机序列, 时间是离散的, 下面两节主要讨论连续时间的随机过程.

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为基本概率空间, $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B})$为正实数空间, $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$, $\mathcal{B}$为$\mathbb{R}^+$中的Borel σ-代数, 用$\mathcal{F}\times\mathcal{B}$表示包括形如$F\times B$集合的最小$\sigma$-代数, 其中$F\in\mathcal{F}$, $B\in\mathcal{B}$.

取值于$(\mathbb{R}^l,\mathcal{B}^l)$并定义于$(\Omega\times\mathbb{R}^+,\mathcal{F}\times\mathcal{B})$的函数$\xi_t(\omega)$, 称$l$维连续时间随机过程, 通常不显写$\omega$, 记作$\xi_t$.

如果对任意$B\in\mathcal{B}^l$, $\{(\omega,t):\xi_t(\omega)\in\mathcal{B}\}\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}$, 则称$\xi_t(\omega)$为可测随机过程.

固定ω后, $\xi_t(\omega)$ 是定义在 $[0,\infty)$上的实函数, 称为ξ_t的轨线. 如果除了可能的零概率事件外, ξ_t的所有轨线左(或右) 连续则ξ_t 叫左(或右)连续. 这时过程必可测.

1827年英国生物学家Brown发现悬浮在液面上的花粉微粒作着高度不规则运动, 这种现象后来被称为Brown运动. 它的严述数学建模, 归功于Wiener, 所以叫Wiener过程.

设l维w_t和非降σ-代数族$\mathcal{F}_t$相适应$(w_t,\mathcal{F}_t)$, $t\ge 0$. $w_0=0$, $Ew_t=0$, $E\|w_t\|^2<\infty$, $\forall t\ge 0$, 且

$$E[(w_t-w_s)(w_t-w_s)^\tau|\mathcal{F}_s]=(t-s)I,\quad\forall t\ge s. \tag{2.3.12}$$

还设$(w_t,\mathcal{F}_t)$是鞅, 它的a.s.轨线连续. 那么称$(w_t,\mathcal{F}_t)$为Wiener过程.

定理 2.3.2 Wiener过程是独立增量过程, 即对$s_1<t_s\le s_2<t_2$, $w_{t_2}-w_{s_2}$和$w_{t_1}-w_{s_1}$ 独立, 并且$w_t-w_s(\forall t>s)$为正态, 成立重对数律

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\|w_t\|^2}{2lt\log\log t}=1,\qquad \text{a.s.} \tag{2.3.13}$$

w_t的轨线在几乎所有t都不可微分.

推论 2.3.1 Wiener过程是Markov 过程. 这从独立增量性入及定理2.3.1中可看出: 不妨设w_t是一维的, 注意到$w_{t+s}-w_s$和w_λ, $0\le\lambda\le s$独立, 所以

$$\begin{aligned}&P(w_{t+s}<a|w_\lambda,0\le\lambda\le s)=P(w_{t+s}-w_s<a-w_s|w_\lambda,0\le\lambda\le s)\\=&P(w_{t+s}-w_s<a-x)|_{x=w_s}\\=&P(w_{t+s}-w_s<a-w_s|w_s)=P(w_{t+s}<a|w_s).\end{aligned}$$

在上面, 我们讨论过对正交增量过程的随机积分, 被积函数为确定性函数. 现在来看对Wiener过程的积分, 被积函数为随机过程.

设$\mathcal{F}_t$为非降σ-代数, $(\xi_t, \mathcal{F}_t)$为适应过程. 如果

$$E\int_0^T \|\xi_t\|^2 dt < \infty,$$

则称$(\xi_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}_T$. 如果

$$P\left(\int_0^T \|\xi_t\|^2 dt < \infty\right) = 1,$$

则称$(\xi_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{P}_T$, T可以有穷或无穷.

设$\{t_k\}$是$[0,T]$一个分割, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, 设$\xi_k$为$\mathcal{F}_{t_k}$ 可测, 那么称

$$\xi_t = \xi_0 I_{[0]} + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k I_{(t_k, t_{k+1}]}$$

为简单过程.

设$(w_t, \mathcal{F}_t)$为Wiener过程. 和(2.3.1)类似地定义随机积分, 叫伊滕随机积分, 或简称随机积分. 首先对简单过程来定义随机积分. 对任一$t \in [0,T]$定义

$$\int_0^t \xi_s dw_t \triangleq \sum_{k=0}^{m} \xi_k (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) + \xi_{m+1}(w_t - w_{t_m+1}), \quad t_{m+1} < t \le t_{m+2}.$$

对任一$\xi_t \in \mathcal{M}_T$, 存在简单过程$\xi_t^n \in \mathcal{M}_t$及不依赖$\xi_t^n$选择的一个随机向量$\eta$, 使

$$E\int_0^T \|\xi_t - \xi_t^n\|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} E\|\eta - \int_0^T \xi_t^n dw_t\|^2 = 0.$$

那么对$\xi_t \in \mathcal{M}_T$的随机积分的定义为

$$\int_0^T \xi_t dw_t \triangleq \underset{n\to\infty}{\mathbf{l.i.m.}} \int_0^T \xi_t^n dw_t \quad (= \eta),$$

$$\int_0^t \xi_s dw_s \triangleq \int_0^T I_{[0,t]} \xi_s dw_s.$$

进一步, 对任一$\xi_t \in \mathcal{P}_T$, 存在随机过程列$\xi_\tau^n \in \mathcal{M}_T$, 及不依赖$\xi_t^n$选择的随机变量$\eta$, 使

$$\int_0^T \|\xi_t - \xi_t^n\|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

并且

$$\int_0^T \xi_t^n dw_t \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta.$$

这样, 对$\xi_t \in \mathcal{P}_T$的随机积分定义为

$$\int_0^T \xi_t dw_t \triangleq P - \lim_{n\to\infty} \int_0^T \xi_t^n dw_t \quad (= \eta),$$

$$\int_0^t \xi_s dw_s \triangleq \int_0^T I_{[0,t]} \xi_s dw_s.$$

随机积分有如下性质

i)设a,b为常数, ξ_s^1, $\xi_s^2\in\mathcal{P}_T$, 那么

$$\int_0^t(a\xi_s^1+b\xi_s^2)dw_s=a\int_0^t\xi_s^1dw_s+b\int_0^t\xi_s^2dw_s,\quad\forall t\in[0,T];$$

ii) 对$\xi_t\in\mathcal{P}_T$,

$$\int_0^t\xi_sdw_s\quad 对t\in[0,T)连续;\tag{2.3.14}$$

iii) 对$\xi_t\in\mathcal{P}_T$, $\int_0^t\xi_sdw_s=\int_0^u\xi_sdw_s+\int_u^t\xi_sdw_s,\quad 0\le u\le t;$

iv) 设$\xi_t,\xi_t^1,\xi_t^2\in\mathcal{M}_T$, 那么

$$E\int_0^t\xi_sdw_s=0,,\quad\forall t\in[0,T],\tag{2.3.15}$$

$$\left(\int_0^t\xi_sdw_s,\mathcal{F}_t\right)\ 是鞅, 并且\tag{2.3.16}$$

$$E\left(\int_0^t\xi_s^1dw_s\right)\left(\int_0^t\xi_s^2dw_s\right)^*=E\int_0^t\xi_s^1(\xi_s^2)^*ds.\tag{2.3.17}$$

这些性质对简单过程是显见的事实, 然后对一般的过程用简单过程逼近的办法证明.

随机微分方程

为了把微分方程拓广到带噪声的情形, 必须引进随机微分的概念. 设$(a_t,\mathcal{F}_t)$, $(b_t,\mathcal{F}_t)$ 为适应过程, $\|a_t\|^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{P}_T$, $b_t\in\mathcal{P}_T$.

如下定义的过程ξ_t

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^ta_sds+\int_0^tb_sdw_s\tag{2.3.18}$$

叫伊滕过程. 如果a_t和b_t对$\mathcal{F}_t^\xi\triangleq\sigma\{\xi_\lambda,\lambda\le t\}$适应, 则$\xi_t$叫扩散过程.

我们也称由(2.3.18)定义的过程ξ_t有随机微分

$$d\xi_t=a_tdt+b_tdw_t\tag{2.3.19}$$

在微积分中, 我们知道复合函数的导数: $\frac{df(y)}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$. 但当$y$ 是伊滕过程ξ_t时, 这样的链式求导方法不成立, 也就是说, $df(\xi_t)$不等于$f'(\xi_t)d\xi_t$.

定理 2.3.3 (伊滕公式) 设$(a_t,\mathcal{F}_t)$为l维适应过程, $\|a_t\|^{\frac{1}{2}}\in\mathcal{P}_T$, $(B_t,\mathcal{F}_t)$是$l\times m$适应过程阵, $\|B_t\|\in\mathcal{P}_T$, $(w_t,\mathcal{F}_t)$为m 维Wiener过程. 设偏导数$f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$连续, 这里$f_t(t,x)\triangleq\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$,

$$f_x(t,x)\triangleq\begin{bmatrix}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f(t,x)}{\partial x^l}\end{bmatrix},\quad f_{xx}(t,x)\triangleq\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^1\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^l\partial x^1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^1\partial x^l}&\cdots&\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^l\partial x^l}\end{bmatrix},$$
$$x=[x^1,\ldots,x^l]^\tau.$$

那么

$$df(t,\xi_t)=[f_t(t,\xi_t)+f_x^\tau(t,\xi_t)a_t,+\frac{1}{2}\operatorname{tr}f_{xx}(t,\xi_t)B_tB_t^\tau]dt+f_x^\tau(t,\xi_t)B_tdw_t,\tag{2.3.20}$$

把(2.3.20)和确定性运算相比, 这里多了一项$\frac{1}{2}\operatorname{tr}f_{xx}(t,\xi_t)B_tB_t^\tau dt$. 这项出现的原因, 粗略地讲, $(dw_t)^2$的阶数并不是$(dt)^2$, 而是dt.

例 2.3.7 设$f(t,x)=x^\tau C_t x$, 用伊藤公式(2.3.20)知

$$d\xi_t^\tau C_t\xi_t=[\xi_t^\tau \dot{C}_t\xi_t+\xi_t^\tau(C_t+C_t^\tau)a_t+\operatorname{tr} C_tB_tB_t^\tau]dt+\xi_t^\tau C_tB_tdw_t+\xi_t^\tau C_t^\tau B_tdw_t \tag{2.3.21}$$

设(C_T,B_T)为定义在$[0,T]$上连续函数x的可测空间, $\mathcal{B}_t=\sigma[x:x_s,s\le t]$, $0\le t\le T$.

设$a_t(x)$, $b_t(x)$对任一$t\in[0,T]$为$\mathcal{B}_t$可测, 且$x\in\mathcal{B}_T$. 如果对任意$t\in[0,T]$,

$$\xi_t=\eta+\int_0^t a_s(\xi)ds+\int_0^t b_s(\xi)dw_s,$$

η对$\mathcal{F}_0$可测, $(\xi_t,\mathcal{F}_t)$为适应过程, $\|a_t(\xi)\|^{\frac12}\in\mathcal{P}_T$, $b_t(\xi)\in\mathcal{P}_T$, 那么$(\xi_t,\mathcal{F}_t)$称为随机微分方程

$$d\xi_t=a_t(\xi)dt+b_t(\xi)dw_t \tag{2.3.22}$$

的强解.

如果在基本概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$中可找到非降σ-代数族$\mathcal{F}_t$, 和$\mathcal{F}_t$ 适应的过程ξ_t及和$\mathcal{F}_t$适应的Wiener过程$(w_t,\mathcal{F}_t)$, 使$a_t(\xi)$, $b_t(\xi)$ 都是和$\mathcal{F}_t$适应的过程, 使$\|a_t(\xi)\|^{\frac12}\in\mathcal{P}_T$, $b_t(\xi)\in\mathcal{P}_T$, ξ_0 的分布为事先给定的分布μ, 并且

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^T a_s(\xi)ds+\int_0^t b_s(\xi)dw_s,$$

那么称$(\xi_t,w_t,\mathcal{F}_t)$为对随机微分方程(2.3.22)具有初始分布$\mu$的弱解.

定理 2.3.4 (弱解存在性) 如果$a_s(x)$和$b_s(x)$有界, 并且固定x后, 它们是s的连续函数, 那么对任意初始分布μ(作为ξ_0的分布), 方程(2.3.22)存在弱解.

定理 2.3.5 设$a_t(x)$, $b_t(x)$满足Lipschitz条件：对连续函数x, y

$$\|a_t(x)-a_t(y)\|^2+\|b_t(x)-b_t(y)\|^2\le L_1\int_0^T\|x_s-y_s\|^2dK_s+L_2\|x_t-y_t\|^2,$$

$$\|a_t(x)\|^2+\|b_t(x)\|^2\le L_1\int_0^t(1+\|x\|^2)dK_s+L_2(1+\|x_t\|^2),$$

这里L_1, L_2为常数, K_s为有界非降右连续函数, $0\le K_s\le 1$.

设初值ξ_0对$\mathcal{F}_0$可测, 那么方程(2.3.22)存在以ξ_0为初值的唯一强解.

例 2.3.8 考虑线性随机微分方程

$$d\xi_t=A_t\xi_tdt+b_tdt+D_tdw_t, \tag{2.3.23}$$

其中$(A_t,\mathcal{F}_t)$, $(b_t,\mathcal{F}_t)$, $(D_t,\mathcal{F}_t)$都是适应过程, 并且$\|b_t\|\in\mathcal{P}_T$, $\|D_t\|\in\mathcal{P}_T$, $\|A_t\|^{\frac12}\in\mathcal{P}_T$.

设$\Phi_{t,s}$是线性常微分方程的基本解阵:

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,s}=A_t\Phi_{t,s},\quad \Phi_{s,s}=I,\quad \forall t>s,\quad \text{a.s.}$$

可以直接验证, 方程(2.3.23)的强解是

$$\xi_t=\Phi_{t,0}\xi_0+\int_0^t\Phi_{t,s}b_sds+\Phi_{t,0}\int_0^t\Phi_{s,0}^{-1}D_sdw_s. \tag{2.3.24}$$

当A_t, b_t, D_t为确定性时, 由(2.3.24)表达的ξ_t是正态的.

习题4.3

4.3.1 设$f(\lambda)$为一维平稳过程的谱密度, 设它对$e^{-i\lambda}$是有理函数. 证明存在单位圆内无根的多项式$P(z)$及$Q(z)$, 使$f(\lambda)=\frac{|P(e^{-i\lambda})|^2}{|Q(e^{e^{-i\lambda}})|^2}$.

4.3.2 设$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}\Phi(d\lambda)$为平稳序列. 设

$$\phi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(s)e^{i\lambda s}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c(s)| < \infty.$$

证明$\eta(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} c(t-k)\xi_k$仍为平稳过程, 它的谱表示为$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\phi(\lambda)\Phi(d\lambda)$.

4.3.3 设$x_{k+1} = Ax_k + w_k$, A为稳定阵, $\{w_k\}$为iid, $Ew_k = 0$, $Ew_kw_k^T = R$. 证明x_k依分布收敛到一个平稳过程.

4.3.4ρ及λ为常数, 证明$\xi_k = \rho e^{i(\lambda k+\theta)}$为严平稳过程.

4.3.5 设$\{X_n\}$为Markov链, 证明倒向序列$(\ldots, X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0)$也是Markov链.

§2.4 随机控制初步

对客观的实际系统, 线性逼近是易于操作并在局部范围内可能满足精度要求的一种近似。所以对线性系统的研究, 不仅比较透彻, 而且也有实际应用价值.

这一节将给出离散时间线性系统的线性无偏最小方差递推算法滤波, 条件正态系统的递推滤波以及二次性能指标下的最优随机控制. 参考书见[1, 2, 3, 6].

这里的结果虽然只对离散时间系统给出, 但对连续时间系统, 也成立相应的结果.

线性无偏最小方差递推估计(Kalman滤波)

我们考察离散时间线性随机系统

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1}x_k + B_ku_k + b_k + D_{k+1}w_{k+1}, \tag{2.4.1}$$

$$y_k = C_kx_k + H_kv_{k-1} + F_kw_k, \tag{2.4.2}$$

这里x_k是n维系统的状态向量, y_k是m维量测向量, w_k是l维随机向量, $D_{k+1}w_{k+1}$ 表示系统的动态噪声, 也叫状态噪声. 而F_kw_k是量测噪声. u_k和v_{k-1}表示控制量, u_k线性地依赖过去的量测量$(y_0, y_1, \ldots, y_k)$, 而v_{k-1}线性地依赖$(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})$, b_k是确定性的外干扰. (2.4.1)叫状态方程, (2.4.2)叫量测方程.

设$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$和$\{\xi_k\}$不相关, Ex_0和$R_{x_0} \triangleq E(x_0 - Ex_0)(x_0 - Ex_0)^\tau$已知. $\Phi_{k+1,k}$, B_{k+1}, D_{k+1}, C_k, H_k F_k都是已知的确定性矩阵.

所谓线性无偏最小方差递推估计, 就是要找线性依赖于$y_0, \ldots, y_k$的函数$\hat{x}_k$, 使$E(x_k - \hat{x}_k) = 0$, 并且

$$E(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^\tau = \min$$

(两个对称矩阵A和B, 若$A - B$非负定, 则称$A \geq B$), 还要求$\hat{x}_k$递推地给出来.

由于涉及到的矩阵不一定有逆, 我们要用伪逆的概念. 设A是$n \times m$矩阵, 其元可能是复数. 设A矩阵的秩为$r \leq \min(n, m)$, 也就是A 的列(或行)有r个线性不相关, 并且任意$r+1$列(或行) 都线性相关。那么存在秩为r 的$n \times r$矩阵B及$r \times m$矩阵C, 使

$$A = BC.$$

A的伪逆A^+定义为

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \tag{2.4.3}$$

用(2.4.3)可直接验证有以下性质

i) $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(AA^+)^* = AA^+$, $(A^+A)^* = A^+A$;

ii) $(A^*)^+ = (A^+)^*$, $(A^+)^+ = A$;

iii) $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+ = A^+(A^+)^*$;

iv) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$, $A^+AA^* = A^*AA^+ = A^*$;

v) 设U, V分别是$n\times n$及$m\times m$酉阵, 那么$(UAV)^+ = V^*A^+U^*$.

满足i) 的$m\times n$矩阵A^+是唯一的, 所以i)可用作A^+的定义.

设x, y分别是n维和m维随机向量, $E\|x\|^2<\infty$, $E\|y\|^2<\infty$. 记

$$R_x \triangleq E(x-Ex)(x-Ex)^*, \qquad R_{xy} \triangleq E(x-Ex)(y-Ey)^*.$$

显然, 对任何$n\times m$矩阵K, $x_y = Ex + K(y-Ey)$是用y对x的线性无偏估计. 所谓无偏, 是指$Ex_y = Ex$.

注意到

$$E[(I-R_y^+R_y)(y-Ey)][(I-R_y^+R_y)(y-Ey)]^* = 0,$$

所以

$$(y-Ry)^* = (y-Ey)^*R_y^+R_y, \quad \text{a.s.} \tag{2.4.4}$$

由此知

$$R_{xy}R_y^+R_y = R_{xy}. \tag{2.4.5}$$

用(2.4.5), 直接验证

$$\begin{aligned}
&E(x-Ex-K(y-Ey))(x-Ex-K(y-Ey))^*\\
&= R_x - KR_{yx} - R_{xy}K^* + KR_yK^*\\
&= (K-R_{xy}R_y^+)R_y(K-R_{xy}R_y^+)^* + R_x - R_{xy}R_y^+R_{yx},
\end{aligned}$$

上式右端第一项为非负定阵, 所以当$K = R_{xy}R_y^+$时,

$$\hat{x}_y \triangleq Ex + R_{xy}R_y^+(y-Ey) \tag{2.4.6}$$

是用y对x的线性无偏最小方差估计, 并且此时, 估计误差协方差阵为$R_{x/y}$,

$$R_{x/y} \triangleq E(x-\hat{x}_y)(x-\hat{x}_y)^* = R_x - R_{xy}R_y^+R_{yx}. \tag{2.4.7}$$

设G和a为相应维数的确定性矩阵及向量,容易验证, 用y对$z\triangleq x^1+x^2+Gy+a$的线性无偏最小方差估计为

$$\hat{z}_y = \hat{x}_y^1 + \hat{x}_y^2 + Gy + a. \tag{2.4.8}$$

为了把线性无偏最小方差估计写成递推的形式, 我们先证一引理.

引理 2.4.1 设x, y, z为三个随机向量, 二阶矩都有穷. 记$w\triangleq \begin{bmatrix} y\\ z\end{bmatrix}$, $K = (R_{xz} - R_{xy}R_y^+R_{yz})R_{z|y}^+$, 那么

$$\hat{x}_w = \hat{x}_y + K(z-\hat{z}_y). \tag{2.4.9}$$

证明 因为$E(z-\hat{z}_y)(z-\hat{z}_y)^* = R_{z/y}$, 所以

$$E[(I-R_{z/y}^+R_{z/y})(z-\hat{z}_y)][(I-R_{z/y}^+R_{z/y})(z-\hat{z}_y)]^* = 0,$$

由此知

$$(z-\hat{z}_y)^* = (z-\hat{z}_y)^*R_{z/y}^+R_{z/y}.$$

记

$$R_{xz/y} \triangleq E(x-\hat{x}_y)(z-\hat{z}_y)^*,$$

则从上式知

$$R_{xz/y} - R_{xz/y}R_{z/y}^+R_{z/y} = 0,$$

或

$$E(x-\hat{x}_y - R_{xz/y}R_{z/y}^+(z-\hat{z}_y)](z-\hat{z}_y)^* = 0. \tag{2.4.10}$$

记

$$\tilde{x} = x - \hat{x}_y - R_{xz/y}R_{z/y}^+(z-\hat{z}_y),$$

即

$$\tilde{x} = x - Ex - R_{xy}R_y^+(y-Ey) - R_{xz/y}^+R_{z/y}^+[z - Ez - R_{zy}R_y^+(y-Ey)]. \tag{2.4.11}$$

所以由(2.4.5)知

$$E\tilde{x}(y-Ey)^* = 0. \tag{2.4.12}$$

把(2.4.12)代入(2.4.10)知

$$E\tilde{x}(z-Ez)^* = 0,$$

因此

$$E\tilde{x}(w-Ew)^* = 0.$$

注意到$E\tilde{x}=0$, 便知$\hat{\tilde{x}}_w = 0$.

另一方面, 用(2.4.8)从$\tilde{x}$的表达式(2.4.11)知

$$\tilde{x}_w = \hat{x}_w - Ex - R_{xy}R_y^+(y-Ey) - R_{xz/y}R_{z/y}^+(z - Ez - R_{zy}R_y^+(y-Ey)], \tag{2.4.13}$$

所以,

$$\hat{x}_w = \hat{x}_y + R_{xz/y}R_{z/y}^+(z-\hat{z}_y). \tag{2.4.14}$$

容易验证

$$R_{xz/y} = R_{xz} - R_{xy}R_y^+R_{yz}.$$

把上式代入(2.4.13)便得到引理结论. ∎

定理 2.4.1 (Kalman滤波) 对线性随机系统(2.4.1),(2.4.2),设$Ew_k=0$, $Ew_kw_j^*=0$, $k\neq j$, $Ew_kw_k^* = I$, 则线性无偏最小方差估计满足以下递推方程

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}'_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}'_{k+1} - H_{k+1}v_k), \tag{2.4.15}$$

$$\hat{x}'_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\hat{x}_k + B_ku_k + b_k, \tag{2.4.16}$$

$$\begin{aligned} K_{k+1} = {} & (P'_{k+1}C^*_{k+1} + D_{k+1}F^*_{k+1})(C_{k+1}P'_{k+1}C^*_{k+1} + F_{k+1}F^*_{k+1} \\ & + C_{k+1}D_{k+1}F^*_{k+1} + F_{k+1}D^*_{k+1}C^*_{k+1})^+. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

$$P_{k+1} = P'_{k+1} - K_{k+1}(C_{k+1}P'_{k+1} + F_{k+1}D^*_{k+1}), \tag{2.4.18}$$

$$P'_{k+1} = \Phi_{k+1,k}P_k\Phi^*_{k+1,k} + D_{k+1}D^*_{k+1}, \tag{2.4.19}$$

$$\hat{x}'_0 = Ex_0, \quad P'_0 = E(x_0-Ex_0)(x_0-Ex_0)^* \triangleq R, \quad D_0 = 0.$$

证明 在证明前, 先说明一下各个量的物理意义. $\hat{x}_{k+1}$是用$(y_0,\ldots,y_{k+1})$对x_{k+1}的线性无偏最小方差估计, 叫滤波值, 而$\hat{x}'_{k+1}$是用$y_0,\ldots,y_k$对x_{k+1}的线性无偏最小方差估计, 叫预报值, P_k是滤波误差协方阵, 即$P_k=E(x_k-\hat{x}_k)(x_k-\hat{x}_k)^*$, 而$P'_k$是预报协方差阵, $P'_k=E(x_k-\hat{x}'_k)(x_k-\hat{x}'_k)^*$. $D_kD_k^*$是状态噪声协方差阵, $F_kF_k^*$是量测噪声协方差阵, 而$F_kD_k^*$是量测噪声和状态的相关矩阵.

我们用引理2.4.1, 引理中的x对应x_{k+1}, y对应$[y_0^\tau,\ldots,y_k^\tau]^\tau$, 而$z$对应$y_{k+1}$. 所以$\hat{x}_w$即$\hat{x}_{k+1}$, $\hat{x}_y$是$\hat{x}'_{k+1}$和$\hat{z}_y$相对应的量应是y_{k+1}的预报值$\hat{y}'_{k+1}$. 注意到(2.4.8), 从(2.4.1)立即得到(2.4.16)及(2.4.19). 而从(2.4.2)得到

$$\hat{y}'_{k+1}=C_{k+1}\hat{x}'_{k+1}+H_{k+1}v_k,$$

所以从(2.4.9)得出

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}'_{k+1}+K(y_{k+1}-C_{k+1}\hat{x}'_{k+1}-H_{k+1}v_k).$$

下面把K表达出来后, 我们将看到, 上式就是(2.4.15).

记$y^k=[y_0^\tau,\ldots,y_k^\tau]^\tau$, 据引理2.4.1及(2.4.14)知

$$K=R_{x_{k+1}y_{k+1}|y^k}R^+_{y_{k+1}|y^k}. \tag{2.4.20}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&R_{y_{k+1}|y^k}=E(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})^*\\
=&E(C_{k+1}(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})+F_{k+1}w_{k+1}][C_{k+1}(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})+F_{k+1}w_{k+1}]^*\\
=&E(C_{k+1}(\Phi_{k+1,k}(x_k-\hat{x}_k)+D_{k+1}w_{k+1})+F_{k+1}w_{k+1}].\\
&\cdot[C_{k+1}(\Phi_{k+1,k}(x_k-\hat{x}_k)+D_{k+1}w_{k+1}]^*\\
=&C_{k+1}P'_{k+1}C^*_{k+1}+C_{k+1}D_{k+1}F^*_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1}D^*_{k+1}+F_{k+1}F^*_{k+1}
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

把(2.4.20)(2.4.21)和(2.4.17)比较后, 便知为了得到(2.4.17),
还要证明

$$R_{x_{k+1}y_{k+1}/y_k}=P'_{k+1}C^*_{k+1}+D_{k+1}F^*_{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{上式左端}&=E(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})\\
&=E(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})(C_{k+1}(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})+F_{k+1}w_{k+1})^*\\
&=P'_{k+1}C^*_{k+1}+E(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})w^*_{k+1}F^*_{k+1}\\
&=P'_{k+1}C^*_{k+1}+E(\phi_{k+1,k}(x_k-\hat{x}_k)+D_{k+1}w_{k+1})w^*_{k+1}F^*_{k+1}\\
&=P'_{k+1}C^*_{k+1}+D_{k+1}F^*_{k+1}.
\end{aligned}$$

这样我们证明了(2.4.15)–(2.4.17)及(2.4.19), 还要验证(2.4.18).

从(2.4.15)知

$$x_{k+1}-\hat{x}_{k+1}=x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1}-K_{k+1}(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1}). \tag{2.4.22}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&K_{k+1}E(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})K^*_{k+1}\\
=&K_{k+1}(C_{k+1}P'_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1})=E(x_{k+1}-\hat{x}'_{k+1})(y_{k+1}-\hat{y}'_{k+1})K^*_{k+1},
\end{aligned}$$

取(2.4.22)两端的协方差阵, 便得(2.4.18). ∎

条件正态过程的递推滤波

上一节(2.4.6)给出了用y对x的线性无偏最小方差估计. 现在要问, 当允许用y的非线性函数$g(y)$来估计x时, 无偏最小方差估计是什么? 我们把它作为引理叙述如下:

引理 2.4.2 设x, y分别是n维和m维随机向量, $E\|x\|^2<\infty$. 记$F\triangleq\{g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n, E\|g(y)\|^2<\infty\}$. 那么$E(x|y)$是用$y$对$x$的最小方差估计:

$$E[x-E(x|y)][x-E(x|y)]^*=\min_{g\in F}E[x-g(y)][x-g(y)]^*.$$

证明

$$\begin{aligned}&E[x-g(y)][x-g(y)]^*\\=&E[x-E(x|y)+E(x|y)-g(y)][x-E(x|y)+E(x|y)-g(y)]^*\\=&E\{E^y[x-E(x|y)+E(x|y)-g(y)][x-E(x|y)+E(x|y)-g(y)]^*\}\\=&E(x-E(x|y))(x-E(x|y))^*+E(E(x|y)-g(y))(E(x|y)-g(y))^*\\\geq&E(x-E(x|y))(x-E(x|y))^*.\end{aligned}$$

上面不等式由于$E(x|y)-g(y)$对y可测, 所以交叉项为0. 由此便知引理成立. ∎

一般来说, 最小方差估计不一定是线性估计, 那么能否得到最小方差估计的递推形式?

在讨论正态过程和条件正态过程之前, 我们先引进条件独立的概念. 设$x=[x_1,\dots,x_n]^\tau$, $y=[y_1,\dots,y_m]^\tau$, z为随机向量. 如果对$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$及$(\mu_1,\dots,\mu_m)$

$$\begin{aligned}&P\Big(x_1<\lambda_1,\dots,x_n<\lambda_n,y_1<\mu_1,\dots,y_m<\mu_m\Big|z\Big)\\=&P\Big(x_1<\lambda_1,\dots,x_n<\lambda_n\Big|z\Big)\cdot P\Big(y_1<\mu_1,\dots,y_m<\mu_m\Big|z\Big),\end{aligned}$$

那么称在z条件下, x和y条件独立.

引理 2.4.3 设y和(x,z)独立, 那么在z条件下, x和y条件独立. 这时$P(x\in B|z,y)=P(x\in B|z)$, $E(x|z,y)=E(x|z)$, 这里B表示$\mathbb{R}^n$中的Borel集.

证明 对任一$C\in\mathcal{F}^z$(由z生成的σ-代数, 即z对之可测的最小σ-代数), 及任一$A\in\mathbb{R}^n$, $B\in\mathbb{R}^m$, 用y和(x,z)的独立性知

$$\begin{aligned}&\int_C I_{[x\in A]}I_{[y\in B]}dP=\int I_{[x\in A]}\cdot I_C dP\int I_{[y\in B]}dP\\&\quad=\int_C E(I_{[x\in A]}|z)dPEI_{[y\in B]}=\int_C E(I_{[x\in A]}|z)EI_{[y\in B]}dP.\end{aligned}$$

但$EI_{[y\in B]}=E(I_{[y\in B]}|z)$, 所以

$$\int_C I_{[x\in A]}I_{[y\in B]}dP=\int_C E(I_{[x\in A]}|z)E(I_{[y\in B]}|z)dP,$$

从C的任意性及条件期望的唯一性知, 在z条件, x和y条件独立.

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{C\bigcap[y\in B]}E(I_{[x\in A]}|z,y)dP=\int_{C\bigcap[y\in B]}I_{[x\in A]}dP\\&=\int_C I_{[x\in A]}\cdot I_{[y\in B]}dP=\int_C E\Big(I_{[x\in A]}\cdot I_{[y\in B]|}z\Big)dP.\end{aligned}$$

用条件独立性, 继续上面的等式

$$\begin{aligned}&\int_C E(I_{[x\in A]}|z)E(I_{[y\in B]}|z)dP=\int_C E\{I_{[y\in B]}E(I_{[x\in A]}|z)|z\}dP\\=&\int_{C\bigcap[y\in B]}E(I_{[x\in A]}|^z)dP.\end{aligned}$$

由于$E(I_{[x\in A]}|z)$对(z,y)可测, 据条件期望的唯一性知$E(I_{[x\in A]}|zy)=E(I_{[x\in A]}|z)$. 对$x$用形如$I_{[x\in A]}$的示性函数的线性组合逼近, 取极限后知$E(x|z,y)=E(x|z)$. ∎

正态随机向量的特征函数已由(2.1.13)给出, 设x, y为两个实随机向量, $E\|x\|^2<\infty$. 记

$$R_x^y \triangleq E[(x-E(x|y))(x-E(x|y))^\tau|y].$$

如果给定y, 条件特征函数为

$$E(e^{i\lambda^\tau x}|y)=e^{i\lambda^\tau E(x|y)-\frac{1}{2}\lambda^\tau R_x^y\lambda}, \tag{2.4.23}$$

那么称x为在y条件下的**正态向量**, 也就是说, 当y 等于某确定性向量η时, 在y条件下, x的条件分布为正态, 期望为$E(x|y)|_{y=\eta}$, 协方差阵为$R_x^y|_{y=\eta}$.

设x,y,z为三个随机向量, 用$f_x(\lambda)$, $f_y(\mu)$和$f_w(\gamma)$分别表示x, y和$w\triangleq\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$的特征函数. 据定理2.2.1, x和y独立的充分必要条件是$f_w(\gamma)=f_x(\lambda)f_y(\mu)$. 今用$f_x^z(\lambda)$, $f_y^z(\mu)$和$f_w^z(\gamma)$ 表示在z 条件下, x, y和w的条件特征函数. 和无条件情形类似地证明, 在z条件, x和y 独立等价于

$$f_x^z(\gamma)=f_z^z(\lambda)f_y^z(\mu). \tag{2.4.24}$$

引理 2.4.4 i) 设$w=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$为正态, 那么$x$和$y$独立等价于$x$和$y$不相关. 设在$z$条件下, w为条件正态, 那么在z条件x和y条件独立等价于

$$R_{xy}^z\triangleq E[(x-E(x|z))(y-E(y|z))^\tau|z]=0.$$

ii) 设w正态, A和b为相应维数的阵和向量, 那么$Aw+b$仍为正态. 设在z条件下, w为条件正态, 而$A(z)$和$b(z)$均为对z可测, 那么在z条件下, $A(z)w+b(z)$仍为条件正态.

证明 i) 设x和y独立, 那么

$$R_{xy}\triangleq E[(x-Ex)(y-Ey)^\tau=E(x-Ex)E(y-Ey)^\tau=0.$$

设x和y不相关, 那么

$$R_w=\begin{bmatrix}R_x & 0\\ 0 & R_y\end{bmatrix}.$$

设

$$\gamma=[\lambda^\tau \qquad \mu^\tau]^\tau.$$

计算w的特征函数

$$\begin{aligned}Ee^{i\gamma^\tau w}&=\exp\left\{i[\lambda^\tau,\mu^\tau]\begin{bmatrix}Ex\\Ey\end{bmatrix}-\frac{1}{2}[\lambda^\tau,\mu^\tau]\begin{bmatrix}R_x&0\\0&R_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\end{bmatrix}\right\}\\&=\exp\left(i\lambda^\tau Ex-\frac{1}{2}\lambda^\tau R_x\lambda+i\mu^\tau Ey-\frac{1}{2}\mu^\tau R_y\mu\right)\\&=Ee^{i\lambda^\tau\lambda}\cdot Ee^{i\mu^\tau\mu}\end{aligned}$$

用定理2.2.1, 知x和y独立.

对条件正态的结论证明也完全类似.

ii) 只要计算$Aw+b$的特征函数及在z条件下, $A(z)w+b(z)$的条件特征函数就可以看出定理结论正确. ∎

下面的引理表示, 在正态及条件正态时, 最小方差估计是线性估计.

引理 2.4.5 设$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$正态, 那么

$$E(x|y) = Ex + R_{xy}R_y^+(y - Ey), \tag{2.4.25}$$

$$E(x - E(x|y))(x - E(x|y))^\tau = R_x - R_{xy}R_y^+R_{yx} \triangleq R_x^y, \tag{2.4.26}$$

$x - E(x|y)$和y独立, 并且$x - E(x|y)$正态, 在y条件下, x是期望为$E(x|y)$协方差阵为R_x^y的条件正态向量.

ii) 设在y条件下, $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$为条件正态, 那么

$$E(x|y, z) = E(x|y) + R_{x,z}^y(R_z^y)^+(z - E(z|y)) \tag{2.4.27}$$

$$\begin{aligned} R_x^{z,y} \triangleq & E[(x - E(x|zy))(x - E(x|z, y))^\tau|z, y] \\ = & R_x^y - R_{x,z}^y(R_z^y)^+R_{zx}^y. \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

在y条件, $x - E(x|z, y)$和z条件独立, 并且条件正态. 在(z, y)条件下, x是期望为$E(x|z, y)$, 协方差阵为$R_x^{z,y}$的正态向量.

证明 i) 用(2.4.5)知

$$E[x - Ex - R_{xy}R_y^+(y - Ey)][y - Ey]^\tau = 0.$$

因此

$$E[x - Ex - R_{xy}R_y^+(y - Ey)]y^\tau = 0.$$

据引理2.4.3知$x - Ex - R_{xy}R_y^+(y - Ey)$和$y$独立, 所以

$$E[(x - Ex - R_{xy}R_y^+(y - Ey))|y] = E[x - Ex - R_{xy}R_y^+(y - Ey)] = 0.$$

于是就得(2.4.5), 因此(2.4.6)和(2.4.7)一样地得到.

注意到$x - E(x|y)$和y独立并正态,

$$\begin{aligned} E\left(e^{i\lambda^\tau x}|y\right) &= \exp\{i\lambda^\tau E(x|y)\}E\left[\exp\{i\lambda^\tau(x - E(x|y))\}|y\right] \\ &= \exp\{i\lambda^\tau E(x|y)\}E\exp\{i\lambda^\tau(x - E(x|y))\} \\ &= \exp\{i\lambda^\tau E(x|y) - \frac{1}{2}\lambda^\tau R_x^y\lambda\}. \end{aligned}$$

ii) 和(2.4.5)类似, 仍有

$$R_{xz}^y(R_z^y)^+R_z^y = R_{xz}^y, \tag{2.4.29}$$

并且可取$(R_z^y)^+$为对y可测的.

只要把取期望$E(\cdot)$换成取条件期望$E(\cdot|y)$, 其余的证明完全和i)类似. 例如, 我们来证(2.4.27). 用(2.4.29)知

$$E\{[x - E(x|y)) - R_{xz}^y(R_z^y)^+(z - E(z|y))](z - E(z|y))^\tau|y\} = 0$$

因此在y条件下, $x - E(x|y) - R_{xz}^y(R_z^y)^+(z - E(z|y))$和$z$ 条件独立. 因此

$$\begin{aligned} & E\{[x - E(x|y) - R_{xz}^y(R_z^y)^+(z - E(z|y))]|y, z\} \\ = & E\{[x - E(x|y) - R_{xz}^y(R_z^y)^+(z - E(z|y))]|y\} = 0 \end{aligned}$$

由此便得(2.4.27). 其它也类似地证明. ∎

注 2.4.1 定理2.4.1给出了系统(2.4.1)-(2.4.2)的线性无偏最小方差的递推滤波公式. 假设$\{w_k\}$为相互独立的正态向量, $w_k \in \mathcal{N}(0, I)$, 那么$x_k$, y_k $k = 0, 1, 2 \ldots$为联合正态. 而对正态向量最小方差估计和线性无偏最小方差估计相同, 所以这时(2.4.15)– (2.4.19)也是最小方差滤波的递推公式.

现考察系统

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k + D_{k+1} w_{k+1}, \tag{2.4.30}$$

$$y_k = C_k x_k + H_k v_{k-1} + F_k w_k, \text{ 初值} x_0, y_0. \tag{2.4.31}$$

系统(2.4.1)及(2.4.2)中的系数$\Phi_{k+1,k}$, B_k, b_k, D_{k+1}, C_k, H_k和F_k都是确定性的. 现在来考虑它们可能非线性依赖地过去的量测量的情况. 确切地说, 允许$\Phi_{k+1,k}$, $B_k u_k$, D_{k+1}可以非线性地依赖$[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, 而C_k, $H_k v_{k-1}$及F_k可非线性地依赖$[y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}]$. 具体要求如下:

A1. $\Phi_{k+1,k}$, B_k, u_k, D_{k+1}对$y^k \triangleq [y_0^\tau, y_1^\tau, \ldots, y_k^\tau]^\tau$可测, 并且$\Phi_{k+1,k}$, B_k对ω一致有界, $E\|u_k\|^2 < \infty$, $E\|D_k\|^2 < \infty$.

A2. C_k, F_k, H_k, v_{k-1}对y^{k-1}可测, $\|C_k\|$对ω一致有界,

$$E\|H_k v_{k-1}\|^2 < \infty, \quad E\|F_k\|^2 < \infty, \forall k.$$

A3. $E(\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2) < \infty$, 在$y_0$条件下, x_0是期望为$E(x_0|y_0)$, 协方差为$R_{x_0}^{y_0}$的条件正态向量.

A4. $\{w_k\}$是iid正态向量$\in \mathcal{N}(0, I)$, 并和$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$独立.

引理 2.4.6 设A1–A4成立. 对任意$k = 0, 1, 2 \ldots$在y^k条件下, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$和$x_k$都是条件正态向量, 这时称$(x_k, y_k)$为 条件正态过程.

证明 A3及引理2.4.1保证了引理对$k = 0$成立. 今设引理对k成立. 我们来证对$k + 1$也对. 求条件特征函数

$$\begin{aligned}
&E[\exp(i(\lambda^\tau x_{k+1} + \mu^\tau y_{k+1}))|y^k] \\
&= E\{\exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) x_{k+1}] \cdot \exp[i(\mu^\tau H_{k+1} v_k + \mu^\tau F_{k+1} w_{k+1}]|y^k\} \\
&= E\{\exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) \Phi_{k+1,k} x_k] \cdot \exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) B_k u_k + i\mu^\tau H_{k+1} v_k] \cdot \\
&\quad \cdot \exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) D_{k+1} + i\mu^\tau F_{k+1}] w_{k+1} | y^k\} \\
&= E\{\exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) \Phi_{k+1,k} x_k] \cdot \exp[i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) B_k u_k + i\mu^\tau H_{k+1} v_k] \\
&\quad \cdot E[(i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) D_{k+1} + i\mu^\tau F_{k+1}) w_{k+1} | x_k, y^k] | y^k\}.
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

注意到w_{k+1}和(x_k, y^k)独立, C_{k+1}, D_{k+1}, F_{k+1}对y^k可测, 所以

$$\begin{aligned}
&E\{\exp(i(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) D_{k+1} + i\mu^\tau F_{k+1}) w_{k+1} | x_k, y^k\} \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}\|(\lambda^\tau + \mu^\tau C_{k+1}) D_{k+1} + \mu^\tau F_{k+1}\|^2\Big),
\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

它是对y^k可测的条件正态特征函数.

据归纳法假设, 在y^k条件下, x_k条件正态, 所以(2.4.32) 右端为三个对y^k可测的条件正态特征函数, 因此它本身是条件正态特征函数. ∎

定理 2.4.2 设对系统(2.4.30), (2.4.31)成立A1–A4, 用$\hat{x}_k \triangleq E(x_k|y^k)$, $\hat{x}'_k \triangleq E(x_k|y^{k-1})$, $P_k \triangleq E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^\tau|y^k]$, $P'_k \triangleq E[(x_k - \hat{x}'_k)(x_k - \hat{x}'_k)^\tau|y^{k-1}]$ 分别表示最小方差滤波, 预报及相应

的估计误差阵. 那么和(2.4.15)–(2.4.19)类似成立递推公式:

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_{k+1} = \hat{x}'_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}'_{k+1} - H_{k+1}v_k), &(2.4.34)\\
&\hat{x}'_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\hat{x}_k + B_k u_k, &(2.4.35)\\
&K_{k+1} = (P'_{k+1}C^\tau_{k+1} + D_{k+1}F^\tau_{k+1})(C_{k+1}P'_{k+1}C^\tau_{k+1} + F_{k+1}F^\tau_{k+1}\\
&\quad + C_{k+1}D_{k+1}F^\tau_{k+1} + F_{k+1}D^\tau_{k+1}C^\tau_{k+1})^+, &(2.4.36)\\
&P_{k+1} = P'_{k+1} - K_{k+1}(C_{k+1}P'_{k+1} + F_{k+1}D^\tau_{k+1}), &(2.4.37)\\
&P'_{k+1} = \Phi_{k+1,k}P_k\Phi^\tau_{k+1,k} + D_{k+1}D^\tau_{k+1}, &(2.4.38)\\
&\hat{x}_0 = E(x_0|y_0), \quad P_0 = R^{y_0}_{x_0}.
\end{aligned}
$$

证明 因为y^k和w_{k+1}独立, 对(2.4.30)取条件期望$E(\cdot|y^k)$, 便得(2.4.35), 同时也得到(2.4.38).

据引理2.4.6, 在y^k条件下, (x_{k+1}, y_{k+1})为条件正态. 在引理2.4.5的ii)中, 和x, y, z分别对应x_{k+1}, y^k及y_{k+1}, 据(2.4.27)知

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}'_{k+1} + R^{y^k}_{x_{k+1}y_{k+1}}(R^{y^k}_{y_{k+1}})^+(y_{k+1} - \hat{y}'_{k+1}). \tag{2.4.39}$$

虽然现在讨论最小方差估计, 但由于条件正态性, 形式上和上一节的估计相同. 这里(2.4.39)对应于(2.4.14) 或(2.4.15). 在表达K_{k+1}时, 照样可用(2.4.20), 只是$R_{y_{k+1}|y^k}$ 对应这里的$R^{y^k}_{y_{k+1}}$, $R_{x_{k+1}y_{k+1}|y^k}$对应$R^{y^k}_{x_{k+1}y_{k+1}}$. 利用条件正态性, $R^{y^k}_{y_{k+1}}(= P'_{k+1})$ 照样由(2.4.21)右端表达. 由此得到(2.4.34)及(2.4.36). 其余两式类似于定理2.4.1相应公式得到, 只是把"取期望"改成相应的"取条件期望". ∎

例 2.4.1 设x为n维正态向量, $x \in \mathcal{N}(Ex, R)$, x_0和y_0独立, 量测为

$$y_k = C_k x + F_k w_k,$$

C_k和F_k及w_k满足定理2.4.2. 设$R > 0$, $F_k F_k^\tau > 0$. 那么用y^k对x的最小方差估计$\hat{x}_k$可递推地给出, 并表达为

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k &= S_k\Big[Ex + R_k\sum_{j=1}^k C_j^\tau(F_jF_j^\tau)^{-1}y_j\Big],\\
S_k &= \Big[I + R\sum_{j=1}^k C_j^\tau(F_jF_j^\tau)^{-1}C_j\Big]^{-1}.
\end{aligned}
$$

这只要注意现在的状态方程为$x_k \equiv x$.

二次性能指标下的随机控制

我们讨论如下的线性随机系统

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \Phi_{k+1,k}x_k + B_k u_k + D_{k+1}w_{k+1}, &(2.4.40)\\
y_k &= C_k x_k + F_k w_k, &(2.4.41)
\end{aligned}
$$

首先讨论系数阵$\Phi_{k+1,k}$, B_k, D_{k+1}, C_k, F_k都是确定性阵, 不依赖量测, 也不要求$\{w_k\}$正态, 只设$Ew_k = 0$, $Ew_kw_j^\tau = \delta_{kj}I$, $\delta_{kj} = \begin{cases}0, k \neq j\\ 1, k = j\end{cases}$. 设$x_0$和$\{w_k\}$不相关, Ex_0和$E(x_0 - Ex_0)(x_0 - Ex_0)^\tau \triangleq R$已知, $E\|y_0\|^2 < \infty$.

设控制量u_k是r维的, 要求它是$y_0, \ldots, y_k$的线性函数, 也就是说, 我们考虑线性反馈控制

$$u_k = H_k y^k + a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.4.42}$$

a_k是r维确定性向量, H_k是相应维数的确定性阵.

可以想象一个客观系统本身是非线性, 但它和标称系统的偏差可接近线性. 这样(2.4.40)(2.4.41)中的x_k 可看成这种偏差. 所以很自然要求二次项尽可能小. 这样, 我们要设计控制(2.4.42), 使二次指标$EJ(u)=\min$,

$$J(u)=x_N^\tau Q_0x_N+\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^\tau Q_1(k)x_k+u_k^\tau Q_2(k)u_k), \tag{2.4.43}$$

$$Q_0\geq 0,\quad Q_1(k)\geq 0,\quad Q_2>0,\quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

对系统(2.4.40)(2.4.41)适用定理2.4.1. 我们仍沿用那里的符号.

引理 2.4.7 记$\xi_k\triangleq x_k-\hat{x}_k$, $\eta_k\triangleq y_k-\hat{y}'_k$, 它们分别是滤波误差及量测预报误差. ξ_k和y^k不相关. $\{\eta_k\}$为零均值互不相关的随机向量.

证明 把y对应y^k, x对应x_k, 用(2.4.4)知

$$E(x_k-\hat{x}_k)(y^k-Ey^k)^*=0,$$

所以$E(x_k-\hat{x}_k)(y^k)^*=0$, 也就是$\xi_k$和$y^k$不相关.

同理可知, η_k和y^{k-1}不相关, 但对任何j, η_j 是$y_0,\ldots,y_{j-1}$的线性组合, 所以$\{\eta_k\}$互不相关. ∎

引理 2.4.8 设L_k及M_k是相应维数的确定性阵, 则

$$\begin{aligned}&E(u_k+L_kx_k)^*M_k(u_k+L_kx_k)\\=&E(u_k+L_k\hat{x}_k)^*M_k(u_k+L_k\hat{x}_k)+\operatorname{tr}L_kP_kL_k^*M_k.\end{aligned}$$

证明 由于u_k及$\hat{x}_k$都是y^k的线性函数, 据引理2.4.7,

$$E(x_k-\hat{x}_k)(u_k+L_k\hat{x}_k)^*=0.$$

所以

$$\begin{aligned}&E(u_k+L_kx_k)^*M_k(u_k+L_kx_k)\\=&E[u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k+\hat{x}_k)]^*M_k[u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k-\hat{x}_k)]\\=&\operatorname{tr}E[u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k-\hat{x}_k)][u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k-\hat{x}_k)]^*M_k\\=&\operatorname{tr}E(u_k+L_k\hat{x}_k)(u_k+L_k\hat{x}_k)^*M_k+\operatorname{tr}L_kP_kL_k^*M_k\\=&E(u_k+L_k\hat{x}_k)^*M_k(u_k+L_k\hat{x}_k)+\operatorname{tr}L_kP_kL_k^*M_k.\end{aligned}$$

∎

为固定起见, 设x_k为n维的. 设S_k是由下述Riccati方程从N递推地写出的$n\times n$阵:

$$\begin{aligned}S_k=&(\Phi_{k+1,k}-B_kL_k)^*S_{k+1}(\Phi_{k+1,k}-B_kL_k)+L_k^*Q_2(k)L_k+Q_1(k)\\&(=\Phi_{k+1,k}^*S_{k+1}\Phi_{k+1,k}-\Phi_{k+1,k}^*S_{k+1}B_kM_k^+B_k^*S_{k+1}\Phi_{k+1,k}+Q_1(k)),\end{aligned} \tag{2.4.44}$$

$$L_k=M_k^+B_k^*S_{k+1}\Phi_{k+1,k}, \tag{2.4.45}$$

$$M_k=Q_2(k)+B_k^*S_{k+1}B_k,\quad S_N=Q_0. \tag{2.4.46}$$

S_k是非负定的Hermite阵, $k=0,1,\ldots,N$.

定理 2.4.3 对系统(2.4.40)(2.4.41), 使$EJ(u)$($J(u)$由(2.4.43)表达) 最小的最优随机控制为

$$u_k^0=-L_k\hat{x}_k+(I-M_k^+M_k)u_k,\quad k=0,1,\ldots,N-1, \tag{2.4.47}$$

这里u_k为任一线性反馈控制, 并且

$$EJ(u^0) = Ex_0^\tau S_0 Ex_0 + \operatorname{tr} S_0 R + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr} S_{k+1} D_{k+1} D_{k+1}^* + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr} L_k P_k L_k^* M_k. \tag{2.4.48}$$

证明 注意到

$$(M_k^+ M_k - I) M_k (M_k^+ M_k - I) = 0,$$

所以

$$S_{k+1} B_k [M_k^+ M_k - I] = 0,$$

或

$$S_{k+1} S_k M_k^+ M_k = S_{k+1} B_k. \tag{2.4.49}$$

注意到

$$L_k^* M_k = \Phi_{k+1,k}^* S_{k+1} B_k,$$

$$L_k^* M_k L_k = \Phi_{k+1,k}^* S_{k+1} B_k L_k = L_k^* B_k^* S_{k+1} \Phi_{k+1,k},$$

可把$J(u)$改写成

$$\begin{aligned}
J(u) &= x_0^* S_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \{(x_{k+1}^* S_{k+1} x_{k+1} - x_k^* S_k x_k) + x_k^* Q_1(k) x_k + u_k^* Q_2(k) u_k\} \\
&= x_0^* S_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \{(\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k + D_{k+1} w_{k+1})^* \\
&\qquad S_{k+1} (\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k + D_{k+1} w_{k+1}) \\
&\quad - x_k^* [(\Phi_{k+1,k} - B_k L_k)^* S_{k+1} (\Phi_{k+1,k} - B_k L_k) + L_k^* Q_2(k) L_k + Q_1(k)] x_k \\
&\quad + x_k^* Q_1(k) x_k + u_k^* Q_2(k) u_k\} \\
&= x_0^* S_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \{w_{k+1}^* D_{k+1}^* S_{k+1} [\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k] \\
&\quad + [\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k]^* S_{k+1} D_{k+1} w_{k+1} + w_{k+1}^* D_{k+1}^* S_{k+1} D_{k+1} w_{k+1}\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \{x_k^* \Phi_{k+1,k}^* S_{k+1} \Phi_{k+1,k} x_k + x_k^* L_k^* M_k u_k + u_k^* M_k L_k x_k \\
&\quad + u_k^* B_k^* S_{k+1} B_k u_k - x_k^* \Phi_{k+1,k} S_{k+1} \Phi_{k+1,k} x_k + x_k^* L_k^* M_k L_k x_k \\
&\quad + x_k^* L_k^* M_k L_k x_k - x_k^* L_k^* B_k^* S_{k+1} B_k L_k x_k - x_k^* L_k^* Q_2(k) L_k x_k + u_k^* Q_2(k) u_k\} \\
&= x_0^* S_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \{w_{k+1}^* D_{k+1}^* S_{k+1} [\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k] \\
&\quad + [\Phi_{k+1,k} x_k + B_k u_k] S_{k+1} D_{k+1} w_{k+1} + w_{k+1}^* D_{k+1}^* S_{k+1} D_{k+1} w_{k+1}\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (u_k + L_k^* x_k)^* M_k (u_k + L_k x_k).
\end{aligned} \tag{2.4.50}$$

利用引理2.4.8, 并注意到x_k, u_k和w_{k+1}不相关, 便知,

$$\begin{aligned}
EJ(u) &= Ex_0^* S_0 Ex_0 + \operatorname{tr} S_0 R + \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr}(D_{k+1}^* S_{k+1} D_{k+1} + L_k P_k L_k^* M_k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} E(u_k + L_k \hat{x}_k)^* M_k (u_k + L_k \hat{x}_k).
\end{aligned}$$

从定理2.4.1的(2.4.18)及(2.4.19)看出, P_k不依赖于控制, 所以(2.4.50)右端只有最后一式依赖控制, 它非负. 注意到$-L_k\hat{x}_k$是$y_0,\dots,y_k$的线性函数, 所以是线性反馈. 当u_k取成由(2.4.47)表达的u_k^0时, (2.4.50)的最后一项为0, 也就是说它是最优控制. ∎

推论 2.4.1 当$D_k\equiv 0$, $F_k\equiv 0$, $R=0$时, 系统(2.4.40), (2.4.41) 就成了确定性的, 这时的最优控制是状态的线性反馈

$$u_k^0=-L_kx_k+(I-M_k^+M_k)u_k, \tag{2.4.51}$$

u_k为任一r维确定性向量.

推论 2.4.2 当$Q_2(k)>0$时, $M_k>0$, 则(2.4.47)和(2.4.51)分别成为

$$u_k^0=-L_k\hat{x}_k \text{ 及} u_k^0=-L_kx_k.$$

注 2.4.2 从定理2.4.1看出, 滤波精度P_k 不受控制影响, 滤波公式可独立于控制进行, 而带噪声时的最优控制可直接得自确定性系统的最优控制, 为此只要把确定性系统的状态换成它的滤波值。这时我们称成立分离原理.

上面我们限定了控制u_k只能线性地依赖$y_0,\dots,y_k$, 现在考察一般的依赖关系, u_k可以是$y_0,\dots,y_k$的任意Borel可测函数, 也就是说, u_k是一般的反馈控制. 但对系统(2.4.40),(2.4.41)作如下要求.

C1) $\Phi_{k+1,k}$, D_{k+1}, B_{k+1}, C_k, F_k 是确定性阵;

C2) 在y_0条件下, x_0是期望为$E(x_0|y_0)$, 协方差阵为$R_{x_0}^{y_0}$ 的条件正态向量;

C3) $\{w_k\}$相互独立, 相同分布, 并且和$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$独立, $w_k\in\mathcal{N}(0,I)$. 记$\mathcal{U}\triangleq\{u_k:$ 对 y^k可测, 且$E\|u_k\|^2<\infty\}$. $\mathcal{U}$称为容许控制集. 在$\mathcal{U}$中要找u^0, 使$EJ(u)$达极小, 其中

$$J(u)=x_N^\tau Q_0x_N+\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^\tau Q_1(k)x_k+u_k^\tau Q_2(k)u_k), \tag{2.4.52}$$

$Q_0(k)$, $Q_1(k)$, $Q_2(k)$均为对称非负定确定性阵.

定理 2.4.4 在条件C1)–C3)下, 使性能指标(2.4.52)达最小的最优随机控制为u_k^0, u_k^0 形式上仍由(2.4.47)给出, 只是其中u_k可为任一$\mathcal{U}$中的容许控制, $\hat{x}_k=E(x_k|y^k)$.

证明 首先注意到C1)–C3)保证了A1)–A4)成立, 所以定理2.4.2的结论成立.

对(2.4.50)式两边取期望, 并注意到对任意随机向量χ, $E(\cdot)=E(E(\cdot|\chi))$, 便知

$$\begin{aligned}EJ(u)=&Ex_0^\tau S_0x_0+E\sum_{k=0}^{N-1}E\Big\{[w_{k+1}^\tau D_{k+1}^\tau S_{k+1}(\Phi_{k+1,k}x_k+B_ku_k)\\&+(\Phi_{k+1,k}x_k+B_ku_k)^\tau S_{k+1}D_{k+1}w_{k+1}]|y^k,x_k\Big\}\\&+E\sum_{k=0}^{N-1}w_{k+1}^\tau D_{k+1}^\tau S_{k+1}D_{k+1}w_{k+1}\\&+E\sum_{k=0}^{N-1}E\Big[(u_k+L_kx_k)^\tau M_k(u_k+L_kx_k)|y^k\Big].\end{aligned}$$

由于u_k, $\hat{x}_k$对y^k可测, 所以

$$\begin{aligned}&E\{[u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k-\hat{x}_k)]^\tau M_k[u_k+L_k\hat{x}_k+L_k(x_k-\hat{x}_k)]|y^k\}\\=&(u_k+L_k\hat{x}_k)^\tau M_k(u_k+L_k\hat{x}_k)+\operatorname{tr}L_kP_kL_k^\tau M_k,\end{aligned}$$

再注意到w_{k+1}和(y^k, x_k)独立, 便知

$$\begin{aligned}EJ(u) =&Ex_0^\tau S_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{tr}(D_{k+1}^\tau S_{k+1} D_{k+1} + L_k P_k L_k^\tau M_k) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} E(u_k + L_k \hat{x}_k)^\tau M_k (u_k + L_k \hat{x}_k).\end{aligned} \tag{2.4.53}$$

据定理2.4.2及条件C1), 便知P_k是不依赖控制的确定性阵, 所以使(2.4.53) 达极小的控制为

$$u_k^0 = -L_k \hat{x}_k + (I - M_k^+ M_k) u_k, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

u_k为任一属$\mathcal{U}$的容许控制.

连续时间系统

我们先来看连续时间系统的线性最小方差滤波. 为简单起见, 先不考虑控制项. 设系统由下述线性随机微分方程描述

$$dx_t = A_t x_t dt + D_t dw_t, \tag{2.4.54}$$

$$dy_t = C_t x_t dt + F_t dw_t, \qquad F_t F_t^\tau > 0. \tag{2.4.55}$$

A_t, D_t, D_t和F_t为确定性阵, w_t为Wiener过程. 设成立可积性条件

$$\int_0^{T_f} [\|A_s\| + \|C_s^\tau (F_s F_s^\tau)^{-1} C_s\| + \|C_s\|^2 + \|D_s\|^2 + \|F_s\|^2] ds < \infty, \quad T_f < \infty \tag{2.4.56}$$

设初始估计为

$$\hat{x}_0 = Ex_0 + R_{x_0 y_0} R_{y_0}^+ (y_0 - Ey_0), \tag{2.4.57}$$

$$R_0 = R_{x_0} - R_{x_0 y_0} R_{y_0}^+ R_{y_0 x_0}, \tag{2.4.58}$$

$$Ew_t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in [0, T_f],$$

记

$$\begin{aligned}G_t =\Bigg\{&\hat{x}_t^G = c_t + G_0(t) y_0 + G_1(t) \int_0^t G_2(s) dy_s : c_t,\ G_0(t) \\ &\text{和}G_1(t)\text{为确定性,且} \int_0^t [\|G_2(s) C_s\| + \|G_2(s) F_s\|^2] ds < \infty \Bigg\}.\end{aligned}$$

如果$E\hat{x}_t = Ex_t$, 且

$$E(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^\tau = \min_{x \in G_t} E(x_t - x)(x_t - x)^\tau,$$

那么称$\hat{x}_t$为用$(y_s, 0 \le s \le t)$对x_t的线性无偏最小方差估计. 而$\hat{x}_t$所满足的随机微分方程为Kalman-Bucy滤波.

首先, 在条件(2.4.56)下, 确定性的Riccati微分方程

$$\begin{aligned}\dot{P}_t = P_t A_t^\tau + A_t P_t + D_t D_t^\tau - (D_t F_t^\tau + P_t C_t^\tau)(F_t F_t^\tau)^{-1} \cdot \\ \cdot (D_t F_t^\tau + P_t C_t^\tau)^\tau, \qquad P_0 = R_0\end{aligned} \tag{2.4.59}$$

有唯一对称非负定解.

定理 2.4.5 (Kalman-Bucy 滤波)设条件(2.4.56)成立, 那么满足初值$\hat{x}_0 = E(x_0|y_0)$, $P_0 = R_{x_0}^{y_0}$的线性无偏最小方差估计$\hat{x}_t$满足线性随机微分方程

$$d\hat{x}_t = A_t\hat{x}_t dt + (D_tF_t^\tau + P_tC_t^\tau)(F_tF_t^\tau)^{-1}(dy_t - C_t\hat{x}_t dt),$$

其中$P_t \triangleq E(x_t - \hat{x})(x_t - \hat{x}_t)^\tau$满足方程(2.4.59).

证明 设$\Phi_{t,s}$为基本解阵

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t,s} = A_t\Phi_{t,s}, \quad \Phi_{s,s} = I.$$

据(2.3.24)

$$x_t = \Phi_{t,0}\Big(x_0 + \int_0^t \Phi_{0,s}D_s dw_s\Big).$$

记

$$H_t = \Phi_{t,0} - \int_0^t G_1(t)G_2(\lambda)C_\lambda\Phi_{\lambda,0}d\lambda,$$

那么

$$\begin{aligned}\hat{x}_t^G =& c_t + G_0(t)y_0 + G_1(t)\int_0^t G_2(s)F_s dw_s \\ &+ G_1(t)\int_0^t G_2(s)C_s\Phi_{s,0}\Big(x_0 + \int_0^s \Phi_{0,\lambda}D_\lambda dw_\lambda\Big)ds \\ =& c_t + G_0(t)y_0 + G_1(t)\int_0^t G_2(s)F_s dw_s + G_1(t)\int_0^t G_2(s)C_s\Phi_{s,0}ds x_0 \\ &+ G_1(s)\int_0^t\int_\lambda^t G_2(s)C_s\Phi_{s,0}ds\Phi_{0,\lambda}D_\lambda dw_\lambda,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}x_t - \hat{x}_t^G =& H_t(x_0 + \int_0^t \Phi_{0,t}D_s dw_s) + G_1(t)\int_0^t\int_0^\lambda G_2(s)C_s\Phi_{s,0}ds\Phi_{0,\lambda}D_\lambda dw_\lambda \\ &- c_t - G_0(t)y_0 - G_1(t)\int_0^t G_2(s)F_s dw_s.\end{aligned} \tag{2.4.60}$$

记

$$L_s^\tau = (G_1(t)\int_0^s G_2(s)C_\lambda\Phi_{\lambda,0}d\lambda + H_t)\Phi_{0,s}, \tag{2.4.61}$$

取微分后得

$$\frac{d}{ds}L_s^\tau = -L_s^\tau A_s + G_1(t)G_2(s)C_s, \quad L_t^\tau = I, \quad L_0^\tau = H_t.$$

从及(2.4.60)及(2.4.61)知

$$x_t - \hat{x}_t^G = H_tx_0 - c_t - G_0(t)y_0 + \int_0^t L_s^\tau D_s dw_s - \int_0^t G_1(t)G_2(s)F_s dw_s.$$

注意到$Ew_tx_0^\tau = 0$, $Ew_ty_0^\tau = 0$, 由(2.3.17)知

$$\begin{aligned}&E(x_t - \hat{x}_t^G)(x_t - \hat{x}_t^G)^\tau \\ =& E(H_tx_0 - c_t - G_0(t)y_0)(H_tx_0 - x_t - G_0(t)y_0)^\tau \\ &+ \int_0^t [L_s^\tau D_s - G_1(t)G_2(s)F_s][L_s^\tau D_s - G_1(t)G_2(s)F_s]^\tau ds.\end{aligned} \tag{2.4.62}$$

从(2.4.59)及(2.4.61)知

$$\begin{aligned}P_t =&L_t^\tau P_t L_t = L_0^\tau R_0 L_0 + \int_0^t d(L_s^\tau P_s L_s)\\
&= H_t R_0 H_t^\tau + \int_0^t [(G_1(t)G_2(s)C_s - L_s^\tau A_s)P_s L_s\\
&+ L_s^\tau P_s(C_s^\tau G_2^\tau(s)G_1^\tau(t) - A_s^\tau L_s) + L_s^\tau(P_s A_s^\tau + A_s P_s + D_s D_s^\tau\\
&- (D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)(F_s F_s^\tau)^{-1}(D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)^\tau L_s]ds\\
&= L_0^\tau R_0 L_0 - \int_0^t [G_1(t)G_2(s) - L_s^\tau(D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)(F_s F_s^\tau)^{-1}]\\
&\cdot F_s F_s^\tau [G_1(t)G_2(s) - L_s^\tau(D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)(F_s F_s^\tau)^{-1}]^\tau ds\\
&+ \int_0^t [L_s^\tau D_s - G_1(t)G_2(s)F_s][L_s^\tau D_s - G_1(t)G_2(s)F_s]^\tau ds.\end{aligned} \tag{2.4.63}$$

由于$E(x_0 - \hat{x}_0)y_0^\tau = 0$, $E(x_0 - \hat{x}_0)\hat{x}_0^\tau = 0$, 所以

$$\begin{aligned}&E(H_t x_0 - c_t - G_0(t)y_0)(H_t x_0 - c_t - G_0(t)y_0)^\tau\\
&\quad = H_t R_0 H_t^\tau + E(H_t \hat{x}_0 - c_t - G_0(t)y_0)(H_t \hat{x}_0 - c_t - G_0(t)y_0)^\tau.\end{aligned} \tag{2.4.64}$$

归并(2.4.62)–(2.4.64)便知

$$\begin{aligned}&E(x_t - \hat{x}_t^G)(x_t - \hat{x}_t^G)^\tau\\
=&E(H_t \hat{x}_0 - c_t - G_0(t)y_0)(H_t \hat{x}_0 - c_t - G_0(t)y_0)^\tau + P_t\\
&+ \int_0^t [G_1(t)G_2(s) - L_s^\tau(D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)(F_s F_s^\tau)^{-1}]F_s F_s^\tau \cdot\\
&\cdot [G_1(t)G_2(t) - L_2^\tau(D_s F_s^\tau + P_s C_s^\tau)(F_s F_s^\tau)^{-1}]^\tau ds.\end{aligned} \tag{2.4.65}$$

记

$$K_t \triangleq (D_t F_t^\tau + P_t C_t^\tau)(F_t F_t^\tau)^{-1}. \tag{2.4.66}$$

由于P_t不依赖$G_0(t)$, $G_1(t)$及$G_2(t)$, 所以为使(2.4.65) 右端达极小的充分必要条件是

$$H_t \hat{x}_0 - c_t - G_0(t)y_0 = 0, \tag{2.4.67}$$

$$G_1(t)G_2(s) = L_s^\tau K_s, \tag{2.4.68}$$

这时, P_t就是估计误差协方差阵.

把(2.4.68)代入(2.4.61), 知最优的L_s应满足方程

$$\frac{d}{ds}L_s^\tau = L_s^\tau(-A_s + K_s C_s), \quad L_t^\tau = I. \tag{2.4.69}$$

设$\Psi_{t,s}$为基本解阵

$$\frac{d}{ds}\Psi_{t,s} = (A_t - K_s C_s)\Psi, \quad \Psi_{s,s} = I, \tag{2.4.70}$$

从解的唯一性知

$$L_s^\tau = \Psi_{t,s}. \tag{2.4.71}$$

从(2.4.68)及(2.4.71)看出, 最优的$G_1^0(t)$, $G_2^0(t)$可取为

$$G_1^0(t)=\Psi_{t,0},\quad G_2^0(s)=\Psi_{0,s}(D_sF_s^\tau+P_sC_s^\tau)(F_sF_s^\tau)^{-1}.$$

由于$\|\Psi_{0,s}\|$及$\|P_s\|$在$[0,T_f]$上有界, 所以,

$$\int_0^{T_f}\|G_2^0(s)F_s\|^2<\infty,\quad \int_0^{T_f}\|G_2^0(s)C_s\|ds<\infty,$$

这验证了G_t中要求的可积条件得到满足.

从(2.4.60)及$G_2^0(s)$的表达式, 知$H_t=\Psi_{t,0}$, 所以为使(2.4.67)成立, 必须取

$$c_t=c_t^0\triangleq\Psi_{t,0}(Ex_0-R_{x_0y_0}R_{y_0}^+Ey_0),$$

$$G_0(t)=G_0^0(t)\triangleq\Psi_{t,0}R_{x_0y_0}R_{y_0}^+.$$

由此从(2.4.60)立即看出无偏性:

$$E(x_t-\hat{x}_0^G)=H_tEx_0-c_t^0-G_0^0(t)Ey_0=0.$$

把最优加权代入$\hat{x}_t^G$的表达式后, 知线性无偏最小方差估计为

$$\begin{aligned}\hat{x}_t=&\Psi_{t,0}(Ex_0-R_{x_0y_0}R_{y_0}^+Ey_0+R_{x_0y_0}R_{y_0}^+y_0)\\&+\Psi_{t,0}\int_0^t\Psi_{0,s}(D_sF_s^\tau+P_sC_s^\tau)(F_sF_s^\tau)^{-1}dy_s\\=&-\psi_{t,0}\hat{x}_0+\Psi_{t,0}\int_0^t\Psi_{0,s}(D_sF_s^\tau+P_sC_s^\tau)(F_sF_s^\tau)^{-1}dy_s.\end{aligned}$$

取随机微分后得

$$d\hat{x}_t=(A_t-K_tC_t)\hat{x}_tdt+K_tdy_t.$$

∎

注 2.4.3 由于对高斯系统, 线性无偏最小方差估计也是最小方差估计, 即$\hat{x}=E[x_t|y_s,0\le s\le t]$也满足定理2.4.5 给出的随机微分方程.

注 2.4.4 记

$$\bar{w}_t=\int_0^t(F_sF_s^\tau)^{-1}(dy_s-C_s\hat{x}_sds),\quad \mathcal{F}_t^y=\sigma\{y_s,0\le s\le t\}.$$

那么$(\bar{w}_t,\mathcal{F}_t^y)$是Wiener过程, 并且$\mathcal{F}_t^{\bar{w}}=\mathcal{F}_t^y$. $\bar{w}_t$叫新息过程.

注 2.4.5 Kalman-Bucy滤波(定理2.4.5)对条件正态过程也成立. 这时取代(2.4.54), (2.4.55)的是更一般的系统, 它的系数可非线地依赖过去的量测量:

$$dx_t=A_t(y)x_tdt+B_tu_t(y)dt+D_t(y)dw_t,\tag{2.4.72}$$

$$dy_t=C_t(y)x_tdt+F_t(y)dw_t.\tag{2.4.73}$$

这里$A_t(\xi)$, $u_t(\xi)$, $D_t(\xi)$, $F_t(\xi)$为$\mathcal{B}_t$可测, $\xi\in C_T$, G表示$[0,T]$上的连续函数集, $\mathcal{B}_t$表示在C_T中由$\{\xi_s,0\le s\le t\}$所产生的σ-代数.

当系统的系数满足一些可积性条件时, 可以证明在$\mathcal{F}_t^y$条件下, x_t是条件正态过程. 这时$\hat{x}_t\triangleq E(x_t|\mathcal{F}_t^y)$满足随机微分方程

$$\begin{aligned}d\hat{x}_t=&A_t(y)\hat{x}_tdt+B_tu_t(y)dt\\&+\Big(D_t(y)F_t^\tau(y)+P_tC_t^\tau(y)\Big)(F_t(y)F_t^\tau(y))^{-1}(dy_t-c_t\hat{x}_tdt),\end{aligned}\tag{2.4.74}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_t &= P_tA_t^\tau(y) + A_t(y)P_t + D_t(y)D_t^\tau(y)\\ &\quad - (D_t(y)F_t^\tau(y) + P_tC_t^\tau(y))(F_t(y)F_t^\tau(y))^{-1}(D_t(y)F_t^\tau(y) + P_tC_t^\tau(y))^\tau, \\ \hat{x}_0 &= E(x_0|y_0), \quad P_0 = R_{x_0|y_0}.\end{aligned} \tag{2.4.75}$$

当系数阵A_t, D_t, C_t, F_t不依赖于量测, 而是确定性阵时,

$$dx_t = A_tx_tdt + B_tu_tdt + D_tdw_t, \tag{2.4.76}$$

$$dy_t = C_tx_tdt + F_tdw_t, \tag{2.4.77}$$

则(2.4.75)所给出的P_t是确定性的。这时Riccati方程

$$-\dot{S}_t = A_t^\tau S_t + S_tA_t + Q_1(t) - S_tB_tQ_2^{-1}(t)B_t^\tau S_t, \quad S_T = Q_0 \tag{2.4.78}$$

对任意对称非负定的Q_0, $Q_1(t)$及正定的$Q_2(t)$有唯一解, 其解也是确定性的.

对系统(2.4.76)-(2.4.77)在二次性能指标

$$EJ(u) = E\left\{x_{T_f}^T Q_0 x_{T_f} + \int_0^{T_f}(x_t^\tau Q_1(t)x_t + u_2^\tau Q_2(t)u_2)dt\right\}$$

$$Q_0 \geq 0, \quad Q_1(t) \geq 0, \quad Q_2(t) > 0$$

下的最优随机控制为

$$u_t^0 \triangleq L_t\hat{x}_t, \quad L_t = -Q_2^{-1}(t)B_t^\tau S_t,$$

其中$\hat{x}_t = E(x_t|\mathcal{F}_t^y)$由(2.4.74),(2.4.75)给出。

以上结果和离散时间系统是平行的.

习题4.4

4.4.1 如果量测方程(2.4.2)改为

$$y_k = C_kx_{k-1} + H_kv_{k-1} + F_kw_k,$$

而(2.4.1)及其它假设不变, 试求相应的滤波方程.

4.4.2 设系统(2.4.40)(2.4.41)中$B_k \equiv 0$, Φ_k, D_k和F_k都不依赖k, 即它们可写成Φ, D, C, F. 当(Φ, D)能控, (Φ, C)能观时, 证明滤波误差协方差阵P_k当$k \to \infty$时收敛到有穷极限.

4.4.3 在定理2.4.1中要求$\{w_i\}$是不相关的, 即$Ew_kw_j^* = 0, \forall k \neq j$. 现设$\{w_i\}$满足下面随机差分方程的相关噪声:

$$w_{k+1} = M_kw_k + \xi_{k+1}, \quad E\xi_k = 0, \quad E\xi_k\xi_j^* = \begin{cases}0, & k \neq j\\ I, & k = j,\end{cases}$$

M_k为已知阵, $\{\xi_k\}$和$[x_0 \quad y_0]^\tau$不相关. 写出对(2.4.1), (2.4.2)的Kalman滤波方程.

4.4.4 设$[x \quad y]^\tau$为二维正态向量, 求用y对x^2的最小方差估计及线性无偏最小方差估计.

4.4.5 如果系统的状态方程及量测方程都是一般的非线性随机微分方程, 还能否得到滤波方程, 困难在哪里?

4.4.6 Kalman 滤波方程中要求有初值. 如果初值未知时, 有什么处理方法?

4.4.7 从线性逼近的角度来阐述二次性能指标的意义.

4.4.8 下列ARMAX模型:

$$y_{k+1} = A_1y_k + \cdots + A_py_{k-p+1} + B_1u_k + \cdots B_qu_{k-q+1} + w_{k+1} + C_1w_k + \cdots + C_rw_{k-r+1}$$

是一种常用的输入输出模型, 其中u_k为控制, y_k为输出, w_k为噪声. 试把它写成状态模型, 即(2.4.1)(2.4.2)的形式.

4.4.9输入输出模型稳定是指

$$I - A_1z - \cdots - A_pz^p$$

的行列式的根全在单位闭圆外而状态模型$x_{k+1}=\Phi x_k+Bu_k+Dw_{k+1}$, $y_k=Cx_k+Fw_k$的稳定, 指Φ的本征值全在单位闭圆内. 证明习题4.4.8中表达的转换, 稳定性不变.

4.4.10对条件正态过程(2.4.30)(2.4.31), 证明能否沿用定理2.4.3的方法, 找到使二次性能指标(2.4.43)最小的最优反馈控制?

4.4.11 设$x_{k+1}=\Phi x_k+Bu_k+Dw_{k+1}$, $y_k=Cx_k+Fw_k$, $w_k\in\mathbb{N}(0,I)$, Φ, B, D, C, F为常阵. 求最优随机控制使$E\sum\limits_{k=0}^{N}\|y_k\|^2=\min$.

4.4.12 设$\{y_k^*\}$为给定的确定性向量. 对习题4.4.11中的系统, 求最优跟踪控制使

$$E\sum_{k=0}^{N}\|y_k-y_k^*\|^2=\min$$

参考文献

[1] Åström, R. J., Introduction to Stochastic Control, Academic Press, New York, 1970.

[2] Caines, P. E., Linear Stochastic System, Wiley, 1988, New York.

[3] Chen, H. F., Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems, Wiley, 1985, New York.

[4] Chen, H. F. and L. Guo, Identification and Stochastic Adaptive Control, Birkhäuser, 1991, Boston.

[5] Chow, Y. S. and H. Teicher, Probability Theory, Springer, 1978, New York.

[6] Liptser, R. S. and A. N. Shiryayev, Stastistics of Random Processes, Springer, 1977, New York.

[7] Loève, M., Probability Theory, Springer, 1977-1978, New York.

[8] 钱敏平, 龚光鲁, 随机过程论, 北京大学出版社, 2000.

[9] Rozanov, Y. A., Stationary Random Processes, A. Feinstein, Translator, Holden-Day, 1967, San-Francisco.

[10] Shiryayev, A. N., Probability Theory, Springer, 1984, New York.

[11] 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, 1965.

[12] 严士健, 王隽骧, 刘秀芳, 概率论基础, 科学出版社, 1997.

第三章　自适应系统理论

本章简要概述自适应系统的一些最基本概念、基本方法和基本结果. 从广义上讲, 自适应是人类智能的重要特征, 也是人类文明发展和社会不断进步的重要动因之一. 自适应系统可主要分为密切相关的两大部分：自适应估计与自适应控制. 本章将着重介绍关于线性系统的基本的自适应理论, 一是因为线性情形的理论发展得相对较简洁、成熟和深入, 二是因为工程实际中动力系统虽然大多是非线性的, 但是它们往往可以用线性系统来进行有效逼近和满意处理, 三是, 本章内容也将为以后研究非线性系统的自适应控制及自适应控制的最大能力和局限等基本问题提供必要基础. 为了加深对基本内容的理解, 并有益于有兴趣者在该领域学术前沿从事进一步的相关研究工作, 每节后面都附有一定深度或一定意义的习题, 有些习题同时也可作为正文内容的重要补充.

本章涉及的内容多数散见于笔者的有关论文中, 作为相关内容的辅助参考书, 读者还可见[1], [4], [5], [7], [10], [11], [26], [33], [39], [42]等专著.

§3.1　什么是自适应系统?

在日常生活中, 自适应是指一生物体（或系统）调整自己的行为以适应外部（或内部）环境（或情况）的新的改变. 因此, 自适应有两个关键的相关问题：根据新的信息（改变的情况）知道了些什么？如何作出相应的反应（调节）? 用更加专业的术语来讲, 第一个问题属于估计、或辨识、或学习……, 而第二个问题则属于控制、或决策、或调整……. 无论是估计或控制都需要信息, 而信息的有效利用可以消除（或减少）系统中不确定性所带来的影响.

从实际中看, 对任何复杂动态系统建模时, 其数学模型都不可能完全精确地描述实际系统的结构或行为, 也就是说, 模型中应该考虑不确定性因素的影响. 粗略来讲, 系统中的不确定性可分为两类：内部不确定性和外部不确定性. 内部不确定性是指描述系统的结构和参数的不确定性, 而外部不确定性是指外部环境对系统的影响. 需要指出的是, “内部”和“外部”之分在很大程度上是“人为”的, 往往依具体系统和易处理的程度而定. 进一步, 系统“内部”的结构和参数往往也受外部环境变化的影响, 因而“内部”和“外部”也是相对的.

系统“外部”未知（或不可知）的环境往往被当作扰动来处理, 而“内部”模型的不确定性可分为如下三类：

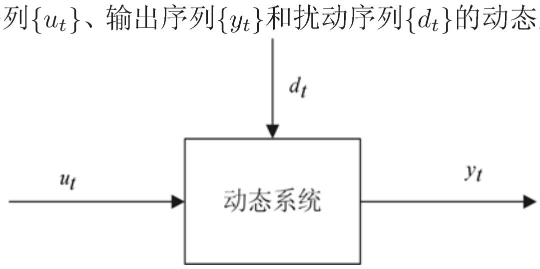
A.参数不确定性. 例如, 系统模型中含有某一未知的参数向量θ;

B.信号不确定性, 例如, 系统模型中含有一个未知的且随时间变化的信号过程$\{\theta(t)\}$;

C.函数不确定性, 例如, 系统模型中含有某一个未知的函数关系$f(\cdot)$, 等.

那么如何消除（或减少）系统中不确定性对系统性能的影响? 这就需要利用后验信息. 先验信息是系统运行前对系统的了解, 而后验信息是指系统运行过程中通过系统输入和输出信号而“反映”出的系统内部的结构及其信息变化.

考虑如下的具有输入序列$\{u_t\}$、输出序列$\{y_t\}$和扰动序列$\{d_t\}$的动态系统：

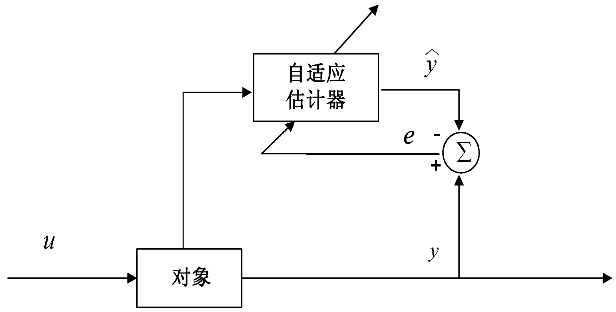


在任一时刻$t > 0$, 系统的后验信息是指

$$\{y_i, u_i : i \le t\}.$$

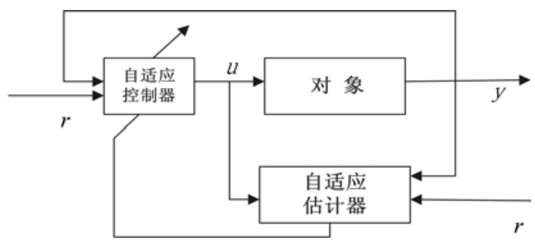
显然, 只有通过自适应方法（自适应估计或控制）来利用后验信息, 才有可能减少系统中存在的不确定性及其影响.

什么是自适应估计? 直观上来讲, 自适应估计是一个关于系统的参数（或结构）的估计器, 这个估计器可以随着在线观测到的系统数据的增多而不断地修正或更新, 例见下图：



其中e表示实际输出和模型输出之差（在同一个输入信号u下）, 一般称为预报误差. 自适应估计器一般是根据预报误差e的值来不断进行调节的.在参数模型情形下, 对未知参数θ的估计θ_t一般是根据优化关于预报误差e的某个泛函来获取的（详见§9.2及§9.4）.

什么是自适应控制? 迄今并没有严格的数学定义, 但这并不妨碍对这一问题的研究. 从实用的角度讲, 自适应控制可看作是这样一个控制器：它具有可调节的参数或结构以及相应的调节机制. 下面是一个典型的自适应控制框图, 我们看到, 在反馈回路中, 同时具有自适应估计器和自适应控制器, 后者是基于前者而构造的.



不难看出, 无论是自适应估计还是自适应控制, 它们都是利用不确定性动态系统的在线观测信号而构造的非线性影射. 正因为如此, 一般来讲, 从数学上进行这类非线性分析并不容易, 但这一特点也正决定了自适应方法有能力对付较大的系统不确定性.

§3.2 自适应估计(I): 定常参数系统

定常参数系统的估计方法是目前研究最充分也是实际应用得最多的方法. 常用的方法有很多, 例如, 最小二乘法、极大似然法, ……等等, 其中, 又以对线性定常系统的研究最深入.

在本节中, 我们主要考虑下述最基本的线性回归随机模型：

$$y_{t+1} = \theta^\tau \phi_t + w_{t+1}, \quad t \geq 0 \tag{3.2.1}$$

其中$\{y_t\}$是一维输出观测序列, θ是$d(d \geq 1)$维未知参数向量, $\{\phi_t\}$是回归向量序列（它一般是系统的输入和输出数据的线性或非线性函数）, 而$\{w_t\}$是量测噪声序列. 在对θ进行估计的方法中, 最著名和最常用的方法要算是最小二乘法了, 它是通过极小化下列“积累的预报误差”来获取对θ的估计的：

$$J_t(\theta) \triangleq \sum_{i=0}^{t} (y_{i+1} - \theta^\tau \phi_i)^2, \tag{3.2.2}$$

为了得到最小二乘(Least Squares或LS)解,令上式对θ的导数为零, 可得极小化(3.2.2)的θ 值(记为θ_{t+1})为

$$\theta_{t+1}=\Big(\sum_{i=0}^{t}\phi_i\phi_i^{\tau}\Big)^{-1}\sum_{i=0}^{t}\phi_i y_{i+1}. \tag{3.2.3}$$

令

$$P_{t+1}=\Big(\sum_{i=0}^{t}\phi_i\phi_i^{\tau}\Big)^{-1}, \qquad a_t=(1+\phi_t^{\tau}P_t\phi_t)^{-1}. \tag{3.2.4}$$

利用矩阵求逆公式(1.1.8)可知

$$P_{t+1}=P_t-a_tP_t\phi_t\phi_t^{\tau}P_t. \tag{3.2.5}$$

利用(3.2.4)和(3.2.5)可将(3.2.3)改写为递推的形式

$$\theta_{t+1}=\theta_t+a_tP_t\phi_t(y_{t+1}-\theta_t^{\tau}\phi_t). \tag{3.2.6}$$

注 3.2.1 在上述推导中, 我们假定了$\sum\limits_{i=0}^{t}\phi_i\phi_i^{\tau}$是可逆矩阵. 当然, 这个假定一般不一定满足, 特别是当t较小时. 然而, 这并不妨碍应用LS的递推公式(3.2.5)和(3.2.6). 一般来讲, 我们取(3.2.5)的初值$P_0>0$为任意给定正定矩阵, 而(3.2.6)的初值θ_0为任意给定向量. 利用矩阵求逆公式由(3.2.5)可知

$$P_{t+1}=\Big(\sum_{i=0}^{t}\phi_i\phi_i^{\tau}+P_0^{-1}\Big)^{-1}, \quad t\ge 0. \tag{3.2.7}$$

这时递推LS公式(3.2.6)给出的值与(3.2.3)略有差别, 但这不影响对估计的渐近性质分析.

为了分析LS算法, 我们需要引入下列关于噪声和回归向量的条件:

(A1) 噪声序列$\{w_t,\mathcal{F}_t\}$是一鞅差序列(其中$\{\mathcal{F}_t\}$是一非降的子σ-代数序列), 并且存在常数$\beta>2$使

$$\sup_t E[|w_{t+1}|^{\beta}|\mathcal{F}_t]<\infty, \quad \text{a.s.} \tag{3.2.8}$$

(A2) 回归向量序列$\{\phi_t,\mathcal{F}_t\}$是任意适应序列, 即$\phi_t\in\mathcal{F}_t$, $\forall t\ge 0$.

在上述两个很一般的条件下, 我们有下列主要结果.

定理 3.2.1 对随机回归模型(3.2.1), 设条件(A1)和(A2)满足, 则当$t\to\infty$时, LS算法(3.2.5)–(3.2.6)具有下列渐近性质:

$$(i) \quad \tilde\theta_{t+1}^{\tau}P_{t+1}^{-1}\tilde\theta_{t+1}=O(\log r_t), \quad \text{a.s.}$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{t}\frac{(\phi_k^{\tau}\tilde\theta_k)^2}{1+\phi_k^{\tau}P_k\phi_k}=O(\log r_t), \quad \text{a.s.}$$

其中$\tilde\theta_t\triangleq\theta-\theta_t$, “$O$”常数是不依赖于$t$变化的量, 而

$$r_t\triangleq 1+\sum_{i=0}^{t}\|\phi_i\|^2. \tag{3.2.9}$$

证明 将(3.2.1)代入(3.2.6)得

$$\tilde\theta_{k+1}=(I-a_kP_k\phi_k\phi_k^{\tau})\tilde\theta_k-a_kP_k\phi_k\omega_{k+1}. \tag{3.2.10}$$

对(3.2.5)式右乘P_k^{-1}得

$$P_{k+1}P_k^{-1}=I-a_kP_k\phi_k\phi_k^{\tau}. \tag{3.2.11}$$

又注意到$P_{k+1}^{-1}=P_k^{-1}+\phi_k\phi_k^\tau$, 从而

$$P_{k+1}^{-1}P_k=I+\phi_k\phi_k^\tau P_k. \tag{3.2.12}$$

于是利用(3.2.10)及(3.2.11)得

$$\tilde\theta_{k+1}=P_{k+1}P_k^{-1}\tilde\theta_k-a_kP_k\phi_k\omega_{k+1}$$

或

$$P_{k+1}^{-1}\tilde\theta_{k+1}=P_k^{-1}\tilde\theta_k-a_kP_{k+1}^{-1}P_k\phi_k\omega_{k+1}. \tag{3.2.13}$$

下面考虑Lyapunov函数

$$V_k=\tilde\theta_k^\tau P_k^{-1}\tilde\theta_k.$$

.

利用(3.2.10)–(3.2.13)得

$$\begin{aligned}
&V_{k+1}=\tilde\theta_{k+1}^\tau P_{k+1}^{-1}\tilde\theta_{k+1}\\
=&[\tilde\theta_k^\tau(I-a_k\phi_k\phi_k^\tau P_k)-a_k\phi_k^\tau P_k\omega_{k+1}][P_k^{-1}\tilde\theta_k-P_{k+1}^{-1}a_kP_k\phi_k\omega_{k+1}]\\
=&\tilde\theta_k^\tau P_k^{-1}\tilde\theta_k-a_k(\phi_k^\tau\tilde\theta_k)^2-2a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\omega_{k+1}+a_k^2\phi_k^\tau P_kP_{k+1}^{-1}P_k\phi_k\omega_{k+1}^2\\
=&V_k-a_k(\phi_k^\tau\tilde\theta_k)^2-2a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\omega_{k+1}+a_k\phi_k^\tau P_k\phi_k\omega_{k+1}^2.
\end{aligned}$$

将此式从$k=0$到n求和得

$$\begin{aligned}
&V_{n+1}+\sum_{k=0}^n a_k(\phi_k^\tau\tilde\theta_k)^2\\
=&V_0-2\sum_{k=0}^n a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\omega_{k+1}+\sum_{k=0}^n a_k\phi_k^\tau P_k\phi_k\omega_{k+1}^2.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

下面分别估计上式最后两项. 注意到$a_k\le 1$且$a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\in\mathcal{F}_k$, 因此利用鞅估计定理2.2.13知, 对任意$\delta>0$有

$$\sum_{k=0}^n a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\omega_{k+1}=O\left(\{\sum_{k=0}^n a_k(\phi_k^\tau\tilde\theta_k)^2\}^{\frac12+\delta}\right).$$

取$0<\delta<\frac12$, 有

$$\sum_{k=0}^n a_k\phi_k^\tau\tilde\theta_k\omega_{k+1}=O(1)+o\left(\sum_{k=0}^n a_k(\phi_k^\tau\tilde\theta_k)^2\right). \tag{3.2.15}$$

为估第二项, 注意到

$$P_{k+1}^{-1}=P_k^{-1}+\phi_k\phi_k^\tau=P_k^{-1}(I+P_k\phi_k\phi_k^\tau),$$

取行列式$|\cdot|$得

$$\mid P_{k+1}^{-1}\mid=\mid P_k^{-1}\mid(1+\phi_k^\tau P_k\phi_k).$$

故

$$\phi_k^\tau P_k\phi_k=\frac{\mid P_{k+1}^{-1}\mid-\mid P_k^{-1}\mid}{\mid P_k^{-1}\mid},$$

进而

$$a_k\phi_k^\tau P_k\phi_k=\frac{\mid P_{k+1}^{-1}\mid-\mid P_k^{-1}\mid}{\mid P_{k+1}^{-1}\mid}.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mid P_{k+1}^{-1}\mid - \mid P_k^{-1}\mid}{\mid P_{k+1}^{-1}\mid}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\int_{|P_k^{-1}|}^{|P_{k+1}^{-1}|}\frac{dx}{x} = log \mid P_{n+1}^{-1}\mid + log\mid P_0\mid . \tag{3.2.16}$$

利用c_r不等式(2.1.14)及Lyapunov不等式易知, 对任何$\alpha \in (2, min(\beta, 4)]$有

$$\sup_k E\left[\left|\omega_{k+1}^2 - E(\omega_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k)\right|^{\frac{\alpha}{2}} \mid \mathcal{F}_k\right]$$

$$\leq 4\sup_k E\left[\mid \omega_{k+1}\mid^{\alpha}\Big|\mathcal{F}_k\right] < \infty, \qquad a.s.$$

于是利用鞅估计定理2.2.13得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k\left\{\omega_{k+1}^2 - E[\omega_{k+1}^2|\mathcal{F}_k]\right\}$$

$$=O\left(S_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\log^{\frac{2}{\alpha}+\eta}\left(S_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)+e\right)\right) \quad a.s. \quad \forall \eta > 0,$$

其中

$$S_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \triangleq \left\{\sum_{k=0}^{n}(a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}^{\frac{2}{\alpha}}.$$

注意到$a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k \leq 1$且$2/\alpha < 1$, 利用(3.2.16)有

$$S_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = O(1) + o(log\mid P_{n+1}^{-1}\mid).$$

据此, 从上式可得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k\omega_{k+1}^2$$

$$\leq \sigma_n^2\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k + o(log\mid P_{n+1}^{-1}\mid) + O(1), \tag{3.2.17}$$

其中

$$\sigma_n \triangleq \max_{k\leq n} E[w_{k+1}^2|\mathcal{F}_k].$$

而根据条件(A1)知$\{\sigma_n\}$是有界序列.

进一步, 利用(3.2.7)和(3.2.9)可知

$$\log[\det(P_{t+1}^{-1})] \leq d\log\lambda_{\max}(P_{t+1}^{-1}) \leq d\log r_t + O(1),$$

其中$d \triangleq \dim(\phi_k)$.

于是, 利用(3.2.16)从(3.2.17)可得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k^{\tau}P_k\phi_k w_{k+1}^2 = O(\log r_n).$$

将此式与(3.2.15)代入(3.2.14)得

$$V_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k(\phi_k^{\tau}\tilde{\theta}_k)^2 = O(\log r_n).$$

因此定理的两个结论成立. 证毕. ∎

利用上述定理的第一个结论(i), 可直接得到如下推论.

推论 3.2.1 在定理3.2.1的条件下, LS的估计误差$\tilde{\theta}_t \triangleq \theta - \theta_t$ 具有如下渐近上界

$$\|\tilde{\theta}_{t+1}\|^2 = O\Big(\frac{\log r_t}{\lambda_{\min}(P_{t+1}^{-1})}\Big), \quad \text{a.s.}, \tag{3.2.18}$$

其中$\lambda_{\min}(\cdot)$表示矩阵的最小本征值.

我们看到, 为了使LS估计具有强相容性, 即当$t \to \infty$时, $\theta_t \to \theta$ a.s., 只需随机回归向量序列$\{\phi_k\}$满足如下条件即可,

$$\frac{\log r_t}{\lambda_{\min}(P_{t+1}^{-1})} \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \tag{3.2.19}$$

这一基本结果是由黎和魏[31]首先得到的. 他们还进一步举例说明了, 在一定意义下, (3.2.19)是LS估计强相容的最弱条件. 尽管如此, 在自适应系统分析中, 如何验证或避开这一条件一般是理论分析的一个关键点, 而形如定理3.2.1(ii)的结论对克服这一难点起重要作用[19][14].

注意到θ是常值, 利用条件(A1)和(A2)从(3.2.1)可得

$$E[y_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \theta^\tau \phi_t.$$

因此, 可以将下式称为对输出的条件期望的LS估计(对输出本身的预报):

$$\hat{y}_{t+1} \triangleq \theta_t^\tau \phi_t.$$

根据定理3.2.1(ii)可直接得到下列推论.

推论 3.2.2 在定理3.2.1的条件下,

(i) 若$\{\phi_t\}$满足条件

$$\phi_t^\tau P_t \phi_t = o\big(\frac{r_t}{\log r_t}\big) \quad \text{a.s.}, \tag{3.2.20}$$

则当$t \to \infty$时, 对$E[y_{t+1}|\mathcal{F}_t]$之LS估计的“平均”误差在下列意义下趋于零:

$$\sum_{i=0}^{t}(E[y_{i+1}|\mathcal{F}_i] - \hat{y}_{i+1})^2 = o(r_t), \quad \text{a.s.} \quad \text{on} \quad [r_t \to \infty]. \tag{3.2.21}$$

(ii) 若$\{\phi_t\}$进一步满足条件

$$\phi_t^\tau P_t \phi_t = O(1) \quad \text{a.s.}, \tag{3.2.22}$$

则

$$\sum_{i=0}^{t}(E[y_{i+1}|\mathcal{F}_i] - \hat{y}_{i+1})^2 = O(\log r_t), \quad \text{a.s.} \tag{3.2.23}$$

这说明“积累的”估计误差只有$O(\log r_t)$的数量级, 大大改进了(3.2.21)式中的结果.

然而, 正如验证(3.2.19)一样, 在一般自适应控制系统中, 直接验证哪怕看起来较弱的条件(3.2.20)或(3.2.22)也往往不易. 避开这一难点的办法之一是对LS算法进行适当的修正, 使其不需要上述条件, 也能得到类似于LS所具有的良好的渐近性质.

例如, 考虑下列以序列$\{\lambda_i\}$为加权的二次型指标.

$$J_t(\theta) \triangleq \sum_{i=0}^{t} \lambda_i (y_{i+1} - \theta^\tau \phi_i)^2. \tag{3.2.24}$$

我们仍用θ_{t+1}表示极小化上式的值(称为θ的加权最小二乘或WLS估计), 则类似于前述LS情形, 可得到如下WLS递推公式

$$\theta_{t+1} = \theta_t + a_t P_t \phi_t (y_{t+1} - \phi_t^\tau \theta_t), \tag{3.2.25}$$

$$P_{t+1} = P_t - a_t P_t \phi_t \phi_t^\tau P_t, \tag{3.2.26}$$

$$a_t = (\lambda_t^{-1} + \phi_t^\tau P_t \phi_t)^{-1}. \tag{3.2.27}$$

为保证WLS具有良好的渐近性质, 通常可简单取权函数为

$$\lambda_t = \frac{1}{\log^{1+\delta} r_t}, \quad \delta > 0, \tag{3.2.28}$$

其中r_t仍如(3.2.9)所定义. 注意到$\{\lambda_t\}$是非增序列, 这说明WLS是一种"谨慎"的估计, 因它的加权可用于对付一定的较大噪声方差的影响(见习题9.2.4).

类似于定理3.2.1, 我们有下述结果[3]:

定理 3.2.2 对随机回归模型(3.2.1), 设条件(A1)和(A2)满足(在条件(A1)中只需假定$\beta = 2$), 那么当$t \to \infty$时WLS算法(3.2.25)–(3.2.28)具有下列渐近性质:

(i) $\tilde{\theta}_{t+1}^\tau P_{t+1}^{-1} \tilde{\theta}_{t+1} = O(1)$, a.s.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\phi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2}{\lambda_k^{-1} + \phi_k^\tau P_k \phi_k} < \infty$, a.s.

证明 记

$$[\bar{y}_{t+1}, \bar{\phi}_t, \bar{w}_{t+1}] \triangleq \sqrt{\lambda_t}[y_{t+1}, \phi_t, w_{t+1}],$$

则显然WLS算法是下列线性模型

$$\bar{y}_{t+1} = \theta_\tau \bar{\phi}_t + \bar{w}_{t+1} \tag{3.2.29}$$

的LS算法. 于是类似于定理3.2.1的证明(见(3.2.14)和(3.2.15)) 得

$$\begin{aligned}&\tilde{\theta}_{n+1}^\tau P_{n+1}^{-1} \tilde{\theta}_{n+1} + (1 + o(1)) \sum_{k=0}^{n} a_k (\phi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2 \\ =&O(1) + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \phi_k^\tau P_k \phi_k w_{k+1}^2,\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

其中P_t, a_t和λ_t由(3.2.26)–(3.2.28)式所定义.

利用(3.2.26)易知

$$a_k \phi_k^\tau P_k \phi_k = \lambda_k \phi_k^\tau P_{k+1} \phi_k.$$

于是

$$a_k \lambda_k \phi_k^\tau P_k \phi_k = \lambda_k \bar{\phi}_k^\tau P_{k+1} \bar{\phi}_k = \lambda_k \frac{|P_{k+1}^{-1}| - |P_k^{-1}|}{|P_{k+1}^{-1}|}.$$

但由于

$$|P_{k+1}^{-1}| = |\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \phi_i \phi_i^\tau + P_0^{-1}| \le (\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \|\phi_i\|^2 + \|P_0^{-1}\|)^d \le c_0 r_k^d$$

其中$d = \dim(\phi_i)$, $c_0 > 0$是某常数. 于是, 我们知

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \phi_k^\tau P_k \phi_k \le d^{1+\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k+1}^{-1}| - |P_k^{-1}|}{|P_{k+1}^{-1}| \log^{1+\delta}\{c_0^{-1} |P_{k+1}^{-1}|\}} < \infty, \tag{3.2.31}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k\phi_k^\tau P_k\phi_k w_{k+1}^2\\=&\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k\phi_k^\tau P_k\phi_k(w_{k+1}^2-E[w_{k+1}^2|\mathcal{F}_k])+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k\phi_k^\tau P_k\phi_k E[w_{k+1}^2|\mathcal{F}_k]\end{aligned}$$

由条件(A1)($\beta=2$即可)知第二个级数收敛, 而根据第四章鞅收敛定理2.2.11知第一个级数也收敛. 于是(3.2.30)中右端的求和式当$n\to\infty$时有极限, 因而定理证毕. ∎

利用定理3.2.5可直接得到如下推论.

推论 3.2.3 在定理3.2.5的条件下, WLS算法有下列性质

(i) $\|\tilde{\theta}_t\|^2=O(\lambda_{\max}(P_t))$ a.s.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{t}(\phi_t^\tau\tilde{\theta}_k)^2=o(r_t)$ a.s.

注意到上述性质(ii)说明对WLS算法而言, (3.2.21)式自动几乎处处成立(无需关于ϕ_t的除可测性外的其他条件). 进一步WLS算法还具有如下良好性质:

定理 3.2.3 (WLS的自收敛性[17]). 在定理3.2.2的条件下, 由(3.2.25)–(3.2.28)所定义的WLS算法具有自收敛性. 即对任何初值(P_0,θ_0)和任何随机回归向量$\{\phi_k,\mathcal{F}_k\}$, θ_t总是几乎处处收敛到某一个向量$\bar{\theta}$(不一定与θ相等).

证明 将(3.2.1)代入(3.2.25)并在两边求和得

$$\theta_{t+1}=\theta_0+\sum_{k=0}^{t}a_kP_k\phi_k(\phi_k^\tau\tilde{\theta}_k+w_{k+1}).\tag{3.2.32}$$

注意到, 在(3.2.26)两边取迹数tr$(\cdot)$可得,

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\|P_k\phi_k\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathrm{tr}(P_k)-\mathrm{tr}(P_{k+1})]<\infty.$$

于是利用Schwarz不等式和定理3.2.5(ii)得

$$\sum_{k=1}^{t}a_kP_k\phi_k\phi_k^\tau\tilde{\theta}_k\le\{\sum_{k=1}^{t}a_k\|P_k\phi_k\|^2\sum_{k=1}^{t}a_k(\phi_k^\tau\tilde{\theta}_k)^2\}^{1/2}<\infty.\tag{3.2.33}$$

进一步注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}E[a_k^2\|P_k\phi_kw_{k+1}\|^2|\mathcal{F}_k]\le a_0\sup_k E[w_{k+1}^2|\mathcal{F}_k]\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k\|P_k\phi_k\|^2<\infty.$$

于是根据鞅收敛定理2.2.11知$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kP_k\phi_kw_{k+1}$几乎处处收敛. 最后利用(3.2.33), 从(3.2.32)知, θ_t几乎处处收敛. ∎

习题9.2

9.2.1 设$\{w_t,\mathcal{F}_t\}$是鞅差序列且满足本节条件(A1), $\{f_t,\mathcal{F}_t\}$是任意随机适应序列, 利用本节定理证明下列估计式成立:

$$\sum_{k=1}^{t}f_kw_{k+1}=O(\sqrt{s_t\log s_t}),\ \text{a.s.},$$

其中$s_t\triangleq\sum\limits_{k=1}^{t}f_k^2$.

9.2.2 设$\{\phi_t\}$是有界序列, 证明对由(3.2.5)所定义的序列$\{P_t\}$, 当$t\to\infty$时有$\phi_t^\tau P_t\phi_t\to 0$. 进一步, 对怎样的无界序列$\{\phi_t\}$,此结果也成立?

9.2.3 考虑由(3.2.5)–(3.2.6)所定义的递推最小二乘算法. 证明对任何初值(θ_0,P_0), LS 的可能增长有上界

$$\|\theta_{t+1}\| = O(1) + o(\sqrt{\log r_t}) \quad a.s.$$

其中r_t由(3.2.9)式所定义(注意, 该结论并不能直接从推论3.2.1得出, 因为我们没有假定$\lambda_{\min}(P_{t+1}^{-1})\to\infty$).

9.2.4 在什么条件下, 递推LS估计是线性回归模型(3.2.1)的最小方差估计? 对怎样的线性回归模型, 加权最小二乘(WLS)估计也是最小方差估计? (提示: 可利用Kalman滤波理论)

9.2.5 LS算法是否也具有自收敛性? (提示:可参考[40][38])

9.2.6 设回归向量ϕ_t有下列表达式

$$\phi_t^\tau = [F(z),\ldots,z^mF(z),G(z),\ldots,z^nG(z)]\xi_t,$$

其中$F(z)$和$G(z)$是两个互质的多项式, 其次数分别记为∂F和∂G, $m\ge 0$及$n\ge 0$为两个整数, z表示后移算子(即$z^k\xi_t\triangleq \xi_{t-k}$, $k\ge 0$). 若$m<\partial G$或$n<\partial F$, 证明一定存在常数$c>0$, 使

$$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^t \phi_i\phi_i^\tau) \ge c\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^t \psi_i\psi_i^\tau)$$

其中$\psi_t^\tau\triangleq[\xi_t,\xi_{t-1},\ldots,\xi_{t-s}]$, $s=\max\{m+\partial F, n+\partial G\}$.

9.2.7 若一个实系数的有理分式$H(z)$在单位圆$|z|\le 1$内没有极点, 且满足

$$H(e^{i\lambda})+H(e^{-i\lambda})>0, \quad \forall\lambda\in[0,2\pi],$$

则$H(z)$称为是严格正实(SPR)的. 设$H(z)$是SPR的, 证明下列两个结论成立:

a) $H^{-1}(z)$也是SPR的;

b) 存在$\epsilon>0$使对任何$t\ge 0$都有

$$\sum_{i=0}^t u_iy_i \ge \epsilon\sum_{i=0}^t (u_i^2+y_i^2),$$

其中$\{y_i\}$和$\{u_i\}$以$H(z)$为传递函数$y_t=H(z)u_t$, 其中z为后移算子, 且假定$u_t=y_t=0$, $\forall t<0$.

9.2.8 考虑下列具有相关噪声的线性模型

$$y_{t+1} = \beta^\tau\psi_t + \epsilon_{t+1},$$

$$\epsilon_{t+1} = w_{t+1} + c_1w_t + \cdots + c_rw_{t-r+1},$$

其中β^τ和$c_i(1\le i\le r)$为未知参数, $\{w_t,\mathcal{F}_t\}$是鞅差噪声序列并满足本节的条件(A1), $\{\psi_t,\mathcal{F}_t\}$是适应的随机回归向量序列. 对未知参数向量

$$\theta^\tau \triangleq [\beta^\tau, c_1,\ldots,c_r],$$

仍可用LS的递推公式(3.2.5)–(3.2.6)来估计, 但此时ϕ_t应为

$$\phi_t^\tau \triangleq [\psi_t^\tau, \hat{w}_t,\ldots,\hat{w}_{t-r+1}],$$
$$\hat{w}_t \triangleq y_t - \theta_t^\tau\phi_{t-1}.$$

这时, 相应的估计算法称为推广最小二乘(ELS)法. 证明: 若$c^{-1}(z)-\frac{1}{2}$是SPR的(其中$c(z)=1+c_1z+\cdots+c_rz^r$), 则定理3.2.1的结论对ELS算法仍成立. 进一步, 当系统的阶数未知且噪声模型的SPR 条件也不满足时, 如何构造对参数θ及其维数的估计算法?

(提示：记$\xi_t=\hat{w}_t-w_t$, 则$c(z)\xi_t=\tilde{\theta}_t^\tau\phi_{t-1}$, 可参考[19][25])

§3.3 时变随机系统稳定性

在自适应系统研究中, 常常遇到下列类型的时变随机系统

$$x_{t+1}=A_tx_t+\xi_{t+1},\quad t\geq 0 \tag{3.3.1}$$

其中$x_t\in\mathbb{R}^n$, $A_t\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\xi_t\in\mathbb{R}^n$都是随机序列.

易见, 方程(3.3.1)的稳定性依赖于其齐次部分

$$x_{t+1}=A_tx_t,\quad t\geq 0 \tag{3.3.2}$$

的稳定性, 而这又实质上是关于随机矩阵无穷乘积的研究.

我们先考虑(3.3.2)的渐近稳定性.

定理 3.3.1 (Furstenberg-Kesten). 设$\{A_t,t\geq 1\}$是平稳矩阵序列, 则极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}E[\log\|A_tA_{t-1}\cdots A_1\|]=\lambda$$

存在(λ不一定是有限数). 进一步, 若$\{A_t\}$还是遍历的且$E[\log^+\|A\|]<\infty$, 则$\lambda<\infty$且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|A_tA_{t-1}\dots A_1\|=\lambda\quad a.s.$$

对慢变化的适应算法来讲, 常常有$A_t=I-\mu F_t$, $\mu\in(0,1]$. 这时当μ很小时, 利用定理3.3.1可得如下结果[11]:

定理 3.3.2 设$\{F_t\}$是平稳遍历的矩阵序列, $E\|F_1\|<\infty$. 则对任何$\mu>0$, 下述极限

$$\lambda_\mu\triangleq\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|(I-\mu F_t)(I-\mu F_{t-1})\cdot\cdots\cdot(I-\mu F_1)\|$$

存在, 并且$\lambda_\mu<\infty$既不依赖于范数的选取, 也不依赖于样本ω. 进一步还有

$$\limsup_{\mu\to 0}\frac{\lambda_\mu}{\mu}\leq-\lambda_{\min}\Big(E\big[\frac{F_1+F_1^\tau}{2}\big]\Big).$$

上一定理说明, 对$\forall\alpha<\lambda_{\min}(E[\frac{F_1+F_1^\tau}{2}])$, 对所有充分小的$\mu>0$ 和充分大的t都有

$$\|(I-\mu F_t)(I-\mu F_{t-1})\cdot\cdots\cdot(I-\mu F_1)\|\leq e^{-\mu\alpha t},\quad a.s.$$

此时, 若$\alpha>0$, 则显然(3.3.2)的解是渐近稳定的.

当将这一定理用于适应性算法分析时, 遇到两个困难. 其一是一般来讲, 随机矩阵序列$\{A_t,t\geq 1\}$往往并不是平稳遍历的; 其二, 更重要的是, 仅仅证明齐次方程(3.3.2)以上述指数的速度趋于零, 一般还并不能保证方程(3.3.1)的稳定性.

为说明这一点, 我们先引进下列记号.

定义 3.3.1 若随机矩阵序列$\{A_t,t\geq 0\}$满足

$$\sup_{t\geq 0}E\|A_t\|^p<\infty,\quad p>0,$$

则称其为L_p稳定的. A_t的L_p模定义为$\|A_t\|_{L_p}\triangleq\{E\|A_t\|^p\}^{1/p}$.

定义 3.3.2 若存在常数$M>0$, $\lambda\in(0,1)$, $p>0$, 使方程(3.3.2)中的随机矩阵序列$\{A_t,t\geq 0\}$ 满足

$$\Big\|\prod_{j=i+1}^{k}A_j\Big\|_{L_p}\leq M\lambda^{k-i},\quad\forall k\geq i>0,$$

其中

$$\prod_{j=i+1}^{k} A_j = \begin{cases} A_k \cdots A_{i+1}, & k > i, \\ I, & k \le i, \end{cases}$$

则称方程(3.3.2)是L_p-指数稳定的.

显然, 若(3.3.2)是L_p-指数稳定的, 则在关于初值x_0和干扰$\{\xi_t\}$的一定条件下, (3.3.1)的解$\{x_t\}$也在一定意义下是稳定的. 反之, 下面的定理将说明, 若对任何L_2-有界扰动$\{\xi_t\}$, (3.3.1)的解是L_2一致有界的, 则方程(3.3.2)必是L_2指数稳定的.

定理 3.3.3 考虑方程(3.3.1), 并设$x_0 = 0$, $\det(A_t) \neq 0, \forall t \ge 0$. 记

$$\mathcal{B} = \left\{ \xi : \sup_t \|\xi_t\|_{L_2} \le 1 \right\}.$$

若下式成立

$$\sup_{\xi \in \mathcal{B}} \sup_t \|x_t\|_{L_2} < \infty,$$

则方程(3.3.2)必是L_2指数稳定的.

证明 首先记(3.3.2)的转移矩阵为$\Phi(n, m)$, 即,

$$\Phi(n+1, m) = A_{n+1}\Phi(n, m), \quad \Phi(m, m) = I, \quad \forall n \ge m,$$

则(3.3.1)的解可表示为

$$x_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} \Phi(t, i)\xi_{i+1}, \tag{3.3.3}$$

对任何固定的$k \ge 0$, 令

$$\xi_{i+1} = \begin{cases} \Phi(i, k)[E\Phi(i, k)^2\Phi(i, k)]^{-\frac{1}{2}}\eta_{i+1}, & i \ge k, \\ 0, & i < k, \end{cases}$$

其中$\{\eta_i\}$是与$\{A_i\}$独立的d维序列, $E\eta_i = 0$, $E\eta_i\eta_i^\tau = d^{-1}I$.易见

$$E\|\xi_{i+1}\|^2 = \mathrm{tr}[E(\xi_{i+1}\xi_{i+1}^\tau)] = 1, \quad \forall i \ge k.$$

故$\xi \in \mathcal{B}$. 将ξ_{i+1}代入(3.2.3)并计算方差得$\forall t \ge k$,

$$Ex_{t+1}x_{t+1}^\tau = \frac{1}{d}E\sum_{i=k}^{t} \Phi(t, k)[E\Phi^\tau(i, k)\Phi(i, k)]^{-1}\Phi^\tau(t, k), k \ge 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & [E\Phi(t, k)^\tau\Phi(t, k)]^{\frac{1}{2}} \sum_{i=k}^{t} [E\Phi^\tau(i, k)\Phi(i, k)]^{-1}[E\Phi(t, k)^\tau\Phi(t, k)]^{\frac{1}{2}} \\ \le & \mathrm{tr}E\left\{ \sum_{i=k}^{t} \Phi(t, k)[E\Phi^\tau(i, k)\Phi(i, k)]^{-1}\Phi^\tau(t, k) \right\} \cdot I \\ = & dE\|x_{t+1}\|^2 \cdot I \le c \cdot I, \quad \forall t \ge k \ge 0 \end{aligned}$$

其中c是有限正常数. 上式意味着

$$\sum_{i=k}^{t} [E\Phi(i, k)^\tau\Phi(i, k)]^{-1} \le c[E\Phi(t, k)^\tau\Phi(t, k)]^{-1}.$$

记

$$a^{-1}(i,k)=\lambda_{\min}\{[E\Phi(i,k)^\tau\Phi(i,k)]^{-1}\},\quad i\ge k,$$

则由上式知

$$\sum_{i=k}^{t}a^{-1}(i,k)\le ca^{-1}(t,k),\quad \forall t\ge k. \tag{3.3.4}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{t}a^{-1}(i,k)&=a^{-1}(t,k)+\sum_{i=k}^{t-1}a^{-1}(i,k)\\&\ge\left(1+\frac{1}{c}\right)\sum_{i=k}^{t-1}a^{-1}(i,k)\ge\cdots\\&\ge\left(1+\frac{1}{c}\right)^{t-k}a^{-1}(k,k)\\&=\left(\frac{1+c}{c}\right)^{t-k}\end{aligned}$$

于是, 再次利用(3.3.4)得

$$a^{-1}(t,k)\ge\frac{1}{c}\left(\frac{1+c}{c}\right)^{t-k}.$$

故

$$a(t,k)\le c\left(\frac{c}{1+c}\right)^{t-k},\quad \forall t\ge k.$$

注意到

$$a(t,k)=\lambda_{\max}\{E[\Phi(t,k)^\tau\Phi(t,k)]\},$$

因此(3.3.2)是L_2指数稳定的. 定理证毕. ∎

从上一定理知, 为研究方程(3.3.1)的稳定性(有界性), 需要首先研究方程(3.3.2)的指数稳定性. 为此引进下述定义.

定义 3.3.3 若$d\times d$维随机矩阵序列$F=\{F_k\}$属于下列集合S_p, 则$\{F_k\}$称为是p阶稳定激励的:

$$S_p\triangleq\Big\{F:\|\prod_{j=i+1}^{k}(I-F_j)\|_{L_p}\le M\lambda^{k-i},\forall k\ge i,\forall i\ge 0,$$
$$\text{其中 } M>0,\lambda\in[0,1)\text{是两个常数}\Big\}$$

类似地, 当$p=1$, $d=1$时, 对于一维非负序列$f\triangleq\{f_k\}$的集合, 记为

$$S^0\triangleq\Big\{f:f_k\in[0,1],E\prod_{j=i+1}^{k}(1-f_j)\le M\lambda^{k-i},\quad \forall k\ge i,\forall i\ge 0,$$
$$\text{其中}M>0,\lambda\in[0,1)\text{ 是两个常数}\Big\}.$$

下面我们说明, 研究集合S_p的问题在一定意义下可以转化为研究S^0.

考虑下列递推随机Lyapunov方程:

$$P_{k+1}=(I-F_k)P_k(I-F_k)^\tau+Q_k,\quad P_0>0,\quad k\ge 0, \tag{3.3.5}$$

其中$Q_k>0$是正定的随机矩阵序列.

定理 3.3.4 设$\{F_k\}$为任意$d\times d$维随机矩阵序列. 若由(3.3.5)所定义的$\{P_k\}$满足

(i) $\left\{\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\right\}\in S^0$,

(ii) $\sup\limits_{n\geq m}\|(\|P_n\|\cdot\|P_m^{-1}\|)\|_{L_p}<\infty$, $p\geq 1$,

则有$\{F_k\}\in S_p$.

证明 对任何$m\geq 0$,考虑下列方程

$$x_{k+1}=(I-F_k)x_k,\quad k\in[m,n-1],\quad n>m,$$

其中x_m是确定性向量且满足$\|x_m\|=1$. 于是

$$x_n=\prod_{i=m}^{n-1}(I-F_i)x_m. \tag{3.3.6}$$

记$B_k=I-F_k$, 考虑Lyapunov函数

$$V_k=x_k^\tau P_k^{-1}x_k.$$

我们有

$$V_{k+1}=x_{k+1}^\tau P_{k+1}^{-1}x_{k+1}=x_k^\tau B_k^\tau P_{k+1}^{-1}B_kx_k. \tag{3.3.7}$$

利用(3.3.5)及矩阵求逆公式(1.1.8)得:

$$\begin{aligned}B_k^\tau P_{k+1}^{-1}B_k=&B_k^\tau[B_kP_kB_k^\tau+Q_k]^{-1}B_k=P_k^{-1}-[P_k+P_kB_k^\tau Q_k^{-1}B_kP_k]^{-1}\\=&P_k^{1/2}\{I-[I+P_k^{1/2}B_k^\tau Q_k^{-1}B_kP_k^{1/2}]^{-1}\}P_k^{-1/2}\\\leq&\{1-[1+\|Q_k^{-1}B_kP_kB_k^\tau\|]^{-1}\}P_k^{-1}\\\leq&\Big(1-\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\Big)P_k^{-1}.\end{aligned}$$

于是, 利用(3.3.7)得

$$V_{k+1}\leq\Big(1-\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\Big)V_k.$$

从而

$$V_n\leq\prod_{k=m}^{n-1}\Big(1-\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\Big)V_m.$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\prod_{k=m}^{n-1}(I-F_k)\|^2=\max_{\|x_m\|=1}\|x_n\|^2=\max_{\|x_m\|=1}\|x_n^\tau P_n^{-1/2}P_n^{1/2}\|^2\\\leq&\max_{\|x_m\|=1}\|x_n^\tau P_n^{-1/2}\|^2\cdot\|P_n^{1/2}\|^2=\max_{\|x_m\|=1}(V_n\|P_n\|)\\\leq&\Big\{\prod_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\Big)\Big\}\cdot\{\|P_n\|\cdot\max_{\|x_m\|=1}V_m\}\\\leq&\Big\{\prod_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{1+\|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\Big)\Big\}\cdot\{\|P_n\|\cdot\|P_m^{-1}\|\}.\end{aligned}$$

因此, 利用Hölder不等式易知定理的结论成立. ∎

在上一定理中, 我们把验证矩阵序列$\{F_k\}\in S_p$的问题转化为验证由Lyapunov方程决定的某一标量序列是否属于S^0的问题. 下面我们进一步讨论S^0的性质.

命题 3.3.1 设$\{\alpha_k,\mathcal{F}_k\}$与$\{\beta_k,\mathcal{F}_k\}$是两个适应过程, 使得$\beta_k\in[0,1]$且

$$E[\beta_{k+1}|\mathcal{F}_k]\ge\alpha_k,\quad k\ge 0,$$

则$\{\alpha_k\}\in S^0$意味着$\{\beta_k\}\in S^0$.

证明

首先假设$0\le\alpha_k<1$. 对任何$n>m$, $k\in[m,n]$定义

$$A_k=\{\prod_{i=m}^{k}(1-\alpha_i)\}^{-1},A_{m-1}=1,$$

$$x_{k+1}=(1-\beta_{k+1})x_k,\quad x_m=1.$$

于是

$$x_{n+1}=\prod_{i=m}^{n}(1-\beta_{i+1}).$$

注意到

$$EA_kx_{k+1}=E\{A_k[1-E(\beta_{k+1}|\mathcal{F}_k)]x_k\}\le EA_k(1-\alpha_k)x_k=EA_{k-1}x_k,$$

故

$$EA_nx_{n+1}\le EA_{n-1}x_n\le\cdots\le EA_{m-1}x_m=1.$$

从而

$$\begin{aligned}&E\prod_{i=m}^{n}(1-\beta_{i+1})=Ex_{n+1}\le E\sqrt{x_{n+1}}\\ \le&E\sqrt{x_{n+1}A_n}\cdot\sqrt{A_n^{-1}}\le\sqrt{E(x_{n+1}A_n)EA_n^{-1}}\\ \le&\sqrt{EA_n^{-1}}\le\{E\prod_{i=m}^{n}(1-\alpha_i)\}^{1/2}\le\sqrt{M}(\sqrt{\lambda})^{n-m+1},\end{aligned}$$

其中$M>0$, $\lambda\in[0,1)$是常数. 这说明$\{\beta_k\}\in S^0$.

在一般情形$\alpha_k\in[0,1]$下, 利用单调收敛定理知

$$\lim_{\epsilon\to 1^-}E\prod_{k=m}^{n}(1-\epsilon\alpha_k)\le M\lambda^{n-m+1}.$$

于是存在$0<\epsilon^*<1$使$\forall\epsilon\in(\epsilon^*,1)$有

$$E\prod_{k=m}^{n}(1-\epsilon\alpha_k)\le 2M\lambda^{n-m+1}.$$

但$\epsilon\alpha_k\in(0,1)$, 故利用刚证得的事实知

$$E\prod_{k=m}^{n}(1-\epsilon\beta_{k+1})\le\sqrt{2M}(\sqrt{\lambda})^{n-m+1}.$$

但是$\epsilon\beta_{k+1}\le\beta_{k+1}$, $\forall\epsilon\in(\epsilon^*,1)$, 所以有$\beta\in S^0$. 证毕 ∎

推论 3.3.1 设$\{\alpha_k,\mathcal{F}_k\}$是适应序列$\alpha_k\in[0,1]$. 若存在某整数$h>0$使

$$\{E[\alpha_{k+h}|\mathcal{F}_k]\}\in S^0,$$

则必有$\{\alpha_k\}\in S^0$.

命题 3.3.2 设$\{\alpha_k\}\in S^0$, $\alpha_k\le\alpha^*<1$, 其中α^*是常数, 则对任何$\epsilon\in(0,1)$, 有$\{\epsilon\alpha_k\}\in S^0$.

证明 设常数$\lambda\in(0,1)$, $M>0$ 使

$$E\prod_{k=m+1}^{n}(1-\alpha_k)\le M\lambda^{n-m},\quad \forall n\ge m>0.$$

于是在下述不等式

$$1-x\le(1-dx)^{(1-t)/d},\quad d>1,\quad 0\le dx\le t<1$$

中取$x=\epsilon\alpha_k$, $d=\frac{1}{\epsilon}$得

$$\begin{aligned}E\prod_{k=m+1}^{n}(1-\epsilon\alpha_k)&\le E[\prod_{k=m+1}^{n}(1-\alpha_k)^{(1-\alpha^*)\epsilon}]\\&\le\{E\prod_{k=m+1}^{n}(1-\alpha_k)\}^{(1-\alpha^*)\epsilon}\le(M\lambda^{n-m})^{(1-\alpha^*)\epsilon}.\end{aligned}$$

因此命题得证. ∎

命题 3.3.3 设$\{x_k,\mathcal{F}_k\}$是适应序列, $x_k\ge1$且

$$x_{k+1}\le\alpha_{k+1}x_k+\xi_{k+1},\quad k\ge0,\quad Ex_0^2<\infty,\tag{3.3.8}$$

其中$\{\alpha_k,\mathcal{F}_k\}$及$\{\xi_k,\mathcal{F}_k\}$是非负适应序列并满足条件:

$$\alpha_k\ge\epsilon_0>0;$$

$$\Big\|\prod_{k=m}^{n}E[\alpha_{k+1}^4|\mathcal{F}_k]\Big\|_1\le M\gamma^{n-m+1},\quad\forall n\ge m\ge1;\tag{3.3.9}$$

及

$$E[\xi_{k+1}^2|\mathcal{F}_k]\le N<\infty,\quad\forall k,\tag{3.3.10}$$

其中ϵ_0, M, N及$\gamma\in(0,1)$是常数. 则下列三个结论成立

(i) $\Big\|\prod\limits_{k=m}^{n}\alpha_k\Big\|_2\le M^{1/4}\gamma^{\frac{1}{4}(n-m+1)}$, $\forall n\ge m$, $\forall m\ge1$;

(ii) $\sup\limits_k E\|x_k\|<\infty$;

(iii) $\{\frac{1}{x_k}\}\in S^0$.

证明 记

$$\beta_k=E[\alpha_{k+1}^4|\mathcal{F}_k],\quad Z_{k+1}=\Big(\prod_{i=m}^{k}\beta_i\Big)^{-1}\prod_{i=m}^{k}\alpha_{i+1}^4,$$

则显然有$Z_{k+1}=Z_k\beta_k^{-1}\alpha_{k+1}^4$. 于是对$\forall k\ge m$, 有

$$EZ_{k+1}=E\{E[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}=EZ_k=\cdots=EZ_{m+1}=1.$$

从而对$\forall n\ge m$,

$$\begin{aligned}E\prod_{i=m}^{n}\alpha_{i+1}^2&=E\sqrt{Z_{n+1}}\sqrt{\prod_{i=m}^{n}\beta_i}\\&\le\sqrt{EZ_{n+1}}\cdot\sqrt{E\prod_{i=m}^{n}\beta_i}\le\sqrt{M}\sqrt{\gamma^{n-m+1}}.\end{aligned}$$

故结论(i)成立. 而结论(ii)可以从(i), (3.3.8), (3.3.10)立即推出. 下面证结论(iii).

首先假设(3.3.10)中的$N \le 1$. 此时易知

$$E[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \le 1.$$

对任何$n > m$, 定义$\{y_k\}$如下

$$y_k = \Big(1 - \frac{1}{x_k}\Big)y_{k-1}, \quad y_{m-1} = 1, \quad k \in [m, n]. \tag{3.3.11}$$

于是利用(3.3.8)得

$$x_k y_k = (x_k - 1)y_{k-1} \le (\alpha_k x_{k-1} + \xi_k - 1)y_{k-1},$$

记$\gamma_k = E[\alpha_{k+1}|\mathcal{F}_k]$, 利用$y_k \in \mathcal{F}_k$, 及$E[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] \le 1$, 从上式得

$$E[x_k y_k|\mathcal{F}_{k-1}] \le \gamma_{k-1}(x_{k-1}y_{k-1}), \quad k \ge m, \tag{3.3.12}$$

再记$Z_k = \Big(\prod\limits_{i=m+1}^{k-1}\gamma_i\Big)^{-1} x_k y_k$, $k \ge m-1$, 于是利用(3.3.12)知对$\forall k \ge m$,

$$E[Z_k|\mathcal{F}_{k-1}] \le (\prod_{i=m-1}^{k-2}\gamma_i)^{-1} x_{k-1}y_{k-1} = Z_{k-1}.$$

故

$$EZ_k \le EZ_{k-1} \le \cdots \le EZ_{m-1} = Ex_{m-1}.$$

但据结论(ii)知存在常数$M_0 < \infty$使

$$\sup_{m\ge 0}\sup_{k\le m} EZ_k \le M_0.$$

于是利用Schwarz不等式及(3.3.9)得

$$\begin{aligned}
&E\prod_{k=m}^{n}(1 - \frac{1}{x_k}) = Ey_k \le E\sqrt{x_n y_n}\\
=&E\sqrt{Z_n\prod_{i=m-1}^{n-1}\gamma_i} \le \sqrt{EZ_n}\cdot\sqrt{E\prod_{i=m-1}^{n-1}\gamma_i}\\
\le&\sqrt{M_0}\cdot\Big\{E\prod_{i=m-1}^{n-1}E[\alpha_{i+1}^4|\mathcal{F}_i]\Big\}^{1/8}\\
\le&\sqrt{M_0}M^{1/8}\gamma^{1/8(n-m+1)}
\end{aligned}$$

这就证明了当$N \le 1$时结论(iii)成立.

下面考虑$N \in (0, \infty)$的一般情形.

利用(3.3.10)知可取常数C充分大使

$$E[\xi_{k+1}I(\xi_{k+1} \ge C)|\mathcal{F}_k] \le 1,$$

且

$$\delta \triangleq (1 + \epsilon_0)\frac{C}{1 + C} > 1.$$

于是利用(3.3.8)得

$$x_{k+1} \le \alpha_{k+1}x_k + C + \xi_{k+1}I(\xi_{k+1} > C). \tag{3.3.13}$$

不失一般性, 假设上式中等号对所有的$k \geq 0$都成立. 于是令$\bar{x}_k = x_k(1+C)^{-1}$得

$$\bar{x}_{k+1} = \alpha_k \bar{x}_k + \eta_{k+1}, \tag{3.3.14}$$

其中

$$\eta_{k+1} = (1+C)^{-1}[C + \xi_{k+1} I(\xi_{k+1} > C)].$$

显然, $E[\eta_{k+1}|\mathcal{F}_k] \leq 1$. 于是利用刚证明的结果知$\{\frac{1}{\bar{x}_k}\} \in S^0$.

注意到$\alpha_k \geq \epsilon_0 > 0$, 从(3.3.14)得

$$\bar{x}_{k+1} \geq \alpha_{k+1}(\frac{C}{1+C}) + \frac{C}{1+C} \geq \frac{C}{1+C}(1+\epsilon_0) > 1, \quad k \geq 1.$$

于是利用命题3.3.10(取$\epsilon = \frac{1}{1+C}$)知$\{\frac{1}{x_k}\} \in S^0$. 证毕. ∎

推论 3.3.2 设$\{x_k\}$满足命题3.3.11的条件, 而$\{y_n, \mathcal{F}_n\}$是非负适应序列, 满足

$$y_{k+1} \leq \beta y_k + \eta_{k+1}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad \forall k,$$

其中

$$E[\eta_k^{2q}|\mathcal{F}_{k-1}] \leq M_1 < \infty, \quad q > \frac{\log \epsilon_0}{\log \beta},$$

而ϵ_0由(3.3.9)给出, 则有$\{\frac{1}{x_k+y_k}\} \in S^0$.

证明 取ϵ充分小使$(1+\epsilon)\beta^q \leq \epsilon_0$并定义

$$T_k = \frac{1}{q}y_k^q + \frac{1}{s}, \quad s = (1-\frac{1}{q})^{-1}.$$

注意到对任何$\epsilon > 0$, $q > 0$存在常数$M > 0$使

$$(x+y)^q \leq (1+\epsilon)x^q + My^q, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

于是有

$$\begin{aligned} T_k \leq & \frac{1}{q}[\beta y_{k-1} + \eta_k]^q + \frac{1}{s} \\ \leq & \frac{1}{q}[(1+\epsilon)(\beta y_{k-1})^q + M\eta_k^q] + \frac{1}{s} \\ \leq & \epsilon_0[\frac{1}{q}y_{k-1}^q + \frac{1}{s}] + \frac{M}{q}\eta_k^q + \frac{1}{s} \\ \leq & \epsilon_0 T_{k-1} + \frac{M}{q}\eta_k^q + \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} x_k + T_k \leq & \alpha_k x_{k-1} + \xi_k + \epsilon_0 T_{k-1} + \frac{M}{q}\eta_k^q + \frac{1}{s} \\ \leq & \alpha_k(x_{k-1} + T_{k-1}) + \xi_k + \frac{M}{q}\eta_k^q + \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

据此利用命题3.3.3知$\{\frac{1}{x_k+T_k}\} \in S^0$, 但$y_k \leq T_k$, 所以必有$\{\frac{1}{x_k+y_k}\} \in S^0$. 证毕. ∎

最后我们给出一个简单的但却很有用的结论.

命题 3.3.4 设$a_k \geq 1$, 若对某$h > 0$由下式定义的序列:

$$s_k \triangleq \sum_{j=(k-1)h}^{kh-1} a_j, \quad k \geq 0$$

满足$\{\frac{1}{s_k}\} \in S^0$, 则必有$\{\frac{1}{a_k}\} \in S^0$

证明 设

$$E\prod_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{s_k}\Big)\le M\lambda^{n-m+1},\quad \forall n\ge m,\quad \forall m\ge 0.$$

不妨认为$n-m>h$, 再设i,j是满足下式的整数:

$$ih\le n<(i+1)h,\quad (j-1)h<m\le jh.$$

于是

$$\begin{aligned}
&E\prod_{k=m}^{n}(1-\frac{1}{a_k})\le E\prod_{k=jh}^{ih}(1-\frac{1}{a_k})\\
\le&E\prod_{t=j}^{i}(1-\frac{1}{a_{th}})\le E\prod_{k=j}^{i}(1-\frac{1}{s_{t+1}})\\
\le&M\lambda^{i-j+1}\le M[\lambda^{1/h}]^{h(i-j)+h}\le M[\lambda^{1/h}]^{n-h-m-h+h}\\
\le&M\lambda^{-1-(1/h)}[\lambda^{1/h}]^{n-m+1}
\end{aligned}$$

命题证毕. ∎

利用上述关于S^0的部分讨论, 我们可以证明当随机矩阵序列$\{F_k,\mathcal{F}_k\}$(其中$F_k\in\mathbb{R}^{d\times d}$, $d\ge 1$)满足$0\le F_k\le I$时, 对$\{F_k\}\in S_p$的验证可以简单地用$\{\lambda_k\}\in S^0$来保证, 其中($h>0$为某整数)

$$\lambda_k\triangleq\lambda_{\min}\{E[\frac{1}{1+h}\sum_{i=kh+1}^{(k+1)h}F_i|\mathcal{F}_{kh}]\}\tag{3.3.15}$$

为此, 先证两个引理.

引理 3.3.1 设$\{F_k,\mathcal{F}_k\}$是适应的随机矩阵序列, 且满足$0\le F_k\le I$, 则有

$$\lambda_{\max}\{E[\Phi^\tau(k+h,k)\Phi(k+h,k)|\mathcal{F}_{k-1}]\}\le 1-\frac{\lambda_m}{1+h},$$

其中$k=mh+1$, $m\ge 1$, λ_m由(3.3.15)定义, 而$\Phi(\cdot,\cdot)$由下面定义:

$$\Phi(n+1,m)=(I-F_n)\Phi(n,m),\quad \Phi(m,m)=1,\quad \forall n\ge m.$$

证明 记Z_{k-1}是对应于矩阵

$$E[\Phi^\tau(k+h,k)\Phi(k+h,k)|\mathcal{F}_{k-1}]$$

之最大特征值ρ_{k-1}的单位特征向量. 递推定义序列$\{Z_j,j\ge k\}$如下:

$$Z_j=(I-F_j)Z_{j-1},\quad j\ge k.\tag{3.3.16}$$

易见$Z_{k+h-1}=\Phi(k+h,k)Z_{k-1}$, 于是有

$$\begin{aligned}
&E[\|Z_{k+h-1}\|^2|\mathcal{F}_{k-1}]=Z_{k-1}^\tau E[\Phi^\tau(k+h,k)\Phi(k+h,k)|\mathcal{F}_{k-1}]Z_{k-1}\\
&=\rho_{k-1}\|Z_{k-1}\|^2=\rho_{k-1}.
\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

从(3.3.16)得

$$Z_j=Z_{k-1}-\sum_{i=k}^{j}F_jZ_{i-1},\forall j\in[k,k+h-1],$$

于是利用Schwarz不等式知对任何$j \in [k, k+h]$

$$
\begin{aligned}
&E[\|Z_{j-1} - Z_{k-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = E\Big[\|\sum_{i=k}^{j-1} F_i Z_{i-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big] \\
&\le E\Big[(\sum_{i=k}^{j-1} \|F_i^{1/2} Z_{i-1}\|^2) \sum_{i=k}^{j-1} \|F_i^{1/2}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big] \\
&\le h \cdot E\Big[\sum_{i=k}^{j-1} Z_{i-1}^\tau F_i Z_{i-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big].
\end{aligned} \tag{3.3.18}
$$

利用λ_m的定义及Minkowski不等式知

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(1+h)\lambda_m} \le \Big\{Z_{k-1}^\tau E\Big[\sum_{i=mh+1}^{(m+1)h} F_i \mid \mathcal{F}_{mh}\Big] Z_{k-1}\Big\}^{1/2} \\
&\le \Big\{E[\sum_{i=k}^{k+h-1} \|F_i^{1/2} Z_{i-1}\|^2]\Big\}^{1/2} + \Big\{E[\sum_{i=k}^{k+h-1} \|Z_{i-1} - Z_{k-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

据此及(3.3.18)得

$$
\sqrt{(1+h)\lambda_m} \le (1+h)\Big\{E\Big[\sum_{i=k}^{k+h-1} \|F_i^{1/2} Z_{i-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big]\Big\}^{1/2}.
$$

或

$$
E\left[\sum_{i=k}^{k+h-1} \|F_i^{1/2} Z_{i-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \ge \frac{\lambda_m}{1+h} \tag{3.3.19}
$$

再次利用(3.3.16)并注意到$0 \le A_i \le I$得

$$
Z_j^\tau Z_j \le Z_{j-1}^\tau Z_{j-1} - Z_{j-1}^\tau F_j Z_{j-1}
$$

于是

$$
\|Z_{k+h-1}\|^2 \le \|Z_{k-1}\|^2 - \sum_{j=k}^{k+h-1} Z_{j-1}^\tau F_j Z_{j-1} = 1 - \sum_{j=k}^{k+h-1} \|F_j^{1/2} Z_{j-1}\|^2
$$

据此并利用(3.3.17)和(3.3.19)可推出

$$
\begin{aligned}
&\rho_{k-1} = E[\|Z_{k+h-1}\|^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&\le 1 - E\Big[\sum_{j=k}^{k+h-1} \|F_j^{1/2} Z_{j-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big] \\
&\le 1 - \frac{\lambda_m}{1+h}
\end{aligned}
$$

故引理得证. ∎

引理 3.3.2 在引理3.3.14的条件及记号下, 对任何$k_0 \ge 0$, 考虑方程

$$
x_k = \Phi(kh+1, (k-1)h+1) x_{k-1}, \quad k \ge k_0 + 1, \tag{3.3.20}
$$

其中初值x_{k_0}是确定性的且$\|x_{k_0}\| = 1$, 那么存在$\alpha_k \in [0,1]$使$\alpha_k \in \mathcal{F}_{kh}$, 且

$$
\|x_k\| \le (1 - \alpha_k)\|x_{k-1}\|, \quad k \ge k_0 + 1, \tag{3.3.21}
$$

及

$$
E[\alpha_{k+1} | \mathcal{F}_{kh}] \ge \frac{\lambda_k}{2(1+h)}, \quad k \ge k_0 + 1. \tag{3.3.22}
$$

证明 对任何$k \geq k_0+1$, 定义

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{\|\Phi(kh+1,(k-1)h+1)x_{k-1}\|}{\|x_{k-1}\|}, & 若\|x_{k-1}\| \neq 0, \\ 1 & 若\|x_{k-1}\| = 0. \end{cases}$$

由于$\|\Phi(n,m)\| \leq 1, \forall n \geq m \geq 0$, 易见$\alpha_k \in [0,1]$, $\alpha_k \in \mathcal{F}_{kh}$, 且(3.3.21)成立. 因此我们只需证明(3.3.22).

记$\Omega_k = [\omega : \|x_k\| = 0]$, 则$\Omega_k \in \mathcal{F}_{kh}$, 且

$$I_{\Omega_k} E[\alpha_{k+1}|\mathcal{F}_{kh}] = E[I_{\Omega_k}\alpha_{k+1}|\mathcal{F}_{kh}] = I_{\Omega_k}$$

从而注意到$\lambda_k < 1$知(3.3.22)在Ω_k上成立. 下面考虑Ω_k^c. 利用引理3.3.1知

$$\begin{aligned}
&E[\|\Phi((k+1)h+1,kh+1)x_k\| \ \ |\mathcal{F}_{kh}] \\
\leq &\{E[\|\Phi((k+1)h+1,kh+1)x_k\|^2|\mathcal{F}_{kh}]\}^{1/2} \\
\leq &\{x_k^\tau E[\Phi^\tau((k+1)h+1,kh+1)\cdot\Phi((k+1)h+1,kh+1)|\mathcal{F}_{kh}]x_k\}^{1/2} \\
\leq &\{x_k^\tau(1-\frac{\lambda_k}{1+h})x_k\}^{1/2} \leq (1-\frac{\lambda_k}{1(1+h)})\|x_k\|
\end{aligned}$$

因此利用α_{k+1}的定义得

$$I\Omega_k^c E[\alpha_{k+1}|\mathcal{F}_{kh}] \geq I\Omega_k^c\{1-(1-\frac{\lambda_k}{2(1+h)})\} = \frac{\lambda_k}{2(1+h)} I\Omega_k^c.$$

从而(3.3.22)在Ω_k^c上也成立, 证毕. ∎

定理 3.3.5 设$\{F_k,\mathcal{F}_k\}$是适应矩阵列, $0 \leq F_k \leq I$. 若存在$h > 0$使得由(3.3.15)所定义的λ_k满足$\{\lambda_k\} \in S^0$则对任何$p \geq 1$,

$$\{F_k\} \in S_p.$$

证明 由于$0 \leq F_k \leq I$, 我们只需考虑$p=2$的情形. 对任何$n > m+h$, 定义

$$k_0 = \min\{k : m \leq kh+1 \leq n\}, \quad k_1 = \max\{k : m \leq kh+1 \leq n\}.$$

易见

$$(k_1+1)h+1 > n, \quad (k_0-1)h+1 < m,$$

且

$$E\|\Phi(n,m)\|^2 \leq E\|\Phi(k_1h+1,k_0h+1)\|^2,$$

其中$\Phi(n,m)$如引理(3.3.14)所定义. 因此为证$\{F_i\} \in S_2$, 只需证明存在不依赖于k_0及k_1的常数C及$\lambda \in (0,1)$使$\forall k_1 > k_0$有

$$E\|\Phi(k_1h+1,k_0h+1)\|^2 \leq C\lambda^{2\alpha h(k_1-k_0+1)}. \tag{3.3.23}$$

下面考虑方程(3.3.20), 易见

$$x_{k_1} = \Phi(k_1h+1,k_0h+1)x_{k_0}.$$

因此, 为证(3.3.22)只需证明对任何满足$\|x_{k_0}\|=1$确定性向量x_0有

$$E\|x_{k_1}\|^2 \leq C\lambda^{2\alpha h(k_1-k_0)}, \tag{3.3.24}$$

其中常数C不依赖于k_0及k_1.

由于$\lambda_k \in [0, \frac{h}{1+h}]$且$\lambda_k \in S^0$, 利用命题3.3.2知

$$\left\{\frac{\lambda_k}{2(1+h)}\right\} \in S^0.$$

据此利用引理3.3.15, 类似于命题3.3.1的证明知

$$E\prod_{k=k_0+1}^{k_1}(1-\alpha_k) \le C\lambda^{2\alpha h(k_1-k_0)},$$

其中C是不依赖于k_0, k_1及x_{k_0}的常数. 由此利用(3.3.21)易见(3.3.24)成立. 从而定理证毕. ∎

定理 3.3.6 设$\{F_i, \mathcal{F}_i\}$是适应矩阵序列, $0 \le F_i \le I$, 若$\{F_i\} \in S_1$, 则存在整数$h > 0$使

$$\inf_m \lambda_{\min}\left\{\sum_{i=mh+1}^{(m+1)h} EF_i\right\} > 0.$$

证明 根据假设, 存在常数$M > 0$, $\lambda \in (0,1)$及适当大的整数$h > 0$使

$$E\Big\|\prod_{i=mh+1}^{(m+1)h}(I-F_i)\Big\| \le M\lambda^h < \frac{1}{2}, \quad \forall m \ge 0. \tag{3.3.25}$$

设ρ_m是矩阵$E\Big[\sum\limits_{i=mh+1}^{(m+1)h} F_i\Big]$的最小特征值, 且$x_m$是相应的单位特征向量. 于是我们有

$$\rho_m = E\left[\sum_{i=mh+1}^{(m+1)h} x_m^\tau F_i x_m\right].$$

因此对任何整数$i_j = [mh+1, (m+1)h]$, $j = 1, \ldots, k$, $k \le h$.

$$\begin{aligned}
&Ex_m^\tau F_{i_1}\cdots F_{i_k}x_m \le E\|x_m^\tau F_{i_1}^{1/2}\|\,\|F_{i_1}^{1/2}F_{i_2}\cdots F_{i_k}^{1/2}\|\,\|F_{i_k}^{1/2}x_m\| \\
&\le E\|x_m^\tau F_{i_1}^{1/2}\|\cdot\|F_{i_k}^{1/2}x_m\| \le \{E\|x_m^\tau F_{i_i}^{1/2}\|^2\cdot E\|F_{i_k}^{1/2}x_m\|^2\}^{1/2} \\
&= \{E(x_m^\tau F_{i_1}x_m)E(x_m^\tau F_{i_k}x_m)\}^{1/2} \le \max_{mh+1\le i\le(m+1)h} E(x_m^\tau F_i x_m) \le \rho_m.
\end{aligned}$$

进一步, 利用(3.3.25)有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &> E\|\prod_{i=mh+1}^{(m+1)h}(I-F_i)\| \ge Ex_m^\tau\prod_{i=mh+1}^{(m+1)h}(I-F_i)x_m \\
&= 1-\sum_{k=1}^{h}\sum_{mh+1\le i_1\le\cdots<i_k\le(m+1)h} E(x_m^\tau F_{i_1}\cdots F_{i_k}x_m) \\
&\ge 1-\sum_{k=1}^{h}\sum_{mh+1\le i_1\le\cdots<i_k\le(m+1)h}\rho_m = 1-\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}\rho_m.
\end{aligned}$$

上式意味着

$$\rho_m \ge \frac{1}{2\sum\limits_{k=1}^{h}\binom{h}{k}}.$$

因此定理3.3.6证毕. ∎

推论 3.3.3 设$\{F_k, k\geq 0\}$是ϕ-混合随机矩阵序列, $F_k\in\mathbb{R}^{d\times d}$, $0\leq F_k\leq I$. 则下列三个性质等价:

(i) $\{F_k\}\in S_1$;

(ii) 存在某整数$h_0>0$ 使

$$\delta \triangleq \inf_m \lambda_{\min}\left\{\sum_{i=mh_0+1}^{(m+1)h_0} EF_i\right\}>0;$$

(iii) 存在整数$h>0$使$\{\lambda_k\}\in S^0$, 其中λ_k由(3.3.15)所定义, 而$\mathcal{F}_k\triangleq\sigma\{F_i, i\leq k\}$.

证明 定理3.3.5证明了(iii)⇒(i),而定理3.3.6证明了(i) ⇒(ii). 因此我们只需证明(ii)⇒(iii).

设$\{F_k\}$的混合速度为$\phi(k)$, 利用ϕ-混合的性质(2.3.13)知对任何t, k, 有

$$\|E[F_{t+k}|\mathcal{F}_t]-EF_{t+k}\|\leq 2d\phi(k). \tag{3.3.26}$$

由于$\phi(k)\to 0$, 故可找到整数$M>0$使

$$\phi(k)\leq\frac{\delta}{4(2h_0+1)d},\quad \forall k\geq M. \tag{3.3.27}$$

现令$h=M+2h_0+1$, 于是利用(ii)及假设条件$F_i\geq 0$易见

$$\lambda_{\min}\Big\{\sum_{k=mh+1+M}^{(m+1)h} EF_k\Big\}\geq\delta,\quad \forall m\geq 0. \tag{3.3.28}$$

最后, 综合(3.3.26)–(3.3.28)得到对任何$m\geq 0$有

$$\begin{aligned}
(1+h)\lambda_m &= \lambda_{\min}\Big\{E[\sum_{k=mh+1}^{(m+1)h}F_k|\mathcal{F}_{mh}]\Big\}\geq\lambda_{\min}\Big\{E[\sum_{k=mh+1+M}^{(m+1)h}F_k|\mathcal{F}_{mh}]\Big\}\\
&\geq \lambda_{\min}\Big\{E[\sum_{k=mh+1+M}^{(m+1)h}F_k]\Big\}-\Big\|E\big[\sum_{k=mh+1+M}^{(m+1)h}F_k\mid\mathcal{F}_{mh}\big]-E\big[\sum_{k=mh+1+M}^{(m+1)h}F_k\big]\Big\|\\
&\geq \delta-(h-M)\frac{2d\delta}{4(2h_0+1)d}\\
&=\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}>0
\end{aligned}$$

因此, 我们实际上已证明了

$$\{\lambda_k\}\in S^0,$$

即(iii)成立证毕. ∎

在自适应算法的分析中, 经常遇到下列类型的随机差分方程

$$x_{k+1}=(I-\mu F_k)x_k,$$

其中$\mu\in(0,1)$称为算法步长(stepsize), 当信号变化较慢时, μ一般可以取得较小. 我们感兴趣的问题是：若上式L_p指数稳定, 则其收敛速度是如何依赖于μ的. 这一问题的研究对算法性能的分析是很关键的. 为此我们进一步引进几个记号.

1) 设$p\geq 1$, $F\triangleq\{F_i\}$. 记

$$M_p=\left\{F:\sup_i\|S_i^{(T)}\|_p=o(T),\quad \text{as}\quad T\to\infty\right\},$$

其中

$$S_i^{(T)}\triangleq\sum_{j=iT}^{(i+1)T-1}(F_j-E[F_j]).$$

2) 对任何$d \times d$维随机矩阵序列$F = \{F_k\}$及任何实数$p \geq 1, \mu^* \in (0,1)$, L_p-指数稳定族$S_p(\mu^*)$由下式定义:

$$S_p(\mu^*) = \Bigg\{F : \Big\| \prod_{j=i+1}^{k} (I - \mu F_j) \Big\|_p \leq M(1-\mu\alpha)^{k-i}, \forall \mu \in (0, \mu^*],$$
$$\forall k \geq i \geq 0, \text{其中} M > 0 \text{和} \alpha \in (0,1) \text{是常数} \Bigg\}.$$

3) 类似地,平均指数稳定族$S(\mu^*)$由下式所定义:

$$S(\mu^*) = \Bigg\{F : \Big\| \prod_{j=i+1}^{k} (I - \mu E(F_j)) \Big\| \leq M(1-\mu\alpha)^{k-i}, \forall \mu \in (0, \mu^*],$$
$$\forall k \geq i \geq 0, \text{其中} M > 0 \text{及} \alpha \in (0,1) \text{是常数} \Bigg\}.$$

为方便起见, 我们还进一步记

$$\bar{S}_p \triangleq \bigcup_{\mu^* \in (0,1)} S_p(\mu^*), \quad \bar{S} \triangleq \bigcup_{\mu^* \in (0.1)} S(\mu^*).$$

一般来讲, 研究$\bar{S}$要比研究$\bar{S}_p$容易很多. 下面的两个"随机平均定理"将说明$\bar{S}$和$\bar{S}_p$的关系. 由于证明较长, 在此省略.

定理 3.3.7 [22]. 设随机矩阵序列$\{F_k\} \in M_2$, 则有

$$\{F_k\} \in \bar{S}_2 \Rightarrow \{F_k\} \in \bar{S}.$$

定理 3.3.8 [24]. 设$\{F_k\}$是随机矩阵序列, 则

$$\{F_k\} \in \bar{S} \Rightarrow \{F_k\} \in \bar{S}_p, \quad p \geq 1$$

的充分条件是:

1) 存在正常数ε, M, K使得对任何$n \geq 1$都有

$$E\left[\exp\left(\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|F_{j_i}\|\right)\right] \leq M \exp(Kn),$$

其中$0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n$是任意$n$个整数.

2) 存在常数$M > 0$及非降函数$g(T)$满足, $g(T) = o(T), T \to \infty$, 使对任何固定的$T$及小的$\mu > 0$有

$$E\left[\exp\left(\mu \sum_{j=i+1}^{n} \|s_j^{(T)}\|\right)\right] \leq M \exp\{[\mu g(T) + o(\mu)](n-i)\},$$

其中$S_j^{(T)}$由前述定义.

定理3.3.8 说明在一定条件下, 随机矩阵乘积的指数收敛性可以用相应的确定性矩阵乘积的指数收敛性来保证.

习题9.3

9.3.1 利用定理3.3.1证明定理3.3.2.

9.3.2 考虑方程(3.3.1), 其中$x_0=0$. 设$\{A_k, k\ge 0\}$是独立的随机矩阵序列且有$\det[E(A_kA_k^\tau)]\neq 0$. 定义集合:

$$\mathcal{B}\triangleq\{\xi:\xi=\{\xi_k\}\ \text{是}L_2\text{稳定且与}\{A_k\}\text{独立}\}$$

证明: 对任何$\{\xi_k\}\in\mathcal{B}$, $\{x_k\}$ 都是L_2稳定的充分必要条件是$\{I-A_k\}\in S_2$, 其中S_2由定义9.3.6 给出.

9.3.3 考虑Lyapunov方程(3.3.5). 假设

(i) 存在常数$M>0, c_2\ge c_1>0$ 使

$$\|F_k\|\le M,\quad c_1I<Q_k\le c_2I,\quad \forall k.$$

(ii) 存在常数$h\ge 1$ 使对任何k, 都有

$$\Big\|\prod_{k+1}^{k+h}(\prod_{k+1}^{k+h})^\tau\Big\|\le 1-f_{k+1},$$

其中$\prod_{k+1}^{k+h}\triangleq(I-F_{k+h})\cdot\cdots\cdot(I-F_{k+1})$, $0\le f_{k+1}\le f<1$.

证明: $\{E[f_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}\in S^0\Rightarrow\{F_k\}\in S_p$, 其中$\mathcal{F}_k\triangleq\sigma\{F_i, i\le k\}$.

9.3.4 设$\{a_k,\mathcal{F}_k\}$是适应序列, $a_k\ge 1$, $\forall k\ge 0$, $Ea_0<\infty$且

$$E[a_k|\mathcal{F}_{k-1}]\le\alpha a_{k-1}+\beta,\quad \forall k\ge 1, \alpha\in(0,1), \beta\in(0,\infty),$$

证明$\{\frac{1}{a_k}\}\in S^0$. (提示: 可参考[12])

9.3.5 对怎样的随机序列$\{F_i\}$, 它是属于集合M_p的? 试举出至少三个不同的例子并加以证明.

9.3.6 证明定理3.3.8中的条件1)可换成下列条件: 存在正常数ε, δ, M和K使对任何$n\ge i>0$都有

$$E\exp\{\epsilon\sum_{j=i+1}^{n}\|F_j\|^{1+\delta}\}\le M\exp\{K(n-i)\}.$$

9.3.7 设$F_k=\phi_k\phi_k^\tau$而$\{\phi_k\}$有下列表达式:

$$\phi_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j\epsilon_{k-j}+\xi_k,\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty}\|A_j\|<\infty,$$

其中$\{\xi_k\}$是有界确定性信号, 而$\{\varepsilon_k\}$是独立序列且存在$\alpha>0$使

$$\sup_k E[\exp(\alpha\|\epsilon_k\|^2)]<\infty.$$

证明定理3.3.8的条件1)和2)都成立.

9.3.8 在上题中若假定$\{\varepsilon_k\}$是ϕ-混合序列, 且满足$\sup_k E\|\epsilon_k\|^4<\infty$.在其它条件不变的情况下, 证明$\{F_k\}\in M_2$.

§3.4 自适应估计(II): 时变系统

在§9.2中我们考虑了线性模型中定常参数的估计问题,本节考虑时变参数的估计问题.这类问题的重要性一是因为实际系统的物理参数往往受各种因素的影响而随时间的变化而变化的,二是因为当用线性模型在大范围内逼近非线性系统时,其参数也需要是时变的. 此外, 时变参数的估计问题又与信号处理中信号的自适应提取与跟踪问题密切相关[39][42]. 这类算法的深入分析需要§9.3中建立的时变随机系统的稳定性理论为基础.

考虑下列时变线性回归模型:

$$y_{t+1}=\theta_t^\tau\phi_t+w_{t+1},\tag{3.4.1}$$

其中(y_t,ϕ_t)是可量测信号, $\{w_t\}$是噪声序列,而θ_t是未知向量参数(或信号)过程, 它在时刻t的变化量记为Δ_t, 即

$$\theta_t=\theta_{t-1}+\Delta_t.\tag{3.4.2}$$

对θ_t进行跟踪(或估计)的算法具有下列一般形式:

未来估计＝当前估计＋“新息修正”.

具体来讲, 记$\hat{\theta}_t$是θ_t的估计, 则

$$\hat{\theta}_{t+1}=\hat{\theta}_t+\mu L_t(y_{t+1}-\phi_t^\tau\hat{\theta}_t),\quad t\geq 0,\ \mu\in(0,1), \tag{3.4.3}$$

其中$\{L_t\}$是随机向量序列,称为自适应增益,它反映适应的“方向”.常数μ称为“步长”或“适应速度”.当参数慢变化时,μ可取得较小.

引进记号

$$\tilde{\theta}_t\triangleq\theta_t-\hat{\theta}_t,\quad F_t\triangleq L_t\phi_t^\tau, \tag{3.4.4}$$

则从(3.4.1)–(3.4.3)可得如下误差方程:

$$\widetilde{\theta}_{t+1}=(I-\mu F_t)\widetilde{\theta}_t-\mu L_t w_{t+1}+\Delta_{t+1}. \tag{3.4.5}$$

通过选取不同的矩阵L_t, 可以得到不同的算法.例如,下列三类不同的选取方式是最基本而常见的:

a) 最小均方(LMS)算法:

$$L_t=\phi_t \tag{3.4.6}$$

或正则化的最小均方(NLMS)算法:

$$L_t=\frac{\phi_t}{1+\|\phi_t\|^2}. \tag{3.4.7}$$

此类算法亦可称为梯度算法,因为L_t与下列均方误差

$$e_t(\theta)=E(y_{t+1}-\phi_t^\tau\theta)^2$$

的(随机)梯度符号相反.因此,依最速下降法原理,LMS或NLMS算法试图依递推的方式极小化误差$e_t(\theta)$.此类算法在自适应信号处理中有广泛应用.

b) 遗忘因子最小二乘(FFLS)算法:

$$L_t=P_t\phi_t, \tag{3.4.8}$$

$$P_t=\frac{1}{1-\mu}\Big\{P_{t-1}-\mu\frac{P_{t-1}\phi_t\phi_t^\tau P_{t-1}}{1-\mu+\mu\phi_t^\tau P_{t-1}\phi_t}\Big\},\quad P_0>0. \tag{3.4.9}$$

相应的算法使得$\hat{\theta}_t$极小化下列指标:

$$\sum_{i=1}^t(1-\mu)^{t-i}(y_i-\phi_{i-1}^\tau\theta)^2, \tag{3.4.10}$$

其中$(1-\mu)$称为“遗忘因子”.容易看出,在上述指标中,过去的数据以指数速度被“遗忘”.这是合理的,因为当前的信息更能反映参数的真实情况.

c) Kalman滤波(KF)型算法:

$$L_t=\frac{P_{t-1}\phi_t}{R+\mu\phi_t^\tau P_{t-1}\phi_t}, \tag{3.4.11}$$

$$P_t=P_{t-1}-\frac{\mu P_{t-1}\phi_t\phi_t^\tau P_{t-1}}{R+\mu\phi_t^\tau P_{t-1}\phi_t}+\mu Q, \tag{3.4.12}$$

其中$P_0 \geq 0$, $R > 0$, $Q > 0$及$\hat{\theta}_0$可任取为确定性值(一般来讲,R 和Q可以为w_t和$\left(\dfrac{\Delta t}{\mu}\right)$的方差的先验估计).

熟知, 根据Kalman滤波理论(见§4.4), 若ϕ_t是$\mathcal{F}_t \triangleq \sigma\{y_i, i \leq t\}$可测的, $\{\Delta t, w_{t+1}\}$是正态白噪声序列, 且

$$Q = E[\Delta_t \Delta_t^\tau]/\mu^2, \quad R = E w_{t+1}^2,$$
$$\hat{\theta}_0 = E\theta_0, \quad P_0 = E[\tilde{\theta}_0 \tilde{\theta}_0^\tau],$$

则由(3.4.3)与(3.4.11)–(3.4.12)给出的估计是θ_t的最小方差估计,且P_t 是估计的协方差阵,换言之

$$\hat{\theta}_t = E[\theta_t | \mathcal{F}_t], \quad P_t = E[\tilde{\theta}_t \tilde{\theta}_t^\tau | \mathcal{F}_t]. \tag{3.4.13}$$

为了统一研究上述三类算法的稳定性,我们需要下述很一般的激励条件(excitation condition).

条件9.4.1(激励条件): 回归向量$\{\phi_t, \mathcal{F}_t\}$是适应的随机序列(即$\phi_t$是$\mathcal{F}_t$可测的,其中$\mathcal{F}_t$是非降的子$\sigma$-代数), 且存在正整数$h > 0$使得$\{\lambda_k\} \in S^0$, 其中$S^0$由上节定义3.3.3所定义,而

$$\lambda_k \triangleq \lambda_{\min}\left\{E\Big[\frac{1}{1+h}\sum_{i=kh+1}^{(k+1)h}\frac{\phi_i\phi_i^\tau}{1+\|\phi_i\|^2}\Big|\mathcal{F}_{kh}\Big]\right\}. \tag{3.4.14}$$

利用上节推论3.3.18, 立即可得下述结论.

命题 3.4.1 设$\{\phi_t\}$是ϕ-混合序列,那么条件9.4.1成立的充分必要条件是存在某正整数$h > 0$使

$$\inf_{k\geq 0}\lambda_{\min}\Big\{\sum_{i=k+1}^{(k+1)h}E\Big[\frac{\phi_i\phi_i^\tau}{1+\|\phi_i\|^2}\Big]\Big\} > 0. \tag{3.4.15}$$

上述激励条件9.4.1 还可包括ϕ-混合序列之外的许多重要情形.例如,当回归向量分别由状态空间方程所产生和由时变自回归模型所产生时,均可证明条件9.4.1 成立(见本节习题).

本节提到的三类基本的跟踪算法的稳定性,可在统一的激励条件9.4.1下被建立.

定理 3.4.1 [15]设$\{\phi_t\}$满足激励条件9.4.1, 且在跟踪算法(3.4.3)中增益L_t取为下列三种情形之一:

(i) L_t按LMS或NLMS算法选取(在LMS情形下,需假设$0 < \mu < (\sup_t \|\phi_t\|^2)^{-1}$);

(ii) L_t按遗忘因子FFLS算法选取(此时假定μ充分小且$\phi_t \in L_{2q}$, $q > 1$);

(iii) L_t按Kalman滤波型算法选取.

则对上述任一情形,跟踪误差方程(3.4.5)的齐次部分

$$x_{t+1} = (I - \mu F_t)x_t, \quad t \geq 0, \tag{3.4.16}$$

都是L_p指数稳定的(或$\{\mu F_t\} \in S_p$), 其中$p \geq 1$为任意正数(在FFLS情形下, $p < q$).

证明 (i) 首先考虑LMS或NLMS情形.此时,根据假设知$\mu F_t = \mu L_t \phi_t$总满足$0 \leq \mu F_t \leq I$.因此,根据条件9.4.1, 命题3.3.10及定理3.3.16可知$\{\mu F_t\} \in S_p$, $\forall p \geq 1$.

(ii) 其次考虑FFLS情形.

利用(3.4.8)和(3.4.9)经简单计算, 不难看出

$$I - \mu F_t = (1-\mu)P_t P_{t-1}^{-1}. \tag{3.4.17}$$

于是对任何$k \geq i > 0$有

$$\prod_{j=i+1}^{k}(I - \mu F_j) = (1-\mu)^{k-i}P_k P_i^{-1}. \tag{3.4.18}$$

进一步,利用矩阵求逆公式从(3.4.9)可知

$$P_t^{-1} = (1-\mu)P_{t-1}^{-1} + \mu\phi_t\phi_t^\tau, \tag{3.4.19}$$

从而根据假设易见

$$\sup_t \|P_t^{-1}\|_{L_q} < \infty \tag{3.4.20}$$

因此,为证$\{\mu F_j\} \in S_p$, 只需证明对任意的$p \geq 1$都有$\sup\limits_t \|P_t\|_{L_p} < \infty$即可.

对任何$m \geq 0$从(3.4.9)知

$$P_{k-1} \leq \frac{1}{1-\mu}P_{k-2} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{1-\mu}\right)^{h-1} P_{mh}, \quad k \in [mh+1,\ (m+1)h], \tag{3.4.21}$$

于是再次利用(3.4.19)和矩阵求逆公式(1.1.8)知

$$\begin{aligned} P_k &= [(1-\mu)P_{k-1}^{-1} + \mu\phi_k\phi_k^\tau]^{-1} \leq [(1-\mu)^h P_{mh} + \mu\phi_k\phi_k^\tau]^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{1-\mu}\right)^h \Big[P_{mh} - \frac{\mu P_{mh}\phi_k\phi_k^\tau P_{mh}}{(1-\mu)^h + \mu\phi_k^\tau P_{mh}\phi_k}\Big] \\ &\leq \left(\frac{1}{1-\mu}\right)^h \Big[P_{mh} - \frac{\mu P_{mh}\phi_k\phi_k^\tau P_{mh}}{[(1-\mu)^h + \mu\lambda_{\max}(P_{mh})][1+\|\phi_k\|^2]}\Big]. \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

令

$$T_m = \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh} \mathrm{tr}(P_k), \tag{3.4.23}$$

$$a_{m+1} = \frac{\mu \mathrm{tr}\Big[P_{mh}^2 \sum\limits_{k=mh+1}^{(m+1)h} \frac{\phi_k\phi_k^\tau}{1+\|\phi_k\|^2}\Big]}{[(1-\mu)^h + \mu\lambda_{\max}(P_{mh})]h\mathrm{tr}(P_{mh})}, \tag{3.4.24}$$

于是对(3.4.22)两边求和得

$$T_{m+1} \leq (1-\mu)^{-h}[1-a_{m+1}]h\mathrm{tr}(P_{mh}). \tag{3.4.25}$$

但根据不等式$P_k \leq (1-\mu)^{-1}P_{k-1}$知

$$\begin{aligned} h\mathrm{tr}(P_{mh}) &= \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh} \mathrm{tr}(P_{mh}) \leq \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh} (1-\mu)^{-(mh-k)}\mathrm{tr}(P_k) \\ &\leq (1-\mu)^{-h+1}T_m. \end{aligned}$$

将此式代入(3.4.25)得

$$T_{m+1} \leq (1-\mu)^{1-2h}[1-a_{m+1}]T_m. \tag{3.4.26}$$

为了分析此式,我们对任何$p \geq 1$, 记

$$b_{m+1} = (1-\mu)^{(1-2h)p}\Big[1 - \frac{a_{m+1}}{2}\Big] I(\mathrm{tr}(P_{mh}) \geq \mu^{-1}),$$

其中$I(\cdot)$为示性函数. 于是利用(3.4.25)和(3.4.26)知

$$\begin{aligned} T_{m+1}^p &\leq T_{m+1}^p[I(\mathrm{tr}(P_{mh}) \geq \mu^{-1}) + I(\mathrm{tr}(P_{mh}) < \mu^{-1})] \\ &\leq b_{m+1}T_m^p + [h(1-\mu)^{-h}]^p \cdot \mu^{-p}. \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

根据(3.4.24)中a_{m+1}的定义及不等式$\text{tr}(P_k^2) \geq d^{-1}(\text{tr}P_k)^2$(其中$d$是矩阵$P_k$的行数)易见在$\{\text{tr}(P_{mh}) \geq \mu^{-1}\}$上有

$$E[a_{m+1}|\mathcal{F}_{mh}] \geq \frac{\mu(h+1)\text{tr}(P_{mh}^2)\cdot\lambda_m}{h(1+\mu\text{tr}(P_{mh}))\text{tr}(P_{mh})} \geq \frac{(h+1)\lambda_m}{2hd},$$

从而根据b_{m+1}的定义有

$$E[b_{m+1}|\mathcal{F}_{mh}] \leq (1-\mu)^{(1-2h)p}\Big(1-\frac{(h+1)\lambda_m}{4hd}\Big)I(\text{tr}(P_{mh}) \geq \mu^{-1}).$$

现令

$$\alpha_{m+1} = \begin{cases} b_{m+1}, & \text{若 tr } (P_{mh}) \geq \mu^{-1}, \\ (1-\mu)^{(1-2h)p}\Big(1-\dfrac{(1+h)\lambda_m}{4hd}\Big), & \text{上式不成立} \end{cases}$$

于是利用(3.4.27)知

$$T_{m+1}^p \leq \alpha_{m+1}T_m^p + [h\mu^{-1}(1-\mu)^{-h}]^p.$$

由于根据假设条件9.4.1, $\{\lambda_m\} \in S^0$, 且$\lambda_m \leq \dfrac{h}{1+h}$, 因此根据命题3.3.10知$\Big\{\Big(\dfrac{1+h}{4hd}\Big)\lambda_m\Big\} \in S^0$.于是根据$\alpha_{m+1}$的定义知当$\mu$充分小时,命题3.3.3的条件满足,因此我们有$\sup\limits_m ET_{m+1}^p < \infty$.故有

$$\sup_t \|P_t\|_{L_p} < \infty.$$

因此,遗忘因子算法的指数稳定性得证.

(iii)最后,我们来考虑Kalman滤波型算法.

利用(3.4.11)及(3.4.12)可见

$$P_t = (I-\mu L_t\phi_t^\tau)P_{t-1}(I-\mu L_t\phi_t^\tau)^\tau + Q_t, \tag{3.4.28}$$

其中

$$Q_t = \mu R L_t L_t^\tau + \mu Q. \tag{3.4.29}$$

由此易见

$$P_t \geq Q_t \geq \mu Q, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4.30}$$

我们的目的是利用定理3.3.4来证明所欲的指数稳定性.为此先考虑$\{P_t\}$ 的L_p有界性.

对由(3.4.12)所定义的$\{P_t\}$, 记

$$T_m = \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh} \text{tr}(P_k), \quad T_0 = 0, \tag{3.4.31}$$

其中$h > 0$是整数.我们先来证明

$$T_{m+1} \leq (1-a_{m+1})T_m + b, \tag{3.4.32}$$

其中$b = \dfrac{3}{2}h(h+1)\mu\text{tr}Q$,而

$$a_{m+1} = \frac{\text{tr}\Big[(P_{mh}+h\mu Q)^2 \sum\limits_{k=mh+1}^{(m+1)h} \dfrac{\mu\phi_k\phi_k^\tau}{1+\mu\|\phi_k\|^2}\Big]}{h(R+1)[1+\lambda_{\max}(P_{mh}+h\mu Q)]\text{tr}(P_{mh}+h\mu Q)}. \tag{3.4.33}$$

事实上,据(3.4.12)易见

$$P_{k-1} \le P_{k-2} + \mu Q \le \cdots \le P_{mh} + h\mu Q \tag{3.4.34}$$

对所有$k \in [mh+1,(m+1)h]$都成立.于是利用矩阵求逆公式(1.1.8)知对任何$k \in [mh+1,(m+1)h]$有

$$\begin{aligned} P_k &= (P_{k-1}^{-1} + R^{-1}\mu\phi_k\phi_k^\tau)^{-1} + \mu Q \\ &\le [(P_{mh}+h\mu Q)^{-1} + R^{-1}\mu\phi_k\phi_k^\tau]^{-1} + \mu Q \\ &= P_{mh} - \frac{\mu(P_{mh}+h\mu Q)\phi_k\phi_k^\tau(P_{mh}+h\mu Q)}{R+\mu\phi_k^\tau(P_{mh}+h\mu Q)\phi_k} + \mu(h+1)Q \\ &\le P_{mh} - \frac{(P_{mh}+h\mu Q)\dfrac{\mu\phi_k\phi_k^\tau}{1+\mu\|\phi_k\|^2}(P_{mh}+h\mu Q)}{(R+1)[1+\lambda_{\max}(P_{mh}+\mu hQ)]} + \mu(h+1)Q. \end{aligned}$$

将上式两边求和并注意(3.4.31)及(3.4.33)得

$$T_{m+1} \le h\mathrm{tr}(P_{mh}) - a_{m+1}h\mathrm{tr}(P_{mh}) + h(h+1)\mu\mathrm{tr}Q. \tag{3.4.35}$$

再次利用(3.4.31)及(3.4.34)得

$$\begin{aligned} h\mathrm{tr}(P_{mh}) &= \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh}\mathrm{tr}(P_{mh}) \le \sum_{k=(m-1)h+1}^{mh}\mathrm{tr}\{P_k + (mh-k)\mu Q\} \\ &\le T_m + \frac{1}{2}h(h+1)\mu\mathrm{tr}Q. \end{aligned}$$

将此式代入(3.4.35)即可得(3.4.32).

进一步,利用a_{m+1}的定义,易见$a_{m+1} \in \left[0,\dfrac{1}{1+R}\right]$且

$$E[a_{m+1}|\mathcal{F}_{mh}] \ge \frac{(1+h)\mu^2\|Q\|\lambda_m}{d(R+1)(1+h\mu\|Q\|)}, \tag{3.4.36}$$

其中d是矩阵P_k的行数,该不等式的证明利用了初等不等式

$$\mathrm{tr}(P^2) \ge d^{-1}(\mathrm{tr}P)^2, \quad \forall P \in \mathbb{R}^{d\times d},\ P \ge 0$$

及$\dfrac{x}{1+x}$是$x \in [0,\infty)$的增函数性质.

由于$\lambda_m \in \left[0,\dfrac{h}{1+h}\right]$且$\{\lambda_m\} \in S^0$, 故据命题3.3.1及3.3.2知$\{a_m\} \in S^0$, 即存在$\lambda \in (0,1)$及$M>0$使

$$E\prod_{k=m}^{n}(1-a_{k+1}) \le M\lambda^{n-m+1}, \quad \forall n \ge m \ge 0. \tag{3.4.37}$$

对任何$\varepsilon > 0$, 根据(3.4.32)得

$$\exp(\varepsilon T_{m+1}) \le \exp\{(1-a_{m+1})\cdot\varepsilon T_m\}\cdot\exp(b\varepsilon).$$

但据不等式

$$\exp(\alpha x) \le \alpha\exp(x) + 1, \quad \forall x > 0,\ 0 < \alpha < 1$$

又知

$$\exp(\varepsilon T_{m+1}) \le e^{b\varepsilon}\cdot\{(1-a_{m+1})\cdot\exp(\varepsilon T_m) + 1\}.$$

因此,若取ε充分小使$e^{b\varepsilon} \cdot \lambda < 1$, 则根据(3.4.37)易知

$$\sup_k E \exp(\varepsilon \|P_k\|) < \infty. \tag{3.4.38}$$

此式的一个直接推论是对任何$p \geq 1$, $\{P_k\}$都是L_p有界的. 因此我们验证了定理3.3.7的条件(ii), 这是因为$\|P_m^{-1}\| \leq \|(\mu Q)^{-1}\| < \infty$是自然成立的.

为了验证定理3.3.7中的条件(i),我们令

$$x_k = h + \mu^{-1}\|Q^{-1}\|T_k,$$

其中T_k如(3.4.31)所定义.于是利用(3.4.32)知

$$x_{k+1} \leq (1 - a_{k+1})x_k + h + \mu^{-1}\|Q^{-1}\|b.$$

注意到(3.4.36),利用命题3.3.3知$\{1/x_k\} \in S^0$.但是,注意到

$$x_k = \sum_{i=(k-1)h+1}^{kh} (1 + \mu^{-1}\|Q^{-1}\|\mathrm{tr}(P_i)),$$

故据命题3.3.4知

$$\left\{\frac{1}{1 + \mu^{-1}\|Q^{-1}\|\mathrm{tr}(P_k)}\right\} \in S^0.$$

从而注意到$Q_k \geq \mu Q$知

$$\left\{\frac{1}{1 + \|Q_k^{-1}P_{k+1}\|}\right\} \in S^0.$$

因此利用定理3.3.4知, 对Kalman滤波型算法也有$\{\mu F_k\} \in S_p$.定理证毕.

∎

定理3.4.1在一个统一的一般性激励条件下, 建立了三类基本算法的跟踪误差方程(3.4.5)之齐次部分的指数稳定性.据此,就可以估计出误差$\widetilde{\theta}_t$ 的L_p模的上界,从而说明这一误差是如何被观测噪声$\{w_t\}$和参数变差$\{\Delta_t\}$所控制的(见本节习题).

然而,仅仅知道估计误差方差的上界,还不足以对跟踪算法的性能作精确的评估或优化.这就需要,比如说,给出估计误差方差$E[\widetilde{\theta}_t\widetilde{\theta}_t^{\tau}]$的具体表达式.但是,由于算法对数据本质上的非线性性,使得这一任务极其复杂.一个可行的办法是寻找近似表达式.我们先看一个最简单的例子.

例 3.4.1 . 考虑模型(3.4.1)–(3.4.2).假设

a) ϕ_t和θ_t是标量随机序列;

b) $\{\phi_t\}$, $\{w_t\}$及$\{\Delta_t\}$是相互独立的三个独立随机序列,都具有零均值,分别具有方差R_ϕ, R_w及$\gamma^2 Q_\Delta$;

c) ϕ_t的四阶矩记为R_4.

进一步假设估计值$\hat{\theta}_k$由简单的LMS算法给出,即

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \mu\phi_k(y_{k+1} - \phi_k\hat{\theta}_k). \tag{3.4.39}$$

在上述理想假设下,我们来计算$\Pi_k^0 \triangleq E[\widetilde{\theta}_k\widetilde{\theta}_k^{\tau}]$. 这时误差方程(3.4.5)变为

$$\tilde{\theta}_{k+1} = (1 - \mu\phi_k^2)\tilde{\theta}_k - \mu\phi_k w_{k+1} + \Delta_{k+1}, \tag{3.4.40}$$

两边平方并取期望得

$$\Pi_{k+1}^0 = (1 - 2\mu R_\phi + \mu^2 R_4)\Pi_k^0 + \mu^2 R_\phi R_w + \gamma^2 Q_\Delta, \tag{3.4.41}$$

这是一个线性差分方程,其解可以具体写出来.特别地,若

$$|1-2\mu R_\phi+\mu^2 R_4|<1,$$

则(3.4.41)的解Π_k^0将收敛到Π^*, 其中

$$\Pi^*=\frac{1}{1-\mu R_4/(2R_\phi)}\Pi, \tag{3.4.42}$$

$$\Pi=\frac{1}{2R_\phi}\Big[\mu R_\phi R_w+\frac{\gamma^2}{\mu}Q_\Delta\Big]. \tag{3.4.43}$$

经简单计算可得

$$\Big|\Pi^*-\Pi\Big|\le\sigma(\mu)\Pi,\quad \sigma(\mu)=\Big[\frac{R_4/(2R_\phi)}{1-\mu R_4/(2R_\phi)}\Big]\mu. \tag{3.4.44}$$

由于当$\mu\to 0$时$\sigma(\mu)\to 0$, 这说明对小的μ, Π^*可以被Π很好地逼近. ∎

这个例子之所以特别容易,是因为对$\{\phi_k,w_k,\Delta_k\}$假定了很强的独立性,这使得$\widetilde{\theta}_k$与ϕ_k独立,从而使计算Π_k^0成为可能.

一般情形下,我们需要处理$\{\phi_k\}$的相依性,这是这个问题的本质困难.直观上讲,如果$\{\phi_k\}$的相依性是"衰减的",且$\hat{\theta}_k$以较小的幅度依赖于"最近的"ϕ_k(这相当于要求适应速率μ较小,且误差方程的齐次部分指数稳定),则$\hat{\theta}_k$与ϕ_k也应有"弱相依性",从而类似于(3.4.44)的逼近公式也应存在.

事实上,我们下面将说明在很一般的条件下,对本节给出的三类基本算法,当μ较小时在本质上都有逼近公式

$$\|E[\widetilde{\theta}_k\widetilde{\theta}_k^\tau]-\Pi_k\|\le\sigma(\mu)\|\Pi_k\|, \tag{3.4.45}$$

其中当$\mu\to 0$时$\sigma(\mu)\to 0$, Π_k由一个简单的线性确定性差分方程所定义(其形式与(3.4.41)类似但没有高阶项μ^2R_4).

为此,我们先引进所用的几个条件.

C1 (可辨识性). 存在整数$h>0$及常数$\delta>0$使$S_t\triangleq E[\phi_t\phi_t^\tau]$满足

$$\sum_{t=k+1}^{k+h}S_t\ge\delta I,\quad \forall k\ge 0.$$

进一步,存在常数C_ϕ使$\|\phi_k\|\le C_\phi$, $\forall k\ge 0$.

C2 (弱相依性). 回归向量序列$\{\phi_k\}$在下列意义下是弱相依(ϕ混合)的:

$$\sup_{A\in\mathcal{G}_{k+m},B\in\mathcal{F}_k}|P(A|B)-P(A)|\le\phi(m),\quad \forall k,\forall m, \tag{3.4.46}$$

其中函数$\phi(m)\ge 0$满足$\phi(m)\xrightarrow[m\to\infty]{}0$,而$\mathcal{G}_k\triangleq\sigma\{\phi_k\}$, $\mathcal{F}_k\triangleq\sigma\{\phi_i,w_i,\Delta_i,i\le k\}$.

C3(噪声条件). 对C2中定义的$\mathcal{F}_k$, 有

$$E[w_{k+1}|\mathcal{F}_k]=0,\quad E[\Delta_{k+1}|\mathcal{F}_k]=E[\Delta_{k+1}w_{k+1}|\mathcal{F}_k]=0,$$
$$E[w_{k+1}^2|\mathcal{F}_k]=R_w(k),\quad E[\Delta_k\Delta_k^\tau]=\gamma^2 Q_\Delta(k),$$

且存在常数$r>2$及$M>0$使

$$\sup_k\{E[|w_{k+1}|^r\mathcal{F}_k]+E\|w_k\|^r\}\le M.$$

下面,我们再给出$E[\tilde{\theta}_k\tilde{\theta}_k^\tau]$的逼近值$\Pi_k$的计算公式,它是由下列线性确定性差分方程所定义的:

$$\begin{aligned}\Pi_{k+1}=&(I-\mu R_kS_k)\Pi_k(I-\mu R_kS_k)^\tau\\&+\mu^2R_w(k+1)R_kS_kR_k+\gamma^2Q_\Delta(k+1),\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

其中$S_k = E[\phi_k\phi_k^\tau]$, 而$R_k$分别如下定义:

a) LMS情形:

$$R_k = I, \tag{3.4.48}$$

b) FFLS情形:

$$R_k = R_{k-1} - \mu R_{k-1}S_kR_{k-1} + \mu R_{k-1}, \quad (R_0 = P_0), \tag{3.4.49}$$

c) KF情形:

$$R_k = R_{k-1} - \mu R_{k-1}S_kR_{k-1} + \mu Q/R, \quad (R_0 = P_0/R). \tag{3.4.50}$$

于是,我们有下列基本结果, 其证明见[21].

定理 3.4.2 假设条件C1—C3成立, 则对本节所述的三类基本算法中的任意一个,都存在$\mu^* \in (0,1)$使对所有$\mu \in (0,\mu^*)$及所有$k \geq 1$, 下式成立

$$\|E[\tilde{\theta}_k\tilde{\theta}_k^\tau] - \Pi_k\| \leq C\sigma(\mu)\Big[\mu + \frac{\gamma^2}{\mu} + (1-\alpha\mu)^k\Big], \tag{3.4.51}$$

其中Π_k由(3.4.47)所定义,而$\sigma(\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$, 它由下式定义

$$\sigma(\mu) \triangleq \min_{m\geq 1}\{\sqrt{\mu}m + \phi(m)\}, \tag{3.4.52}$$

其中$\phi(m)$由条件C2给出, $\alpha \in (0,1)$, $C > 0$是常数.

注 3.4.1 定理3.4.5中所用的条件C1和C2还可以进一步减弱,特别是$\{\phi_k\}$的有界性假设可以大大减弱(详见[21]). 另一方面,当$\{\phi_k\}$无界时,我们还可以考虑等价的正则化模型

$$\bar{y}_{k+1} = \theta_k^\tau\bar{\phi}_k + \overline{w}_{k+1},$$

其中

$$(\bar{y}_{k+1}, \bar{\phi}_k, \bar{w}_{k+1}) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1+\|\phi_k\|^2}}(y_{k+1}, \phi_k, w_{k+1}).$$

显然此处$\bar{\phi}_k$是有界的. 最后值得指出, C1中的激励条件

$$\sum_{t=k+1}^{k+h} S_t \geq \delta I$$

在一定意义下是算法稳定的必要条件.

注 3.4.2 定理3.4.2的实际用途在于,通过一个非常简单的线性确定性差分方程(3.4.47)就可以描述算法的跟踪性能.这一差分方程便于分析与计算.例如,在弱平稳情形下,即

$$S_k \equiv S, \quad R_w(k) \equiv R_w, \quad Q_\Delta(k) \equiv Q_\Delta, \quad \forall k.$$

则容易看出(3.4.47)中的R_k收敛于某一$\tilde{R}$ (当$k\to\infty$), 其中对LMS情形, $\tilde{R} = I$; 对FFLS情形, $\tilde{R} = S^{-1}$; 而对KF情形$\tilde{R}$满足$\tilde{R}S\tilde{R} = Q/R$. 将$\tilde{R}$的值代入(3.4.47) 知$\Pi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \Pi$, 其中$\Pi$ 满足(忽略$\mu^2\Pi$项):

LMS情形:

$$S\Pi + \Pi S = \mu R_w S + \frac{\gamma^2}{\mu}Q_\Delta,$$

FFLS情形:

$$\Pi = \frac{1}{2}\Big[\mu R_w S^{-1} + \frac{\gamma^2}{\mu}Q_\Delta\Big],$$

KF情形:

$$(\tilde{R}S)\Pi+\Pi(RS)^\tau=\mu R_w Q/R+\frac{\gamma^2}{\mu}Q_\Delta.$$

从上述表达式中容易看出, μ的“最好”的选择是噪声灵敏性与跟踪能力之间的折中(trade-off). 特别地,对FFLS情形,对tr(Π)求关于μ的最小值, 可得

$$\mu=\gamma\sqrt{\frac{\mathrm{tr}Q_\Delta}{R_w\mathrm{tr}(S^{-1})}}.$$

此式可以用来指导遗忘因子$(1-\mu)$的合理选取.

习题9.4

9.4.1 设回归向量$\{\phi_k\}$由下列状态方程所产生

$$\begin{cases}x_k=Ax_{k-1}+B\xi_k, & E\|x_0\|^4<\infty,\\ \phi_k=Cx_k+\zeta_k, & k\geq 0,\end{cases}$$

其中$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times q}$及$C\in\mathbb{R}^{d\times n}$是确定性矩阵.假设

(i) A是稳定矩阵,且(A,B,C)在下列意义下输出能控

$$\sum_{i=0}^{n-1}CA^iB(CA^iB)^\tau>0;$$

(ii) $\{\xi_k,\zeta_k\}$是零均值独立序列,且存在$\varepsilon>0$及$M>0$ 使

$$E\xi_k\xi_k^\tau\geq\varepsilon I,\quad E[\|\xi_k\|^4+\|\zeta_k\|^4]\leq M,\quad\forall k,$$

证明: $\{\phi_k\}$满足激励条件9.4.1. (提示:利用习题9.3.4 或命题3.3.3).

9.4.2 假设(3.4.1)是一个时变自回归模型

$$y_{t+1}=a_1(t)y_t+\cdots+a_p(t)y_{t-p+1}+w_{t+1}\tag{3.4.53}$$

$$\triangleq\theta_t^\tau\phi_t+w_{t+1},\tag{3.4.54}$$

其中$\theta_t^\tau=[a_1(t)\cdots a_p(t)]$, $\phi_t^\tau=[y_t\cdots y_{t-p+1}]$, $\{w_t\}$是一个与ϕ_0独立的独立序列并满足

$$Ew_k=0,\quad Ew_k^2\geq\sigma_w^2>0,\quad\sup_k E|w_k|^9<\infty.$$

显然,上述回归模型又可化为状态空间模型:

$$\phi_{t+1}=A_t\phi_t+bw_{t+1},$$

其中

$$A_t=\begin{bmatrix}a_1(t)&\cdots&a_p(t)\\ 1&0&\vdots\\ &\ddots&\\ 0&1&0\end{bmatrix}\quad b=[1,0\cdots0]^\tau.$$

证明在下述进一步的假设条件A)下,$\{\phi_t\}$满足激励条件9.4.1:

A) $\{A_t\}$是与$\{w_t\}$独立的独立序列,且存在$\delta\in(0,1)$ 使

$$\Big\|\prod_{i=kp}^{(k+1)p-1}A_i\Big\|_{L_4}\leq\delta,\quad\forall k\geq0,\quad\sup_k\|A_k\|_{L_q}<\infty,$$

其中$q=\max\{4,2(p-1)\}$.

9.4.3 仍考虑上题中的时变自回归模型.证明:若上题中的条件A)换成下述(非独立性)条件A)', 则$\{\phi_t\}$仍满足激励条件9.4.1.

A)$'$. $\{A_t, \mathcal{F}'_t\}$是适应矩阵序列,且可分解为

$$A_t = A + \overline{A}_t,$$

其中A是稳定矩阵,而$\{\overline{A}_t, \mathcal{F}'_t\}$被一个线性序列所控制:

$$\|\overline{A}_t\| \le \beta_t, \quad \beta_t = \beta\beta_{t-1} + e_t, \quad 0 \le \beta < 1,$$

其中$e_t \ge 0$, $e_t \in \mathcal{F}'_t$, 且e_{t+1} 与$\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$独立.进一步, 假设$\mathcal{F}'_\infty \stackrel{\Delta}{=} \sigma\{\bigcup_i \mathcal{F}'_i\}$ 与$\{V_t\}$独立,且存在适当大和适当小的正常数b和ϵ使

$$\log\{E[\exp(be_t)]\} \le \varepsilon, \quad \forall t \ge 0.$$

(提示:利用推论3.3.2).

9.4.4 设$C_{nk} \in [0,1]$, $n \ge k \ge 0$是双下标随机序列, 且存在正常数$N > 0$及$\lambda \in (0,1)$使

$$EC_{nk} \le N\lambda^{n-k}, \quad \forall n \ge k \ge 0.$$

如果$\{\xi_k\}$是一非负随机序列,且满足

$$\sigma \stackrel{\Delta}{=} \sup_{k\ge 0} E[\xi_k \log^\beta(e+\xi_k)] < \infty, \quad \beta > 1,$$

证明下述不等式成立:

$$\sum_{k=0}^{n} EC_{nk}\xi_k \le C\sigma\log(e+\sigma^{-1}), \quad \forall n \ge 0,$$

其中C是仅依赖于β, N和λ的常数.

9.4.5 利用上题和定理3.4.1的结论,分别给出本节所述的三类基本算法之跟踪误差的L_p模(即$\|\hat{\theta}_t - \theta_t\|_{L_p}$)的上界估计.

9.4.6 设$\sup\limits_t E\|\phi_t\|^2 < \infty$. 证明若存在某个$\mu \in (0,1)$使由(3.4.9)所定义的$\{P_t\}$具有性质$\sup\limits_t E\|P_t\| < \infty$, 则必存在整数$h > 0$, 使

$$\inf_t E\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=t+1}^{t+h} \phi_i\phi_i^\tau\Big)\Big] > 0.$$

进一步,举例说明该结论反之一般不成立.

9.4.7 设$\{z_n, \mathcal{F}_n\}$与$\{u_n, \mathcal{F}_n\}$是两个非负适应序列,满足不等式

$$u_{n+1} \le \frac{u_n}{(1-\mu)^h(1+\mu u_n z_{n+1})}, \quad \forall n \ge 0, \quad u_0 \ne 0,$$

其中$\mu \in (0,1)$, $h > 0$. 证明:如果存在常数$C > 0$及$\delta > 0$使

$$P(z_{n+1} \ge c|\mathcal{F}_n) \ge \delta, \quad \text{a.s.} \quad \forall n \ge 0,$$

则对任何$p \ge 1$及$\mu_0 \in (0, 1-(1-\delta)^{1/ph})$都有

$$\sup_{\mu\in[0,\mu_0]}\ \sup_{n\ge 0} \|u_n\|_{L_p} < \infty.$$

进一步,令

$$z_{n+1} = \lambda_{\min}\Big\{\sum_{i=nh+1}^{nh+h} \phi_i\phi_i^\tau\Big\}.$$

假设$\{z_n\}$满足上述条件,利用上述结论证明由(3.4.9)所定义的$\{P_t\}$具有性质

$$\sup_{\mu\in(0,\mu_0]}\ \sup_{t\ge 0} \|P_t\|_{L_p} < \infty.$$

(提示:令$u_n = \lambda_{\min}^{-1}(P_{nh}^{-1})$, 可参见[23])

9.4.8 考虑由(3.4.50)所定义的Riccati方程

$$R_k = R_{k-1} - \mu R_{k-1} S_k R_{k-1} + \mu Q R^{-1}, \quad (R_0 = P_0 R^{-1})$$

以及由Riccati方程(3.4.12)所“诱导”的“平均值”方程:

$$\overline{P}_k = [\overline{P}_{k-1}^{-1} + \mu R^{-1} S_k]^{-1} + \mu Q, \quad (\overline{P}_0 = P_0).$$

假设$\{S_k\}$是有界的非负定矩阵序列且存在$h > 0$及$\delta > 0$使

$$\sum_{t=k+1}^{k+h} S_t \geq \delta I, \quad \forall k \geq 0.$$

证明: 当μ适当小时, $\{R_k\}$及$\{\overline{P}_k\}$都是有界的且

$$\|R_k - \overline{P}_k R^{-1}\| = O(\mu). \quad \forall k.$$

(提示: 可参考[21])

§3.5 最小二乘自校正调节器

我们的控制目的是设计一个控制器使系统的输出跟踪一个给定的信号.当系统的参数未知时, 控制器中的未知参数若用在线最小二乘估计值代替, 则相应的控制器称为最小二乘自校正调节器.

考虑下列单输入单输出(SISO)随机系统:

$$A(z) y_n = B(z) u_{n-1} + w_n, \quad n \geq 0, \tag{3.5.1}$$

其中$\{y_n\}, \{u_n\}$和$\{w_n\}$分别是系统的输出、输入及噪声过程(不失一般性,假设$y_n = w_n = u_n = 0, \forall n < 0$), 而$A(z)$和$B(z)$是后移算子$z$的多项式:

$$A(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_p z^p \quad p \geq 0,$$
$$B(z) = b_1 + b_2 z + \cdots + b_q z^{q-1}, \quad q \geq 1,$$

其中a_i, b_j是未知系数, 而p和q是系统阶数的已知上界.

引入未知参数向量

$$\theta = [-a_1 \cdots - a_p, b_1 \cdots b_q]^\tau \tag{3.5.2}$$

及相应的回归向量

$$\varphi_n = [y_n \cdots y_{n-p+1}, u_n \cdots u_{n-q+1}]^\tau, \tag{3.5.3}$$

则(3.5.1)可简写为§9.2中讨论过的回归模型

$$y_{n+1} = \theta^\tau \varphi_n + w_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{3.5.4}$$

控制目的是在任何时刻n, 基于量测数据$\{y_0 \cdots y_n, u_0 \cdots u_{n-1}\}$构造出反馈控制量$u_n$, 使得下述平均跟踪误差渐近达到最小:

$$J_n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2, \tag{3.5.5}$$

其中$\{y_i^*\}$是已知的被跟踪信号.

为了分析上述控制问题,引入下列典型的条件:

(A1) 噪声$\{w_n, \mathcal{F}_n\}$是鞅差序列(其中$\{\mathcal{F}_n\}$是一非降的子σ-代数序列), 并且存在$\beta > 2$使

$$\sup_n E[|w_{n+1}|^\beta | \mathcal{F}_n] < \infty \quad a.s.; \tag{3.5.6}$$

(A2) $B(z) \neq 0, \forall z : |z| \leq 1$ (最小相位条件);

(A3) $\{y_n^*\}$是确定性有界信号.

值得指出, 条件(A2)一般称为最小相位条件. 对控制问题(3.5.5)来讲, 它是保证最优闭环系统内部信号稳定的必要条件[10].

我们先分析参数θ已知的情形. 由于$\{w_n\}$是不可预测的白噪声, 易见使(3.5.5)达极小的控制律应满足

$$y_{n+1}^* = E[y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \tag{3.5.7}$$

或根据(3.5.4)及(A1)

$$\theta^\tau \varphi_n = y_{n+1}^*. \tag{3.5.8}$$

由此式可将最优控制明显表为

$$u_n = \frac{1}{b_1}\{a_1 y_n + \cdots + a_p y_{n-p+1} - b_2 u_{n-1} - \cdots - b_q u_{n-q+1} + y_{n+1}^*\}. \tag{3.5.9}$$

将此式代入(3.5.1)(或将(3.5.8)代入(3.5.4))可得到参数θ已知情形下的理想闭环方程为

$$y_n - y_n^* - w_n \equiv 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.5.10}$$

下面考虑参数θ未知的情形. 这时, 常用的方法是用§9.2中所讨论过的递推最小二乘(LS)来给出对θ的估计值θ_n:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + a_n P_n \varphi_n (y_{n+1} - \varphi_n^\tau \theta_n), \tag{3.5.11}$$

$$P_{n+1} = P_n - a_n P_n \varphi_n \varphi_n^\tau P_n, \tag{3.5.12}$$

$$a_n = (1 + \varphi_n^\tau P_n \varphi_n)^{-1}, \tag{3.5.13}$$

其中初值θ_0及$P_0 > 0$任取.

根据“必然等价原则”(忽略估计值θ_n之方差的影响), 将(3.5.8)中的θ用上述θ_n所取代得到如下LS型自校正调节器(STR):

$$\theta_n^\tau \varphi_n = y_{n+1}^* \tag{3.5.14}$$

或

$$u_n = \frac{1}{b_{1n}}\{a_{1n} y_n + \cdots + a_{pn} y_{n-p+1} - b_{2n} u_{n-1} - \cdots - b_{qn} u_{n-q+1} + y_{n+1}^*\}, \tag{3.5.15}$$

其中a_{in}, b_{jn}为θ_n的分量:

$$\theta_n \triangleq [-a_{1n} \cdots - a_{pn}, b_{1n} \cdots b_{qn}]^\tau.$$

注意到理想情形下的闭环方程为(3.5.10), 我们自然期望在适应控制(3.5.14)作用下, 闭环方程满足

$$y_n - y_n^* - w_n \approx 0, \quad \forall n.$$

通常我们期望如下定义的n步“闭环跟踪误差”的积累

$$R_n \triangleq \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^* - w_i)^2 \tag{3.5.16}$$

满足

$$R_n = o(n) \quad a.s. \tag{3.5.17}$$

直观地讲, (3.5.17)意味着误差“$y_n - y_n^* - w_n$”在平均意义下趋于零.

利用(A1)容易证明

$$R_n = o(n) \Leftrightarrow J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_w^2 \quad a.s.,$$

其中J_n由(3.2.5) 给出, 而σ_w^2定义为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2$(假定极限存在).

因此, STR(3.5.14)最优的充分必要条件是(3.5.17)成立. 一个自然的问题是, 对LS型STR, R_n是否一定满足(3.5.17)式? 进一步, R_n的增加速度到底有多快? 后一问题实质上是STR的控制精度或收敛速度问题. 我们将在下面讨论这两个问题.

我们先讨论一个简单而又经典的情形.

对系统(3.5.1), 注意到

$$\lim_{z\to\infty}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = b_1,$$

因此$B(z)$的首项系数b_1通常称为“高频增益”. 当b_1已知时, 仅需估计下列参数向量:

$$\theta = [-a_1 \cdots - a_p \ b_2 \cdots b_q]^\tau. \tag{3.5.18}$$

相应地, 此时回归向量φ_n应定义为

$$\varphi_n = [y_n \cdots y_{n-p+1}, u_{n-1} \cdots u_{n-q+1}]^\tau. \tag{3.5.19}$$

而系统(3.5.1)可写成如下回归形式

$$y_{n+1} - b_1 u_n = \theta^\tau \varphi_n + w_{n+1}. \tag{3.5.20}$$

对上式中θ的LS估计算法为

$$\theta_{n+1} = \theta_n + a_n P_n \varphi_n (y_{n+1} - b_1 u_n - \varphi_n^\tau \theta_n), \tag{3.5.21}$$

$$P_{n+1} = P_n - a_n P_n \varphi_n \varphi_n^\tau P_n, \quad a_n = (1 + \varphi_n^\tau P_n \varphi_n)^{-1}, \tag{3.5.22}$$

其中初值θ_0及$P_0 > 0$任取.

根据(3.5.9)及“必然等价原则”, LS型STR为

$$\begin{aligned} u_n =& \frac{1}{b_1}\{a_{1n} y_n + \cdots + a_{pn} y_{n-p+1} - b_{2n} u_{n-1} - \cdots - b_{qn} u_{n-q+1} + y_{n+1}^*\} \\ =& \frac{1}{b_1}\{y_{n+1}^* - \theta_n^\tau \varphi_n\}, \end{aligned} \tag{3.5.23}$$

其中a_{in} 及b_{in} 是θ_n的分量:

$$\theta_n = [-a_{1n} \cdots - a_{pn}, b_{2n} \cdots b_{qn}]^\tau$$

显然, 由方程(3.5.18)~(3.5.23)构成的闭环控制系统是输出信号的高度非线性方程.

下面我们将给出此STR的严格理论分析.

首先引进几个全节通用的记号:

$$\alpha_k \triangleq \frac{(\varphi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2}{1 + \varphi_k^\tau P_k \varphi_k}, \quad \delta_k \triangleq \mathrm{tr}(P_k - P_{k+1}), \tag{3.5.24}$$

$$r_n \triangleq 1 + \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2, \quad \tilde{\theta}_k = \theta - \theta_k. \tag{3.5.25}$$

进一步, 我们假定$\{d_n\}$是非降的确定性正数序列, 使

$$w_n^2 = O(d_n) \quad a.s., \quad d_{n+1} = O(d_n). \tag{3.5.26}$$

下面说明在条件(A1)下, d_n可取为

$$d_n = n^\delta, \quad \forall \delta \in \left(\frac{2}{\beta}, 1\right), \tag{3.5.27}$$

其中β由(3.5.6)给出. 事实上, 利用Markov不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(w_{n+1}^2 \geq n^\delta | \mathcal{F}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[|w_{n+1}|^\beta | \mathcal{F}_n]}{n^{\beta\delta/2}} < \infty \quad a.s.$$

故利用Borel-Cantelli-Lévy引理(定理2.2.8)可立即推出(3.5.27).

显然, 若对$\{w_n\}$有进一步的假设, 则d_n可取得更小. 例如当$\{w_n\}$是有界噪声时, 可取$d_n \equiv 1$; 而当$\{w_n\}$是正态白噪声时,可取$d_n = \log n$, 等等.

我们先给出两个引理, 其关键的证明思想是借助于定理9.2.2(ii)用某一时变线性方程的解来控制非线性闭环控制系统的输出信号.

引理 3.5.1 考虑闭环控制系统(3.5.19)~(3.5.23). 若条件(A1)~(A3)满足, 则一定存在正随机序列$\{L_n\}$使

$$y_n^2 \leq L_n, \quad \forall n, \quad a.s. \tag{3.5.28}$$

且$\{L_n\}$满足下列"线性时变"关系:

$$L_{n+1} \leq (\lambda + C\alpha_n\delta_n)L_n + \xi_n, \tag{3.5.29}$$

其中常数$\lambda \in (0,1), C > 0, \alpha_n$和$\delta_n$由(3.5.24)所定义, 而$\{\xi_n\}$是正随机序列, 满足

$$\xi_n = O(d_n \log r_n), \tag{3.5.30}$$

而d_n和r_n分别由(3.5.26)和(3.5.25) 给出.

证明 将(3.5.23)代入(3.5.20)得

$$y_{n+1} = \varphi_n^\tau \tilde{\theta}_n + y_{n+1}^* + w_{n+1}. \tag{3.5.31}$$

于是利用(3.5.24)及(3.5.26)得

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 \leq& 2(\varphi_n^\tau \tilde{\theta}_n)^2 + O(d_n) = 2\alpha_n[1 + \varphi_n^\tau P_n \varphi_n] + O(d_n) \\ =& 2\alpha_n[1 + \varphi_n^\tau P_{n+1}\varphi_n + \varphi_n^\tau(P_n - P_{n+1})\varphi_n] + O(d_n) \\ \leq& 2\alpha_n[2 + \delta_n\|\varphi_n\|^2] + O(d_n) \\ =& 2\alpha_n\delta_n\|\varphi_n\|^2 + O(d_n + \log r_n), \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

其中用到了性质$\varphi_n^\tau P_{n+1}\varphi_n \leq 1$及$\alpha_n = O(\log r_n)$(见定理9.2.2(ii)).

利用最小相位条件(A2)从系统方程(3.5.1)不难知存在$\lambda \in (0,1)$使

$$u_{n-1}^2 = O\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} y_i^2\right) + O(d_n). \tag{3.5.33}$$

于是

$$\|\varphi_n\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} y_{n-i}^2 + \sum_{i=1}^{q-1} u_{n-i}^2 = O(\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} y_i^2\right) + O(d_n).$$

定义

$$L_n=\sum_{i=0}^{n}\lambda^{n-i}y_i^2,$$

则显见(3.5.28) 满足. 于是利用(3.5.32)得

$$y_{n+1}^2\le C\alpha_n\delta_nL_n+O(d_n\log r_n),\tag{3.5.34}$$

其中$C>0$是某常数. 据此及L_n的定义, 有

$$L_{n+1}=\lambda L_n+y_{n+1}^2\le(\lambda+C\alpha_n\delta_n)L_n+O(d_n\log r_n).$$

这就是(3.5.29), 故引理得证. ∎

引理 3.5.2 在引理3.5.1 的条件下, 下式成立:

$$\|\varphi_n\|^2=O(r_n^{\epsilon}d_n)\quad a.s.\quad\forall\epsilon>0,$$

其中r_n和d_n 分别由(3.5.25)和(3.5.26)定义.

证明 据(3.5.29)

$$\begin{aligned}L_{n+1}&\le\prod_{j=0}^{n}(\lambda+C\alpha_j\delta_j)L_0+\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}(\lambda+C\alpha_j\delta_j)\xi_i\\&=\lambda^{n+1}\prod_{j=0}^{n}(1+\lambda^{-1}C\alpha_j\delta_j)L_0+\sum_{i=0}^{n}\lambda^{n-i}\prod_{j=i+1}^{n}(1+\lambda^{-1}C\alpha_j\delta_j)\xi_i.\end{aligned}\tag{3.5.35}$$

为了分析上式中的乘积, 首先从

$$\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j=\sum_{j=0}^{\infty}(\mathrm{tr}P_j-\mathrm{tr}P_{j+1})\le\mathrm{tr}P_0<\infty,\tag{3.5.36}$$

可知$\delta_j\longrightarrow0$, 于是利用定理9.2.2(ii)知, 对任何$\epsilon>0$, 存在充分大的i_0使

$$\lambda^{-1}C\sum_{j=i}^{n}\delta_j\alpha_j\le\epsilon\log r_n,\quad\forall n\ge i\ge i_0.\tag{3.5.37}$$

据此及不等式$1+x\le e^x,x\ge0$, 得

$$\begin{aligned}&\prod_{j=i}^{\infty}(1+\lambda^{-1}C\delta_j\alpha_j)\le\exp\left\{\lambda^{-1}C\sum_{j=i}^{n}\alpha_j\delta_j\right\}\\&\le\exp\{\epsilon\log r_n\}=r_n^{\epsilon},\quad\forall\ n\ge i\ge i_0.\end{aligned}\tag{3.5.38}$$

将此式代入(3.5.35)并利用(3.5.30)得

$$L_{n+1}=O(r_n^{\epsilon}d_n\log r_n),\quad\forall\epsilon>0.$$

从而利用ϵ的任意性从(3.5.28)得

$$y_{n+1}^2=O(r_n^{\epsilon}d_n),\quad\forall\epsilon>0.$$

据此利用(3.5.33)又可得

$$u_n^2=O(r_n^{\epsilon}d_n),\quad\forall\epsilon>0.$$

故引理得证. ∎

定理 3.5.1 考虑自适应控制系统(3.5.19)~(3.5.23)并设条件(A1)~(A3)满足, 则闭环系统具有稳定性与最优性, 且

$$R_n = O(n^\epsilon d_n), \quad a.s. \quad \forall \epsilon > 0, \tag{3.5.39}$$

其中R_n, d_n分别由(3.5.16)及(3.5.26)定义.

证明 首先注意到若(3.5.39)成立, 则据(3.5.27), 最优性$R_n = o(n)$显然成立.进一步, 据最优性及(A1)和(A3)立即看出

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^2 = O(n) \quad a.s.$$

进而利用(3.5.1)的最小相位假设又可得

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^2 = O(n) \quad a.s.$$

因此稳定性也成立.

所以, 我们仅需证明(3.5.39).

利用(3.5.24), 定理3.2.1及引理3.5.2从(3.5.31)得

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} (y_{i+1} - y_{i+1}^* - w_{i+1})^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\varphi_i^\tau \tilde{\theta}_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (1 + \varphi_i^\tau P_i \varphi_i) \\ &= O(\log r_n) + O\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \|\varphi_i\|^2 \right) \\ &= O(\log r_n) + O(r_n^\epsilon d_n \log r_n) \\ &= O(r_n^\epsilon d_n), \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned} \tag{3.5.40}$$

因此, 为证(3.5.39), 只需证明

$$r_n = O(n). \tag{3.5.41}$$

利用(3.5.40)及$\{y_i^*\}$与$\{w_i\}$的性质易见

$$\sum_{i=0}^{n} y_i^2 = O(n) + O(r_n^\epsilon d_n), \quad \forall \epsilon > 0.$$

据此利用条件(A2)从(3.5.1)可得

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^2 = O(n) + O(r_n^\epsilon d_n), \quad \forall \epsilon > 0.$$

因此, 由上两式得$\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} r_n &= 1 + \sum_{i=0}^{n} \|\varphi_i\|^2 = O(n) + O(r_n^\epsilon d_n) \\ &= O(n) + O(r_n^\epsilon n^\delta), \quad \forall \delta \in \left(\frac{2}{\beta}, 1 \right). \end{aligned}$$

取ϵ充分小使$\epsilon+\delta<1$, 可得

$$\frac{r_n}{n}=O(1)+O\left(\left[\frac{r_n}{n}\right]^\epsilon\cdot\frac{1}{n^{1-\epsilon-\delta}}\right)=O(1)+o\left(\left[\frac{r_n}{n}\right]^\epsilon\right)$$

由此看出(3.5.41)必成立. 证毕 ∎

上述定理3.5.1中证明了R_n的增长速度不超过$O(n^\epsilon d_n),\forall\epsilon>0$, 但$R_n$的精确增长速度到底有多大? 这一问题与STR的收敛速度密切相关. 下面将通过STR的对数律来回答此问题.

定理 3.5.2 [16] 在定理3.5.1的条件下, 若$B(z)$与$A(z)-1$互质, $|a_p|+|b_q|\neq 0$, 则对闭环系统下列对数律成立:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{\log n}=(p+q-1)\sigma_w^2\quad a.s.$$

且LS估计有重对数律的收敛速度:

$$\|\theta_n-\theta\|=O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)\quad a.s.,$$

其中R_n由(3.5.16)定义, $\sigma_w^2\triangleq E[w_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]>0$.

下面考虑一般情形, 即(3.5.1)的高频增益b_1也是未知的. 此时, 未知参数θ及回归向量φ_n 应分别由(3.5.2)和(3.5.3)所定义, 而对θ 的估计由LS算法(3.5.11)∼(3.5.13)给出. 我们将沿用(3.5.24)和(3.5.25)中引入的记号α_k,δ_k,r_k和$\tilde{\theta}_k$.

自然地, 此时STR应由(3.5.14)或(3.5.15)给出. 但如此一来, 遇到的第一个问题就是u_n 可能有时无法定义, 这是因为集合$\{b_{1n}=0\}$的概率可能为正的, 除非对噪声$\{w_n\}$的分布作进一步的假定. 若我们不想对噪声附加更多的限制, 克服此困难的一个自然而简单的方法是对b_{1n}做微小的修正. 例如, 可以用下式定义的b_{1n}.

$$\hat{b}_{1n}=\begin{cases}b_{1n}, & 若\ |b_{1n}|\geq\dfrac{1}{\sqrt{\log r_{n-1}}}\\ b_{1n}+\dfrac{\operatorname{sgn}(b_{1n})}{\sqrt{\log r_{n-1}}}, & 若\ |b_{1n}|<\dfrac{1}{\sqrt{\log r_{n-1}}}\end{cases}\tag{3.5.42}$$

来代替(3.5.15)中的分母b_{1n}而得到

$$\begin{aligned}u_n=&\frac{1}{\hat{b}_{1n}}\{a_{1n}y_n+\cdots+a_{pn}y_{n-p+1}-b_{2n}u_{n-1}\\&-\cdots-b_{qn}u_{n-q+1}+y_{n+1}^*\},\end{aligned}\tag{3.5.43}$$

其中sgn$(\cdot)$是符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x\geq 0,\\-1,x<0.\end{cases}$$

如上定义的$\hat{b}_{1n}$有下列良好的性质:

$$|\hat{b}_{1n}|\geq\frac{1}{\sqrt{\log r_{n-1}}},\quad\forall n\geq 1,\tag{3.5.44}$$

且

$$|\hat{b}_{1n}-b_{1n}|\leq\frac{1}{\sqrt{\log r_{n-1}}},\quad\forall n\geq 1.\tag{3.5.45}$$

为了将对b_{1n}的修正与不修正两种情形作统一处理, 考虑如下一般的STR:

$$y_{n+1}^*=\theta_n^\tau\varphi_n+(\Delta\hat{b}_{1n})u_n,\tag{3.5.46}$$

其中$\{\theta_n\}$由LS算法(3.5.11)~(3.5.13)给出, $\{\Delta\hat{b}_{1n}\}$是任意适应于$\{\mathcal{F}_n\}$的序列, 满足

$$\Delta\hat{b}_{1n}\equiv 0 \quad \text{或} \quad \Delta\hat{b}_{1n}\longrightarrow 0.$$

注意, 若$\Delta\hat{b}_{1n}\equiv 0$, 则(3.5.46)就是标准的LS-STR(3.5.14); 若$\Delta\hat{b}_{1n}=\hat{b}_{1n}-b_{1n}$, 则(3.5.46)就是由(3.5.43)所定义的STR.

为了分析方便, 我们暂时假定由STR(3.5.46)所定义的输入序列满足增长速度

$$u_n^2=O\left(\log^2 r_{n-1}\left[\sum_{i=0}^{p-1}y_{n-i}^2+\sum_{i=1}^{q-1}u_{n-i}^2\right]+\log r_{n-1}\right). \tag{3.5.47}$$

注意到由推论3.2.1知a_{in},b_{jn}的增长速度不超过$O\left(\sqrt{\log r_{n-1}}\right)$, 因此利用(3.5.44)知由(3.5.43)所定义的控制律u_n确实满足(3.5.47); 另一方面, 当b_{1n}本身满足下列条件时

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt{\log r_{n-1}}|b_{1n}|\neq 0, \tag{3.5.48}$$

则LS-STR控制律(3.5.15)也满足(3.5.47). (本节习题中给出了另外两种保证此性质满足的方法)

类似于引理3.5.1, 我们有

引理 3.5.3 对系统(3.5.42)设条件(A1)~(A3)成立且控制律满足关系式(3.5.46)与(3.5.47), 那么存在正随机序列$\{L_k\}$使

$$y_k^2\leq L_k, \quad \forall k$$

且$\{L_k\}$满足关系式

$$L_{k+1}\leq(\lambda+Cf_k)L_k+\xi_k,$$

其中常数$\lambda\in(0,1), C>0$, 而

$$\begin{aligned}
&f_k=(\alpha_k\delta_k\log r_{k-1})^2+\alpha_k\delta_k+(\Delta\hat{b}_{1k})^2,\\
&\xi_k=O(d_k\log^4 r_k).
\end{aligned}$$

证明 由(3.5.4)及(3.5.46)知

$$y_{k+1}=\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_k-(\Delta\hat{b}_{1k})u_k+y_{k+1}^*+w_{k+1}, \tag{3.5.49}$$

于是利用(3.5.24)与(3.5.25), 知

$$\begin{aligned}
y_{k+1}^2\leq&3(\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_k)^2+3(\Delta\hat{b}_{1k})^2u_k^2+O(d_k)\\
=&3\alpha_k\{1+\varphi_k^\tau P_{k+1}\varphi_k+\varphi_k^\tau(P_k-P_{k+1})\varphi_k\}\\
&+3(\Delta\hat{b}_{1k})^2u_k^2+O(d_k)\\
\leq&3\alpha_k\{2+\delta_k\|\varphi_k\|^2\}+3(\Delta\hat{b}_{1k})^2u_k^2+O(d_k)\\
=&3\alpha_k\delta_k\|\varphi_k\|^2+3(\Delta\hat{b}_{1k})^2u_k^2+O(d_k+\log r_k).
\end{aligned} \tag{3.5.50}$$

利用$B(z)$的稳定性, 从(3.5.1)知存在常数$\lambda\in(0,1)$使(3.5.33)成立, 故

$$[\|\varphi_k\|^2-u_k^2]=O\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}y_i^2\right)+O(d_k). \tag{3.5.51}$$

进一步, 将(3.5.33)代入(3.5.47)易见

$$u_k^2=O\left(\log^2 r_{k-1}\left\{\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}y_i^2+d_k\right\}\right), \tag{3.5.52}$$

于是由(3.5.51)与(3.5.52)得

$$\|\varphi_k\|^2 = O((\log^2 r_{k-1})L_k) + O(d_k \log^2 r_k), \tag{3.5.53}$$

其中$L_k \triangleq \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} y_i^2$.

又注意到

$$b_1 u_k = \varphi_k^\tau \tilde{\theta}_k - (\Delta \hat{b}_{1k}) u_k + y_{k+1}^* + (b_1 u_k - \theta^\tau \varphi_k),$$

故利用(3.5.51)有

$$\begin{aligned} b_1^2 u_k^2 &\le 3(\varphi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2 + 3(\Delta \hat{b}_{1k})^2 u_k^2 + O(1 + |b_1 u_k - \tilde{\theta}^\tau \varphi_k|^2) \\ &= 3(\varphi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2 + 3(\Delta \hat{b}_{1k})^2 u_k^2 + O(L_k + d_k). \end{aligned} \tag{3.5.54}$$

类似于(3.5.50)的证明知

$$(\varphi_k^\tau \tilde{\theta}_k)^2 \le \alpha_k \delta_k \|\varphi_k\|^2 + 2\alpha_k.$$

将此式代入(3.5.54)并注意到$\Delta \hat{b}_{1k} \longrightarrow 0$知对充分大的$k$,

$$u_k^2 = O(\alpha_k \delta_k \|\varphi_k\|^2) + O(L_k + d_k + \log r_k).$$

将此式与(3.5.51)相结合得

$$\|\varphi_k\|^2 = O(\alpha_k \delta_k \|\varphi_k\|^2) + O(L_k + d_k + \log r_k).$$

将(3.5.53)代入此式得

$$\|\varphi_k\|^2 = O(\alpha_k \delta_k (\log^2 r_{k-1}) L_k) + O(L_k + d_k \log^3 r_k).$$

最后, 将此式代入(3.5.50)知存在常数$C > 0$使

$$y_{k+1}^2 \le C f_k L_k + \xi_k, \tag{3.5.55}$$

其中f_k, ξ_k如引理叙述中所定义.

进一步, 据L_k的定义及(3.5.55)有

$$L_{k+1} \le \lambda L_k + y_{k+1}^2 \le (\lambda + C f_k) L_k + \xi_k$$

故引理成立, 证毕. ∎

类似于引理3.5.2我们来证明

引理 3.5.4 在引理3.5.3的条件下, 有

$$\|\varphi_n\|^2 = O(r_n^\epsilon d_n), \quad a.s., \quad \forall \epsilon > 0,$$

其中r_n与d_n分别由(3.5.25)与(3.5.26)定义.

证明 据引理3.5.3知,

$$L_{n+1} \le \lambda^{n+1} \left[\prod_{j=0}^{n} (1 + \lambda^{-1} C f_j) \right] L_0 + \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} \left[\prod_{j=i+1}^{n} (1 + \lambda^{-1} C f_j) \right] \xi_i. \tag{3.5.56}$$

下面来估计乘积$\prod_{j=i+1}^{n} (1 + \lambda^{-1} C f_j)$.

首先据定理3.2.1知, 对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使

$$\delta \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \le \epsilon(\log r_n), \quad \forall n.$$

又据(3.5.36)知存在充分大的$i_0 > 0$使

$$\left(\frac{4}{\delta}\right)\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{1/2} \sum_{j=i}^{\infty} \delta_j \le \epsilon, \quad \forall i \ge i_0, \tag{3.5.57}$$

于是利用不等式

$$(1+xy) \le (1+x)(1+y), \quad x \ge 0,\ y \ge 0$$

及

$$1 + x^2 \le e^{2x}, \quad x \ge 0$$

知对$\forall n \ge i \ge i_0$,

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=i+1}^{n} [1 + \lambda^{-1} C(\alpha_j \delta_j \log r_{j-1})^2] \\
\le &\prod_{j=i+1}^{n} \left[1 + \left(\frac{\delta \alpha_j}{2}\right)^2\right] \cdot \prod_{j=i}^{n} \left[1 + \lambda^{-1} C \left(\frac{2}{\delta} \delta_j \log r_{j-1}\right)^2\right] \\
\le &\exp\left\{\delta \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_j\right\} \cdot \exp\left\{\frac{4}{\delta}\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{1/2} \sum_{j=i+1}^{n} \delta_j \log r_{j-1}\right\} \\
\le &\exp\{\epsilon \log r_n\} \cdot \exp\left\{(\log r_n)\left[\frac{4}{\delta}\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{1/2} \sum_{j=i}^{n} \delta_j\right]\right\} \\
\le &r_n^{\epsilon} \exp\{(\log r_n)\epsilon\} = r_n^{2\epsilon} \qquad a.s.
\end{aligned} \tag{3.5.58}$$

进一步, 利用不等式$1 + x \le e^x, x \ge 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=i}^{n} (1 + \lambda^{-1} C \alpha_j \delta_j) \le \exp\left\{\delta \sum_{j=i}^{n} \alpha_j\right\} \exp\left\{\frac{C}{\lambda\delta} \sum_{j=i}^{n} \delta_j\right\} \\
=&O(r_n^{\epsilon}), \qquad a.s. \quad \forall n \ \ge i \ge i_0,
\end{aligned} \tag{3.5.59}$$

由于$\Delta \hat{b}_{1n} \to 0$, 故存在$i_0 > 0$使

$$\sup_{j \ge i_0} \{1 + C\lambda^{-1} (\Delta \hat{b}_{1j})^2\} < 2 - \lambda,$$

所以对$\forall n \ge i \ge i_0$,

$$\prod_{j=i+1}^{n} (1 + C\lambda^{-1} (\Delta \hat{b}_{1j})^2) \le (2 - \lambda)^{n-i}. \tag{3.5.60}$$

最后利用f_j的定义从(3.5.58)~(3.5.60)得

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=i+1}^{n} (1 + C\lambda^{-1} f_j) \\
\le &\prod_{j=i+1}^{n} (1 + C\lambda^{-1} (\alpha_j \delta_j \log r_{j-1})^2) \prod_{j=i+1}^{n} (1 + C\lambda^{-1} \alpha_j \delta_j) \prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{C\lambda^{-1}}{\log r_j}\right) \\
=&O(r_n^{3\epsilon} (2 - \lambda)^{n-i}) \qquad a.s. \quad \forall n \ge i \ge i_0
\end{aligned}$$

将此式代入(3.5.56), 经化简得

$$L_{n+1} = O(r_n^{3\epsilon} d_n \log^4 r_n), \quad \forall \epsilon > 0.$$

利用ϵ的任意性得

$$y_{n+1}^2 \le L_{n+1} = O(r_n^{\epsilon}), \quad \epsilon > 0.$$

由此及(3.5.52)又知$u_n^2 = O(r_n^{\epsilon}), \forall \epsilon > 0$.

故引理得证. 证毕. ∎

利用引理3.5.4及(3.5.49)式, 完全仿照定理3.5.1 的证明不难推出下列两个定理(证明细节不再重复[16][19]).

定理 3.5.3 对系统(3.5.1)设条件(A1)~(A3)满足, 若STR按(3.5.43)所定义, 则闭环控制系统是稳定的、最优的, 且

$$R_n = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \qquad a.s.,$$

其中R_n由(3.5.16)定义.

定理 3.5.4 对系统(3.5.1)设条件(A1)~(A3)满足. 设$\{\theta_k\}$是任意满足定理9.2.2中所述性质的参数估计值. 若定义集合

$$D \triangleq \left\{\omega \left| b_{1n} \ne 0, \forall n; \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt{\log r_{n-1}} |b_{1n}| \ne 0 \right.\right\}, \tag{3.5.61}$$

则在控制律(3.5.15)作用下, 闭环系统在D上几乎处处有

$$\|\varphi_n\|^2 + R_n = O(n^{\epsilon} d_n), \qquad \forall \epsilon > 0,$$

其中R_n, r_n和d_n分别由(3.5.16), (3.5.25)及(3.5.26)所定义.

注 3.5.1 利用类似于引理3.5.3及引理3.5.4 的证明思想, 可知定理3.5.4中集合D可以取得更大一些. 例如,

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m,$$

而

$$D_m = \{\omega \left| b_{1n} \ne 0, \forall n; \quad \liminf_{n\to\infty} (\log r_{n-1})^m |b_{1n}| \ne 0 \right.\}.$$

此外, 值得强调的是, 定理3.5.4中所用的估计不只是针对LS估计, 只要$\{\theta_t\}$满足所需的性质即可.

下面, 我们进一步深入研究由(3.5.11)~(3.5.15)定义的LS-STR. 实际上, 定理3.5.4已经证明了一个关于该LS-STR的结果, 但我们希望定理的结果能以概率1(或至少在更大概率的集合上)成立. 为此先证如下引理.

引理 3.5.5 对系统(3.5.1)设条件(A1)~(A3)满足, 且控制律由(3.5.15)所定义. 进一步, 设$\{\tau_n\}$是一严格增的随机整数序列, 在D上满足

$$\inf_n |b_1(\tau_n + 1) - b_1| > 0 \qquad a.s., \tag{3.5.62}$$

其中$P(D) > 0$, 而$b_1(n)$ 是由LS估计θ_n给出的对b_1的估计, 则对$\forall \epsilon > 0$在D上有

$$\sup_{k \le \tau_n} \|\varphi_k\|^2 = O(\tau_n^{\epsilon} d_{\tau_n}) \qquad a.s. \tag{3.5.63}$$

且

$$r_{\tau_n} = O(\tau_n) \qquad a.s., \tag{3.5.64}$$

其中r_n和d_n分别由(3.5.25)和(3.5.26)定义.

证明 沿用引理3.5.3的证明易见(3.5.51)仍成立, 但因为这里没有假定条件(3.5.47), 所以(3.5.52)无法应用. 但可用下列方法导出一个对u_k^2类似的估计.

首先利用(3.2.4)及定理3.2.1 (i)知

$$\sum_{i=0}^{n}(\varphi_i^\tau\tilde{\theta}_{n+1})^2=O(\log r_n)\qquad a.s., \tag{3.5.65}$$

故

$$\max_{i\le n}(\varphi_i^\tau\tilde{\theta}_{n+1})^2=O(\log r_n)\quad a.s. \tag{3.5.66}$$

为简单起见, 下述证明中将省去"在D上a.s. 成立"一语, 所有关系式应理解为在除了D的某零测集后成立. 记

$$\tilde{b}_1(\tau_n+1)=b_1-b_1(\tau_n+1),$$

则据(3.5.62)有

$$\inf_n|\tilde{b}_1(\tau_n+1)|>0.$$

于是利用(3.5.51), (3.5.65)及$\|\tilde{\theta}_{n+1}\|^2=O(\log r_n)$ 知对任何$k\le\tau_n,\forall n\ge 1$,

$$\begin{aligned}
u_k^2&=\frac{1}{[\tilde{b}_1(\tau_n+1)]^2}\{\tilde{b}_1(\tau_n+1)u_k\}^2\\
&=\frac{1}{[\tilde{b}_1(\tau_n+1)]^2}\{[\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_{\tau_n+1}-\tilde{b}_1(\tau_n+1)u_k]-\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_{\tau_n+1}\}^2\\
&\le\frac{2}{[\tilde{b}_1(\tau_n+1)]^2}\{|\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_{\tau_n+1}-\tilde{b}_1(\tau_n+1)u_k|^2+(\varphi_k^\tau\tilde{\theta}_{\tau_n+1})^2\}\\
&=O((\log r_{\tau_n})[\|\varphi_k\|^2-u_k^2])+O(\log r_{\tau_n})\\
&=O((\log r_{\tau_n})L_k)+O(d_{\tau_n}\log r_{\tau_n}),
\end{aligned}$$

其中$L_k\triangleq\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}y_i^2$. 将上式与(3.5.51) 相结合得$\forall k\le\tau_n$,

$$\|\varphi_k\|^2=O((\log r_{\tau_n})L_k)+O(d_{\tau_n}\log r_{\tau_n}).$$

再将此式代入(3.5.50)得$\forall k\le\tau_n$,

$$y_{k+1}^2=O(\alpha_k\delta_k(\log r_{\tau_n})L_k)+O(d_{\tau_n}\log r_{\tau_n}).$$

由此及L_k的定义知存在常数$C>0$使$\forall k\le\tau_n$,

$$L_{k+1}\le(\lambda+C\alpha_k\delta_k\log r_{\tau_n})L_k+O(d_{\tau_n}\log^2 r_{\tau_n}).$$

类似于引理3.5.4的证明可得

$$\sup_{k\le\tau_n}\|\varphi_k\|^2=O(r_{\tau_n}^\epsilon d_{\tau_n}),\quad\forall\epsilon>0,$$

故(3.5.63)成立, 进而, 据此及定理3.2.1从(3.5.49)不难推出(3.5.64)式. 证毕. ∎

在以下的讨论中, 每当我们说u_n由(3.5.15)定义时, 自然假定

$$P(b_1(n)\ne 0,\forall n)=1, \tag{3.5.67}$$

此处$b_1(n)$与那里的b_{1n}相同(如此改写是为了下面书写方便).

条件(3.5.67)可通过对噪声附加条件来保证. 事实上, 若$\{w_n\}$的所有有穷维分布关于Lebesgue测度是绝对连续的, 则(3.5.67)必成立(见本节习题).

定义

$$D_1 = \left\{\omega : \liminf_{n\to\infty} \sqrt{\log r_{n-1}} \cdot |b_1(n)| \neq 0\right\}. \tag{3.5.68}$$

对任何常数$a \in (0, |b_1|)$, 定义$\{\tau_n\}$如下:

$$\tau_n = \inf\{k > \tau_{n-1} : |b_1(k+1)| < a\}, \quad \tau_0 = 0. \tag{3.5.69}$$

显然, 在D_1的余集D_1^c上有$\tau_n < \infty, \forall n$, 因此若定义

$$\sigma_n = \begin{cases} n, & \omega \in D_1, \\ \tau_n, & \omega \in D_1^c, \end{cases} \tag{3.5.70}$$

则$\sigma_n < \infty, \forall n$, 且$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, a.s.$

定理 3.5.5 对系统(3.5.1)设条件(A1)~(A3)成立, 且LS-STR由(3.5.15)所定义, 则下述结果成立:

(i) 对由(3.5.69)~(3.5.70)定义的σ_n有

$$\begin{aligned} &r_{\sigma_n} = O(\sigma_n) \quad a.s., \\ &R_{\sigma_n+1} = O(\sigma_n^\epsilon d_{\sigma_n}), \quad \text{a.s.} \quad \forall \epsilon > 0, \end{aligned} \tag{3.5.71}$$

其中R_n, r_n和d_n分别由(3.5.16), (3.5.25)及(3.5.26)定义.

(ii) 设D_1和τ_n分别由(3.5.68)和(3.5.69)定义. 记

$$D = D_1 \bigcup D_2, \tag{3.5.72}$$

$$D_2 = \{\omega \in D_1^c : \sup_n \tau_{n+1}/\tau_n < \infty\}, \tag{3.5.73}$$

则在D上几乎处处有

$$R_n = O(n^\delta), \quad \forall \delta \in \left(\frac{2}{\beta}, 1\right), \tag{3.5.74}$$

其中β由条件(A1)给出.

证明 (i) 在D_1上利用定理3.5.4知结论成立, 故只需考虑D_1^c. 据τ_n的定义有

$$\inf_n |b_1(\tau_n+1) - b_1| \geq |b_1| - a > 0, \quad \omega \in D_1^c.$$

故据引理3.5.5知在D_1^c上, 对$\forall \epsilon > 0$有

$$r_{\tau_n} = O(\tau_n), \quad \sup_{i \leq \tau_n} \|\varphi_i\|^2 = O(\tau_n^\epsilon d_{\tau_n}).$$

故由(3.5.14), (3.5.4)及定理3.2.1知

$$\begin{aligned} R_{\tau_n+1} &= \sum_{i=0}^{\tau_n} (y_{i+1} - y_{i+1}^* - w_{i+1})^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\tau_n} (\tilde{\theta}_i^\tau \varphi_i)^2 = \sum_{i=0}^{\tau_n} \alpha_i (1 + \varphi_i^\tau P_i \varphi_i) \\ &= O\left(\tau_n^\epsilon d_{\tau_n} \sum_{i=0}^{\tau_n} \alpha_i\right) = O\left(\tau_n^\epsilon d_{\tau_n} \log r_{\tau_n}\right), \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

因此在D_1^c上(3.5.71)也成立.

(ii) 首先在D_1上利用定理3.5.4并注意d_n可取为

$$d_n = O(n^\delta), \quad \forall \delta \in \left(\frac{2}{\beta}, 1\right)$$

可知(3.5.74)成立.

在$D_2 \subset D_1^c$上利用(3.5.71)可知

$$R_{\tau_n} = O(\tau_n^\delta), \quad \forall \delta \in \left(\frac{2}{\beta}, 1\right).$$

于是

$$\sup_n [n^{-\delta} R_n] = \sup_k \sup_{n \in [\tau_k, \tau_{k+1}]} (n^{-\delta} R_n)$$
$$\leq \sup_k \left(\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\right)^\delta (\tau_{k+1}^{-\delta} R_{\tau_{k+1}}) < \infty$$

故(3.5.74)在D_2上也成立. 证毕. ∎

注 3.5.2 定理3.5.5(i)说明LS-STR(3.5.15)沿着子序列$\{\sigma_n\}$是几乎处处稳定且最优的; 定理3.5.5(ii)大大改进了定理3.5.4. 例如, 利用定理3.5.5(ii)易知下列情形中任何一种就可以保证LS-STR的最优性:

(a) $\liminf_{n\to\infty} |b_1(n)| \neq 0 \quad a.s.$;

(b) 极限$\lim_{n\to\infty} b_1(n) \quad a.s.$存在;

(c) 存在某增随机函数$k_n \to \infty, k_{n+1} = O(k_n)$使

$$\min_{k \in [k_n, k_{n+1}]} \{|b_1(k)|\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad a.s.$$

在习题中将讨论何时由(3.5.72)所定义的集合D之概率为1的情形.

习题9.5

9.5.1 考虑系统(3.5.1)设控制律由(3.5.14)(或(3.5.15))所定义, 但参数估计值θ_n由WLS算法(3.2.25)–(3.2.28)所给出. 证明：在条件(A1)–(A3)下有

$$R_n = o(n), \quad \text{a.s.},$$

其中R_n由(3.5.16)所定义, 而$\delta > 0$由(3.2.28)所定义.

9.5.2 设$x_k \in \mathbb{R}^d$, $(d > 0)$, $k \geq 0$, 是一个向量序列, 且对任何$k < 0$有$x_k \equiv 0$. 对任意一个非零多项式$F(z)$, 记$\bar{x}_k = F(z) x_k$, 证明:存在常数$c > 0$使对任何$n \geq 0$有

$$\lambda_{\min}(\sum_{k=0}^n x_k x_k^\tau) \geq c \lambda_{\min}(\sum_{k=0}^n \bar{x}_k \bar{x}_k^\tau).$$

9.5.3 考虑由(3.5.11)–(3.5.15)所定义的LS自校正调节器. 证明：若噪声$\{w_n\}$的所有的有穷维分布关于Lebesgue测度是绝对连续的, 则必有

$$P(b_{1n} \neq 0) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

(提示: 可参考[5]或[37])

9.5.4 考虑系统(3.5.1)及由(3.5.16)所定义的R_n. 设本节条件(A1)和(A3)满足且$B(z)$与$A(z)-1$互质, $|a_p|+|b_p| \neq 0$. 进一步, 假设闭环系统是最优的, 即$R_n = o(n)$, a.s. 证明:对由(3.5.19)所定义的$(p+q-1)$维回归ϕ_n必满足下列持续激励条件：

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_{\min}\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^n \phi_i \phi_i^\tau\} > 0, \quad a.s.$$

9.5.5 考虑系统(3.5.1). 设本节条件(A1)–(A2)满足且$B(z)$与$A(z)-1$互质, $|a_p|+|b_q|\neq 0$, $w_n^2=O(n^\epsilon)$, $\forall\epsilon>0$, a.s. 若LS自校正调节器定义为

$$u_n=\frac{1}{\hat{b}_{1n}}\{b_{1n}u_n-\theta_n^\tau\phi_n\},$$
$$\hat{b}_{1n}=\begin{cases}b_{1n}, & \text{若}|b_{1n}|\geq\dfrac{1}{\sqrt{n\log(n+1)}},\\ b_{1n}+\frac{sgn(b_{1n})}{\sqrt{n\log(n+1)}}, & \text{若上式不成立}\end{cases}$$

其中ϕ_n和θ_n分别由(3.5.3)和(3.5.11)所定义, 而b_{1n}是由LS估计θ_n给出的对b_1的估计. 证明:

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i-w_i)^2=o(n^\epsilon),\quad a.s.,\quad \forall\epsilon>0.$$

(提示: 可参考[14])

9.5.6 对系统(3.5.1), 设条件(A1)–(A3)满足, 且$b_1>0$. 考虑下列投影的LS算法:

$$\hat{\theta}_{n+1}=\pi_n\{\hat{\theta}_n+a_nP_n\phi_n(y_{n+1}-\phi_n^\tau\hat{\theta}_n)\},$$

其中a_n, ϕ_n, P_n与LS算法(3.5.11)–(3.5.13)中定义一样, 而投影算法$\pi_n\{\cdot\}$定义为

$$\pi_n\{\cdot\}=\mathrm{argmin}_{y\in D_n}\|P_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(x-y)\|,\quad x\in\mathbb{R}^{p+q},$$

而

$$D_n=\left\{\theta:b_1\geq\frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}}\right\},\quad n\geq 1.$$

证明: 由$\hat{\theta}_n^\tau\phi_n=y_{n+1}^*$所决定的自校正调节器具有与定理3.5.1 一样的收敛速度, 即$R_n=O(n^\epsilon d_n)$, a.s. $\forall\epsilon>0$.

9.5.7 仍考虑上题中的系统和条件, 但此时$\hat{\theta}_k$由下列所定义

$$\hat{\theta}_k=\theta_k+P_k^{1/2}e_{i_k},$$

其中θ_k与P_k由LS算法(3.5.11)–(3.5.13)所定义, 而$\{i_k\}$是一个取值于$\{0,1,\dots,d\}$中的整数序列($d=p+q$),

$$i_k=\mathrm{argmin}_{0\leq i\leq d}|b_{1k}+e_{p+1}^\tau P_k^{1/2}e_i|$$

其中$e_0=0$, e_i是$d\times d$维单位阵I的第i列. 证明：由该$\{\hat{\theta}_k\}$所决定的自校正调节器仍具有上题中的收敛速度.

(提示：先证明$\liminf\limits_{k\to\infty}(\log r_{k-1})|\hat{b}_{1k}|^2\neq 0$, 其中$r_k$由(3.5.25)所定义而$\hat{b}_{1k}$是$\hat{\theta}_k$中对$b_1$的估计值, 可参考[16]).

9.5.8 在定理9.5.11的条件下, 进一步假设

(i) $A(z)$与$B(z)$互质, 且$|a_p|+|b_q|\neq 0$,

(ii) $\{y_i^*\}$满足持续激励条件：

$$\liminf_{n\to\infty}\lambda_{\min}\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}Y^*Y^{*\tau}\}\neq 0,$$

其中$Y_i^*\triangleq[y_i^*,\dots,y_{i-p-q+1}^*]^\tau$. 证明：LS自校正调节器(3.5.15)具有对数律:

$$R_n\sim(p+q)\sigma_w^2\log n, a.s.,$$

且

$$\|\theta_n-\theta\|^2=O(\frac{\log\log n}{n}), a.s.,$$

其中假定, $\sigma_w^2\triangleq E[w_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]>0$. (提示: 可参考[16])

§3.6 非最小相位系统的自适应控制

考虑下列单输入单输出线性随机模型

$$A(z)y_t = B(z)u_t + w_t, \tag{3.6.1}$$

其中如上节一样, y_t, u_t 与w_t 分别是系统的输出、输入与噪声信号, $A(z)$ 与$B(z)$ 是后移算子z 的多项式:

$$A(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_p z^p, \quad p \geq 0, \tag{3.6.2}$$

$$B(z) = b_1 z + \cdots + b_q z^q, \quad q \geq 1. \tag{3.6.3}$$

在上节中, 我们假定了系统的最小相位条件, 即$B(z)$稳定, 考虑了输出跟踪问题. 本节将不做此假定, 考虑极点配置问题. 为此, 我们引进下述两个条件:

A1). $\{w_t, \mathcal{F}_t\}$ 是鞅差序列, 满足

$$\sup_{t\geq 0} E\big[w_{t+1}^2 \bigm| \mathcal{F}_t\big] < \infty, \quad \text{a.s.}, \tag{3.6.4}$$

且

$$\sigma_w^2 \triangleq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^2 < \infty.$$

A2). 多项式$A(z)$ 与$B(z)$ 是互质的.

设$A^*(z)$ 是阶数为$2n-1$ 的稳定多项式, 其中$n = \max(p, q)$. 利用条件A2)知, 一定存在唯一的$(n-1)$阶多项式$L(z)$ 及$R(z)$ 使$L(0) = 1$ 且

$$A(z)L(z) + B(z)R(z) = A^*(z). \tag{3.6.5}$$

如果控制序列由下式产生(极点配置控制)

$$L(z)u_t = R(z)\{y_t^* - y_t\}, \tag{3.6.6}$$

其中$\{y_t^*\}$ 是有界确定性参考信号, 那么闭环系统将以$A^*(z)$为极点:

$$\begin{aligned} A^*(z)y_t &= [A(z)L(z) + B(z)R(z)]y_t \\ &= L(z)[B(z)u_t + w_t] + B(z)[R(z)y_t^* - L(z)u_t] \\ &= L(z)w_t + B(z)R(z)y_t^*. \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

容易看出, 此时系统在下列意义下是稳定的:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(y_i^2 + u_i^2) < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{3.6.8}$$

当$A(z)$ 和$B(z)$ 未知时, 上述极点配置控制律不能应用. 我们可以用参数估计方法估计未知系数, 从而得到多项式$A(z)$ 与$B(z)$ 的估计值$A_t(z)$ 与$B_t(z)$. 但是, 一般来讲$A_t(z)$ 与$B_t(z)$ 不一定互质, 因而构造自适应极点配置有基本困难. 下面, 我们给出一个构造估计值$A_t(z)$ 与$B_t(z)$ 的方法, 使得对任何的输入序列$\{u_t\}$, 都能保证$A_t(z)$ 与$B_t(z)$ 的一致互质性.

考虑由§9.2中的WLS算法(3.2.25)-(3.2.28)给出的对参数

$$\theta = [-a_1 \cdots -a_p \; b_1 \cdots b_q]^\tau \tag{3.6.9}$$

的WLS估计值θ_t 及相应的"协方差"矩阵P_t.

定义

$$\beta_t^* = P_t^{-\frac{1}{2}}(\theta - \theta_t),$$

则根据定理3.2.5(i)知$\{\beta_t^*\}$是几乎处处有界序列, 且有

$$\theta = \theta_t + P_t^{\frac{1}{2}}\beta_t^*. \tag{3.6.10}$$

尽管β_t^* 未知(由于θ未知), 但上式说明一定存在有界适应序列$\{\beta_t, \mathcal{F}_t\}$ 使下列"正则化"的估计值

$$\hat{\theta}_t = \theta_t + P_t^{\frac{1}{2}}\beta_t \tag{3.6.11}$$

对应于一个一致能控的估计模型. 进一步, 上述估计值$\hat{\theta}_t$ 仍保留WLS算法的主要性质. 这就是下面的引理(证明见本节习题).

引理 3.6.1 考虑由(3.6.11)给出的参数估计值, 其中$\{\theta_t\}$ 和$\{P_t\}$ 由WLS算法(3.2.25)-(3.2.28)给出, $\{\beta_t\}$ 是任意有界序列. 若条件A1)满足, 则$\tilde{\theta}_t \triangleq \theta - \hat{\theta}_t$ 满足下列两条性质:

i) $\|P_t^{-\frac{1}{2}}\tilde{\theta}_t\|^2 = O(1), \quad \text{a.s.},$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{t}(\phi_i^\tau\tilde{\theta}_i)^2 = o(r_t) + O(1), \quad \text{a.s.},$

其中ϕ_i 是回归向量, 而$r_t \triangleq 1 + \sum\limits_{i=1}^{t}\|\phi_i\|^2$.

下面, 我们将说明如何选取$\{\beta_t\}$ 使得由(3.6.11)中$\hat{\theta}_t$ 给出的估计多项式$A_t(z)$ 与$B_t(z)$具有所需互质性.

对由(3.6.9)所定义的参数θ, 定义($n \triangleq \max(p,q)$),

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad b(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.6.12}$$

容易证明(见本节习题), $(A(\theta), b(\theta))$ 能控$\Longleftrightarrow$ $A(z)$ 与$B(z)$ 互质$\Longleftrightarrow$ $M(\theta)$ 非奇异, 其中$M(\theta)$ 是Sylvester矩阵

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_n & & & a_1 & b_n & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_n & 0 & & & b_n \end{pmatrix} \tag{3.6.13}$$

我们下面选取$\{\beta_t\}$ 使得$M(\hat{\theta}_t)$ 一致非奇异即可. 这可转化为在单位立方体

$$D \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, 0 \le x_i \le 1, \quad 1 \le i \le d\right\}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad d = p + q$$

上优化下列非负多元函数的问题:

$$f_t(x) \triangleq \left|\det M\big(\theta_t + P_t^{\frac{1}{2}}x\big)\right|, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \ge 0. \tag{3.6.14}$$

为此, 假设$\{\eta_t\}$ 是在D 上具有均匀分布的d-维独立随机向量序列, 并且与$\{w_t\}$ 独立. 取$\gamma > 0$ 使

$$1 \geq 2\gamma + \gamma^2. \tag{3.6.15}$$

递推地定义$\{\beta_t\}$如下:

$$\beta_t = \begin{cases} \eta_t, & \text{当 } f_t(\eta_t) \geq (1+\gamma) f_t(\beta_{t-1}), \\ \beta_{t-1}, & \text{当 } f_t(\eta_t) < (1+\gamma) f_t(\beta_{t-1}). \end{cases} \tag{3.6.16}$$

这是一个借助于随机搜索法来近似最大化$f_t(x)$ 的简单方法, $\gamma > 0$ 的作用是为了保证$\{\beta_t\}$ 的收敛性. 下面定理说明如此定义的$\{\beta_t\}$ 确实满足要求.

定理 3.6.1 对由(3.6.11)定义的$\hat{\theta}_t$, 假设β_t 按(3.6.16)选取, 则对任何的反馈输入序列$\{u_t\}$ 都有

(i) $\{\hat{\theta}_t\}$ 几乎处处收敛(事实上, 有限步后β_t 是常数);

(ii) $(A(\hat{\theta}_t), B(\hat{\theta}_t))$ 几乎处处一致能控.

证明 我们将证明分为三步:

第一步: 我们证明对任何$t \geq 0$, $(A(\hat{\theta}_t), b(\hat{\theta}_t))$ 是几乎处处能控的, 或$f_t(\beta_t) \neq 0$ a.s., 其中$f_t(x)$ 由(3.6.13)所定义.

为此我们仅需证明$f_t(\eta_t) \neq 0$ a.s. $\forall t \geq 0$ 即可, 因为根据(3.6.16)我们总有

$$f_t(\beta_t) \geq \frac{f_t(\eta_t)}{1+\gamma}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.6.17}$$

利用条件A2)及(3.6.10)从(3.6.13), 易见$\det M(\theta_k + P_t^{\frac{1}{2}} x)$ 是x 的非零实有理多项式. 因此, 对Lebesgue测度$L\{\cdot\}$ 有(见本节习题)

$$L\{x : f_t(x) = 0\} = 0 \quad \text{a.s.} \quad \forall t \geq 0.$$

这说明, 对D上的均匀概率测度$\mu(\cdot)$有

$$\mu(x \in D : f_t(x) = 0) = 0, \quad \text{a.s.} \quad \forall t \geq 0.$$

进一步, 对任何适应的输入序列$\{u_t\}$, 易见$f_t(\cdot)$ 是关于σ 代数$\mathcal{G}_{t-1} \triangleq \sigma\{w_i, \eta_{i-1}, i \leq t\}$ 可测的. 于是, 利用η_t 与$\mathcal{G}_{t-1}$ 的独立性, 知

$$\begin{aligned} EI(f_t(\eta_t) = 0) &= E\Big\{ E[I(f_t(\eta_t) = 0) \mid \mathcal{G}_{t-1}] \Big\} \\ &= E\Bigg\{ \int_{x \in D} I(f_t(x) = 0) \mu(dx) \Bigg\} \\ &= E\Bigg\{ \mu(x \in D) : f_t(x) = 0 \Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

这说明$P(f_t(\eta_t) = 0) = 0$或$f_t(\eta_t) \neq 0$ a.s., $\forall t \geq 0$. 因此$[A(\tilde{\theta}), b(\hat{\theta}_t)]$是a.s.能控的.

第二步: 我们证明存在一个正随机变量$\delta_\infty > 0$使

$$\limsup_{t \to \infty} f_t(\eta_t) \geq \delta_\infty, \quad \text{a.s.} \tag{3.6.18}$$

记

$$\delta_t \triangleq \max_{x \in D} f_t(x), \quad D_t \triangleq \Big\{ x \in D : \ f_t(x) \geq \frac{\delta_t}{2} \Big\}.$$

注意到$\theta_t, P_t^{\frac{1}{2}}$及$\delta_t$都是$\mathcal{G}_{t-1}$可测的, 且$\eta_t$与$\mathcal{G}_{t-1}$独立, 其中$\mathcal{G}_{t-1}$由上面所定义. 于是根据条件期望性质有

$$\begin{aligned} P\Big(f_t(\eta_t) \geq \frac{\delta_t}{2} \;\Big|\; \mathcal{G}_{t-1}\Big) &= \int_{x\in D} I\Big(f_t(x) \geq \frac{\delta_t}{2}\Big)\mu(dx) \\ &= \int_{x\in D_t} \mu(dx) = \mu(D_t). \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

下面我们将证明当$t\to\infty$时, $\mu(D_t)\not\to 0$ a.s..

注意到$\{\theta_t\}$和$\{P_t^{\frac{1}{2}}\}$都是a.s.收敛的, 我们可以定义一个函数$f(x)$为

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} f_t(x), \quad \text{a.s.,} \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{3.6.20}$$

现设β^*是由(3.6.10)所定义的$\{\beta_t^*\}$的收敛点. 于是根据条件A2)知$f(\beta^*) = |\det M(\theta)| \not\equiv 0$. 故有$f(x)\not\equiv 0$ a.s. 这说明$\max\limits_{x\in D} f(x) \neq 0$ a.s., 因为$f(x)$ 是一个实多项式的绝对值且$L(D) > 0$. 进一步, 易见$f_t(x)$在D上一致收敛于$f(x)$. 因此, $\delta_t\to\delta_\infty$, 其中$\delta_\infty = \max\limits_{x\in D} f(x) > 0$ a.s..

定义

$$D_\infty = \{x\in D:\ \ f(x)\geq \lambda\delta_\infty\}, \quad \frac{1}{2}<\lambda<1,$$

利用$f(\cdot)$的连续性, 易见$L(D_\infty)>0$. 因此, $[f_t(x),\delta_t]$收敛于$[f(x),\delta_\infty]$, 且对充分大的t有$L(D_t)\geq L(D_\infty)$. 这说明, $L(D_t)\not\to 0$, 因为$\mu(D_t) = \dfrac{L(D_t)}{L(D)}$.

因此, 根据(3.6.19)知

$$\sum_{t=1}^{\infty} P\Big(f_t(\eta_t)\geq \frac{\delta_t}{2} \;\Big|\; \mathcal{G}_{t-1}\Big) = \infty, \quad \text{a.s.}$$

从而根据Borel-Cantelli-Lévy引理(定理2.2.8)知

$$\sum_{t=1}^{\infty} I\Big(f_t(\eta_t)\geq \frac{\delta_t}{2}\Big) = \infty, \quad \text{a.s.}$$

这意味着

$$\limsup_{t\to\infty} f_t(\eta_t) \geq \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\delta_t = \frac{\delta_\infty}{2} > 0, \quad \text{a.s.}$$

故(3.6.18)成立

第三步: 下面我们证明存在正随机变量δ和t_0使

$$f(\beta_t)\geq\delta, \quad a.s., \quad \forall\, t\geq t_0, \tag{3.6.21}$$

其中$f(x)$由(3.6.20)所定义.

利用(3.6.17)及(3.6.18)易见

$$\limsup_{t\to\infty} f_t(\beta_t) \geq \frac{\delta_\infty}{1+\gamma} > 0, \quad \text{a.s.}$$

因此, 利用$f_t(x)$的一致收敛性, 易见存在正随机变量$\delta>0$及$t_0>0$, 使

$$f_{t_0}(\beta_{t_0}) \geq 2\delta > 0, \tag{3.6.22}$$

且

$$|f(\beta_s) - f_t(\beta_s)| \leq \gamma^2\delta, \quad \forall\, t\geq t_0, \quad \forall\, s\geq 0, \tag{3.6.23}$$

其中γ由(3.6.16)所给出.

我们下面用归纳法来证明(3.6.21).

首先, 对$t=t_0$, 利用(3.6.22)及(3.6.23)知

$$f(\beta_0) \geq f_{t_0}(\beta_0) - \gamma^2\delta \geq (2-\gamma^2)\delta \geq \delta.$$

其次假定(3.6.21)对$t = k \geq t_0$成立. 我们考虑$t = k+1$的情形. 如果$\beta_{k+1} = \beta_k$, 则据归纳法假设知(3.6.21)成立. 否则, 如果$\beta_{k+1} \neq \beta_k$, 则根据定义(3.6.16), 我们有

$$f_{k+1}(\beta_{k+1}) \geq (1+\gamma) f_{k+1}(\beta_k) \tag{3.6.24}$$

据此, (3.6.23)及$f(\beta_k) \geq \delta$知

$$\begin{aligned} f(\beta_{k+1}) &\geq f_{k+1}(\beta_{k+1}) - \gamma^2\delta \\ &\geq (1+\gamma) f_{k+1}(\beta_k) - \gamma^2\delta \\ &\geq (1+\gamma)[f(\beta_k) - \gamma^2\delta] - \gamma^2\delta \\ &\geq [(1+\gamma)(1-\gamma^2) - \gamma^2]\delta \geq \delta, \end{aligned} \tag{3.6.25}$$

其中在最后一个不等式中利用了(3.6.15)式. 因此(3.6.21)式是正确的.

第四步: 最后我们来证明定理2.2.8的正确性. 我们首先证明极限$\lim\limits_{t\to\infty} f(\beta_t) = f$存在且$f > 0$ a.s.. 为此, 我们仅需证明$f(\beta_k)$对$k \geq t_0$是递增的, 而这又仅需考虑$\beta_{k+1} \neq \beta_k$的情形. 当$k \geq t_0$时, 利用(3.6.25)及(3.6.21)知

$$\begin{aligned} f(\beta_{k+1}) &\geq f(\beta_k) + \gamma f(\beta_k) - (1+\gamma)\gamma^2\delta - \gamma^2\delta \\ &\geq f(\beta_k) + \delta\gamma[1 - 2\gamma - \gamma^2] \\ &\geq f(\beta_k). \end{aligned}$$

进一步, 由于$f_t(x)$一致收敛于$f(x)$, 故有

$$\lim_{t\to\infty} f_{t+1}(\beta_t) = \lim_{t\to\infty} f_t(\beta_t) = f > 0, \quad \text{a.s.}$$

该式与第一步中证明的结论相结合知定理的结论(ii)成立.

为了证明定理的第一个结论(i), 我们只需证明对几乎所有的样本, β_t在有限步之后必是常数. 我们采用反证法. 如若不然, 则根据定义(3.6.16), 不等式(3.6.24)就会对无穷多个k成立. 于是, 令这样的$k \to \infty$, 则有

$$f \geq (1+\gamma) f.$$

但这是不可能的, 因为$f > 0$. 故定理得证. ∎

下面我们考虑自适应控制问题.

设$\{\hat\theta_t\}$由(3.6.11)给出, 其中β_t按(3.6.16)式选取. 利用$\hat\theta_t$可以用标准的方式构造下列估计多项式:

$$\begin{aligned} A_t(z) &= 1 + a_1(t)z + \cdots + a_n(t)z^n, \\ B_t(z) &= b_1(t)z + \cdots + b_n(t)z^n. \end{aligned} \tag{3.6.26}$$

根据定理3.6.2知$A_t(z)$与$B_t(z)$一致互质, 于是下列Diophantine方程

$$A_t(z)L_t(z) + B_t(z)R_t(z) = A^*(z). \tag{3.6.27}$$

存在唯一的解$L_t(z)$与$R_t(z)$, 其阶数均为$(n-1)$, 且其系数是有界且收敛的. 进一步, 极点配置自适应控制律由下式产生

$$L_t(z)u_t = R_t(z)\{y_t^* - y_t\}. \tag{3.6.28}$$

定理 3.6.2 对系统(3.6.1), 上述定义的自适应极点配置控制律(3.6.28)是稳定的, 即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t^2+u_t^2)<\infty,\quad \text{a.s.}$$

证明 定义

$$v_t=A_t(z)y_t-B_t(z)u_t,$$

易见

$$v_t=w_t+\tilde{\theta}_t^\tau\phi_t,\quad (\tilde{\theta}_t\triangleq\theta-\hat{\theta}_t).$$

由于多项式$A_t(z),B_t(z),L_t(z)$及$R_t(z)$的系数是收敛的, 利用上式及(3.6.27)–(3.6.28), 经简单运算可得,

$$\begin{aligned}A^*(z)y_t&=[A_t(z)L_t(z)+B_t(z)R_t(z)]y_t\\&=L_t(z)[A_t(z)y_t]+B_t(z)[R_t(z)y_t]+o\Big(\max_{0\le i\le 2n}\{|y_{t-i}|\}\Big)\\&=L_t(z)[B_t(z)u_t+v_t]+B_t(z)[R_t(z)y_t^*-L_t(z)u_t]+o\Big(\max_{0\le i\le 2n}\{|y_{t-i}|\}\Big)\\&=L_t(z)v_t+[B_t(z)R_t(z)]y_t^*+o\Big(\max_{0\le i\le 2n}\{|y_{t-i}|+|u_{t-i}|\}\Big).\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$A^*(z)u_t=-R_t(z)v_t+[A_t(z)R_t(z)]y_t^*+o(\max_{0\le i\le 2n}\{|y_{t-i}|+|u_{t-i}|\}).$$

于是利用引理3.6.1及$A^*(z)$的稳定性易见

$$\sum_{i=1}^{t}(y_i^2+u_i^2)=O(t)+o(r_t).$$

此式意味着$r_t=O(t)$, 故稳定性成立. 证毕. ∎

由于$\{\hat{\theta}_t\}$不一定收敛到真实的θ, 系统的闭环方程不一定渐近与理想的方程(3.6.7)相等, 因此我们用"衰减激励"方法设计"最优"的控制器.

设$\{\epsilon_i\}$是有界的i.i.d.序列, 它与$\{w_i,\eta_i\}$独立, 且具有零均值及单位方差. 设u_t^0定义为

$$L_t(z)u_t^0=R_t(z)\{y_t^*-y_t\},\tag{3.6.29}$$

其中$L_t(z)$与$R_t(z)$及由(3.6.27)所定义. 于是可定义系统的实际输入为

$$u_t=u_t^0+\frac{\epsilon_t}{t^{\frac{\epsilon}{2}}},\quad \epsilon\in\Big(0,\frac{1}{2n}\Big).\tag{3.6.30}$$

定理 3.6.3 对系统(3.6.1), 若适应控制由(3.6.30)所定义, 则闭环系统在下列意义下是最优的

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[A^*(z)y_t-L(z)w_t-B(z)R(z)y_t^*]^2\longrightarrow 0,\quad \text{a.s.}\quad T\to\infty.$$

习题9.6

9.6.1 证明若条件A2)成立, 则一定存在多项式$L(z)$ 和$R(z)$ 使Diophantine方程(3.6.5)成立.

9.6.2 证明引理(3.6.1)的两个结果.

9.6.3 证明由(3.6.2)-(3.6.3)所定义的多项式$A(z)$ 与$B(z)$ 互质性等价于由(3.6.13)所定义的$(A(\theta),b(\theta))$ 能控性, 后者又等价于由(3.6.13)所定义的矩阵$M(\theta)$ 非奇异性.

9.6.4 设$p(x_1\cdots x_d)$ 是非零的实有理函数, 则$L\{(x_1\cdots x_d):P(x_1\cdots x_d)=0\}=0$, 其中$L\{\cdot\}$ 是$\mathbb{R}^d$ 上的Lebesgue测度.

9.6.5 设$\{\theta_t\}$ 由WLS算法给出. 对由(3.6.12)定义的$[A(\theta),b(\theta)]$, 设初值$[A(\theta_0),b(\theta_0)]$ 可控. 进一步, 假设u_t是$\{y_0\cdots y_t\}$ 的有理函数, 且噪声$\{w_t\}$ 的所有有限维分布关于Lebesgue测度绝对连续, 证明对任何$t\geq 1,[A(\theta_t),b(\theta_t)]$几乎处处可控.

9.6.6 证明定理3.6.4的结论.

9.6.7 考虑下列函数序列的优化问题

$$\min_{x\in D} f_t(x),\quad t\geq 0,$$

其中假设

(i) 对任何$t\geq 0$, $f_t(x):\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$是$x$的连续函数;且对任何$x\in\mathbb{R}^d$当$t\to\infty$时, $f_t(x)\to f(x)$;

(ii) 对任何固定$x\in\mathbb{R}^d,\{f_t(x),\mathcal{F}_t\}$是适应序列, 其中$\{\mathcal{F}_t\}$是递增的$\sigma$-代数族;

(iii) D是$\mathbb{R}^d$中的紧子集, 且与内点的闭包一致;

(iv) $\{\eta_t\}$是$\mathbb{R}^d$中的独立序列, 均匀分布于D中. 进一步, η_t与$\mathcal{F}_t$是独立的.

考虑下列优化算法

$$x_t=\begin{cases}\eta_t, & \text{当 } f_t(\eta_t)\leq f_t(x_{t-1})-\epsilon,\\ x_{t-1}, & \text{当 } f_t(\eta_t)>f_t(x_{t-1})-\epsilon,\end{cases}$$

其中$x_0=\eta_0$, 且$\epsilon>0$.

证明在上述条件下, x_t的极限几乎处处存在(记为x_∞), 且$x_\infty\in S(\epsilon)$, 其中$S(\epsilon)$是$f(x)$在D上整体极小的ϵ邻域, 即

$$S(\epsilon)\triangleq\{x\in D:f(x)\leq f^*+\epsilon\},$$

其中$f^*\triangleq\min\limits_{x\in D}f(x)$.

9.6.8 考虑下列由状态方程描述的线性随机系统

$$x_{t+1}=Ax_t+Bu_t+w_{t+1},$$

其中$x_t\in\mathbb{R}^n$是可观测的状态向量, (A,B)是未知但能控的矩阵对, $\{w_t\}$是正态白噪声序列. 试设计一个自适应控制规律, 使得下列二次型指标

$$J(u)\triangleq\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[x_t^\tau Qx_t+u_t^\tau Ru_t]$$

达到极小, 其中$Q>0,R>0$是两个加权矩阵. (提示: 可参考[8][17])

参考文献

[1] Aström, K. J. and B. Wittenmark, Adaptive Control, Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd ed., 1995.

[2] Aström, K. J. and B. Wittenmark, On self-tuning regulators, Automatica, 9, 195–199, 1973.

[3] Bercu, B., Weighted estimation and tracking for ARMAX models, SIAM J. on Control and Optimization, 33(1), 89–106, 1995.

[4] Benveniste A., A. Metivier and P. Priouret, Algorithmes Adaptifs Et Approximations Stochastiques, Masson, 1987.

[5] Caines, P. E., Linear Stochastic Systems, New York:Wiley, 1988.

[6] Chen, H. F. and L. Guo, Convergence rate of least squares identification and adaptive control for stochastic systems, Int. J. of Control, 1986, Vol.44, No.5, 1459–1476.

[7] Chen, H. F. and L. Guo, Identification and Stochastic Adaptive Control, Birkhauser, Boston, 1991.

[8] Duncan, T. E., L., Guo, and B. Pasik-Duncan, Continuous-time linear-quadratic-Gaussian adaptive control, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.44, No.9, pp.1653-1662, 1999.

[9] Goodwin, G. C., P. Ramadge and P. E. Caines, Discrete time stochastic adaptive control, SIAM J. Control Optim. 19, 829–853, 1981.

[10] Goodwin, G. C. and K. S. Sin, Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[11] 郭雷, 时变随机系统—稳定性、估计与控制, 吉林科技出版社1993.

[12] Guo, L., Estimating time-varying parameters by Kalman filter based algorithm: Stability and convergence, IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.35, No.2, February, 1990,141-147.

[13] Guo, L., On adaptive stabilization of time-varying stochastic systems, SIAM J. On Control and Optimization, Vol.28,No.6, 1990, 1432–1451.

[14] Guo, L., Further results on least squares based minimum variance adaptive control, SIAM J. on Control and Optimization, Vol. 32, No. 1, 187–212, January, 1994.

[15] Guo, L., Stability of recursive stochastic tracking algorithms, SIAM J.on Control and Optimization, Vol. 32, No. 5, 1994, pp.1195–1225.

[16] Guo. L., Convergence and logarithm laws of self-tuning regulators, Automatica, Vol.31, No.3, pp.435-450, 1995

[17] Guo, L., Self-convergence of weighted least-squares with applications to stochastic adaptive control", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.41, No.1, January, pp.79-89, 1996.

[18] Guo, L., On critical stability of discrete-time adaptive nonlinear control, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.42, No.11, pp.1488-1499, 1997. 1998

[19] Guo, L. and H. F. Chen, The Astrom-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS based adaptive trackers, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.36, No.7, July, 1991, pp.802-812.

[20] Guo, L., D.W.Huang and E.J.Hannan, On ARX(infinity) approximation, Journal of Multivariate Analysis, Vol.32, No.1, pp.17-47, January, 1990.

[21] Guo, L. and L. Ljung, Performance analysis of general tracking algorithms, IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.40, No.8, pp.1388-1402, 1995.

[22] Guo, L. and L. Ljung, Exponential stability of general tracking algorithms, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.40, No.8, pp.1376–1387, 1995.

[23] Guo, L., L.Ljung and P.Priouret, Performance analysis of forgetting factor RLS algorithms, International J. of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 7, 525–537, 1993.

[24] Guo, L., L.Ljung and G.J.Wang, Necessary and sufficient conditions for stability of LMS, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.42, No.6, pp.761-770, 1997.

[25] Huang, D. W. and L. Guo, Estimation of nonstationary ARMAX models based on Hannan-Rissanen method, The Annals of Statistics, Vol.18, No.4, pp.1729-1756, 1990.

[26] Ioannou, P. A. and J. Sun, Robust Adaptive Control, PTR Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458,

1996?

[27] Kalman R. E., Design of a self-optimizing control system, Trans. ASME, 80, 468–478, 1958.

[28] Kumar, P. R., Convergence of adaptive control schemes using least-squares parameter estimates, IEEE Trans. Autom. Control, AC-35, 4, 416–423, 1990.

[29] Kumar, R. and J. B. Moore, Convergence of adaptive minimum variance algorithm via weighting coefficient selection, IEEE Trans. Automat. Contr. AC-27, 1, 146–153, 1982.

[30] Lai, T. L., Asymptotically efficient adaptive control in stochastic regression models, Adv. Appl. Math., 7, 23–45, 1986.

[31] Lai, T. L. and C. Z. Wei, Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems, Ann. Statist., 10, 154–166, 1982.

[32] Ljung L. and Gunnarsson, S., Adaptive tracking in system identification–A survey, Automatica, Vol.26, 1, 7–22, 1990.

[33] Ljung, L. and T. Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, Cambridge, MA:MIT Press, 1983.

[34] Lozano, R., Singularity-free adaptive pole-placement without resorting to persistency of excitation:Detailed analysis for first order systems, Automatica, 28, 27–33, 1992.

[35] Lozano, R. and X. H. Zhao, Adaptive pole-placement without excitation probing signals, IEEE Trans. Autom. Control, 39, 1,47–58, 1994.

[36] Macchi, O. and E. Eweda, Second-order convergence analysis of stochastic adaptive linear filtering, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-28, 1, 76–85, 1983.

[37] Meyn, S. P. and P. E. Caines, The zero divisor problem of multivariable stochastic adaptive control, Syst. Control Lett., 6, 235–238, 1985.

[38] Nassiri-Toussi K. and Ren W., On the convergence of least squares estimation in white noise, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 39, 2, 364–368, 1994.

[39] Solo, V. and X. Kong, Adaptive Signal Processing Algoritms: Stability and Performance, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1994.

[40] Sternby, J. On consistency for the method of least squares using martingale theory, IEEE Trans. Automat. Contr.., Vol AC-22, pp.346–352, 1977.

[41] Wei, C. Z., Adaptive prediction by least squares predictors in stochastic regression models with applications to time series, Ann. Statist., 15, 1667–1682.

[42] Widrow B. and S. Stearns, Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1985.

[43] Zhang, J., L. Guo and H. F. Chen, Lp-Stability of tracking errors for time-varying stochastic systems, Int. J. Adaptive control and signal processing, Vol.5., pp155-174, 1991.

[44] Zhigljavsky, A. A., Theory of Global Random Search, Boston, MA:Kluwer, 1991.

索　引