



第3章

庞德里雅金极大值原理

第3章——庞德里雅金极大值原理

1、原理

设系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$, 初始状态 $x(t_0) = x_0$, 其中 $x(t)$ 是 n 维向量, $u(t)$ 属于 m 维向量空间中的某一有界闭集 Ω 中的控制向量。假定 f 的各分量对 $x(t)$ 所有分量都是连续可微的, 对 $u(t)$ 的各分量是连续的。现要求在容许控制向量集合中寻求一最优控制向量 $u(t) \in \Omega$, 使性能指标

$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), u(t), t] dt$ 最小, 其中 F 对 $x(t)$ 的各分量是连续可微的, 对 $u(t)$ 各分量是连续的。一个使 J 取极小值的最优控制 $u^*(t)$ 须满足的必要条件如下:

第3章——庞德里雅金极大值原理

(1) 最优轨线 $x^*(t)$ 和对应的协态向量 $\lambda^*(t)$ 满足规范方程组

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

(2) 在最优轨线 $x^*(t)$ 上与最优控制 $u^*(t)$ 上对应的哈密顿函数 H 取最小值: $H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u \in \Omega} H(x^*, u, \lambda^*, t)$

(3) 边界条件

1、当 $x(t_f)$ 不受限时, $x(t_0) = t_0, \lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)}$

2、当存在终端约束条件 $\psi[x(t_f), t_f] = 0$ 时,

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x(t_f)} \cdot V$$

3、当终端固定时, $x(t_0) = t_0, x(t_f) = x_f$

第3章——庞德里雅金极大值原理

(4)

- ① t_f 固定, H 函数及 $x^*(t)$ 对 $u^*(t)$ 来说, 保持常数 (对定常系统)
- ② t_f 变动: H 函数保持零值 (对定常系统)

说明:

- ① 庞氏原理给出的仍是最优控制所必须满足的必要条件
- ② 庞氏原理没有给出最优控制存在性问题的解
- ③ 面对求解两点边值问题
- ④ 具体应用庞氏原理, 应将原理的结论与实际问题的特点相结合。

第3章——庞德里雅金极大值原理

2、双积分装置时间最优控制系统

考察惯用语性负荷在一无阻尼环境中运动情况：

$$m\ddot{y}(t) = f(t) \quad \text{设 } m = 1 \quad G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{S^2}$$

设 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ 得 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f \end{cases}$

$$J = \int_0^{t_f} dt, \quad |f(t)| \leq 1$$

问题：设系统的状态方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$ 其中控制变量 $u(t)$ 满足约束条件 $|u(t)| \leq 1$ ，设系

统的初始状态 $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ ；终端状态： $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 0$

性能指标 $J = \int_0^{t_f} dt$ 寻求最优控制，使 J 最小。

第3章——庞德里雅金极大值原理

求解：(1) 构造哈密顿函数： $H = F + \lambda^T f$ $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

(2) 协态方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$ ， $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = C_1 (\text{常数}) \\ \lambda_2 = -C_1 t + C_2 \end{cases}$

(3) 寻求 H 最小的 $u(t)$

由 $|u(t)| \leq 1$ 可知，当 $|u(t)| = 1$ ，且 $u(t)$ 的符号与 λ_2 相反时， H 最小

$$u(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2] = \begin{cases} 1 & \lambda_2 < 0 \\ -1 & \lambda_2 > 0 \\ \text{不定} & \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

(4) 对 $u^*(t), x^*(t)$ 而言，有 $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u = 0$

第3章——庞德里雅金极大值原理

(5) 分析

① $\lambda_2 \neq 0$

(如果 $\lambda_2 = 0$, 则 $-c_1t + c_2 = 0 \quad c_1t = c_2, c_1 = c_2 = 0 \quad \lambda_1 = 0$)

② λ_2 只在有限时刻取零值

$\lambda_2 = -c_1t + c_2 \quad -c_1t + c_2 = 0$, 以 t 为横坐标, λ 为纵坐标, 使 λ_2 为零的点, 即为

$\lambda_2 = c_2$ 与 $\lambda = -c_1t$ 的交点。

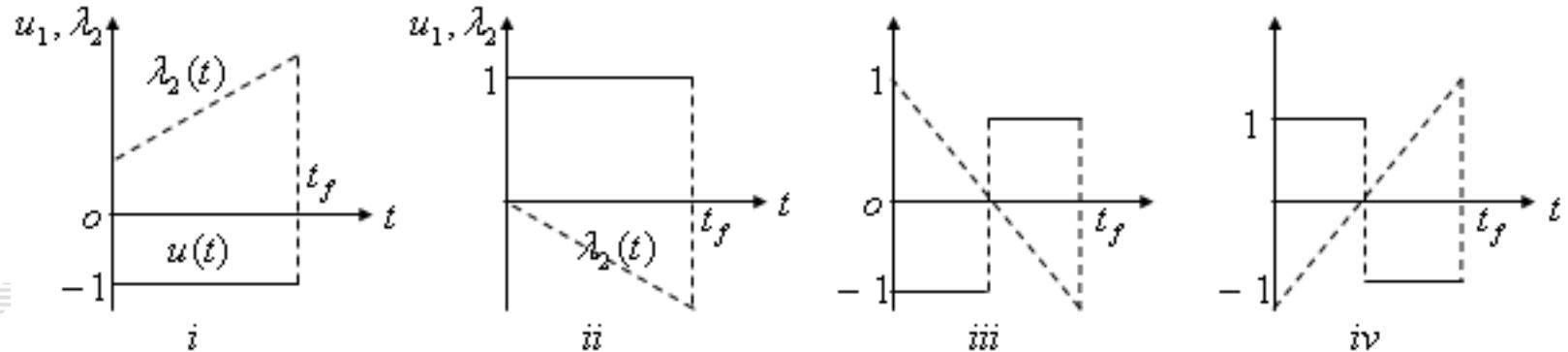
因此, λ_2 在 $[0, t_f]$ 上最多只有一点取零值

λ_2 在 $[0, t_f]$ 上最多只变号一次

$u(t)$ 在 $[0, t_f]$ 上最多只切换一次

这样, 可能的最优控制只能是下面四种情况。

第3章——庞德里雅金极大值原理



综上所述，如果 $u^*(t)$ 是双积分装置时间最优控制系统的最优控制，它必然是分段取恒值的函数，即除了有限个间断点，它分段取值于控制域的边界值 $+1$ 或 -1 。

快速控制系统的这个特性称为有限切换原理，相应的控制方式称为 Bang-bang 控制。

第3章——庞德里雅金极大值原理

(6) 求最优轨线

① $u = +1$

$$\dot{x}_2 = u, \quad dx_2 = dt, \quad x_2 = t + c_1, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(t) = t + x_{20}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}(t + x_{20})^2 + x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 = \frac{1}{2}x_2^2 + \eta, \quad \eta = x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2$$

② $u = -1$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + q \quad \text{其中 } q = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2$$

相轨迹:

$$\text{曲线BO: } x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\text{曲线AO: } x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$$

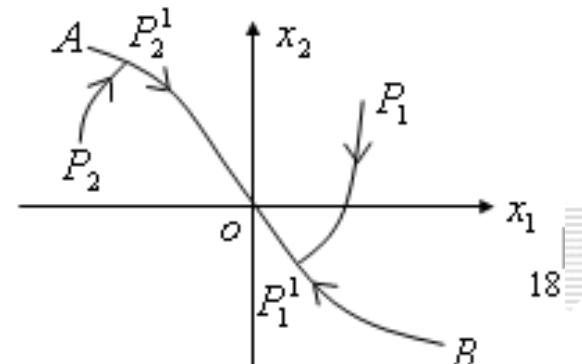
$$\text{曲线AOB: } x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|$$

第3章——庞德里雅金极大值原理

- i 当初始状态位于曲线BO上，最优控制为{+1}，相轨迹为曲线 BO
- ii 当初始状态位于曲线AO上，最优控制为{-1}，相轨迹为曲线 AO
- iii 当初始状态位于曲线AOB上方，如 P_1 点最优控制为{-1,+1}，相轨迹为 $P_1P'_1O$
- iv 当初始状态位于曲线AOB下方，如 P_2 点最优控制为{+1,-1}，相轨迹为曲线 $P_2P'_2O$

$P_2P'_2O$

引进开关函数 $h(x_1) = \frac{1}{2}x_2|x_2| + x_1$



第3章——庞德里雅金极大值原理

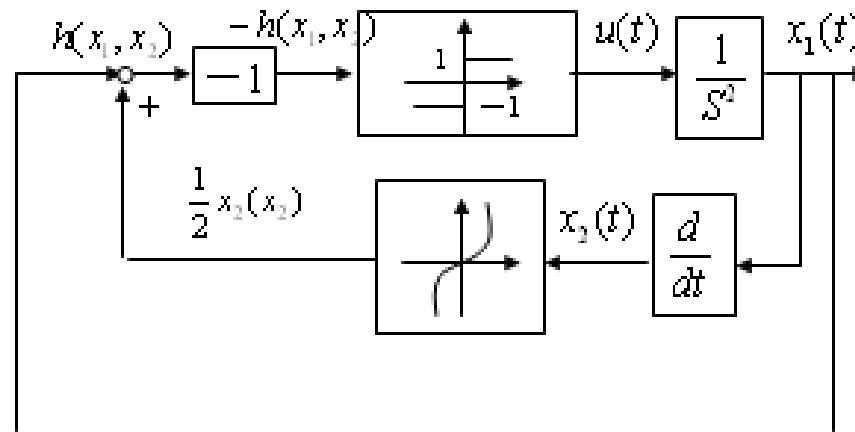
开关曲线为 $x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| = 0$ —— 曲线AOB

(7) 结论：

双积分装置时间最优控制系统的控制规律

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{当 } h(x_1, x_2) < 0 \text{ 及 } h(x_1, x_2) = 0 \quad x_2 \leq 0 \\ -1 & \text{当 } h(x_1, x_2) > 0 \text{ 及 } h(x_1, x_2) = 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(8) 结构



第3章——庞德里雅金极大值原理

3、双积分装置燃料最优控制系统

(1) 问题

设有 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$, $|u(t)| \leq 1$, 初态 $\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$, 末态 $\begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases}$,

性能指标 $J = \int_0^{t_f} |u(t)| dt$, 寻求最优控制 $u^*(t)$ 使 J 最小。

第3章——庞德里雅金极大值原理

(2) 求解

1、构造哈密顿函数: $H = F + \lambda^T f$

$$H = |u| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

2、由协态方程: $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases}, \therefore \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{10} \\ \lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20} \end{cases}$$

3、对 $u^*(t)$ 和 $x^*(t)$ 有

$$H = |u| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u = 0$$

4、求使 H 函数最小的 $u(t)$

第3章——庞德里雅金极大值原理

1) 分析 $R = |u| + \lambda_2 u$, 其中 $-1 \leq u \leq +1$

当 $-1 \leq u \leq 0$: $R = -u + \lambda_2 u = u(\lambda_2 - 1)$

$$\begin{cases} \lambda_2 > 1, u = -1 \\ \lambda_2 < 1, u = 0 \\ \lambda_2 = 1, -1 \leq u \leq 0 \end{cases}$$

当 $0 \leq u \leq +1$: $R = u + \lambda_2 u = u(\lambda_2 + 1)$

$$\begin{cases} \lambda_2 > -1, u = 0 \\ \lambda_2 < -1, u = +1 \\ \lambda_2 = -1, 0 \leq u \leq +1 \end{cases}$$

第3章——庞德里雅金极大值原理

引入死区函数：

$$y = dez[x] = \begin{cases} 0, |x| < 1 \\ \operatorname{sgn}[x], |x| > 1 \\ 0 \leq y \leq 1, x = 1 \\ -1 \leq y \leq 0, x = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{有 } u(t) = -dez[\lambda_2] = \begin{cases} 0, |\lambda_2| < 1 \\ -\operatorname{sgn}[\lambda_2], |\lambda_2| > 1 \\ 0 \leq u \leq 1, \lambda_2 = -1 \\ -1 \leq u \leq 0, \lambda_2 = +1 \end{cases}$$

第3章——庞德里雅金极大值原理

2) 确定 $u^*(t)$

当 $\lambda_{10}=0$, 为奇异情况

由协态方程有 $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_{20}$

\therefore 要满足 $H^* = |u| + \lambda_2 u = 0$, 则 $\lambda_2 = \pm 1$

此时只能确定 $u^*(t)$ 的符号及取值范围, 无法确定大小

引进 $v(t), v(t)$ 为不恒等于零的非负分段连续函数

且 $0 \leq v(t) \leq +1, t \in [0, t_f]$

$\therefore u^*(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(t)$

第3章——庞德里雅金极大值原理

当 $\lambda_{10} \neq 0$,为平凡情况

有 $\lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20}$ 是时间 t 的线性函数。此时， $\lambda_2^*(t)$ 至多在两个孤立时间点上满足 $|\lambda_2(t)|=1$,因而燃料最优控制 $u^*(t)$ 是正常情况，且最多会在1,0,-1之间发生两次切换。因此，此时最优控制取切换方式，且在 $[0, t_f]$ 最多两次切换，最优控制必为三位控制。

\therefore 可能的最优控制为：

$$\begin{aligned} & \{+1\}, \{-1\}, \{0\}, \{+1, 0\}, \{0, +1\}, \{-1, 0\}, \{0, -1\}, \\ & \{-1, 0, +1\}, \{+1, 0, -1\} \end{aligned}$$

第3章——庞德里雅金极大值原理

注意：上述控制序列中以零结尾的不可能是最优控制！

综上所述，候选的控制序列为

平凡情况： $\{+1\}, \{-1\}, \{0,+1\}, \{0,-1\}, \{+1,0,-1\}, \{-1,0,+1\}$

奇异情况： $u^*(t) = -\text{sgn}[\lambda_2] \cdot v(t), 0 \leq v(t) \leq 1$

(3) 确定一个判定燃料最优控制的简易准则

对状态方程 $\dot{x}_2(t) = u(t)$ 在边界条件 $x_2(0) = x_{20}, x_2(t_f) = 0$ 处进行积分

$$\text{可得 } x_{20} = - \int_0^{t_f} u(t) dt, \therefore J = \int_0^{t_f} |u| dt \geq \left| \int_0^{t_f} u dt \right| = |x_{20}|$$

\therefore 燃料消耗量的下限为 $|x_{20}|$ ，因此，如果能找到一个控制，把系统状态由 (x_{10}, x_{20}) 转移到 $(0, 0)$ ，并且燃料消耗为 $|x_{20}|$ ，则该控制必然是最优控制。

第3章——庞德里雅金极大值原理

5、相平面分析

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, x_2 \leq 0 \right\}, \gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2, x_2 \geq 0 \right\}$$

$$\gamma_+ \cup \gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\},$$

$$R_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2} x_2^2, x_2 \geq 0 \right\}, R_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2} x_2^2, x_2 > 0 \right\},$$

$$R_3 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 < \frac{1}{2} x_2^2, x_2 \leq 0 \right\}, R_4 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 > \frac{1}{2} x_2^2, x_2 < 0 \right\}$$

第3章——庞德里雅金极大值原理

(1) (x_{10}, x_{20}) 位于 γ_+

此时，对平凡情况有 $u^*(t)$ 为 $\{+1\}$ ，奇异情况有 $u^*(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(t)$ 。

令 $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ 是状态方程在奇异情况下的解，则

$$\dot{x}_2(t) = \int_0^t -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(\tau) d\tau + x_{20},$$

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(\sigma) d\sigma + x_{20}t + x_{10}.$$

令 $x_1(t), x_2(t)$ 是状态方程在平凡情况下 $u^*(t)$ 为 $\{+1\}$ 的解，则

$$x_2(t) = \int_0^t d\tau + x_{20}, \quad x_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\sigma + x_{20}t + x_{10},$$

$$\text{计算 } x_1(t) - \dot{x}_1(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau [1 + \operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(\sigma)] d\sigma \geq 0$$

\therefore 只有当 $u(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(t) = +1$ 时， $x_1(t)$ 和 $\dot{x}_1(t)$ 重合，其他情况下 $\dot{x}_1(t)$ 对应的相轨迹总在 γ_+ 左边，因而不通过原点。

结论：当 (x_{10}, x_{20}) 位于 γ_+ 时，最优控制为 $\{+1\}$ ，且为唯一的燃料最优控制。

第3章——庞德里雅金极大值原理

(2) 当 (x_{10}, x_{20}) 位于 γ 时，最优控制为 $\{-1\}$

(3) 当 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_4 时：

1、平凡情况

只有 $\{0,+1\}, \{-1,0,+1\}$ 能使相点到达原点。分析两种情况下燃料消耗量。

总结：控制序列 $\{0,+1\}$ 是唯一的燃料最优控制。

2、奇异情况： $u(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(t), \quad 0 \leq v(t) \leq 1.$

$$\because \dot{x}_2 = u, \therefore x_2(t) = \int_0^t -\operatorname{sgn}[\lambda_2] \cdot v(\tau) d\tau + x_{20},$$

$$\text{当 } t = t_f \text{ 时, } x_2(t_f) = 0, \therefore x_{20} = \int_0^{t_f} \operatorname{sgn}[\lambda_2] v(t) dt < 0$$

$$\therefore \operatorname{sgn}[\lambda_2] = -1, u(t) = v(t), x_{20} = - \int_0^{t_f} v(t) dt$$

这里一个方程有两个未知数，所以解有无穷多个，其中包括 $\{0,+1\}$

$$\text{又 } \because J = \int_0^t |u(\tau)| d\tau = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

\therefore 当 $t = t_f$ 时， $J = \int_0^{t_f} v(\tau) d\tau = |x_{20}|, \therefore$ 21 是燃料最优控制。

第3章——庞德里雅金极大值原理

a、分析无穷多个解的相轨迹

由 $x_2(t) = x_{20} + \int_0^t u(\tau)d\tau \geq x_{20}$, 相应的相轨迹总在 $x = x_{20}$ 的上方

b、比较无穷多个解所需的时间

$$t_f = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{t_f} \frac{dx_1}{dx_1} dt = \int_0^{t_f} \frac{dx_1}{\frac{dx_1}{dt}} = \int_{x_{10}}^0 \frac{dx_1}{x_2} = \int_0^{x_{10}} \frac{dx_1}{|x_2|}$$

\therefore 对于同一个 x_1 , $|x_2|$ 大的最优轨线转移时间短。

结论：当 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_4 时，燃料最优控制有无穷多个解，其中包括 $\{0,+1\}$ ，且控制序列 $\{0,+1\}$ 的转移时间最短。

第3章——庞德里雅金极大值原理

(4) 当初始状态 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_2 时

燃料最优控制有无穷多解，其中包括 $\{0, -1\}$ ，且控制序列 $\{0, -1\}$ 的转移时间最短。

(5) 当初始状态 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_1 时

奇异情况： $u(t) = -\text{sgn}[\lambda_{20}] \cdot v(t), \lambda_{20} = \pm 1$

此时 $u(t)$ 不变号，不能到达开关曲线，不是最优控制。

平凡情况：只有控制序列 $\{-1, 0, +1\}$ 能使系统转移到原点。

设 ε 为变量， $J = |x_{20}| + \varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J = |x_{20}|$

\therefore 当 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_1 时，燃料最优控制无解，存在 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J = |x_{20}|$ 情况，称为 ε -燃料最优控制。

第3章——庞德里雅金极大值原理

结论：当初始状态 (x_{10}, x_{20}) 位于 R_1 内时，严格的燃料最优控制问题无解，但存在 ε —燃料最优控制问题。

(x_{10}, x_{20}) 位于 R_3 时，严格的燃料最优控制问题无解，也存在 ε —燃料最优控制问题。

结论

双积分装置燃料最优控制规律为

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = +1 \quad \text{对所有 } (x_1, x_2) \in \gamma^+$$

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = -1 \quad \text{对所有 } (x_1, x_2) \in \gamma^-$$

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = 0 \quad \text{对所有 } (x_1, x_2) \in R_2 \cap R_4$$

说明：(1) 若 $(x_1, x_2) \in R_2 \cup R_3$ ，则不存在燃料最优控制。|

(2) 上述控制同时也保证了转移时间为最小。