Week 3

2017年10月2日 13:27

$G: P \to 0P0 \mid 1P1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

$\forall \varepsilon \in \{0,1\}^*, w = w^R$ iff $w \in L(G)$

证：当 $w=w^R$ 时，$w \in L(G) = P \overset{*}{\Rightarrow} w$

（基础）若 $|w|=0$ 或 $|w|=1$，则 w 一定是 $\varepsilon, 0, 1$

根据产生式 $P \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon$，$P \overset{*}{\Rightarrow} w$

（归纳）假设 $|w|=n$ 成立

$|w'| = n+2$ 时，

$$\begin{cases} w' = 0w0 & P \overset{*}{\Rightarrow} w,\ P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0w0 \Rightarrow w' \\ w' = 1w1 & \end{cases}$$

$$\left\{ w' = 1w1 \right.$$

当 $P \overset{*}{\Rightarrow} w$ 时, $w = w^R$

(基础) $P \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon$ ✓

(归纳) $P \overset{*}{\Rightarrow} x$ 在 n 步完成, x 是回文

$$P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0x0 \Rightarrow w$$

QwQ

若 $w \in \{0^n1^n \mid n \geq 1\} \Rightarrow w \in L(G)$

证: (基础) $n = 1$, $w = 01$ $S \to 01$, $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

(归纳) 假设 $n = k$ 时命题成立

当 $n = k+1$ 时, $w = 0x1$, x 中 $n = k$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} x, \quad S \Rightarrow 0S1 \overset{*}{\Rightarrow} 0x1 \Rightarrow w$$

(基础) 推导1步 $S \to 01$

反方向：（基础）推导1步，$S \to 01$

（归纳）推导 n 步，命题成立

$$S \Rightarrow 0S1 \overset{*}{\Rightarrow} 0x1 \Rightarrow w$$

$P_1(n)$：若 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，则 $occur(1, w) = occur(0, w) + 1$

$P_2(n)$：若 $T \overset{*}{\Rightarrow} w$，则 $occur(0, w) = occur(1, w) + 1$

证：（基础） $P_1(1)$，$S \to 1$，$w = 1$

$P_2(1)$，$T \to 0$，$w = 0$

（归纳） 假设 $P_1(n)$，$P_2(n)$ 都成立

$$P_1(n+1) \quad \underbrace{S \Rightarrow 1T1}_{1} \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} w}_{n} = 1x1$$

$P_2(n)$，x 中 0 的个数比 1 多一个

$$P_2(n+1) \quad T \Rightarrow 0S0 \overset{*}{\Rightarrow} w = 0x0$$

$P_2(n+1)$ $T \Rightarrow 0S0 \overset{*}{\Rightarrow} w = 0x0$

$P_1(n)$ ...

(基础) $\overrightarrow{P_1(1)}$, $S \to \varepsilon$, ε 中 a, b 数量相等

$\overrightarrow{P_2(1)}$, $A \to a$, a 的数量比 b 多一

$\overrightarrow{P_3(1)}$, $B \to b$, b 的数量比 a 多一

(归纳) 假设, $\overrightarrow{P_1(n)}$, $\overrightarrow{P_2(n)}$, $\overrightarrow{P_3(n)}$ 都成立

$\overrightarrow{P_1(n+1)}$ 当 w 首字符为 a, $S \Rightarrow aB \overset{*}{\Rightarrow} w$, 把 $w = ax$, $\underbrace{B \overset{*}{\Rightarrow} x}_{n\text{步}}$

$\overrightarrow{P_3(n)}$ x 中 b 比 a 多一

$\therefore$ w 中 a, b 相等

当 w ... b, $S \Rightarrow bA \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w = bx$, $\underbrace{A \overset{*}{\Rightarrow} x}_{n}$

$\overrightarrow{P_2(n)}$ ...

$\overrightarrow{P_2(n)}$ ...

...

$\overrightarrow{P_2(n+1)}$

$\overrightarrow{P_3(n+1)}$

反方向：(基础) $\overleftarrow{P_1(0)}$，$w=\varepsilon$ $S\to\varepsilon$，$S\overset{*}{\Rightarrow}w$

$\overleftarrow{P_2(1)}$，$w=a$ $A\to a$，$A\overset{*}{\Rightarrow}w$

$\overleftarrow{P_3(1)}$，$w=b$ $B\to b$，$B\overset{*}{\Rightarrow}w$

(归纳) 假设 $\overleftarrow{P_1(n-1)}$，$\overleftarrow{P_2(n)}$，$\overleftarrow{P_3(n)}$ 成立

欲证 $\overleftarrow{P_1(n+1)}$，$\overleftarrow{P_2(n+2)}$，$\overleftarrow{P_3(n+2)}$

$\overleftarrow{P_1(n+1)}$ 当 w 首字符是 a，$w=ax$，则 $|x|=n$ 且 x 中 b 比 a 多一 $\Big\}$ $\overleftarrow{P_3(n)}$

$S\to aB$，$S\Rightarrow aB\overset{*}{\Rightarrow}ax=w$ $B\overset{*}{\Rightarrow}x$

当 ... b. ...

当 . . .　　b. . . .

$\overline{P_2(n+2)}$

$\overline{P_3(n+2)}$