

华南理工大学硕士学位论文

LaTeX 模板使用说明

作者姓名

指导教师：xxx 教授

华南理工大学

2025 年 1 月 6 日

目 录

| | |
|-----------------------------|-----|
| 主要符号对照表 | III |
| 第一章 涵道风扇式无人机系统构成及建模 | 1 |
| 1.1 试验样机的系统组成 | 1 |
| 1.1.1 主要结构介绍 | 1 |
| 1.1.2 机载航电系统 | 2 |
| 1.2 坐标系和姿态表示方法 | 3 |
| 1.3 飞行控制刚体模型 | 6 |
| 1.3.1 刚体运动学模型 | 6 |
| 1.3.2 刚体动力学模型 | 6 |
| 1.4 力与力矩分析 | 7 |
| 1.4.1 涵道风扇动力学 | 8 |
| 1.4.2 机身动力学 | 10 |
| 1.4.3 涵道动力学 | 11 |
| 1.4.4 控制舵面动力学 | 13 |
| 1.4.5 陀螺力矩与固定气动面反扭矩 | 14 |
| 1.5 系统建模总结 | 15 |
| 1.6 本章小结 | 18 |
| 第二章 涵道风扇式无人机的姿态控制 | 19 |
| 2.1 增量非线性动态逆控制与控制分配理论 | 19 |
| 2.1.1 增量非线性动态逆 | 20 |
| 2.1.2 控制分配理论 | 21 |
| 2.2 姿态模型简化 | 22 |
| 2.2.1 气动力矩模型简化 | 22 |
| 2.2.2 虚拟控制输入 | 24 |
| 2.3 图 | 24 |
| 2.4 公式 | 28 |
| 2.5 定理 | 30 |
| 2.6 参考文献 | 32 |

| | |
|------------|----|
| 参考文献 | 47 |
|------------|----|

主要符号对照表

$O_e - X_e Y_e Z_e$ -地面坐标系

$P^e = [x^e \ y^e \ z^e]^T$ -地面系下的位置

$V^b = [u \ v \ w]^T$ -机体系下的速度

θ -俯仰角

$\omega^b = [p \ q \ r]^T$ -机体系下的角速度

F^b -机体系下受到的除重力外的合力

g -当地的重力加速度

$J^b = \text{diag}[J_x \ J_y \ J_z]$ -机体系下的转动惯量

σ_d -涵道扩压比

V_e -涵道出口风速

T_p -风扇升力

Ω -风扇转速

k_{fan} -风扇拉力常系数

$C_{D,x}$ 、 $C_{D,y}$ 、 $C_{D,z}$ -沿机体轴的阻力系数

l_a -机身空气动力中心与机身重心的距离

γ -环绕涵道角度变量

V_z -气流相对于机体的轴向速度

α_d -迎角

$C_{d,d}$ 涵道翼型阻力曲线

C_{duct} - 常值比例系数

k_δ -控制舵面升力系数

J_{fan} -涵道风扇转动惯量

φ_0 -固定气动面安装角

$O_b - X_b Y_b Z_b$ -机体系坐标系

$V^e = [v_x^e \ v_y^e \ v_z^e]^T$ -地面系下的速度

ψ -偏航角

φ -滚转角

R_e^b -机体系到地面系的旋转矩阵

m -无人机总质量

M^b -机体系下受到的合外力矩

S -桨盘面积

ρ -空气密度

V' -涵道风扇诱导速度

T_l -涵道体升力

R -风扇半径

k_q -风扇扭矩常系数

S_x 、 S_y 、 S_z -沿机体轴的截面面积

$V_a^b = [u_r \ v_r \ w_r]^T$ -空速

V_r -气流相对于机体的径向速度

q_d -涵道周围的动态压力

$C_{l,d}$ -涵道翼型升力曲线

c_d -涵道翼型弦长

l_d -重心与涵道空气动力中心之间的距离

δ_i -控制舵面偏转角

d_{af} 、 d_{ds} -风扇扭矩常系数

W^e -环境风速

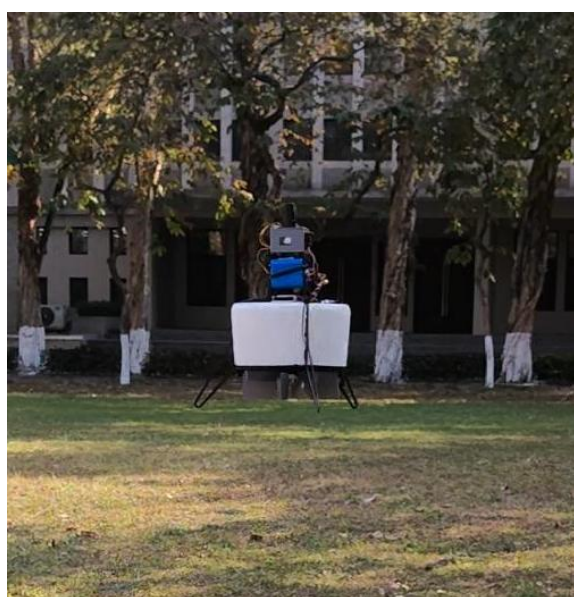
第一章 涵道风扇式无人机系统构成及建模

为方便检验本文的研究成果，自主搭建了一架 DFUAV 试验样机。本章首先简要介绍试验样机的结构组成和机载航电系统，然后重点是对 DFUAV 进行系统建模，这将是后续进行飞行控制算法设计的基础。物体的相对运动离不开其所处的参考坐标系，因此在建模之前将先介绍本文所使用的坐标系描述方法以及 DFUAV 的姿态表示方法。在建模分析中，为简化模型复杂度便于控制算法的设计，有必要假设无人机是刚体。然后采用在刚体上应用广泛的牛顿-欧拉方法推导出 DFUAV 的刚体运动学模型和动力学模型，得到飞行控制的刚体模型。最后分析了作用在涵道上的力与力矩并作出总结。

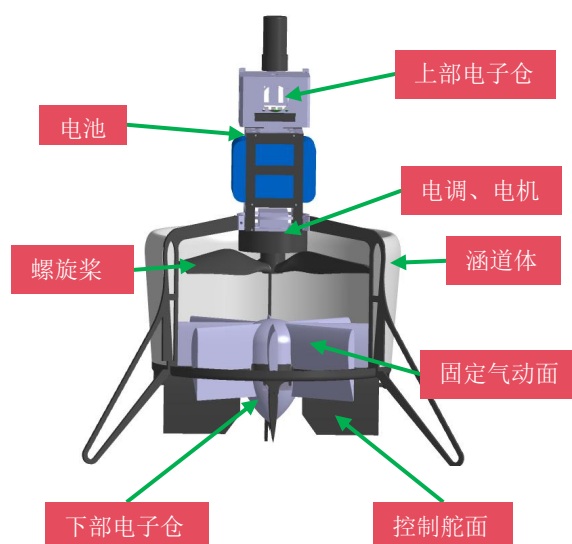
1.1 试验样机的系统组成

1.1.1 主要结构介绍

自主搭建的 DFUAV 试验样机的实物及主要结构如图1-1所示。类似大部分无人机，DFUAV 也有电子仓、电池、电调、电机和螺旋桨等组成部件。电子仓中放置了飞行控制系统的硬件，电池是 DFUAV 的能量来源，电调、电机和螺旋桨共同组成了 DFUAV 的动力系统。不同于常规旋翼无人机，DFUAV 的螺旋桨由涵道体包裹，用于提升拉力效率 and 安全性。在螺旋桨下方的滑流区安装有固定气动面用于提供反扭矩，最下方安装了四个控制舵面用于提供 DFUAV 的三维力矩。



a) 试验样机



b) 结构组成示意

图 1-1 试验样机及结构组成

1.1.2 机载航电系统

图1-1b中的上部电子仓和下部电子仓共同构成了 DFUAV 的机载航电系统，掌控着飞行的各个环节，系统内部主要包括微控制器、各种传感器、通信链路等部分。下面对这些部分进行简要介绍：

(1) 微控制器（MCU）

作为 DFUAV 飞行控制系统的核心处理器，MCU 承担着多传感器数据融合与实时决策的关键任务。本系统选用意法半导体公司生产的基于 ARM 架构的 STM32F767 系列 MCU，其工作频率高达 216MHz，通信接口丰富（包括 UART/USART、SPI、I2C、CAN 等）以及 2MB 的闪存和 512KB 的静态随机存储器。其高性能低功耗的特点十分适用于 DFUAV 的控制。

(2) 惯性测量单元（IMU）

IMU 用于测量无人机的加速度和角速度，其输出的数据被用于实时解算无人机的姿态。本系统选用了 InvenSense 公司的 ICM-20602 六轴 IMU，内部集成了三轴陀螺仪和三轴加速度计。ICM-20602 具有高量程（ $\pm 16g$ ）、大缓冲区（1KB 的 FIFO）和高精度（误差 $\pm 1\%$ ）等特点，并且可以以 10MHz 的 SPI 接口或者 400kHz 的 I2C 接口输出数据。

(3) 磁力计

磁力计固连在机体上用于测量当前位置的地磁感应强度，其输出的数据结合 IMU 数据被用于实时解算无人机的航向。本系统选用意法半导体公司的 LSM303D 系列磁力计，由于测量的数据易受到外界磁场干扰，尤其是电池放电过程中产生的磁场，所以磁力计被安装在远离电池的下部电子仓内。

(4) 卫星定位模块

卫星定位模块用于接收多颗卫星信号来获取无人机的位置和速度等信息。本系统选用了瑞士 u-blox 公司的 ZED-F9P-04B 的高精度 GPS 卫星定位模块，该模块收敛时间快并且方便集成实时动态载波相位差分技术（RTK）实现厘米级的定位精度。

(5) 气压计

气压计用于测量当前位置的大气压强并进一步解算出海拔高度。本系统选用的英飞凌公司的 DPS368 压力传感器，该产品自带防风外壳，基于电容式传感原理在温度变化时依然能保持高精度（ $\pm 0.02m$ ），可以在恶劣环境中使用。

(6) 无线数据传输模块

无线数据传输模块用于地面站与飞机之间的无线通信，包括由地面站发送给飞机的

控制指令和飞机发送到地面站的状态信息等，本方案选用 Microhard 的 hp840 无线调制解调器，支持 840-845MHz 的跳频或定频工作以及理想情况下 160 公里的传输距离。

在飞行控制周期内，MCU 首先首先完成多个传感器设备的协同启动与自检流程，然后通过外设接口读取 IMU、磁力计、GPS、气压计等传感器的数据。接下来通过滤波方法对数据进行平滑去噪等处理，并且通过导航算法融合数据解算出无人机的位置、速度、姿态和角速度等状态信息。借助多频段无线数传模块构建的低延迟通信链路，无人机不仅以 50Hz 刷新率向地面站传输飞行状态遥测数据包，同时实时接收包含航点指令、模式切换、紧急制动等要素的上行控制帧。控制指令与实时飞行状态参数共同输入至飞行控制决策层，经过飞行控制算法处理后，计算出给到执行机构（电机和舵机）的指令，从而实现对飞行器六自由度运动的闭环控制。

1.2 坐标系和姿态表示方法

考虑到无人机的位置变化与姿态变化，基于地面坐标系 ($O_e - X_e Y_e Z_e$) 和机体坐标系 ($O_b - X_b Y_b Z_b$) 的多坐标系表示法被广泛应用于无人机的运动分析与控制系统设计中。

(1) 地面坐标系

地面坐标系的原点 O_e 可以是地平面上的任意一点，一般定义为无人机的起飞点。三轴方向分别为 $O_e - X_e$ 轴在地平面内指向地理正北方向 (N)， $O_e - Y_e$ 轴在地平面内指向地理正东方向 (E)， $O_e - Z_e$ 轴按照右手定则，垂直于地面指向地心，方向向下 (D)。因此地面坐标系也被称为北东地 (NED) 坐标系，该坐标系与地球固连。

(2) 机体坐标系

机体坐标系与无人机的机体固连，其原点 O_b 定义为无人机的重心位置。三轴方向分别为 $O_b - X_b$ 轴在无人机对称平面内指向人为定义的机头方向， $O_b - Z_b$ 轴在无人机对称平面内垂直于 $O_b - X_b$ 轴向下为正， $O_b - Y_b$ 轴按照右手定则与 $X_b - O_b - Z_b$ 平面垂直，沿着机身的右侧方向向右为正。

地面坐标系和机体坐标系定义如图1-2所示。同一个物理量在不同的坐标系中有不同的大小和方向，为便于区分，在全文中统一使用上标 $(\cdot)^e$ 与 $(\cdot)^b$ 表示同一个物理量分别在地面坐标系和机体坐标系下的表示。

在地面坐标系下采用惯性导航系统、GPS 导航等方式，无人机的位置和速度等运动状态可以方便直观地映射到地理空间中。这种方式使得无人机的飞行轨迹与实际地理位

置紧密相关，以便进行飞行路线规划和轨迹优化。无人机的重心相对于地面坐标系的位置矢量在地面坐标系下表示为 $\mathbf{P}^e = [x^e \ y^e \ z^e]^T$ ，机体重心沿着地面坐标系的速度矢量在地面坐标系下表示为 $\mathbf{V}^e = [v_x^e \ v_y^e \ v_z^e]^T$ ，机体重心相对于地面坐标系的速度矢量在机体坐标系下表示为 $\mathbf{V}^b = [u \ v \ w]^T$ 。

地面坐标系与机体坐标系的旋转变化关系体现了无人机的姿态变化，无人机常用的姿态描述方法有欧拉角、旋转矩阵和四元数等方式。其中欧拉角表示方法因物理意义明确，表示直观，所以被广泛采用。但因其奇异性问题^[1]，欧拉角表示法在一些特殊场景的使用下受到制约（如横滚角或者俯仰角为 $\pm 90^\circ$ 的情况）。考虑到本研究在姿态控制中，由于输入姿态指令和输出舵面角度的约束，不会出现上述奇异情况，所以本文采用欧拉角来描述无人机的姿态。根据欧拉定理，地面坐标系按照某个固定点经过三次基本旋转可以得到机体坐标系。由于旋转运动与坐标系原点的位置无关，所以为便于理解，将地面坐标系的原点与机体坐标系原点重合（即 $\mathbf{O}_e = \mathbf{O}_b$ ），如图1-3所示。在三次基本旋转中，旋转轴是待转动坐标系的某一轴，旋转的角度即为欧拉角。由于姿态旋转矩阵可以表示为三次基本旋转的乘积，所以与旋转顺序密切相关。由于本研究不会出现奇异问题，所以本文采用常用的‘Z-Y-X’的旋转顺序的欧拉角表示法。

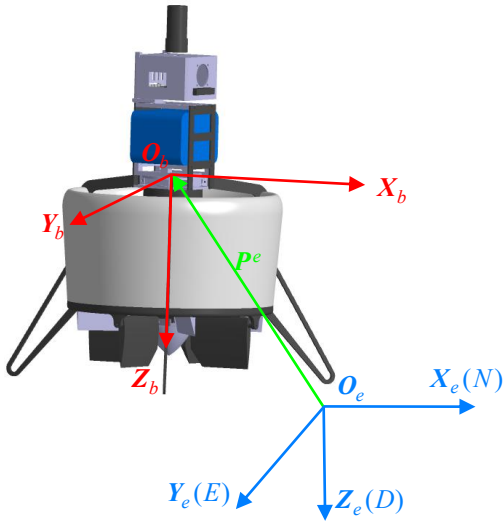


图 1-2 地面坐标系与机体坐标系定义

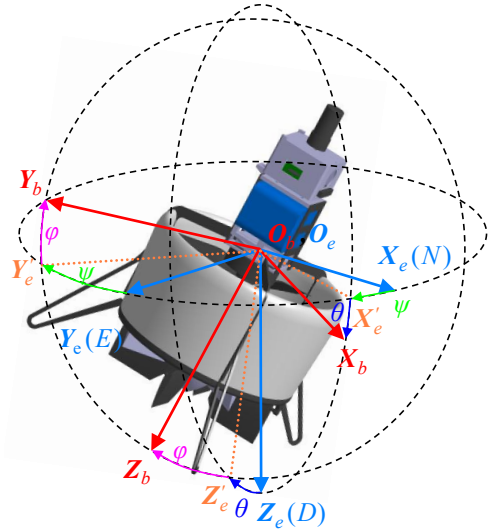


图 1-3 ‘Z-Y-X’ 欧拉角的定义

在图1-3中，地面坐标系 $\mathbf{O}_e - \mathbf{X}_e \mathbf{Y}_e \mathbf{Z}_e$ 首先围绕 \mathbf{Z}_e 轴旋转偏航角 ψ ，向右偏航为正方向。此时 \mathbf{X}_e 轴旋转至 \mathbf{X}'_e 轴， \mathbf{Y}_e 轴旋转至 \mathbf{Y}'_e 轴， \mathbf{Z}_e 轴保持不变；然后临时坐标系 $\mathbf{O}_e - \mathbf{X}'_e \mathbf{Y}'_e \mathbf{Z}_e$ 围绕 \mathbf{Y}'_e 轴旋转俯仰角 θ ，上仰为正方向。此时 \mathbf{X}'_e 轴旋转至 \mathbf{X}_b 轴，与机体系保持一致， \mathbf{Z}_e 轴旋转至 \mathbf{Z}'_e 轴， \mathbf{Y}'_e 轴保持不变；最后临时坐标系 $\mathbf{O}_e - \mathbf{X}_b \mathbf{Y}'_e \mathbf{Z}'_e$ 围绕 \mathbf{X}_b 轴旋转滚转角 ϕ ，向右滚转为正方向。此时 \mathbf{Y}'_e 轴旋转至 \mathbf{Y}_b 轴， \mathbf{Z}'_e 轴旋转至

\mathbf{Z}_b 轴，均与机体保持一致。

三次基本旋转的角度分别为 ψ 、 θ 、 φ ，定义其对应的旋转矩阵分别为 $\mathbf{R}_\psi, \mathbf{R}_\theta, \mathbf{R}_\varphi \in SO(3)$ ，其中 $SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, |\mathbf{R}| = 1\}$ 。

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

为表述方便，定义如下单位向量：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

机体姿态的欧拉角表示为 $\boldsymbol{\eta} = [\varphi \quad \theta \quad \psi]^T$ ，对应的姿态变化率为 $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\varphi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$ 。定义沿机体轴的旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}^b = [p \quad q \quad r]^T$ ，那么旋转角速度与机体姿态变化率的关系如下^[2]：

$$\boldsymbol{\omega}^b = \dot{\psi} \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\theta \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{R}_\varphi \mathbf{e}_2 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_1 \quad (1-3)$$

结合式(2-21)、式(1-2)和式(1-3)，得到：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^b &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}^b, \quad \mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-4)$$

进一步地，在欧拉角 ‘Z-Y-X’ 的旋转顺序下，由机体坐标系到地面坐标系的旋转矩阵 \mathbf{R}_b^e 可以表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b^e &= (\mathbf{R}_e^b)^T = (\mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi)^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-5)$$

1.3 飞行控制刚体模型

DFUAV 的建模过程需要在准确性与实用性之间找到合适的平衡，确保不会过于复杂而增加控制算法设计的难度和计算资源的开销，同时也不至于过于简单而与实际情况相差甚远。因此，在建模过程中假设 DFUAV 是刚体，并且假设 DFUAV 在飞行过程中其质量和转动惯量（机体坐标系下）保持不变。基于这种假设，DFUAV 的刚体运动学和动力学模型可以通过牛顿-欧拉方法推导得到。

1.3.1 刚体运动学模型

运动学模型用于描述无人机在三维空间中的位置和姿态随时间变化的关系，不涉及力与力矩的分析。六自由度 DFUAV 的刚体运动学模型包括三自由度的位置运动学模型和三自由度的姿态运动学模型。在地面坐标系下，位置运动学模型可以表示为： $\dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{V}^e$ 。三自由度的姿态运动学模型分为欧拉角模型、旋转矩阵模型和四元数模型三种。在机体系下，根据式(1-4)，可以得到使用欧拉角模型表示三自由度的姿态运动学为 $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}^b$ 。

因此，六自由度的 DFUAV 刚体运动学模型可以表示为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}^e &= \mathbf{V}^e \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}^b\end{aligned}\tag{1-6}$$

1.3.2 刚体动力学模型

DFUAV 的刚体动力学模型包括位置动力学模型和姿态动力学模型，动力学模型是描述无人机在三维空间中运动行为的数学模型，该模型主要基于牛顿第二定律和角动量定理推导，用于分析无人机在受力、力矩、环境扰动等因素共同作用下的运动行为。但是该定律仅在惯性系下成立，考虑到 DFUAV 的运动时，地球自转对其的影响相对不显著，并且从局部来看，地面近似平坦，因此将地面坐标系假设为惯性系是合理的。

假设 DFUAV 受到的力包括重力和除重力之外的合外力作用 \mathbf{F}^b ，为下文受力分析方便，此处 $\mathbf{F}^b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 表示在机体系下受到的除重力之外的合外力。那么根据牛顿第二定律可以得到：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_b^e \mathbf{F}^b + mg\mathbf{e}_3 &= m \frac{d(\mathbf{V}^e)}{dt} \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{V}}^e &= \frac{1}{m} \mathbf{R}_b^e \mathbf{F}^b + g\mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{1-7}$$

其中 m 表示 DFUAV 的总质量， g 表示当地的重力加速度。

姿态动力学模型由角动量定理描述：

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^b &= \frac{d\mathbf{L}^b}{dt} - \mathbf{L}^b \times \boldsymbol{\omega}^b, \quad \mathbf{L}^b = \mathbf{J}^b \boldsymbol{\omega}^b \\ \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}}^b &= (\mathbf{J}^b)^{-1}(\mathbf{M}^b + \mathbf{J}^b \boldsymbol{\omega}^b \times \boldsymbol{\omega}^b) \end{aligned} \quad (1-8)$$

其中 $\mathbf{M}^b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 表示 DFUAV 在机体系下受到的合外力矩， $\mathbf{L}^b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 表示 DFUAV 在机体系下总的角动量，‘ \times ’表示向量叉乘运算。 $\mathbf{J}^b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示 DFUAV 在机体系中的转动惯量矩阵，其在机体系下是一个常量。根据图1-1，可以看出本文研究的 DFUAV 呈现对称的几何结构，故本文建模过程中认为 \mathbf{J}^b 近似为一个对角矩阵，即

$$\mathbf{J}^b = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

类似地，在机体系下可以更加直观地表示姿态动力学模型中相关变量，并且便于下文对力矩的分析，其中 $\mathbf{L}^b \times \boldsymbol{\omega}^b$ 部分分量表示由惯性系旋转到机体系产生的影响。

综合上述分析，可以得到 DFUAV 的飞行控制刚体模型：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{V}^e \\ \dot{\mathbf{V}}^e = \frac{1}{m} \mathbf{R}_b^e \mathbf{F}^b + g \mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b = (\mathbf{J}^b)^{-1}(\mathbf{M}^b + \mathbf{J}^b \boldsymbol{\omega}^b \times \boldsymbol{\omega}^b) \end{cases} \quad (1-10)$$

1.4 力与力矩分析

对作用于 DFUAV 上的力与力矩进行分析是为了对控制算法的设计提供依据，明确其内在机理可以更好地分析运动特性。根据式(1-10)，DFUAV 受到的除重力作用的合外力在机体系下表示为 \mathbf{F}^b ，受到的合外力矩在机体系下表示为 \mathbf{M}^b 。进一步地， \mathbf{F}^b 和 \mathbf{M}^b 可以被分解为：

$$\begin{cases} \mathbf{F}^b = \mathbf{F}_{fan}^b + \mathbf{F}_{aero}^b + \mathbf{F}_{duct}^b + \mathbf{F}_{vane}^b \\ \mathbf{M}^b = \mathbf{M}_{fan}^b + \mathbf{M}_{aero}^b + \mathbf{M}_{duct}^b + \mathbf{M}_{vane}^b + \mathbf{M}_{gyro}^b + \mathbf{M}_{flap}^b \end{cases} \quad (1-11)$$

其中 \mathbf{F}_{fan}^b 和 \mathbf{M}_{fan}^b 表示由于涵道风扇旋转而产生的总的拉力和扭矩, \mathbf{F}_{aero}^b 和 \mathbf{M}_{aero}^b 表示由于机身空气阻力产生的气动力和力矩, \mathbf{F}_{duct}^b 和 \mathbf{M}_{duct}^b 表示作用于涵道环翼上的气动力与力矩, \mathbf{F}_{vane}^b 和 \mathbf{M}_{vane}^b 表示由于涵道底部的控制舵面运动与风扇滑流相互作用而产生的力和力矩, \mathbf{M}_{gyro}^b 表示由于涵道风扇的旋转而产生的陀螺力矩, \mathbf{M}_{flap}^b 表示位于涵道底部的固定气动面于风扇滑流相互作用而产生的扭矩。下面将对各力与力矩的作用机理进行逐一分析。

1.4.1 涵道风扇动力学

涵道风扇是安装在圆形涵道内的螺旋桨, 旋翼模型的研究主要基于基本动量理论和叶素理论。由于涵道入口边缘的吸力效应和出口处较高的静压的共同作用, 相比于开放式的螺旋桨, 在相同的功率下, 涵道风扇具有更出色的静态性能。

可以使用动量理论进行悬停情况下的分析, 在相同的功率条件下, 推力增益可以描述为扩张比的函数:

$$\frac{\mathbf{F}_{fan}^b}{\mathbf{F}_{prop}} = \sqrt[3]{2\Lambda} \quad (1-12)$$

其中 \mathbf{F}_{fan}^b 是由于涵道风扇旋转产生的总拉力, 设其标量表示为 T_{fan} 。 T_{fan} 可以分为两部分: 涵道风扇旋转产生的拉力 T_p 和侧风与涵道风扇抽吸作用产生的侧向拉力 T_l 。 \mathbf{F}_{prop} 表示传统开放式螺旋桨产生的拉力, Λ 是扩张比。由式(1-12)可以看出, 扩张比大于 0.5 时, 涵道风扇的推力增益大于 1, 即涵道风扇比开放式旋翼的推力效率更高。更详尽的分析可以在[3] 中找到。

由于涵道的遮挡作用, 涵道出口的气流基本保持轴向流动, 沿着轴线方向喷射出去, 如图1-4所示。假设气流在未受到涵道风扇影响前的速度为 V_0 , 在逼近涵道风扇上表面时的速度增加为 V_1 。忽略风扇的厚度, 气流通过风扇到下表面即将进入滑流区时, 由于气流速度连续不可突变, 所以认为气流速度保持 $V_2 = V_1$ 。气流进入滑流区后, 速度进一步增大为 V_e 并从涵道下方出口排出。

假设风扇旋转时的桨盘面积为 S , 涵道扩压比为 σ_d , σ_d 表示涵道下方出口横截面积与桨盘面积 S 之比。那么根据质量守恒有:

$$\sigma_d S V_e = S V_2 = S V_1 \quad (1-13)$$

设空气密度为 ρ , 单位时间内通过涵道风扇的气流总质量为 \dot{m}_{air} 。一方面, 根据动量定理可知, 涵道风扇对气流施加的总作用力等于单位时间内气流通过风扇的动量变化

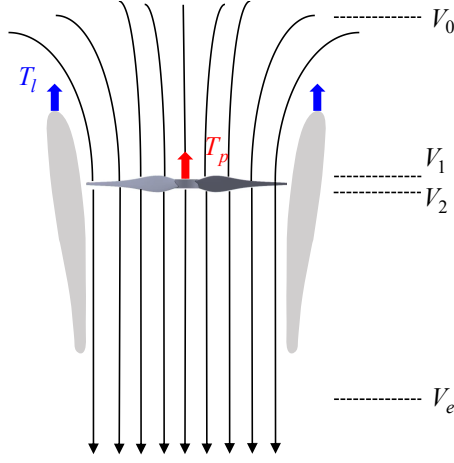


图 1-4 轴流状态的空气动力学

率：

$$T_{fan} = \dot{m}_{air}(V_e - V_0) = \rho S V_1 (V_e - V_0) \quad (1-14)$$

另一方面，气体动能的变化量等同于涵道风扇输送给气体的功率：

$$\frac{1}{2} \dot{m}_{air} V_e^2 - \frac{1}{2} \dot{m}_{air} V_0^2 = T_{fan} V_1 \quad (1-15)$$

结合(1-13)、(1-14)和(1-15)，可以得到涵道出口风速 V_e ^[3]：

$$V_e = \frac{V_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 + \frac{T_{fan}}{\sigma_d \rho S}} \quad (1-16)$$

定义涵道风扇的诱导速度为 $V' = V_1 - V_0$ ，那么结合(1-13)和(1-16)可以得到：

$$\begin{aligned} V' &= \sigma_d V_e - V_0 \\ &= \left(\frac{\sigma_d}{2} - 1\right) V_0 + \sqrt{\left(\frac{V_0 \sigma_d}{2}\right)^2 + \frac{T_{fan} \sigma_d}{\rho S}} \end{aligned} \quad (1-17)$$

涵道出口处的气流速度 V_e 和涵道风扇的诱导速度 V' 将在后续的空气动力学分析中发挥重要作用，包括涵道翼型上产生的附加阻力的计算、控制舵面上的力与力矩的计算以及固定气动面扭矩的计算等。

关于涵道风扇产生的拉力 T_p 、侧向拉力 T_l 和扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b 的计算，由下式给出^[4]：

$$\begin{aligned} T_p &= \rho S \Omega^2 R^2 C_p \\ T_l &= \rho S \Omega^2 R^2 C_l \\ \mathbf{M}_{fan}^b &= \rho S \Omega^2 R^3 C_q \end{aligned} \quad (1-18)$$

其中 Ω 是涵道风扇的旋转角速度, R 是涵道风扇的旋转半径, C_p 、 C_l 和 C_q 分别是涵道风扇的拉力系数、侧向推力系数和扭矩系数。这三个系数与环境风速、飞机姿态等因素有关, 难以用简单的解析式来表示。大部分文献都采用数值分析方法来测定^[4-6]。

由于 ρ 、 S 、 R 均为常数, 涵道风扇产生的总的拉力 \mathbf{F}_{fan}^b 和扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b 仅在机体系下的 $\mathbf{O}_b - \mathbf{Z}_b$ 轴产生效果, 所以可以近似简化为以下形式^[6-7]:

$$\mathbf{F}_{fan}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{fan}\Omega^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{fan}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_q\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

其中 k_{fan} 和 k_q 均为常系数, 可采用数值分析方法近似测定。

1.4.2 机身动力学

涵道机身的气动阻力和力矩源于机身与气流错综复杂的相互作用。当无人机在空中飞行时, 周围的气流会以一定的速度与涵道机身表面接触。这种相互碰撞、摩擦, 形成了阻碍飞机前进的气动阻力。同时, 由于气流在机身不同部位的速度和压强分布不均匀, 会对机身产生一个使它绕某一轴转动的趋势, 这便是气动力矩。根据空气动力学原理, 气动阻力与飞机与气流相对速度的平方大致成正比关系。而且速度的变化还会影响气流在机身周围的流动形态, 使得气动力矩也发生相应变化。另外, 沿机体轴方向的横截面积同样是影响气动阻力和力矩的重要因素。较大的横截面积意味着气流与机身的接触面积更大, 气流在流经机身时受到的阻碍也会增加。由于 DFUAV 的外部由涵道体包裹, 因此横截面积较大, 更会加剧这一过程。

定义空速向量 $\mathbf{V}_a^b = [u_r \ v_r \ w_r]^T$ 为机体相对于气流的速度在机体系的投影, 标量表示为 V_a , 空速与环境风速有关。当环境风速 W^e 为零时, $\mathbf{V}_a^b = \mathbf{V}^b$ 。在机身产生的力与力矩可表示为^[6,8]:

$$\mathbf{F}_{aero}^b = -\frac{1}{2}\rho \begin{bmatrix} C_{D,x}S_x u_r |u_r| \\ C_{D,y}S_y v_r |v_r| \\ C_{D,z}S_z w_r |w_r| \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

$$\mathbf{M}_{aero}^b = \frac{1}{2}\rho \begin{bmatrix} C_{D,y}S_y v_r |v_r| \\ -C_{D,x}S_x u_r |u_r| \\ 0 \end{bmatrix} l_a \quad (1-21)$$

其中 $C_{D,x}$ 、 $C_{D,y}$ 和 $C_{D,z}$ 分别是机身沿机体系三个轴方向的气动阻力系数， S_x 、 S_y 和 S_z 分别是机身沿机体系三个轴方向的横截面积， l_a 表示 DFUAV 的机身空气动力中心和其重心之间的距离。

由 M_{aero}^b 的表达式可以看出，机身气动力矩不会影响机体系下的 $O_b - Z_b$ 轴，暗含 DFUAV 的空气动力中心和其重心之间的距离在 $O_b - X_b$ 轴和 $O_b - Y_b$ 轴上的分量为零，这是由于 DFUAV 的几何对称特性所导致的。

1.4.3 涵道动力学

类似直升机旋翼的经典建模方法，本小节基于不可压缩的定常流动假设建立升力 L-阻力 D 模型来估算空速施加在涵道环翼上的气动力与力矩^[8]，如图1-5所示。

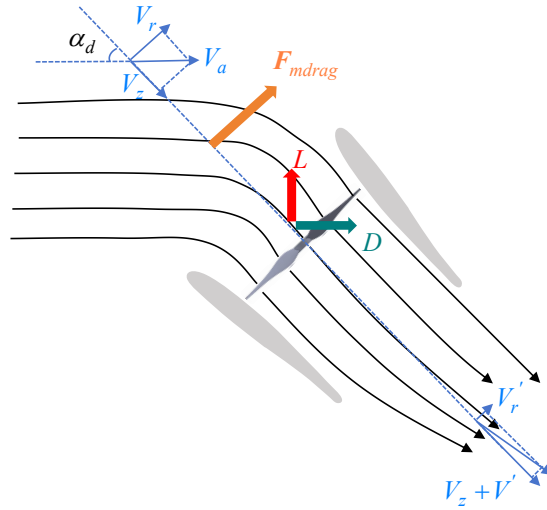


图 1-5 非轴流状态（前飞时）的空气动力学

假设 γ 代表在机体系 $O_b - X_b Y_b$ 平面内的角度度量， i 和 j 分别表示沿着机体系 $O_b - X_b$ 轴和 $O_b - Y_b$ 的单位向量。那么在 $O_b - X_b Y_b$ 平面内的单位向量和速度向量可以表示为：

$$e_r = \cos \gamma i + \sin \gamma j \quad (1-22)$$

$$V_{xy} = -u_r i - v_r j \quad (1-23)$$

由于式(1-23)中的速度表示机体相对于气流的速度，为表示气流相对于机体的速度需要加负号。为方便表示，假设在涵道周围沿 $O_b - Z_b$ 轴方向的速度分量是恒定的。那么径向速度 $V_r(\gamma)$ 作为 γ 的函数可以写为：

$$V_r(\gamma) = V_{xy} \cdot e_r = -u_r \cos \gamma - v_r \sin \gamma \quad (1-24)$$

气流速度在 $O_b - Z_b$ 轴方向相对于机体的速度分量 $V_z(\gamma)$ 可以表示为:

$$V_z(\gamma) = -w_r \quad (1-25)$$

其中诱导速度 V' 于式(1-17)中定义。

现在, 涵道周围的动态压力 $q_d(\gamma)$ 和迎角 $\alpha_d(\gamma)$ 可以如下计算:

$$\begin{aligned} q_d(\gamma) &= \frac{1}{2} \rho (V_r^2 + V_z^2) \\ \alpha_d(\gamma) &= \tan^{-1} \left(\frac{V_r}{V_z} \right) \end{aligned} \quad (1-26)$$

根据式(1-26)进一步可以表示出涵道周围单位展长的升力 $l(\gamma)$ 和阻力 $d(\gamma)$ 及其在每个机体轴的分量:

$$l(\gamma) = C_{l,d}(\alpha_d) c_d q_d, \quad d(\gamma) = C_{d,d}(\alpha_d) c_d q_d \quad (1-27)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow l_x(\gamma) &= l(\gamma) \cos \alpha_d \cos \gamma, \quad d_x(\gamma) = d(\gamma) \sin \alpha_d \cos \gamma \\ l_y(\gamma) &= l(\gamma) \cos \alpha_d \sin \gamma, \quad d_y(\gamma) = d(\gamma) \sin \alpha_d \sin \gamma \\ l_z(\gamma) &= -l(\gamma) \sin \alpha_d, \quad d_z(\gamma) = d(\gamma) \cos \alpha_d \end{aligned} \quad (1-28)$$

式(1-27)中 $C_{l,d}$ 、 $C_{d,d}$ 分别是涵道翼型的升力曲线和阻力曲线, 均与迎角 $\alpha_d(\gamma)$ 有关。 c_d 是涵道翼型的弦长。将式(1-28)中的各轴向分量沿该轴方向积分便可得到每个轴的气动升力和阻力, 如 x 轴方向:

$$L_x = R \int_0^{2\pi} l_x(\gamma) d\gamma, \quad D_x = R \int_0^{2\pi} d_x(\gamma) d\gamma \quad (1-29)$$

除气动升力和阻力外, DFUAV 前飞时 (非轴流状态) 在涵道上还会产生附加的阻力 (即动量阻力 $\mathbf{F}_{mdrag}^{[6]}$)。如图1-5所示, 由于涵道体的遮挡, 气流的径向速度 V_r 分量在进入涵道体后迅速衰减为 V'_r , 因此导致径向气体动量的变化, 从而产生附加的阻力。该阻力可以通过进入涵道的空气质量流量和飞行速度来表示:

$$\mathbf{F}_{mdrag} = -V' \rho S \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

侧风作用于涵道结构形成的非对称升力分布同样会产生力矩, 假定该力矩与侧风

引起的动态压力为近似线性关系，那么可量化为：

$$\mathbf{M}_{lip} = C_{duct} \rho R \begin{bmatrix} v_r |v_r| \\ -u_r |u_r| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

其中， C_{duct} 是常数。该系数最初可根据 iSTAR^[9] 的实验数据估算，随后需要结合实际情况调整。

综合(1-29)、(1-30)、(1-31)，在涵道翼型上产生的力与力矩可以表示为^[6,8]：

$$\mathbf{F}_{duct}^b = \begin{bmatrix} L_x + D_x \\ L_y + D_y \\ L_z + D_z \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{mdrag} \quad (1-32)$$

$$\mathbf{M}_{duct}^b = \begin{bmatrix} L_x l_d \\ L_y l_d \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{lip} \quad (1-33)$$

其中 l_d 表示 DFUAV 的重心与涵道空气动力中心之间的距离。

1.4.4 控制舵面动力学

涵道底部的控制舵面是 DFUAV 的主要控制机构，在飞行过程中控制舵面的运动会产生气动力和力矩，这些力矩是造成 DFUAV 进行滚转、俯仰、偏航姿态变化的主要原因。如图1-6所示，本文研究的 DFUAV 配置有四片交叉排列的控制舵面，定义机体系 $\mathbf{O}_b - \mathbf{X}_b$ 轴正方向下方位置对应的控制舵面为 1 号舵，从上往下按照顺时针方向依次编号为 2、3、4 号舵。1、3 号舵的同向运动用于产生滚转力矩，2、4 号舵的同向运动用于产生俯仰力矩，4 个舵的共同差动用于产生偏航力矩。定义控制舵面的偏转角度为 $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4]^T$ ，分别对应 4 个控制舵面。规定向右偏转为正方向，零位点保持与机体系 $\mathbf{O}_b - \mathbf{Z}_b$ 轴平行。

在涵道风扇滑流中，控制舵面的偏转而产生的升力与机体系 $\mathbf{O}_b - \mathbf{Z}_b$ 轴垂直，且与转角 δ_i 的平方成正比^[10]：

$$F_i = k_\delta V_e^2 \delta_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1-34)$$

其中 k_δ 是正的常数，表示控制舵面升力系数。 V_e 为涵道出口风速，由式(1-16)给出。

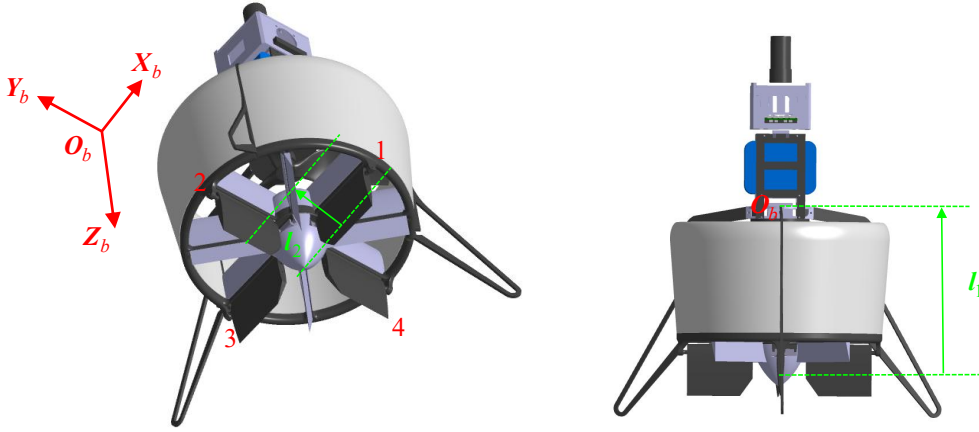


图 1-6 控制舵面及力臂示意图

因此，由控制舵面产生的合力与合力矩可以表示为^[7,10]：

$$\mathbf{F}_{vane}^b = \begin{bmatrix} F_4 - F_2 \\ F_1 - F_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

$$\mathbf{M}_{vane}^b = \begin{bmatrix} -l_1(F_1 - F_3) \\ l_1(F_4 - F_2) \\ l_2(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

式(1-36)中的 l_1 和 l_2 分别为涵道的力臂，如图1-6所示。事实上，控制舵面的偏转角仅在 DFUAV 的失速迎角的范围内才有效果^[11]，超出该范围后，姿态将难以控制。因此需要对偏转角度进行限幅处理：

$$-\delta_m \leq \delta_i \leq \delta_m, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1-37)$$

对于本文研究的 DFUAV，限幅值 δ_m 取 40° 。

1.4.5 陀螺力矩与固定气动面反扭矩

涵道风扇在高速旋转时，DFUAV 整体会呈现出类似陀螺的特性。根据角动量守恒定律，当涵道风扇的旋转轴在外力影响下发生偏移时，为了维持整个系统角动量的守恒，涵道风扇会产生一个特殊的反作用力矩。该力矩垂直于旋转轴的偏移方向，试图将旋转轴拉回到原来的方向，从而抵抗外力对旋转状态的干扰。这种作用力矩即为陀螺力矩，其大小与风扇的转动惯量和旋转的角速度有关。转动惯量体现了涵道风扇抵抗转动状态改变的能力，它取决于风扇的质量分布以及形状等因素。角速度反映了风扇旋转的

快慢程度。当风扇以较高的角速度旋转时，角动量也较大，为了维持角动量而产生的陀螺力矩也越大。所以有：

$$\mathbf{M}_{gyro}^b = J_{fan} \Omega \begin{bmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

其中 J_{fan} 为涵道风扇的转动惯量。

固定气动面是指位于涵道内部，涵道风扇下方的固定装置。其特殊的外形结构用于在涵道风扇滑流中产生反扭矩来抵消 DFUAV 单一风扇产生的风扇扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b ，涵道内部流场示意图如图1-7所示。经过涵道风扇加速后的气流在经过固定气动面时会发生偏转，进而在气动面上产生作用力和力矩。固定气动面的反扭矩效应可以近似表示为^[12]：

$$\mathbf{M}_{flap}^b = V_e^2 \varphi_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{af} \end{bmatrix} + V_e \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{ds} \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

其中 φ_0 是固定气动面的安装角， d_{af} 和 d_{ds} 均为常数。

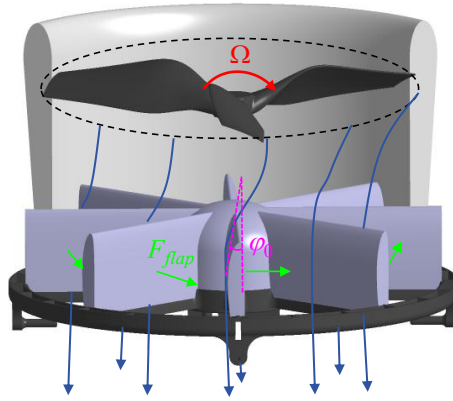


图 1-7 涵道内部流场示意图

经过恰当的设计，固定气动面产生的反扭矩 \mathbf{M}_{flap}^b 可以抵消大部分的风扇扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b 。在实践过程中很难达到理想情况，即 $\mathbf{M}_{flap}^b + \mathbf{M}_{fan}^b = \mathbf{0}$ ，所以剩余的力矩部分将由控制舵面的偏置产生偏航力矩来进行补偿。

1.5 系统建模总结

DFUAV 的输入变量包括涵道风扇的转速 Ω 和四个控制舵面的偏转角 δ_i ，作为动力核心的涵道风扇通过转速调节产生主推力，四片分布式气动舵面通过独立偏转生

成三维控制力矩。系统的输出为状态变量，其中包括 DFUAV 在地面坐标系下的位置 $\mathbf{P}^e = [x^e \ y^e \ z^e]^T$ 、地面坐标系下的速度 $\mathbf{V}^e = [v_x^e \ v_y^e \ v_z^e]^T$ 、姿态角 $\boldsymbol{\eta} = [\varphi \ \theta \ \psi]^T$ 以及机体坐标系下的角速度 $\boldsymbol{\omega}^b = [p \ q \ r]^T$ 。结合 DFUAV 的飞行控制刚体模型和力与力矩的分析，可以推导出 DFUAV 的非线性动态方程，如下所示：

位置动态方程：

$$\begin{aligned}\dot{x}^e &= v_x^e \\ \dot{y}^e &= v_y^e \\ \dot{z}^e &= v_z^e\end{aligned}\tag{1-40}$$

速度动态方程：

$$\begin{aligned}\dot{v}_x^e &= \frac{1}{m} \left\{ (\cos \theta \cos \psi) \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,x} S_x u_r |u_r| + L_x + D_x - V' \rho S u_r + k_\delta V_e^2 (\delta_4 - \delta_2) \right] \right. \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ &\quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,y} S_y v_r |v_r| + L_y + D_y - V' \rho S v_r + k_\delta V_e^2 (\delta_1 - \delta_3) \right] \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ &\quad \cdot \left[-k_{fan} \Omega^2 - \frac{1}{2} \rho C_{D,z} S_z w_r |w_r| + L_z + D_z \right] \Big\} \\ \dot{v}_y^e &= \frac{1}{m} \left\{ (\cos \theta \sin \psi) \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,x} S_x u_r |u_r| + L_x + D_x - V' \rho S u_r + k_\delta V_e^2 (\delta_4 - \delta_2) \right] \right. \\ &\quad + (\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ &\quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,y} S_y v_r |v_r| + L_y + D_y - V' \rho S v_r + k_\delta V_e^2 (\delta_1 - \delta_3) \right] \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) \\ &\quad \cdot \left[-k_{fan} \Omega^2 - \frac{1}{2} \rho C_{D,z} S_z w_r |w_r| + L_z + D_z \right] \Big\} \\ \dot{v}_z^e &= \frac{1}{m} \left\{ -\sin \theta \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,x} S_x u_r |u_r| + L_x + D_x - V' \rho S u_r + k_\delta V_e^2 (\delta_4 - \delta_2) \right] \right. \\ &\quad + (\sin \varphi \cos \theta) \cdot \left[-\frac{1}{2} \rho C_{D,y} S_y v_r |v_r| + L_y + D_y - V' \rho S v_r + k_\delta V_e^2 (\delta_1 - \delta_3) \right] \\ &\quad + (\cos \varphi \cos \theta) \cdot \left[-k_{fan} \Omega^2 - \frac{1}{2} \rho C_{D,z} S_z w_r |w_r| + L_z + D_z \right] \Big\} + g\end{aligned}\tag{1-41}$$

姿态动态方程:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p + \sin \varphi \tan \theta q + \cos \varphi \tan \theta r \\ \dot{\theta} &= \cos \varphi q - \sin \varphi r \\ \dot{\psi} &= \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} q + \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} r\end{aligned}\quad (1-42)$$

角速度动态方程:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{1}{J_x} \left\{ (J_y - J_z)qr + \left[\frac{1}{2} \rho l_a C_{D,y} S_y v_r |v_r| + L_x l_d + C_{duct} \rho R v_r |v_r| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - l_1 k_\delta V_e^2 (\delta_1 - \delta_3) - J_{fan} \Omega q \right] \right\} \\ \dot{q} &= \frac{1}{J_y} \left\{ (J_z - J_x)pr + \left[-\frac{1}{2} \rho l_a C_{D,x} S_x u_r |u_r| + L_y l_d + C_{duct} \rho R u_r |u_r| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + l_1 k_\delta V_e^2 (\delta_4 - \delta_2) + J_{fan} \Omega p \right] \right\} \\ \dot{r} &= \frac{1}{J_z} \left\{ (J_x - J_y)pq + [-k_q \Omega^2 + l_2 k_\delta V_e^2 (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) \right. \\ &\quad \left. + V_e^2 \varphi_0 d_{af} + V_e \Omega d_{ds}] \right\}\end{aligned}\quad (1-43)$$

本文通过物理实验与计算流体力学（Computational Fluid Dynamics, CDF）相结合的方法近似测得试验样机的非线性系统动态方程相关参数，如表1-1所示。

表 1-1 涵道模型参数

| 参数符号 | 数值 | 参数符号 | 数值 |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| $m(kg)$ | 1.85 | $J_x, J_y(kg \cdot m^2)$ | 0.0149 |
| $J_z(kg \cdot m^2)$ | 0.005516 | σ_d | 0.7 |
| $\rho(kg/m^3)$ | 1.225 | $R(m)$ | 0.114 |
| k_{fan} | 9.9796×10^{-6} | k_q | 1.1334×10^{-7} |
| $C_{D,x}$ | 0.43213 | $C_{D,y}$ | 0.43213 |
| $C_{D,z}$ | 0.13421 | $S_x, S_y, S_z(m^2)$ | 0.04 |
| $l_a(m)$ | 0.1121 | C_{duct} | 0.78497 |
| k_δ | 0.0073 | $J_{fan}(kg \cdot m^2)$ | 3.7×10^{-5} |
| d_{af} | 0.01495 | d_{ds} | 0.01495 |
| $l_1(m)$ | 0.1708 | $l_2(m)$ | 0.0066 |

由 DFUAV 的非线性动态方程可知，DFUAV 的飞行动态呈现为一个高度非线性的多变量耦合系统，系统内各状态变量之间存在着复杂且紧密的相互作用。若要将所有相关变量纳入考量，控制算法的设计工作将尤为棘手。因此在具体实践过程中，可以根据实际情况合力简化模型，有针对性地忽略部分影响较小的因素，保留决定系统宏观特性的主干动力学。然而，模型简化意味着信息缺失，对于未被建模的动态特性（如突然的阵风扰动、机械结构磨损等）以及因简化模型而产生的误差，则可通过鲁棒性的飞行控制算法来进行补偿。

1.6 本章小结

本章主要介绍了试验样机的系统组成并围绕 DFUAV 的系统建模展开系统性研究。

首先介绍了所使用的试验样机的整体系统组成，明确了各个部分的功能和相互关系，为后续建模及飞行实验奠定物理基础。

接着介绍了坐标系和姿态表示方法，建立了地面坐标系与机体坐标系的转换关系，并根据实际约束采用了‘Z-Y-X’旋转顺序的欧拉角姿态表示方法为飞行控制系统的建模提供了必要的数学分析工具。

在 DFUAV 的飞行控制刚体模型构建中，结合牛顿-欧拉方程推导出六自由度非线性动力学方程，完整表征平动与转动状态的关系。

并从涵道风扇、机身、涵道翼型、控制舵面和固定气动面等多个方面分析了施加在上面的力与力矩，揭示了各类作用力和控制力矩对飞行器姿态和运动的动态影响。

最后建立了 DFUAV 的完整的非线性动态方程，本章建立的参数化模型为后续控制算法设计、仿真验证及飞行试验提供了理论框架与数值分析基础。

第二章 涵道风扇式无人机的姿态控制

基于第二章建立的 DFUAV 非线性系统动态方程分析，其多源力与力矩耦合叠加效应导致姿态动态模型尤为复杂。如横滚角的变化会在俯仰通道和偏航通道上都产生或者间接产生力矩影响，并且三维力矩都与环境风速呈现强相关性。最常用的姿态控制方法基于反馈线性化，比如不考虑系统的数学模型的 PID 控制算法，虽然该方法面对非线性系统有一定的鲁棒性，但仅通过比例-积分-微分的线性组合应对内外因素产生的力矩影响难免会使系统状态出现超调和滞后等问题。此外，可以使用基于系统模型的方法考虑内外因素对系统状态的影响，但在系统模型参数过多并且不精确的情况下也将为控制算法的设计和系统调试带来很大工作量。基于上述分析，姿态控制算法设计的核心在于如何对难以测得的力矩进行在线补偿。

本章安排如下：将首先对 DFUAV 的姿态模型进行简化处理，方便下文姿态控制算法的设计。然后简要概述增量控制和控制分配的理论以及二者的结合，继而给出了基于 INDI 和优先级控制分配的 DFUAV 的姿态控制方案设计。为验证方案有效性，最后进行了仿真实验和飞行实验验证。

2.1 增量非线性动态逆控制与控制分配理论

NDI（非线性动态逆）是一种基于模型的非线性控制方法，其核心在于在掌握系统模型的情况下，将非线性系统在工作点处进行反馈线性化，然后通过求逆运算来消除系统中的非线性项。当系统模型参数不精确或者对系统机理认识模糊的情况下，NDI 方法的控制效果将表现不佳。而 INDI（增量式非线性动态逆）相比于 NDI 采用了增量式的控制策略，仅要求对系统的输入通道建模。INDI 在未能充分掌握系统模型的情况下，通过增量式的求逆策略来实时补偿未知扰动与建模误差，得到线性化的系统动力学，进而可以通过常规的线性系统的控制方法来控制^[13]。因此 INDI 方法对系统模型的依赖程度较小，是一种基于传感器的方法。此外，INDI 方法在设计控制律时主要关注系统的输入输出特性，无需考虑应如何将控制律计算出的控制量分配到各个执行机构上。而后者所描述的任务将由控制分配算法来实现，实现过程中也无需考虑系统内部的复杂非线性因素与动态干扰。因此，采用 INDI 控制方法有助于将姿态控制算法设计与控制分配算法分离开，实现分层控制。

本节首先将从一般性的系统推导 INDI 是如何实现增量控制的，然后介绍控制分配理论以及二者的结合。

2.1.1 增量非线性动态逆

考虑如下普通的非线性动力系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2-1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2-2)$$

上式中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为 n 维系统状态变量， $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \in \mathbb{R}^p$ 为 p 维系统输入变量，其中 \mathbf{U} 是容许控制集合，表示对输入变量的约束， $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维系统输出变量。映射关系 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。

式(2-1)中系统状态的一阶泰勒展开式为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (2-3)$$

然后对式(2-2)中的输出表达式求一次导数，结合复合函数求导的链式法则与式(2-3)，可以得到动力系统输入与输出之间的关系：

$$\dot{\mathbf{y}} = \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \dot{\mathbf{x}}_0}_{\dot{\mathbf{y}}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \left[\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \right] \quad (2-4)$$

INDI 理论的一个核心假设是时间尺度分离法则^[14]，该法则基于系统动力学的时间尺度特性，指出系统内部状态变量的动态响应速率要明显慢于外部输入信号的时变特性。基于这一动力学特性差异，相比于外部输入信号的导数项，系统状态变量的导数项可以视为高阶小量并忽略不计，从而有效地简化系统的动态方程。

基于上述核心假设，可以将式(2-4)中系统状态的导数项 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 忽略，得到：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{y}}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\ &= \dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{G}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中 $\dot{\mathbf{y}}_0$ 为系统当前时刻输出的导数， $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ， \mathbf{u}_0 为系统当前时刻的控制输入。使用下标 $(\cdot)_d$ 表示该变量的期望值，那么根据公式(2-5)，可以得到期望的输入变量 \mathbf{u}_d 表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d &= \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{G}^{-1}(\dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (2-6)$$

新的控制输入是在当前时刻的控制输入基础上加上一个控制增量 Δu 得到。通过对控制效率矩阵求逆，并且找到期望的输出导数与当前时刻的输出导数的误差，可以得到控制增量。

2.1.2 控制分配理论

继续考虑 3.1.1 小节中引入的非线性动力系统。对于一个过驱动系统，其系统输入的维度大于系统输出的维度，即 $p > m$ 。将 $g(x, u)$ 做矩阵分解得到：

$$g(x, u) = DK(x, u) \quad (2-7)$$

其中 $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，映射关系 $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。

引入 m 维虚拟控制输入 ν ：

$$\nu = K(x, u) \quad (2-8)$$

由于实际控制输入的约束 U 存在，将实际控制输入变换为虚拟控制输入后有 $\nu \in \Phi \in \mathbb{R}^m$ 。容许控制集合通过映射 K 从 \mathbb{R}^p 空间映射到 \mathbb{R}^m 空间得到可达控制集合，如果 $\nu \in \Phi$ ，则称虚拟控制输入为可达，否则为不可达。

对 ν 做一阶泰勒展开并且同样忽略关于系统状态的导数项，得到：

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 + \left. \frac{\partial K}{\partial u} \right|_{u=u_0} (u - u_0) \\ &= \nu_0 + B(u - u_0) \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中 ν_0 表示系统当前时刻的虚拟控制输入， $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 。将 $(u - u_0)$ 代入公式(2-5)，得到：

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + GB^\dagger(\nu - \nu_0) \quad (2-10)$$

其中 B^\dagger 表示矩阵 B 的伪逆矩阵，有以下关系：

$$u = B^\dagger \nu \quad (2-11)$$

$$B^\dagger = B^T (BB^T)^{-1} \quad (2-12)$$

公式(2-11)中直接表示表示虚拟控制输入 ν 与实际控制输入 u 之间映射关系的方法就是伪逆法。需特别指出的是，尽管可以设计出渐进稳定的控制算法，但是受矩阵 B 奇异特性及执行机构物理约束的影响，所推导的期望虚拟控制输入 ν_d 可能属于不可达

集。这一现象在本质上源于伪逆法在控制分配问题中的固有局限性：当控制指令超出执行机构可达包络时，将导致控制分配问题退化为无可行解的数学约束条件，因此下文在控制分配算法的设计中将参考文献[15]，采用优先级控制分配方法。该方法旨在通过优先级排序的方式，优先满足高优先级的控制输入分量以达到更大范围的容许控制。

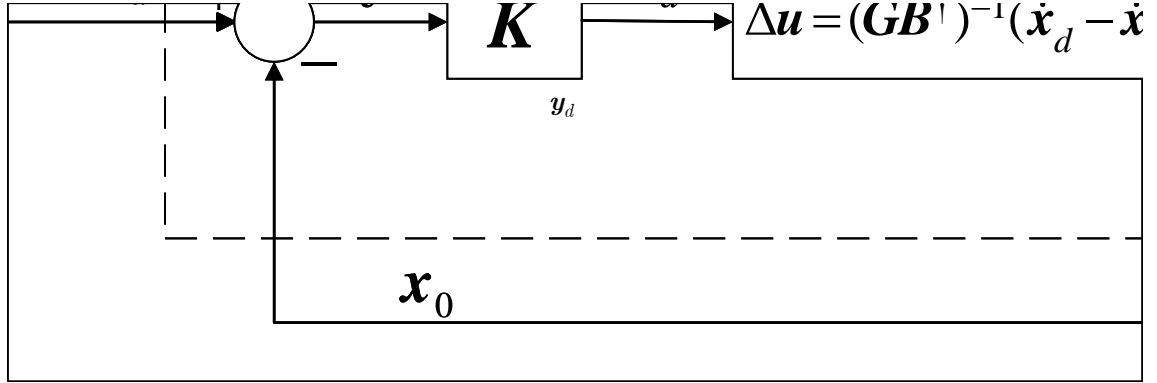


图 2-1 地面坐标系与机体坐标系定义

2.2 姿态模型简化

本节将从两个方面简化姿态模型：一是简化非主要气动力矩的表示，区分可控力矩与不可控力矩。二是使用虚拟控制输入来分解姿态子系统，分别考虑姿态跟踪问题和控制分配问题。

2.2.1 气动力矩模型简化

根据式1-11可知，DFUAV 在机体坐标系下的合外力矩可以分解为：

$$\mathbf{M}^b = \mathbf{M}_{fan}^b + \mathbf{M}_{aero}^b + \mathbf{M}_{duct}^b + \mathbf{M}_{vane}^b + \mathbf{M}_{gyro}^b + \mathbf{M}_{flap}^b \quad (2-13)$$

由于涵道风扇的转速 Ω 可由电调读取，机体的角速度 ω^b 可由机载的 IMU 测量得到，结合表1-1中的模型参数，可以计算出涵道风扇的扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b 和陀螺力矩 \mathbf{M}_{gyro}^b 。

模型假设环境风速在 $\mathbf{O}_b - \mathbf{Z}_b$ 轴的分量为零，即 $V_0 = 0$ 。根据式1-16以及式1-19，可将涵道出口风速 V_e 简化为：

$$V_e = \sqrt{\frac{k_{fan}}{\sigma_d \rho S}} \Omega \quad (2-14)$$

在这种假设下，涵道出口风速 V_e 与风扇转速 Ω 之间呈正比关系。不妨设 $V_e = k_f \Omega$ ，其中 $k_f = \sqrt{\frac{k_{fan}}{\sigma_d \rho S}}$ 可以根据表1-1中的参数计算得到。然后根据控制舵面的偏转角 δ_i 和涵道力臂的长度，可计算出控制舵面产生的力矩 \mathbf{M}_{vane}^b 。

对于在固定气动面上产生的反扭距 \mathbf{M}_{flap}^b ，由于 V_e 与 Ω 为正比关系，可将式1-39简化为：

$$\mathbf{M}_{flap}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{flap}\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

现在考虑风扇扭矩 \mathbf{M}_{fan}^b 、固定气动面上的反扭距 \mathbf{M}_{flap}^b 和控制舵面在 $\mathbf{O}_b - \mathbf{Z}_b$ 轴的偏航力矩。根据第二章的力矩分析，仅有上述三部分分量会对机体的偏航力矩产生影响。为使机体的偏航角保持稳定，有如下关系：

$$-k_q\Omega^2 + k_{flap}\Omega^2 + k_\delta k_f^2 l_2 (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)\Omega^2 = 0 \quad (2-16)$$

式2-16表明当机体偏航角稳定时，所需的控制舵面偏转角是一定的。由于 k_{flap} 与固定气动面的设计形状有关，不失一般性，本文假设固定气动面在恰当的设计下可以使得 $k_{flap} = k_q$ ，即 $\mathbf{M}_{flap}^b + \mathbf{M}_{fan}^b = \mathbf{0}$ 。

对于在机身上产生的气动力矩 \mathbf{M}_{aero}^b 和由于涵道翼型产生的力矩 \mathbf{M}_{duct}^b ，由于机体相对于气流的速度 \mathbf{V}_a^b 在现有条件下是未知的，所以将其视为不可控力矩来作为未建模动态。使用 \mathbf{M}_a^b 统一表示：

$$\mathbf{M}_a^b = \mathbf{M}_{aero}^b + \mathbf{M}_{duct}^b \quad (2-17)$$

\mathbf{M}_a^b 可以描述为地面坐标系下的速度 \mathbf{V}^e 、姿态 η 和环境风速 W^e 的函数，即：

$$\mathbf{M}_a^b = \mathbf{M}_a^b(\mathbf{V}^e, \eta, W^e) \quad (2-18)$$

综合以上分析简化后的气动力矩模型为：

$$\mathbf{M}^b = \mathbf{M}_{vane}^b + \mathbf{M}_{gyro}^b + \mathbf{M}_a^b \quad (2-19)$$

控制舵面合力矩 \mathbf{M}_{vane}^b 作为可控力矩由下文设计的姿态控制算法来计算期望力矩（即期望的控制舵面偏转角度）。陀螺力矩 \mathbf{M}_{gyro}^b 同样作为可控力矩，但该力矩会对 DFUAV 的姿态造成负面影响，将由下文设计的陀螺力矩补偿算法来加以补偿。而 \mathbf{M}_a^b 作为不可控力矩将通过姿态控制算法在线补偿。

2.2.2 虚拟控制输入

如前文所述，DFUAV 姿态子系统的控制输入为控制舵面的偏转角 δ_i ，由四片控制舵面产生三维控制力矩，因此带来了过驱动的问题。因此引入虚拟控制输入 ν 将姿态子系统分为两部分， ν 既作为姿态子系统的控制输入也作为控制分配算法的期望力矩。可表示为：

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

其中矩阵 B 为四片控制舵面偏转角到三维虚拟控制输入的转换矩阵，有 $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 。

2.3 图

图的导入需要提前准备好图片文件，最好是.png、.eps、.pdf 或.jpg 文件。另外，如果是从 matlab 导出图片文件，可使用 print 函数或手动导出，print 函数的使用可参考 ICGNC2020plot.m 以及 PlotToFileColorPDF.m 文件等。手动导出（matlab 的 figure 界面的“文件”->“导出设置”设置好大小、分辨率和线宽等然后点击“应用于图窗”）主要用于观察效果，可设置某种样式名称后保存该样式，下次使用时加载，具体可百度“matlab 导出高清图片”。需要特别注意的是一定要 1:1 导入 matlab 生成的图片，并且图中文字设置好字体字号。否则缩放之后，图片的字号就变了，盲审老师一眼就能看出来字号不对，就很麻烦。这就是为什么要在 matlab 点击“应用于图窗”进行预览，观测效果后再 1:1 使用图片。

使用如下代码放置独立成行的图片，效果如图2-2所示

```
\begin{figure}[htbp]
    % 图片居中（列居中对齐）
    \centering
    % 包含当前路径下的Fig文件夹的图片文件DFUAV_f31.png
    \includegraphics[scale=1]{Fig/DFUAV_f31.png}
    % 添加标签one_DFUAV以及图标题“涵道风扇式无人机”，引用某图时使用\ref{xxx}，其中xxx就是标签，图编号是自动生成的。
    \caption{\label{one_DFUAV}涵道风扇式无人机}
\end{figure}
```

其中 figure 为环境名，[htbp] 表示将图片设置为浮动体，实际上这在.cls 文件已经设置过，因而可以省略。[scale=1] 表示安装 1:1 的比例导入图片，还可以按其他方式导入，

需要时可自行百度。



图 2-2 涵道风扇式无人机

使用如下代码划分页面并排放置图2-3、图2-4

```
\begin{figure}[htbp]
\centering
\begin{minipage}[c]{0.5\textwidth} % minipage将页面划分为0.5\textwidth
\centering
\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/honeywell_t-hawk.jpg}
\caption{\label{Hawk}T-Hawk}
\end{minipage}%
\begin{minipage}[c]{0.5\textwidth}
\centering
\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/GTSpy.jpg}
\caption{\label{GTSpy}GTSpy}
\end{minipage}
\end{figure}
```

其中 [c] 表示行居中对齐。当图片大小不一但又需要 1:1 导入时，图标题可能行不对齐，因此可以改为如下指令：

```
\begin{figure}[htbp]
\centering
\begin{minipage}[c]{0.5\textwidth}
\centering
\includegraphics[scale=1]{Fig/honeywell_t-hawk.jpg} %1:1导入
\end{minipage}%
\begin{minipage}[c]{0.5\textwidth}
\centering
\includegraphics[scale=1]{Fig/GTSpy.jpg}
\end{minipage}\\[1pt]
\begin{minipage}[t]{0.5\textwidth} % 以下为新添加页面划分，[t]表示行顶部对齐
\caption{\label{Hawk}T-Hawk}
\end{minipage}%
\begin{minipage}[t]{0.5\textwidth}
```



```
\caption{\label{GTSPy}GTSPy}
\end{minipage}%
\end{figure}
```



图 2-3 T-Hawk

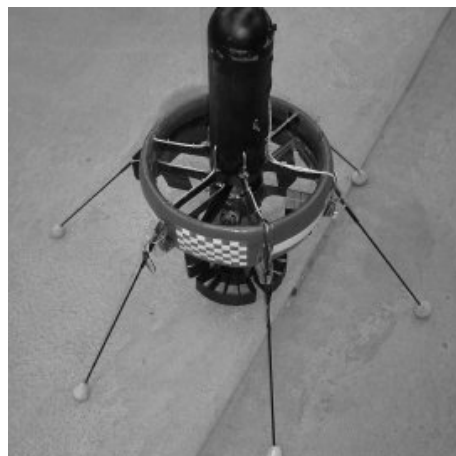


图 2-4 GTSPy

通常一个 figure 内含有其他小的 figure, 可以使用一些宏包, 但最初本着简单的原则, 本模板并没有使用这些子图包。后来应同学们要求在, 把子图的功能加上, 主要是修改了模板文件 (scutthesis.cls 文件) 的功能包参数。注意, 很多网上拿到的代码不一定可以精确的调子图标题字体字号, 因为此模板的子图标题字体字号是利用 subfig 宏包的选项进行设置的 (在 scutthesis.cls 文件的“图表环境”中), 而有些教程使用 subcaption 进行同样的设置, 还需进一步验证可行性。另外图的排版方法很多, 有些宏包已经被弃用, 所以尽量使用本文给出的案例的格式进行排版图片。

常见的子图包有 subfigure 和 subfig。subfigure 是比较老的了, 这里使用 subfig 包。两个包在使用的时候用法不同, 千万不要混淆了, 不然可能会报错。subfig 包的命令是 \subfloat。这里给出一种使用 subfig 包的常用排版, 如图2-5的子图2-5 b), 其中a)的试验并不好 (这里测试了交叉引用 \subref{xxx} 和 \subref*{xxx})。必要时也可以排版多行多列的图、调整图之间的间距, 具体可百度。

```
\begin{figure}[!h]
\centering
\subfloat[不合理的轨迹]{\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/Figure_1.png}%
\label{Fig:1:a}}
\subfloat[优化的轨迹]{\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/Figure_2.png}
\label{Fig:1:b}}
\\ % 用 \\ 换行, 也可以此处空一行进行换行, 只有两个图的话下面就不需要了。
\subfloat[不合理的轨迹]{\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/Figure_1.png}%
\label{Fig:1:c}}
\subfloat[优化的轨迹]{\includegraphics[width=6cm,height=6cm]{Fig/Figure_2.png}%
\label{Fig:1:d}}
\caption{子图包使用测试}\label{Fig:1}
```

```
\end{figure}
```

% 引用某子图时使用\subref{xxx}, 其中xxx就是标签Fig:1:a

子图的引用比较特殊, 命令有: \subref{xxx}和\subref*{xxx}

注: 在subfig包使用说明中, \subref{xxx}和\subref*{xxx}分别由参数listofformat和subrefformat控制,

并由如下定义, 根据撰写规范需要定义为:

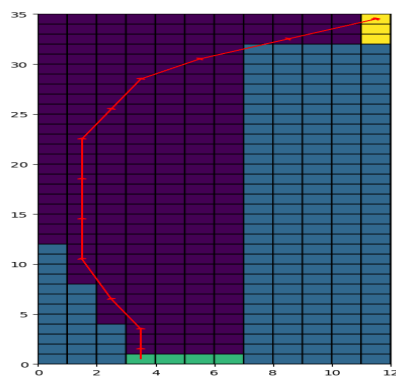
```
\DeclareSubrefFormat{empty}{}
\DeclareSubrefFormat{simple}{#1#2}
\DeclareSubrefFormat{parens}{#1 #2}
\DeclareSubrefFormat{subsimple}{#2}
\DeclareSubrefFormat{subparens}{ #2}
```

和

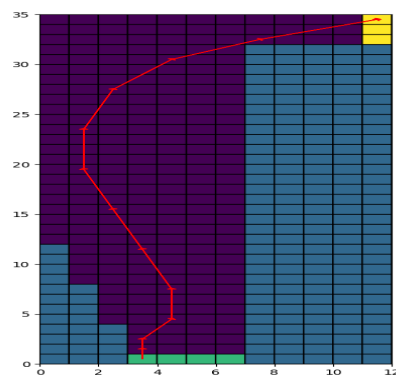
```
\DeclareCaptionListOfFormat{empty}{}
\DeclareCaptionListOfFormat{simple}{#1#2}
\DeclareCaptionListOfFormat{parens}{#1 #2}
\DeclareCaptionListOfFormat{subsimple}{#2}
\DeclareCaptionListOfFormat{subparens}{ #2}
```

```
\DeclareCaptionListOfFormat{simple}{#1#2}
\DeclareCaptionListOfFormat{parens}{#1 #2}
\DeclareCaptionListOfFormat{subsimple}{#2}
\DeclareCaptionListOfFormat{subparens}{ #2}
```

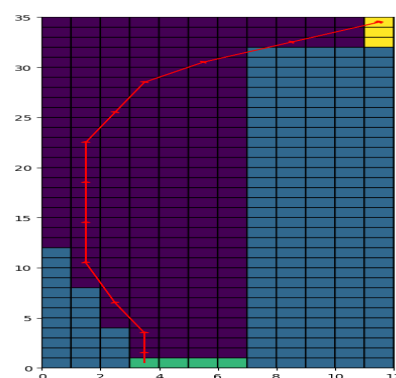
```
\DeclareCaptionListOfFormat{subsimple}{#2}
\DeclareCaptionListOfFormat{subparens}{ #2}
```



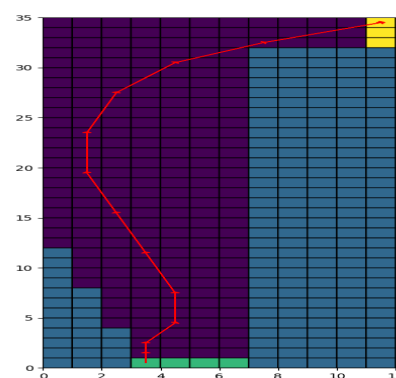
a) 不合理的轨迹



b) 优化的轨迹



c) 不合理的轨迹



d) 优化的轨迹

图 2-5 子图包使用测试

2.4 公式

除了前面讲行内公式，常用的还有行间公式。公式中的数学符号可自行百度，本章仅介绍常用的几种公式环境。

单独成行的行间公式在 \LaTeX 里由 `equation` 环境包裹。`equation` 环境为公式自动生成一个编号，这个编号可以用 `\label` 和 `\ref` 生成交叉引用，`amsmath` 宏包的 `\eqref` 可为引用自动加上圆括号；如式(2-21)所示。

```
\begin{equation}
  a+b=c \quad \label{eq_1}
\end{equation}
```

$$a + b = c \quad (2-21)$$

若不需要编号则加星号，改为

```
\begin{equation*}
  a+b=c
\end{equation*}
```

其他环境类似。当使用 `$` 开启行内公式输入，或是使用 `equation` 环境时， \LaTeX 就进入了数学模式。数学模式相比于文本模式有以下特点：

1. 数学模式中输入的空格被忽略。数学符号的间距默认由符号的性质（关系符号、运算符等）决定。需要人为引入间距时，使用 `\quad` 和 `\qquad` 等命令。
2. 不允许有空行（分段）。行间公式中也无法用 `\\` 命令手动换行。排版多行公式需要用到其他各种环境。
3. 所有的字母被当作数学公式中的变量处理，字母间距与文本模式不一致，也无法生成单词之间的空格。如果想在数学公式中输入正体的文本，简单情况下可用 `\mathrm` 命令。或者用 `amsmath` 提供的 `\text` 命令（仅适合在公式中穿插少量文字。如果你的情况正好相反，需要在许多文字中穿插使用公式，则应该像正常的行内公式那样用，而不是滥用 `\text` 命令）。

实际上更常用的的是多行公式，不需要对齐的公式组可以使用 `gather` 环境，需要对齐的公式组用 `align` 环境。长公式内可用 `\\` 换行。

如果需要罗列一系列公式，并令其按照等号对齐，可用 `align` 环境，它将公式用 `&` 隔为两部分并对齐。分隔符通常放在等号左边：

```
\begin{align}
  a &= b + c \\
\end{align}
```

```
& = d + e
\end{align}
```

$$a = b + c \quad (2-22)$$

$$= d + e \quad (2-23)$$

`align` 环境会给每行公式都编号。

如果不需要按等号对齐，只需罗列数个公式，可用 `gather` 环境：

```
\begin{gather}
  a = b + c \notag \\
  f = d + e
\end{gather}
```

$$a = b + c$$

$$f = d + e \quad (2-24)$$

`gather` 环境同样会给每行公式都编号，如果某行不需要编号可在行末用 `\notag` 仅去掉某行的编号。

`align` 和 `gather` 有对应的不带编号的版本 `align*` 和 `gather*`。

另一个常见的需求是将多个公式组在一起公用一个编号，编号位于公式的居中位置。为此，`amsmath` 宏包提供了诸如 `aligned`、`gathered` 等环境，与 `equation` 环境套用。以 `-ed` 结尾的环境用法与前一节不以 `-ed` 结尾的环境用法一一对应。我们仅以 `aligned` 举例：

```
\begin{equation}
  \begin{aligned}
    a &= b + c \\
    d &= e + f + g \\
    h + i &= j + k \\
    l + m &= n
  \end{aligned}
\end{equation}
```

$$a = b + c$$

$$d = e + f + g$$

$$h + i = j + k$$

$$l + m = n \quad (2-25)$$

`split` 环境和 `aligned` 环境用法类似，也用于和 `equation` 环境套用，区别是 `split` 只能将每

行的一个公式分两栏，`aligned` 允许每行多个公式多栏。

分段函数通常用 `amsmath` 宏包提供的 `cases` 环境，可参考文献[16]

`amsmath` 宏包还直接提供了多种排版矩阵的环境，包括不带定界符的 `matrix`，以及带各种定界符的矩阵 `pmatrix`、`bmatrix`、`Bmatrix`、`vmatrix`、`Vmatrix`。其中中括号版的 `bmatrix` 最常用。这些矩阵环境需要在公式中使用，比如 `gather` 环境。

```
\begin{gather}
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn}
\end{bmatrix}
\end{gather}
```

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

其中矩阵/向量加粗使用 `\boldsymbol{}` 命令，`bm` 宏包的 `\bm{}` 命令和 `unicode-math` 包有兼容性问题，若使用 `unicode-math` 包，可能需要使用新的加粗命令（具体在 `math_font` 文件夹的测试文件对比差异）。另外还可以使用 `array` 环境排版矩阵，类似 `tabular` 环境，用 `\\` 和 `&` 用来分隔行和列，这里不再赘述。

```
\begin{array}{[外部对齐tcb]{列对齐lcr}}
行列内容
\end{array}
```

另外注意排版分式时，有两种方法：`\frac` 或者 `\dfrac`，效果分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。以上介绍的数学环境中，空格可参考文献[16]，例如常用 `\quad`。

需要局部更改字号时，可以使用 `tutorial` 文件夹 `lshort-zh-cn.pdf` 的 5.1 节进行更改，如加 `\small` 使得字号小一号。

2.5 定理

在 `scutthesis.cls` 文件的最后，已经用 `\newtheorem` 命令定义了几种定理环境，包括：定义、假设、定理、结论、引理、公理、推论、性质等等，统称定理环境，关于 `\newtheorem` 的用法，可参考[16-17]或自行百度。要下面提供几个例子，在横线之间的深色区域是代码，效果在相应下方表示：

```
\begin{assumption}
  加权矩阵 $\{\{\boldsymbol{W}\}_{1}\}$ 和 $\{\{\boldsymbol{W}\}_{2}\}$  是对称矩阵, 且 $\{\{\boldsymbol{W}\}_{2}\}$ 非奇异。 \label{assum_dca1}
\end{assumption}
```

假设 2.1: 加权矩阵 \boldsymbol{W}_1 和 \boldsymbol{W}_2 是对称矩阵, 且 \boldsymbol{W}_2 非奇异。

定理用法和假设类似:

```
\begin{theorem}
  如果假设\ref{assum_dca1}成立,  $\boldsymbol{F}$ 满足式\eqref{eq_F}的定义, 且 $\{\{\boldsymbol{W}\}_{1}\}$ 非奇异, 则有 $0 \leq e \left( \boldsymbol{F} \right) < 1$ , 其中 $e \left( \boldsymbol{F} \right)$ 是  $\boldsymbol{F}$ 的特征值。 \label{the_dca2}
\end{theorem}
```

定理 2.1: 如果假设2.1成立, \boldsymbol{F} 满足上式的定义, 且 \boldsymbol{W}_1 非奇异, 则有 $0 \leq e(\boldsymbol{F}) < 1$, 其中 $e(\boldsymbol{F})$ 是 \boldsymbol{F} 的特征值。

注 2.1: 定理环境的编号可自定义, 但通常不需要再进行设置, 因为模板文件 scutthesis.cls 文件已经定义好。

2022 年 5 月更新:

根据最新的博士论文送审结果, 定理等环境统一把原来的斜体改成正体。在此引用一下参考文献^[17]的内容:

amsthm 提供了 \theoremstyle 命令支持定理格式的切换, 在用 \newtheorem 命令定义定理环境之前使用。amsthm 预定义了三种格式用于 \theoremstyle:plain 和 LATEX 原始的格式一致; definition 使用粗体标签、正体内容; remark 使用斜体标签、正体内容。

以上部分在 scutthesis.cls 文件最后一部分设置。

amsthm 还提供了一个 proof 环境用于排版定理的证明过程。proof 环境末尾自动加上一个证毕符号:

证明: 显然有

$$E = mc^2$$

证毕

□

proof 的大更多用法见参考文献^[17]。scutthesis.cls 文件的最后, 跟所有定理环境一样, 只是把英文” Proof “改成中文”证明”。

2.6 参考文献

再次强调，使用其他参考文献管理软件的用户以及不使用任何软件的“裸奔”的用户不需要关注任何关于 zetero 的东西。

关于参考文献这块，很多同学有疑问。只有记住一点：不管用什么参考文献管理工具，最终目的是生成一个bib文件，bib文件里是特定格式的文献信息。bib文件当作文本打开，里面就是文献的元数据。

通常学位论文参考文献是基于 BibTeX 进行的，本模板使用的是 BibLaTeX，或者叫 Biber。关于这部分知识可参考文献[16-17]的第六章，6.1 节参考文献和 BIBTEX 工具。所以使用 TeXstudio 或者 vscode 的时候需要注意调整正确的参数进行编译。

引用前手动加空格，如：

引用前没有加空格[16-17]的第六章，引用后面有空格。

引用前手动加空格 [16-17] 的第六章，引用后面有空格。

手写方括号 [6]。引用后面没空格。

生成方括号 [18]。引用后面没空格。

参考文献引用和著录是基于 ZOTERO 这个软件进行的。视频教程见[18]。此外，为了符合毕业论文撰写规范，需设置参数。按照视频教程安装完必要的插件（如 Better BibTeX）后，在编辑->首选项进行设置。图2-6到图2-16所示的是我的 zotero 软件设置。其中最重要的是2-15的设置要排除的选项，多余的显示会让审稿人反感，按照论文撰写规范进行即可。在毕业论文撰写时，在编辑->首选项->Better BibLaTeX->Fields 中，Fields to omit from export 填 month,abstract,note,extra,file,keywords,type,url,doi，就是在参考文献著录中排除这些多余的项，避免过于复杂。而在写本模板使用说明时，没有排除 url，因为很多参考资料是网页。

使用zotero，有时候科学上网很重要。

在 zotero 软件点击文件->导出文献库，如图2-17所示，再在导出对话框图2-18选择导出格式为 Better BibLaTeX，同时勾选 Keep updated 选项保持自动更新，再点击 ok，在弹出的对话框图2-19确定保存路径和文件名，例如我的是 MyLibrary.bib，这也是我整个读书生涯的文献库 bib 文件。如果写小论文的话通常导出格式是 BibTeX 或者 Better BibTeX（这里按照期刊的要求来即可，文献管理软件的好处就是快速自动生成一个文件库）。关于 BibTeX 和 BibLaTeX 的区别这里不做展开。

得到文献库后，在 scutthesis.tex 文件第九行使用\addbibresource 命令，添加文献库。

引用某文献时秩序在 zotero 选中某文献条目，然后按 Ctrl+Shift+C，复制引用关键字 (Citation Key) 到剪切板（快捷键可自定义）。然后在 tex 文件编辑界面直接粘贴，默认的为上标形式，若需要非上标形式，可以改为 `\parencite{xxx}`，其中 xxx 是 Citation Key。这里的操作和认为设置的首选项参数有关，需要在编辑-> 首选项-> 导出界面的默认格式一栏选中相应的项，同时在编辑-> 首选项-> 高级-> 快捷键设置为默认值。

2020 年 12 月 2 日测试：下载最新 zotero，从知网和谷歌捕获文献（刚打开网页最好稍等一会再点击插件，谷歌可能需要现人机验证），对文献[19]、[20] 进行引用。

2021 年 9 月 14 日测试：使用 endnote 的用户也可以利用导出的 bib 文件生成参考文献著录信息，导出选项是 bibTeX，貌似没有更多导出设置选项。导出设置没有 zotero 那么灵活丰富，得到 bib 文件后要引用某论文需要自行查找标签 (label，也有软件叫引用关键字 Citation Key) {xxx} 然后手打 `\cite{xxx}`。欢迎熟悉 endnote 的同学来信告诉我更好的办法。

2023 年 3 月 8 日测试：参考文献管理软件经常更新，但还是那句话，无论什么工具，最终得到 bib 文件即可，在期刊的文章页或者谷歌学术搜索页，只需要复制/下载 bibtex 的内容。得到这些元数据后甚至自己往 bib 文件里加都可以。

2023 年 11 月测试。论文写完记得断掉 bib 文件自动更新，在 zotero 的插件 Better BibTeX 自动导出设置里删除不希望再继续同步到项。否则更改软件中的文献后，论文的 bib 文件也同步更改，但有时候这不是想要的。

另外有同学反映，换了电脑后重新导出的 bib 文件 Citation Key 值不同，记得设置好 Better BibTeX 之后，在著录条目界面全选著录（或仅选想更新的著录）然后右键选 Better BibTeX 更新 refresh 一下。然后在 Automatic export 选项点击 Export now 立即更新 bib 文件（按理说勾选了自动更新选项他会自动更新，但为了确保万无一失还是点一下）。

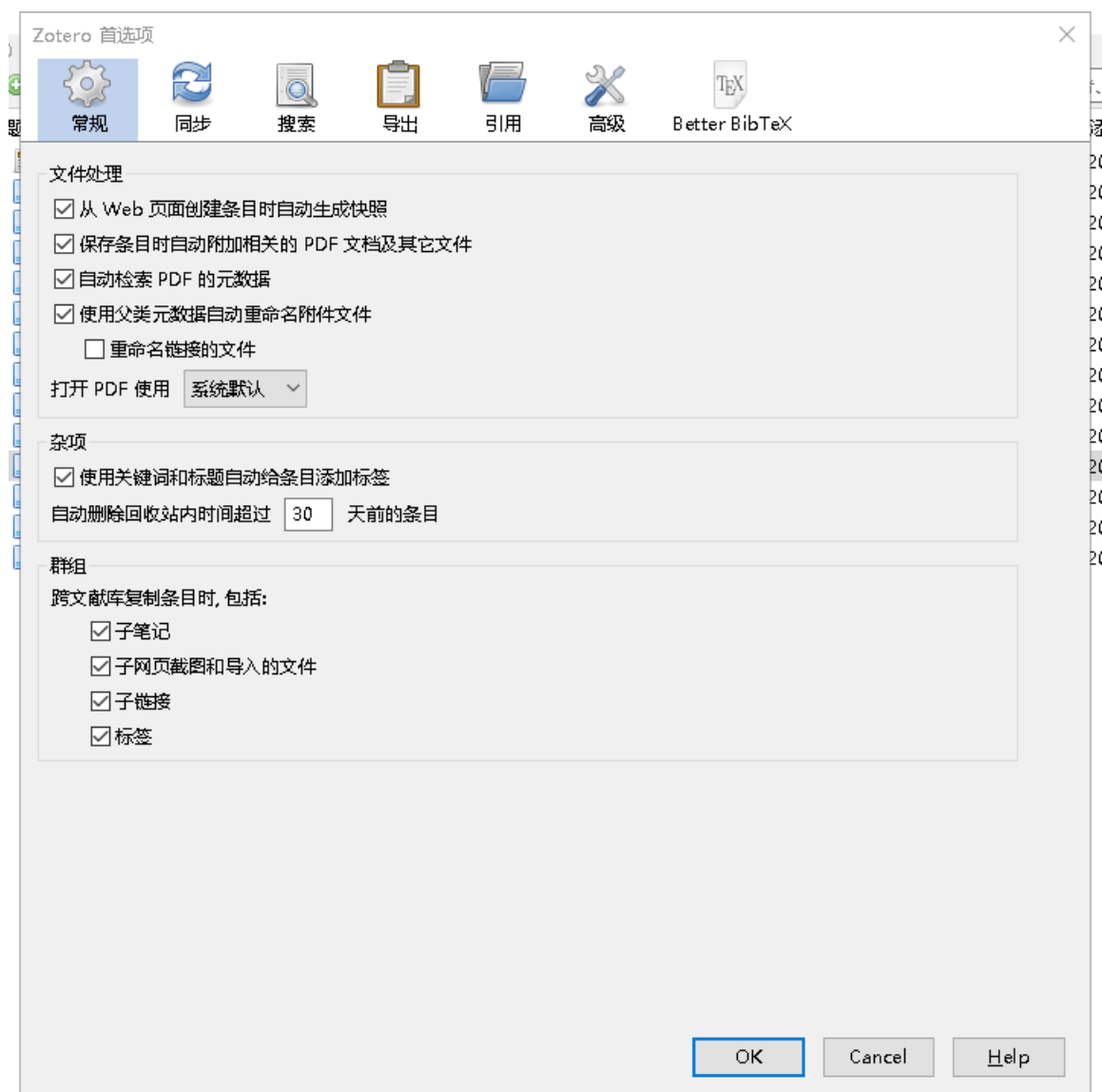


图 2-6 常规

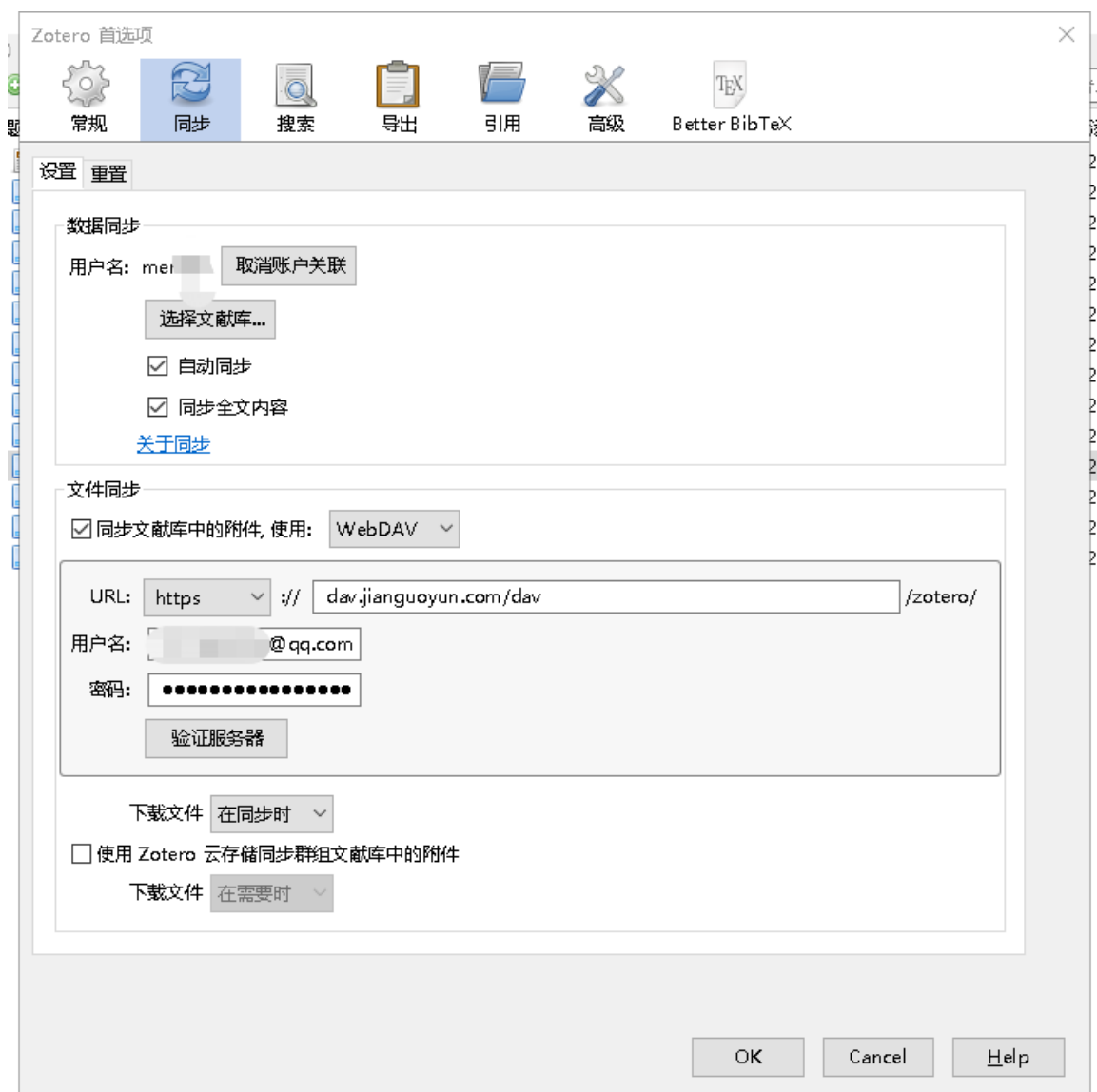


图 2-7 同步 1

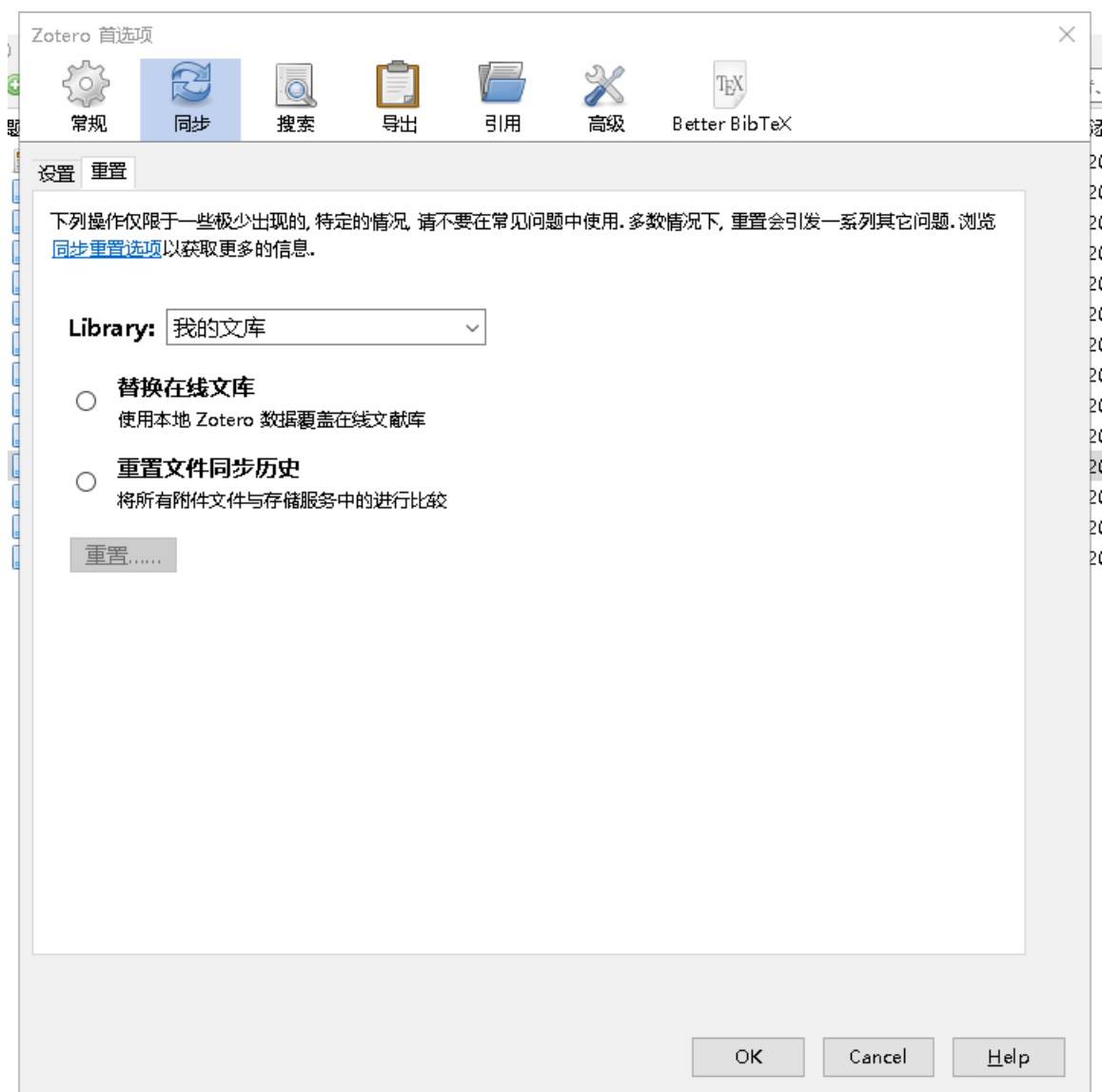


图 2-8 同步 2

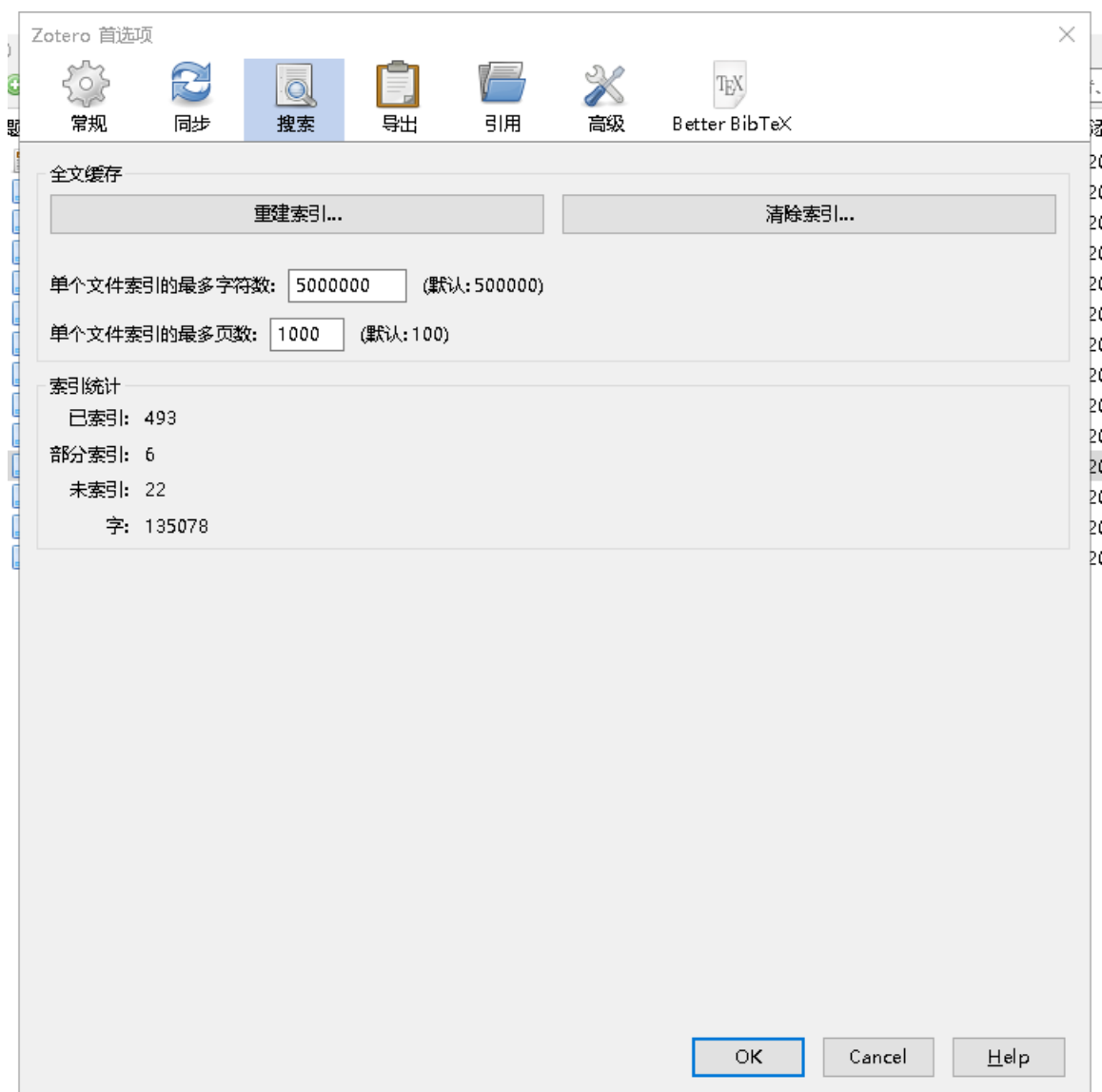


图 2-9 搜索

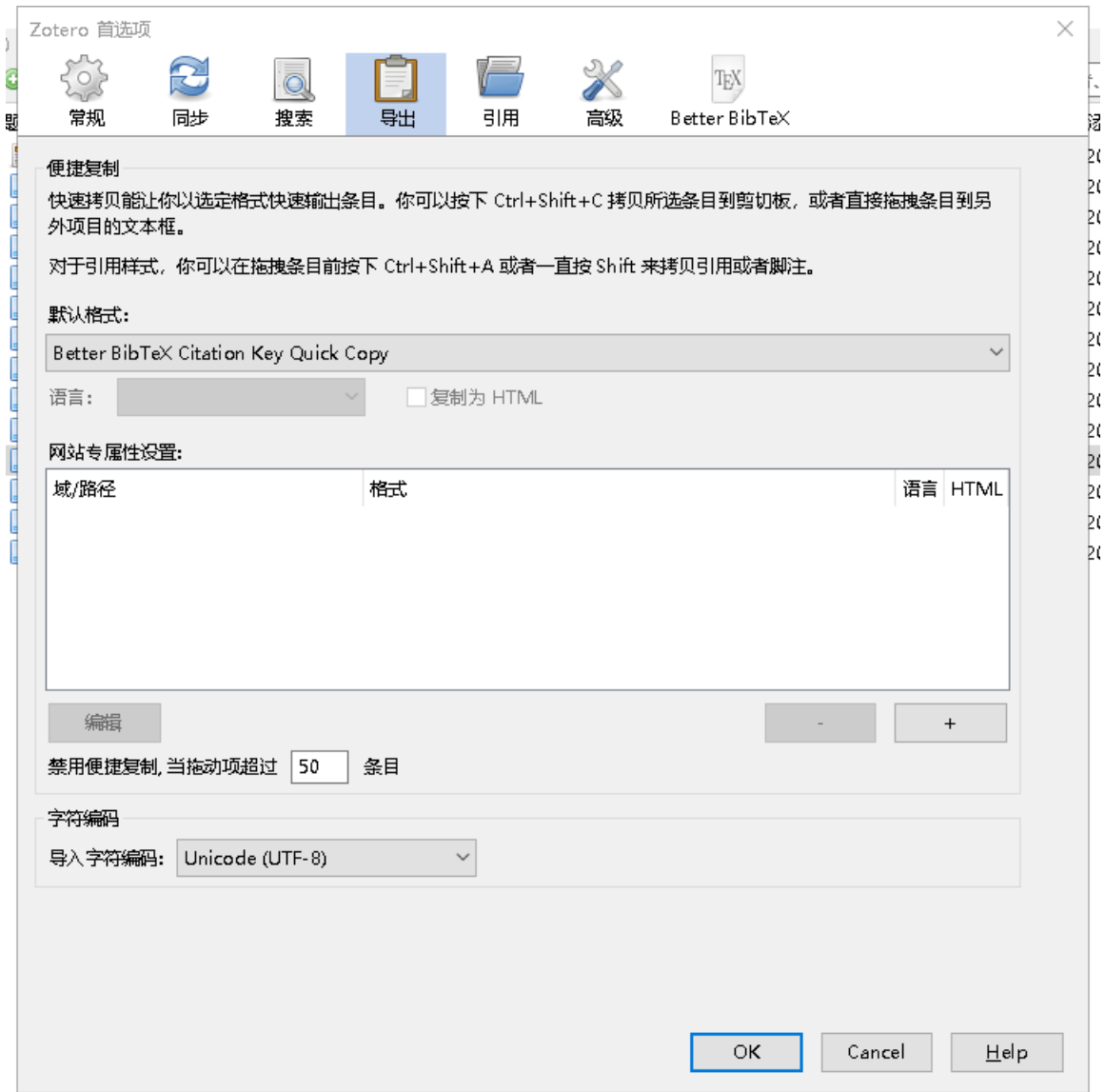


图 2-10 导出

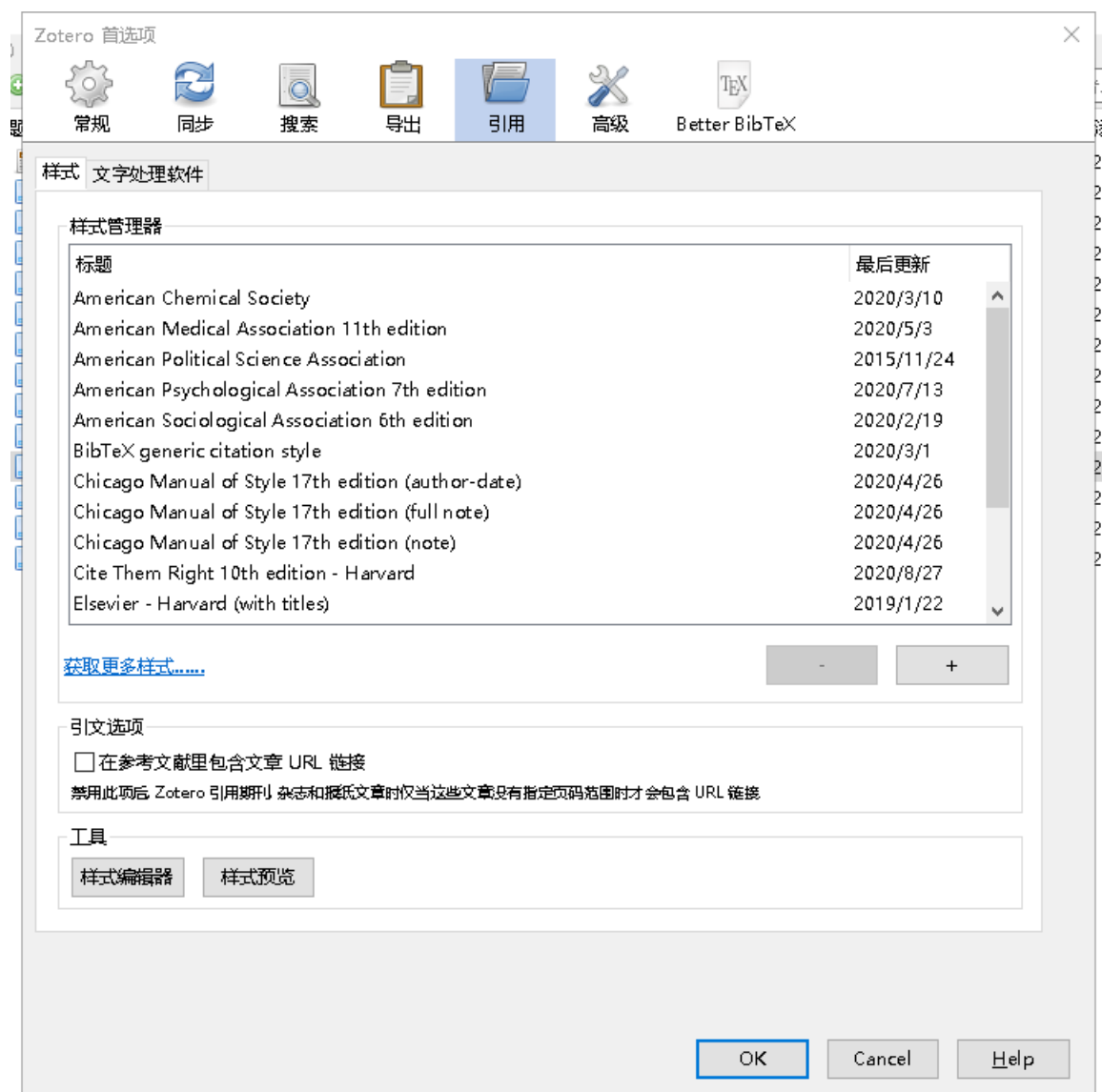


图 2-11 引用

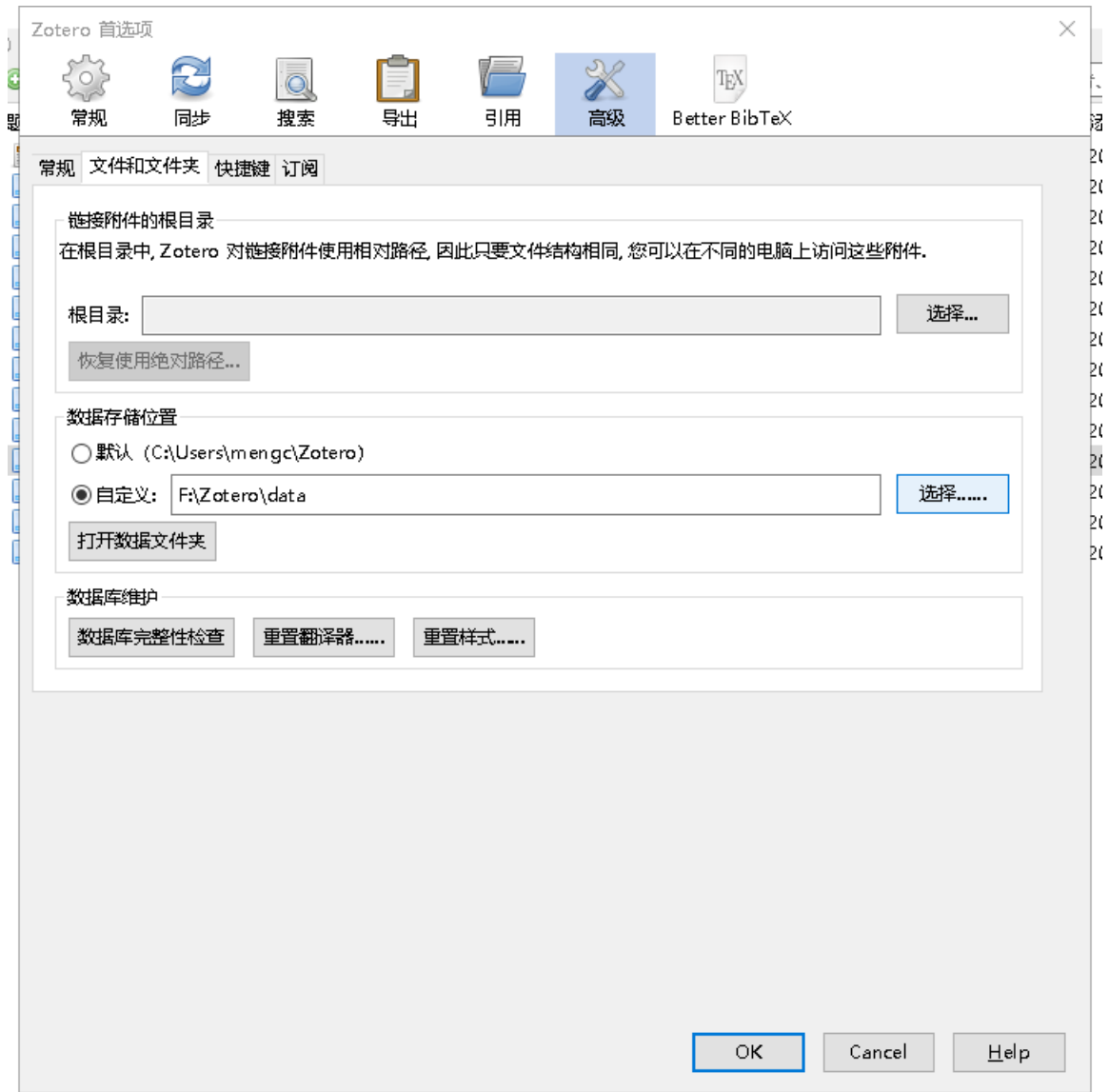


图 2-12 高级 1

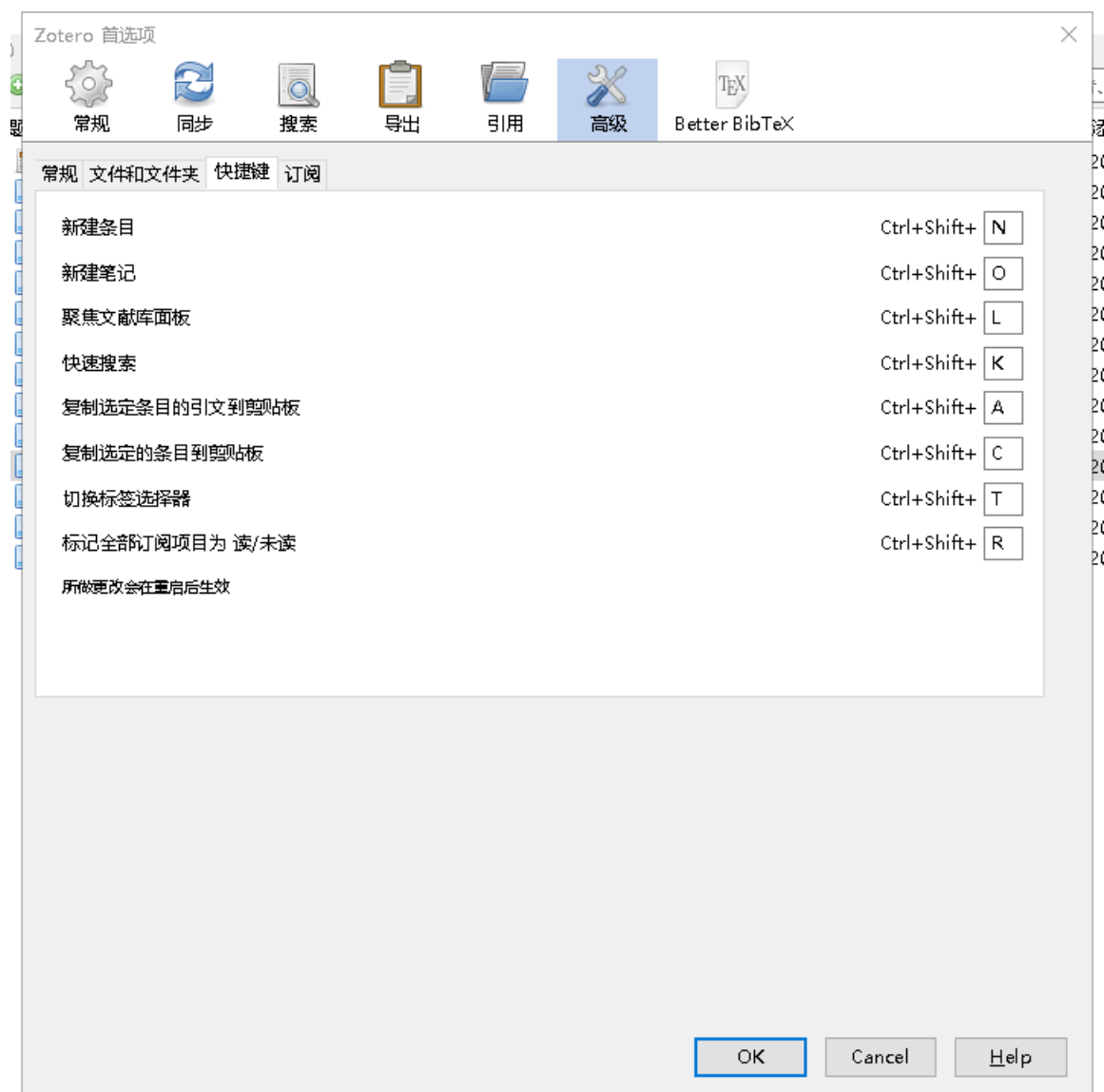


图 2-13 高级 2

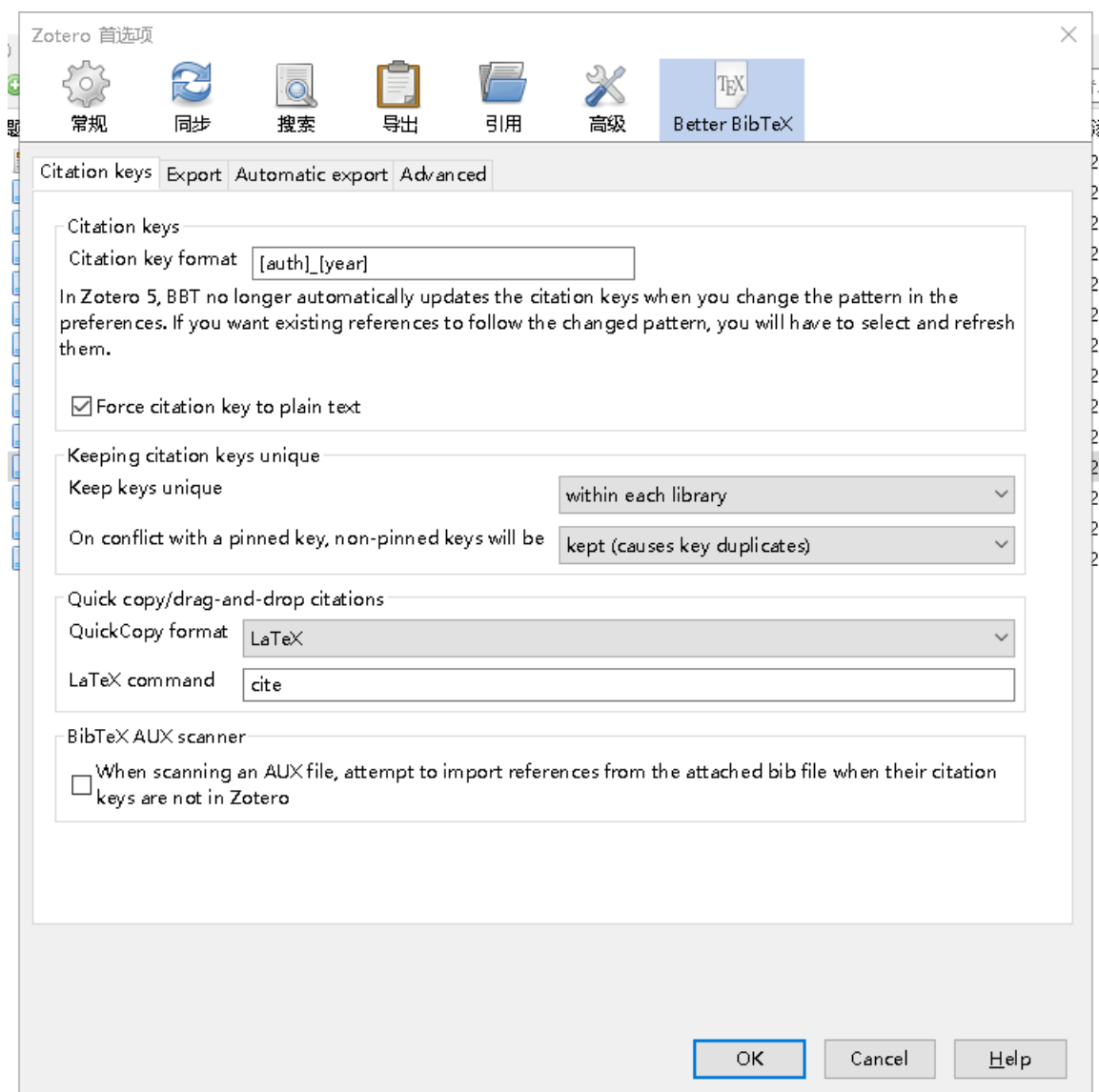


图 2-14 Better BibTeX1

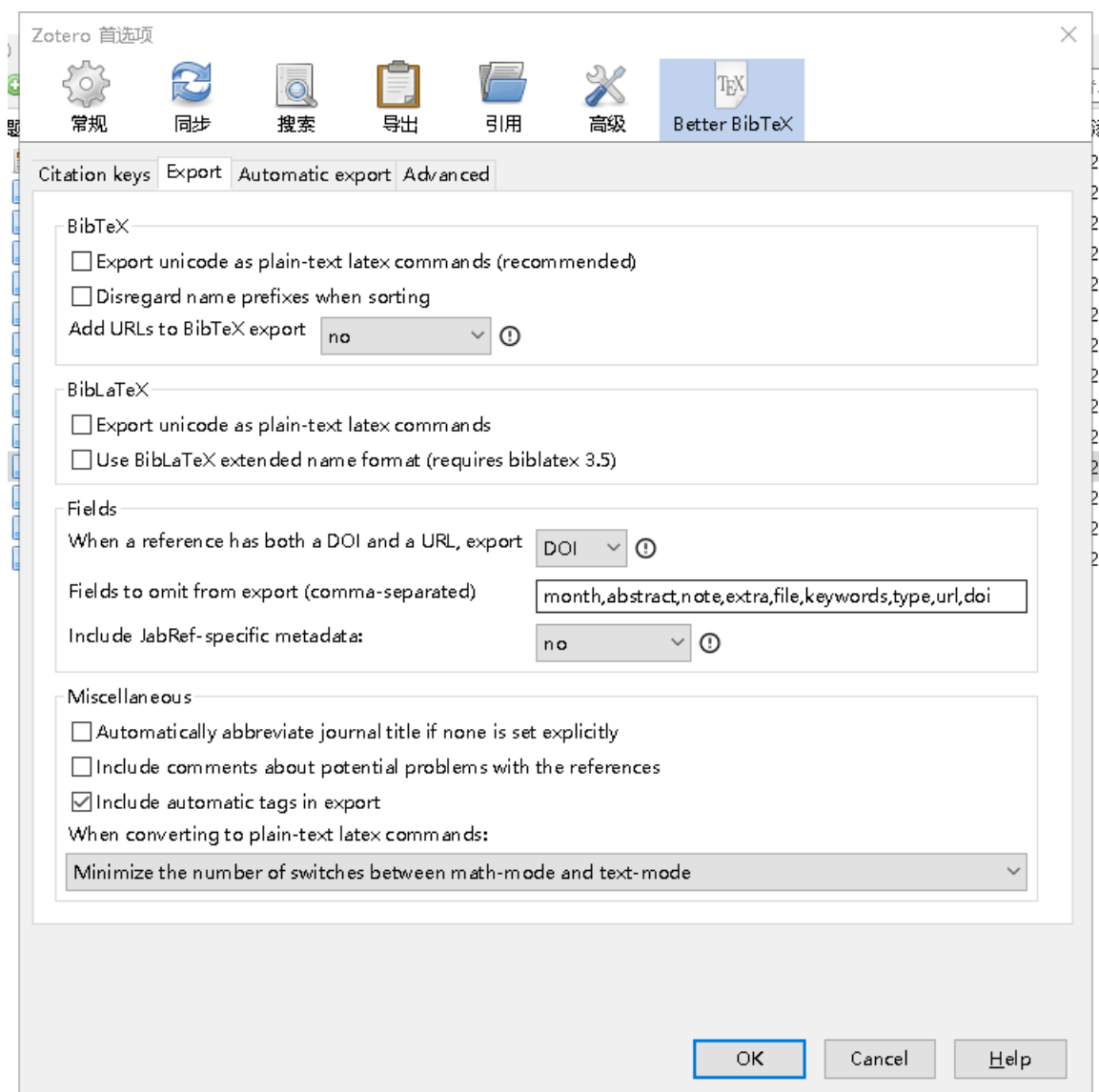


图 2-15 Better BibTeX2

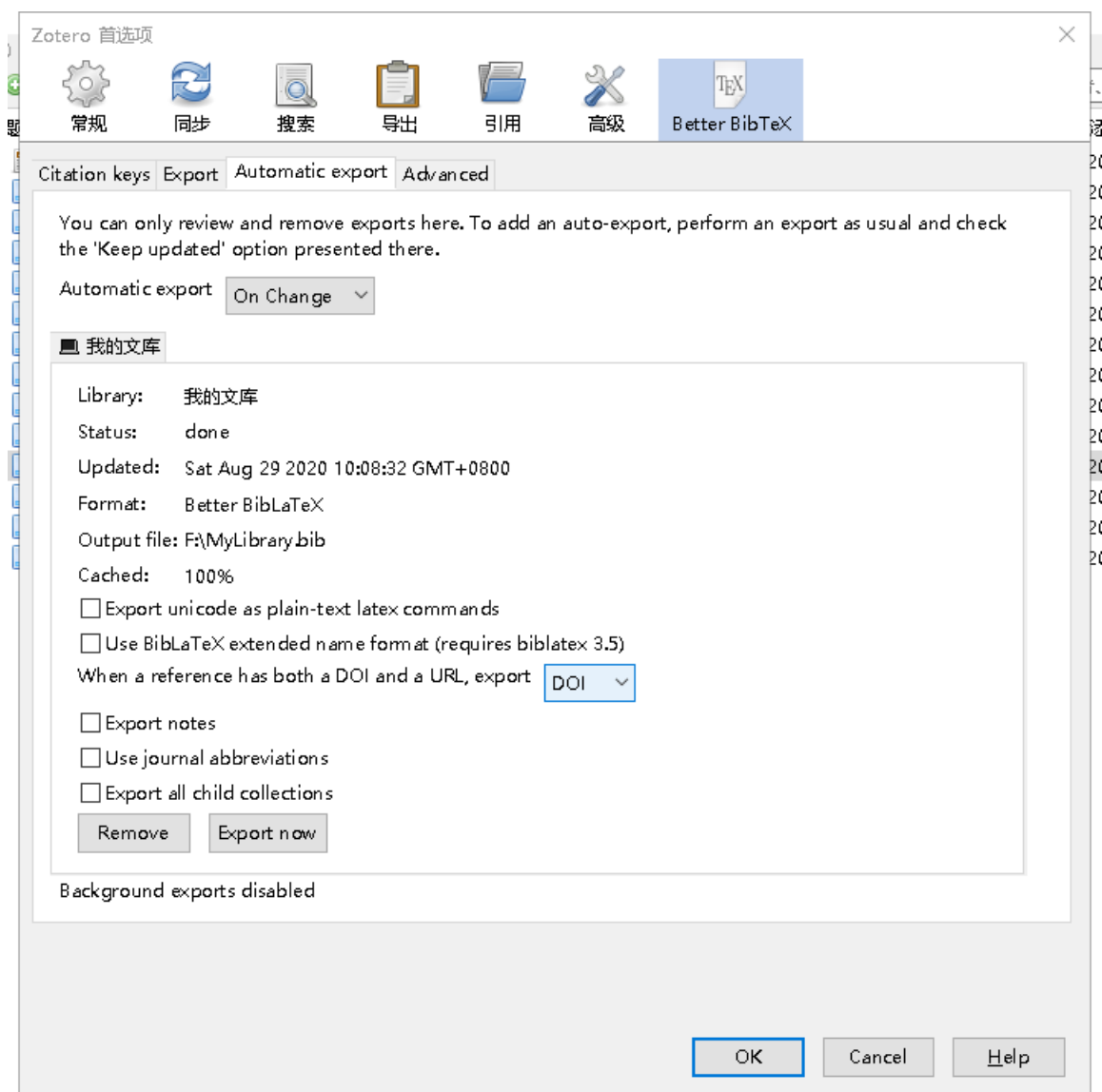


图 2-16 Better BibTeX3

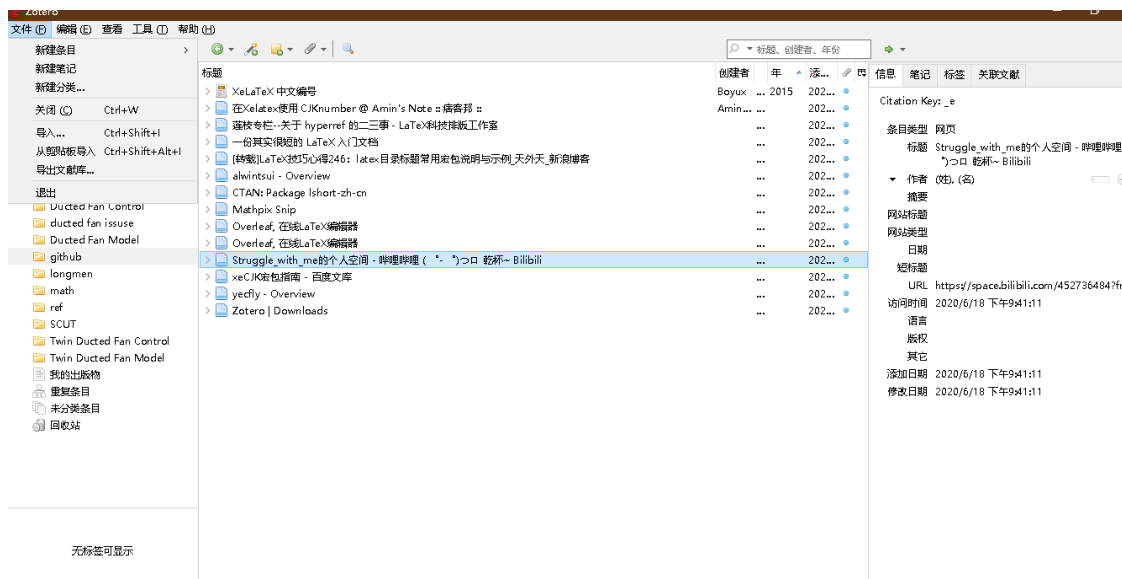


图 2-17 导出文献库

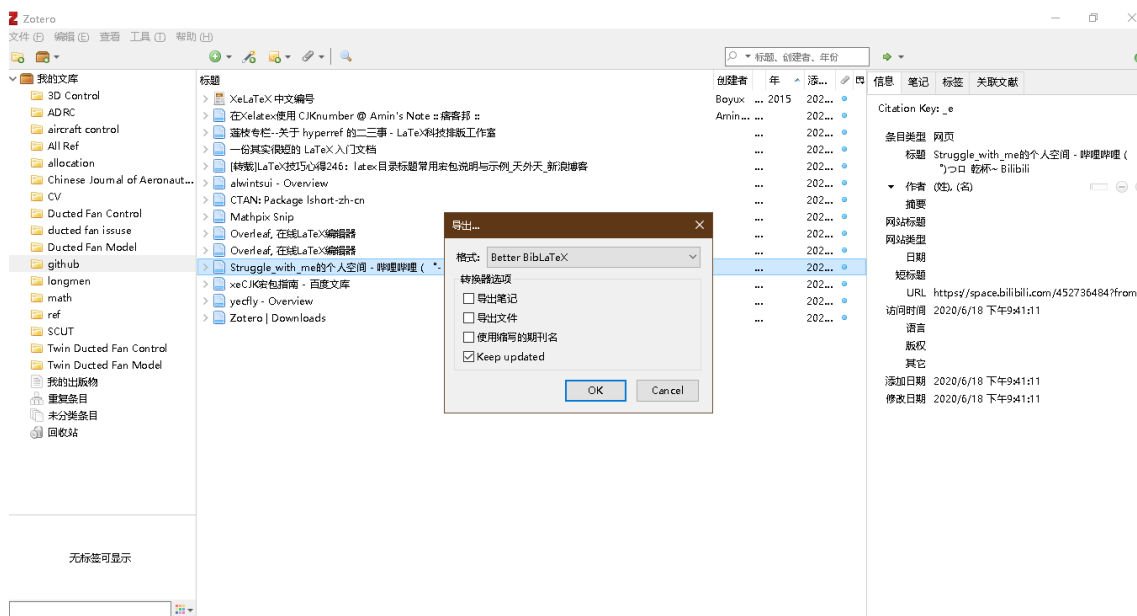


图 2-18 导出格式

参考文献

- [1] 全权. 多旋翼飞行器设计与控制[M]. 电子工业出版社, 2018.
- [2] Ducard G J. Fault-tolerant flight control and guidance systems: Practical methods for small unmanned aerial vehicles[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- [3] Pereira J L. Hover and Wind-Tunnel Testing of Shrouded Rotors for Improved Micro Air Vehicle Design[M]. University of Maryland, College Park, 2008.
- [4] Luo Y, Ai T, He Y, et al. Numerical Analysis of Wind Effects on Aerodynamic Characteristics of a Ducted Fan[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2024, 37(5): 263-280.
- [5] III O J O, Gelhausen P A, Inman D J. Nondimensional Modeling of Ducted-Fan Aerodynamics[J]. Journal of Aircraft, 2012.
- [6] Choi Y H, Suk J Y, Hong S H. Static Analysis of a Small Scale Ducted-Fan UAV Using Wind Tunnel Data[J]. International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 2012, 13(1): 34-42.
- [7] Manzoor T, Pei H, Cheng Z. Composite Observer-Based Robust Model Predictive Control Technique for Ducted Fan Aerial Vehicles[J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(4): 3433-3450.
- [8] Johnson E N, Turbe M A. Modeling, Control, and Flight Testing of a Small-Ducted Fan Aircraft[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(4): 769-779.
- [9] Fleming J, Jones T, Ng W, et al. Improving Control System Effectiveness for Ducted Fan VTOL UAVs Operating in Crosswinds[G]//2nd AIAA "Unmanned Unlimited" Conf. and Workshop & Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [10] Pflimlin J, Binetti P, Souères P, et al. Modeling and Attitude Control Analysis of a Ducted-Fan Micro Aerial Vehicle[J]. Control Engineering Practice, 2010, 18(3): 209-218.
- [11] 任小璐. 基于涵道式单旋翼的无人飞行器研究[M]. 电子工业出版社, 2018.
- [12] 蒙超恒. 基于自抗扰控制的涵道无人机控制分配研究[D]. 华南理工大学, 2020.
- [13] Wang X, van Kampen E J, Chu Q, et al. Stability Analysis for Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2019, 42(5): 1116-1129.
- [14] Likhachev M, Gordon G, Thrun S. ARA*: Anytime a^* with Provable Bounds on Sub-

- Optimality[C]//: vol. 16. 2003.
- [15] 蒙超恒, 裴海龙, 程子欢. 涵道风扇式无人机的优先级控制分配[J]. 航空学报, 2020, 41(10): 327-338.
- [16] 一份其实很短的 LaTeX 入门文档[EB/OL]. 始终. <https://liam.page/2014/09/08/latex-introduction/index.html>.
- [17] CTAN: Package Lshort-Zh-Cn[EB/OL]. <https://ctan.org/pkg/lshort-zh-cn>.
- [18] Struggle_with_me 的个人空间 - 哔哩哔哩 (゜-゜) つロ 乾杯 ~ Bilibili[EB/OL]. <https://space.bilibili.com/452736484?from=search&seid=12208069428001748893>.
- [19] Renduchintala A, Jahan F, Khanna R, et al. A Comprehensive Micro Unmanned Aerial Vehicle (UAV/Drone) Forensic Framework[J]. Digital Investigation, 30: 52-72.
- [20] Milz D. Design and Evaluation of a Unified Control Framework for Electric Vertical Take-off and Landing Vehicles[D]. Technical University of Munich, 2020.