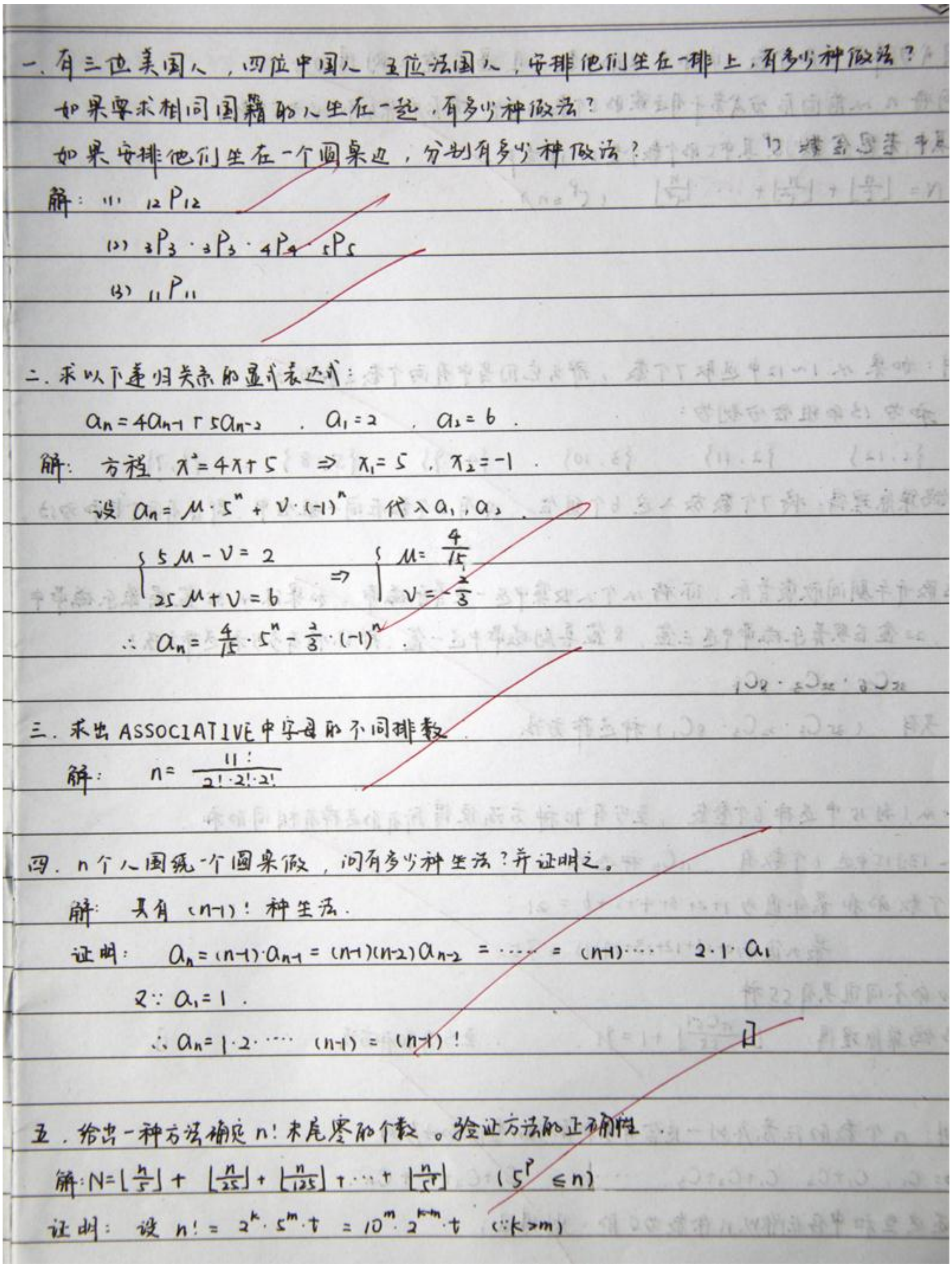
参考答案

这次的作业参考来自赵小燕同学



一、有三位美国人，四位中国人，五位法国人，安排他们坐在一排上，有多少种做法？
如果要求相同国籍的人坐在一起，有多少种做法？
如果安排他们坐在一个圆桌边，分别有多少种做法？

解：(1) ${}_{12}P_{12}$

(2) ${}_{3}P_{3}\cdot{}_{3}P_{3}\cdot{}_{4}P_{4}\cdot{}_{5}P_{5}$

(3) ${}_{11}P_{11}$

二、求以下递归关系的显式表达式：

$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ ，$a_1 = 2$ ，$a_2 = 6$.

解：方程 $x^2 = 4x + 5 \Rightarrow x_1 = 5$ ，$x_2 = -1$.

设 $a_n = \mu\cdot 5^n + \nu\cdot(-1)^n$ 代入 a_1, a_2 ，

$$\begin{cases} 5\mu - \nu = 2 \\ 25\mu + \nu = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{4}{15} \\ \nu = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\therefore a_n = \frac{4}{15}\cdot 5^n - \frac{2}{3}\cdot(-1)^n$.

三、求出ASSOCIATIVE中字母的不同排数

解：$n = \frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$

四、n个人围绕一个圆桌做，问有多少种坐法？并证明之。

解：共有 $(n-1)!$ 种坐法.

证明：$a_n = (n-1)\cdot a_{n-1} = (n-1)(n-2)a_{n-2} = \cdots = (n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_1$

又 $\because a_1 = 1$.

$\therefore a_n = 1\cdot 2\cdot\cdots(n-1) = (n-1)!$ □

五、给出一种方法确定n!末尾零的个数。验证方法的正确性。

解：$N = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{25} \rfloor + \lfloor \frac{n}{125} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{5^r} \rfloor$ （$5^r \le n$）

证明：设 $n! = 2^k\cdot 5^m\cdot t = 10^m\cdot 2^{k-m}\cdot t$ （$\because k > m$）

因式分解后5的个数一定小于2的个数，且遇5逢2则得0

∴可将 n 从前向后分成若干有连续的5个数的组合（最后剩余的不一定为5个数）

∴其中，若包含数 5^i，其中5的个数不是1，而是 p

∴ $N=\lfloor\frac{n}{5}\rfloor+\lfloor\frac{n}{5^2}\rfloor+\cdots\lfloor\frac{n}{5^p}\rfloor\quad(5^p\le n)$

六、证明：如果从1~12中选取7个数，那么它们当中有两个数之和为13

证：和为13的组合分别为：

$\{1,12\}\quad\{2,11\}\quad\{3,10\}\quad\{4,9\}\quad\{5,8\}\quad\{6,7\}$

由鸽巢原理得：将7个数放入这6个组合，必有2个数在同一组合中，即必有两个数和为13

七、为了度假开车期间欣赏音乐，你将从个人收集中选一些音乐磁带。如果你从35盒摇滚乐磁带中选6盒，22盒古典音乐磁带中选三盒，8盒喜剧磁带中选一盒，那你将有多少种选择方法？

解：${}_{35}C_6\cdot{}_{22}C_3\cdot{}_8C_1$

∴共有 $({}_{35}C_6\cdot{}_{22}C_3\cdot{}_8C_1)$ 种选择方法

八、证明：从1到15中选择6个整数，至少有90种方法使得所有的选择有相同的和

证明：从1到15中选6个数有 ${}_{15}C_6$ 种选法

6个数的和最小值为 $1+2+3+4+5+6=21$

最大值为 $10+11+12+13+14+15=75$

和的不同值共有55种

由推广的鸽巢原理得：$\lfloor\frac{{}_{15}C_6}{55}\rfloor+1=91$　∴至少有90种方法　□

九、证明：n个数的任意序列一定含有其和能被n整除的子序列

考虑前n和：$C_1,\ C_1+C_2,\ C_1+C_2+C_3,\ \cdots\cdots,\ C_1+C_2+\cdots+C_n$

①若上述这些和中存在除以n余数为0的，则得证；

②若余数均不为0，则一定有两个数有相同的余数。

这两个的正差是其和能被n整除的一个子序列。　□

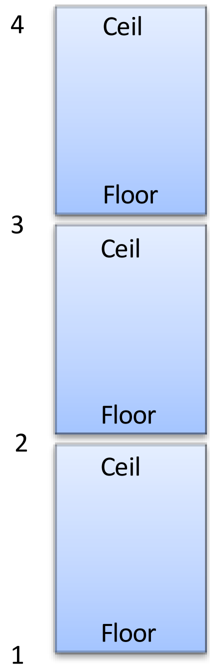
2011/10/30

不得不说的“天花板”、“地板”与“四舍五入”

对以下三个方法，我们分别用相应的函数符号来表示，其中 $x \in \mathbf{R}$：
最靠近 x 的整数，记作 r(x)
小于 x 的最大整数，记作 f(x)；
大于 x 的最小整数，记作 c(x)。

那么举两个例子：
X = 3.6 时，r(3.6) = 4，f(3.6) = 3，c(3.6) = 4；
X = -4.3 时，r(-4.3) = -4，f(-4.3) = -5，c(-4.3) = -4；

形象的把实数轴看成一幢高楼，将每个整数点比作楼层的隔板，那么每个楼层都有自己的“天花板”（Ceil）和“地板”（Floor）。（如右图）
“天花板”就在某个数上方，即“大于 x 的最小整数”；
“地板”就在某个数下方，即“小于 x 的最大整数”；
“四舍五入”就是天花板和地板中更靠近 x 的那个。



现在我们给出数学符号和 Java 中的函数：

描述	数学运算符	Java 函数
“天花板”	$\lceil x \rceil$	Math.ceil(x)
“地板”	$\lfloor x \rfloor$	Math.floor(x)
“四舍五入”	$[x]$	Math.round(x)

上述三个数学运算符长的很相似，但是不难发现，“天花板”形象地只在上方画上了横杠，而“地板”只在下方画上了横杠。

拓展的鸽巢原理表达式为 $\lfloor (n-1)/m \rfloor + 1$，使用的是“地板”符号（为什么使用“地板”请大家思考），而大多数同学在作业中写的是“四舍五入”的符号，所以请大家注意了！

只能用特征根求解？

给出了线性齐次递推式，求数列的显示表达式，陶老师上课介绍了特征根方法，如果没学过特征根方法，你会不会求解？

数学中很重要的思想是把未知的问题拆解到我们已知的领域，数列方面，相信大家高中都学过等差数列和等比数列，那么将递推式转化为等差数列和等比数列（杨逸欣，苏丽欢等同学使用了这种方法），我们就能顺利求解了，还是举这道题为例。

递推式

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

两边同时加上 a_{n-1}，得到

$$a_n + a_{n-1} = 5a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

即

$$a_n + a_{n-1} = 5（a_{n-1} + a_{n-2}）（n = 1,2,3,\cdots\cdots）$$

令 $b_n = a_n + a_{n-1}$（n=2,3,4,⋯⋯），得到

$$b_n = 5b_{n-1}（n = 3,4,5,\cdots\cdots），b_2 = a_2 + a_1 = 6 + 2 = 8$$

所以 b_n 为等比数列，有

$$b_n = a_n + a_{n-1} = 8*5^{n-2}（n=2,3,4,\cdots\cdots）$$

使用待定系数法将 a_n 和 a_{n-1} 的递推式化为形式

$$a_n + f(n) = k(a_{n-1} + f(n-1))$$

这样我们就又找到了形如 $a_n + f(n)$的等比数列

显然我们可以发现 k = -1，然后就是确定 f(n)，f(n)满足

$$f(n) + f(n-1) = -8*5^{n-2}$$

$$f(n) = c*5^n$$

代入上式后，解得

$$c = -(4/15)，f(n) = -(4/3)*5^{n-1}$$

由此，令

$$c_n = a_n - (4/3)*5^{n-1}（n=1,2,3,\cdots\cdots）$$

得到

$$c_n = -c_{n-1}, c_1 = a_1 - (4/3) = 2/3$$

所以

$$c_n = (-1)^{n-1}*c_1 = (-1)^{n-1}*(2/3)$$

即

$$a_n - (4/3)*5^{n-1} = (2/3) *(-1)^{n-1}$$ （n=1,2,3,……）

得到最终的显示表达式

$$a_n = (4/3)*5^{n-1} + (2/3) *(-1)^{n-1}$$ （n=1,2,3,……）