曲线积分与曲面积分

1. 对弧长的曲线积分

• 首先画出积分路径的图形；然后将坐标参数化$x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\le t\le\beta$, 计算积分

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\mathrm{d}t.$$

2. 对坐标的曲线积分

• 化为参数的定积分求解，设$x=\varphi(t),y=\psi(t)$, 则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t,$$

其中α对应于L的起点，β对应于L的终点。

• 若路径闭合，可利用格林公式或斯托克斯公式求解，但要注意公式的使用条件。若路径不闭合，则加边使路径闭合，然后使用格林公式。(例7.3.3, 习题7.3第13, 14题)

3. 对面积的曲面积分

• 化为投影域上的二重积分或化为对坐标的曲面积分，

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

• 有时可用对称性简化计算。(2010年第一(7)题，2012年第一(1)题)

4. 对坐标的曲面积分

• 通过投影化为二重积分(定理7.5.1)。

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

• 若曲面为闭合，则利用高斯公式，注意公式的使用条件；若曲面非闭，则加曲面使新曲面闭合，然后再使用高斯公式(注意，公式中的Σ的取向是外侧，而不是随意的)。

• 注意$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是有向面积，在二重积分时需考虑加上正负号，其规则是由所选定的Σ的法线方向与xOy平面的法线方向（即z 轴的正方）向之间的夹角而定：夹角小于$\frac{\pi}{2}$的加正号，夹角大于$\frac{\pi}{2}$的加负号。

• 第一型与第二型曲面积分的关系：
(1) 不同之处：曲面Σ是否有侧的规定, 积分微元分别是小块曲面面积和小块曲面(根据法线方向)在一坐标平面上的投影(可正可负)。
(2) 可以互化：

$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos(\mathbf{n},z)}=\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos(\mathbf{n},x)}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos(\mathbf{n},y)}=\mathrm{d}S,$$

其中$\mathbf{n}$为指定的Σ的法线方向。例如，取球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$的外侧，则有

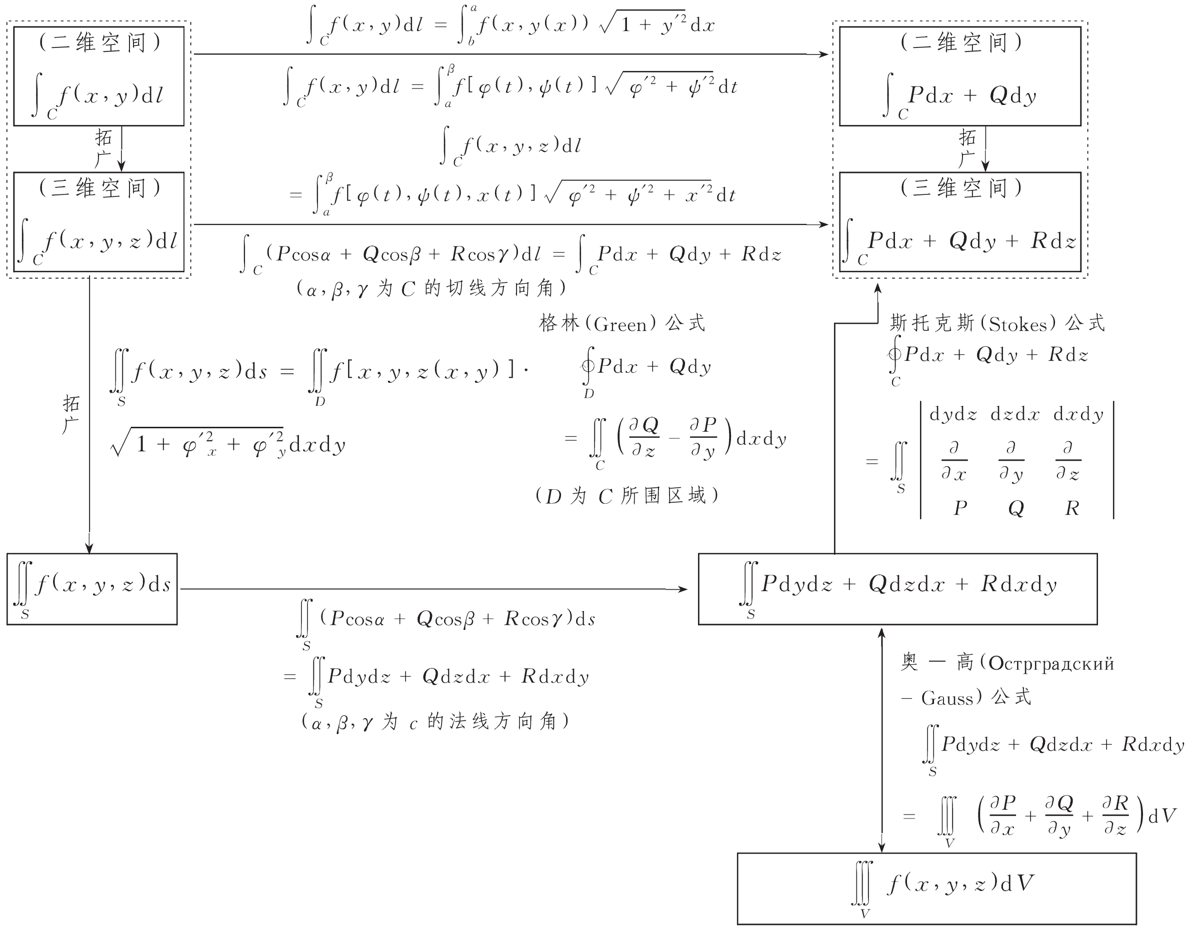
$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}S}{R},$$

常可用这个公式把两种类型的曲面积分互相转化或将投影区域化到同一个坐标平面上去算。

(2008年第五题) 求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=2z\,(1\le z\le 2)$.

答案：6π.

各种曲线、曲面积分间联系表



无穷级数

1. 无穷级数敛散性的判定。首先观察为何种类型级数，再选择判别方法：

   - 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散（只能用来验证级数发散）；

   - 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 且可以证得$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$ (莱布尼兹判别法的证明，

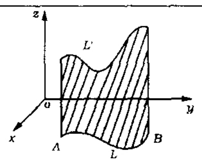
计算方法	适用范围	基本形式	
利用二重积分	已知曲面 Σ 的方程及其在坐标面上的投影域	设 $\Sigma: z=f(x,y)$(与 // z 轴的直线只交于一点)在 xoy 平面上的投影域为 D_{xy},则 Σ 的面积 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 的其它形式有类似公式.	
利用弧长的曲线积分	当曲面在某坐标面上的投影为一条曲线时,通常用对弧长的曲线积分计算		若曲线 L 上点的竖坐标是曲线 L 上点 $P(x,y)$ 的函数,即 $z=f(x,y)(\geqslant 0)$,则 $A=\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$.

图 1 曲面面积的计算法

及P202的注);

> 判断级数的敛散性:
> (1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $(p>0,q>0)$;
> (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$;
> (4) 已知$u_n=\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$, 判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性.

• 对于正项级数，若通项中含有$n!,n^n,a^n$等或关于n的若干连乘积的形式时一般用比值法；若通项中含有以n 为指数幂的因子时，常用根值法；当比值法和根值法不能用时($\rho=1$)，可用比较判别法(通常与p-级数做比较，计算收敛阶)；

发散	收敛
$\underbrace{\sum\frac{1}{\ln n},\cdots}_{\substack{\sum\frac{1}{(\ln n)^p}\\ p>0}},\underbrace{\sum\frac{1}{\sqrt{n}},\sum\frac{1}{n}}_{\substack{\sum\frac{1}{n^p}\\ 0<p\le 1\\ p-\text{级数}}},\underbrace{\cdots,\sum\frac{1}{n\ln n}}_{\substack{\sum\frac{1}{n(\ln n)^q}\\ 0<q\le 1}}$	$\underbrace{\cdots,\sum\frac{1}{n\ln^2 n}}_{\substack{\sum\frac{1}{n(\ln n)^q}\\ q>1}},\underbrace{\cdots,\sum\frac{1}{n^{3/2}},\sum\frac{1}{n^2}}_{\substack{\sum\frac{1}{n^p}\\ p>1\\ p-\text{级数}}},\underbrace{\cdots,\sum\frac{1}{2^n}}_{\substack{\sum\rho^n,\ 0<\rho<1\\ \text{几何级数}}},\cdots,\sum\frac{1}{n!}$

• 对于交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，可用莱布尼兹判别法（特别注意验证单调性条件），且其和$S<u_1$, 余项的绝对值$|r_n|\le a_{n+1}$；(习题8.3第1(8)(11)题，2011年第一(4)题)

• 对于任意项级数，先用正项级数判别法判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$的敛散性，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数

为绝对收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数为条件收敛。

> 判断条件（绝对）收敛：
> (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (2006年第六题).

- 注意：对正项级数的比较判别法的极限形式不能用于任意项级数。也就是说若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, 不能判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是否收敛(习题8.3: 4)；
- 一个有用的小结论：$\boxed{(1+\frac{1}{n})^n\nearrow e,\ (1+\frac{1}{n})^{n+1}\searrow e.}$

2. 关于级数敛散证明的思路

- 已知某级数收敛，欲证另一级数收敛，常用比较判别法证明，将已知收敛的级数作为比较级数，而慎用比值法；

> (2004年考研) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，下面说法是否正确？
> (A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；
> (B) 若存在非零常数λ, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；
> (C) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$；
> (D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散, 则存在非零常数$\lambda$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

- 已知某数列具有某种性质（有界性、单调性或有极限），欲证某级数收敛，通常利用这些性质对通项作某种估计，再用比较法或级数敛散性的定义加以证明；

> (1997年考研) 设$a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\,(n=1,2,\cdots)$, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$收敛.

- 若欲证级数的通项与已知敛散性的级数的通项有某种四则运算关系，通常用收敛级数的性质和定义证明。例如将通项a_n拆成$a_n=b_n+c_n$, 利用“收敛+收敛=收敛”，“收敛+发散=发散”的性质.

> 条件收敛级数的正项(或负项)构成的级数一定发散，
> 即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(|u_n|-u_n)$均发散.

3. 幂级数的收敛性判别法

• 幂级数在收敛区间$(-R,R)$内绝对收敛(内闭一致收敛)，逐项求导和逐项积分后所得幂级数的收敛半径不变，但逐项求导后的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$在$x=R\,(-R)$ 处可能发散.

• 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (或$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$). 注意，根值法比比值法更具有一般性($\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]x^n$的收敛半径？).

• 对于“缺项”的幂级数(如$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$),不能直接利用收敛半径公式，应该按求一般函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛域的方法加以讨论($\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=2x^2$, 得$2x^2<1$, 收敛半径$R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$).

• 注意收敛域和收敛区间的差别。

4. 函数的幂级数展开

• 直接法与间接法。所谓间接法，就是利用已知的$e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^m$等的Maclaurin展式，通过适当的变量替换，四则运算，复合以及逐项微分，积分而将一个函数展成幂级数的方法. 通常采用间接法。

常 用 函 数 的 展 开 式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$(-1<x<1, x=\pm 1$ 的情况见下表$)^*$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

• 注意幂级数在何处展开(一般都是在$x_0=0$处，例8.6.4-8.6.6) 以及展开式在区间端点上（收敛域上）是否与原函数相等.

(1). 将$\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$展成Maclaurin级数.
(答：$\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$, 需补充定义$\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.)
(2). (2010年第二题)
求函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$x=0$的幂级数展开式，并指出其收敛范围.

5. 求无穷级数的和：一般分为幂级数求和与数项级数求和。幂级数求和的步骤为：

(1) 求出级数的收敛域；

(2) 通过逐项积分（微分），变量代换或四则运算等将给定的幂级数转化成等比级数或是常用展开式中的一种形式，直接写出新级数的和函数。当幂级数的一般项的分母中含有阶乘时，常要利用正弦函数、余弦函数或指数函数的幂级数展开式；

(3) 对变换后得到的新级数的和函数，做相应的逆运算，从而得出原幂级数的和函数。

• 数项级数求和一般用定义(技巧：拆项相消)或构造幂级数(傅里叶级数)的办法。若要求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，可以构造相应的幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 求出其和函数$S(x)$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1} S(x)$.(例8.5.4, 习题9.2: 2)

> 设$a_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$;
> (1) 试判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$的敛散性。(2) 试判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$的敛散性($\alpha > 0$)。
> (3) 当S_n收敛时，判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$的敛散性。(4) 当$S_n$发散时，判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$的敛散性。

6. 求函数的傅里叶级数展开式

(1) 画出函数$f(x)$的图形，验证是否满足Dirichlet定理的条件（①除有限个第一类间断点外都是连续的；②只有有限个极值点），并观察奇偶性；

(2) 根据公式求出傅里叶系数；

(3) 写出傅里叶级数，并注意它在连续点处收敛于$f(x)$，在间断点收敛于左右极限的平均。

广义积分与含参积分

1. 广义积分判敛法

• 广义积分的判敛与无穷级数的判敛方法是类同的，从本质上讲，从无穷级数到广义积分只是从研究离散变量到研究连续变量的跃升，粗略地讲：积分号“$\int$”实际上可视为求和号“$\sum$”的拓广。

• 判断广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的收敛性，关键是：

①确定积分的奇点，即$\pm\infty$或使得$f(x)$发散的点；

②如果$f(x)$是正的（负的）函数，一般需要找到在奇点处与$f(x)$的收敛性相当的比较函数$g(x)$, 一般取$g(x) = \dfrac{1}{x^p}$或$\dfrac{1}{(x-a)^p}$等，因为它们的敛散性是已知的。如果$f(x)$是变号函数，则一般需要用到Dirichlet判别法（定理8.7.7）或Abel判别法（定理8.7.8），具体过程可参考例8.7.4. 注意：碰到ln函数时可能要利用类似$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\epsilon}} = 0$, $\forall \epsilon > 0$的结果, 即$\ln x$在当x趋于$+\infty$时比一切正指数的幂函数发散的速度都慢。

- 两个常用的广义积分

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.} \qquad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

2. 含参积分的性质与运算

(2009年第四题)
设$z = f(x+y, xy) + \int_{x+y}^{xy} \phi(t)\mathrm{d}t$, 其中$f$, ϕ二阶偏导数连续，计算$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
答案：$2(y-x)f''_{12} + (y^2-x^2)f''_{22} + (y^2-x^2)\phi'(xy)$.

常微分方程

1. 基本概念：

- 微分方程的通解和特解。通解含有数目与微分方程阶数相同的独立常数，特解可能不包含在通解的表达式中，此时需要单独指出。
- 微分方程的初值问题。能确定通解中任意常数的条件称为定解条件，初始条件是定解条件中最常见的类型。一般说n阶微分方程的初始条件为：

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_1,\ \cdots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}.$$

(2008年第一6题)
已知常系数线性方程$y'' + ay' + by = ce^x$有特解$\tilde{y} = x^2 e^x$, 求其通解.

2. 一阶方程的初等积分法

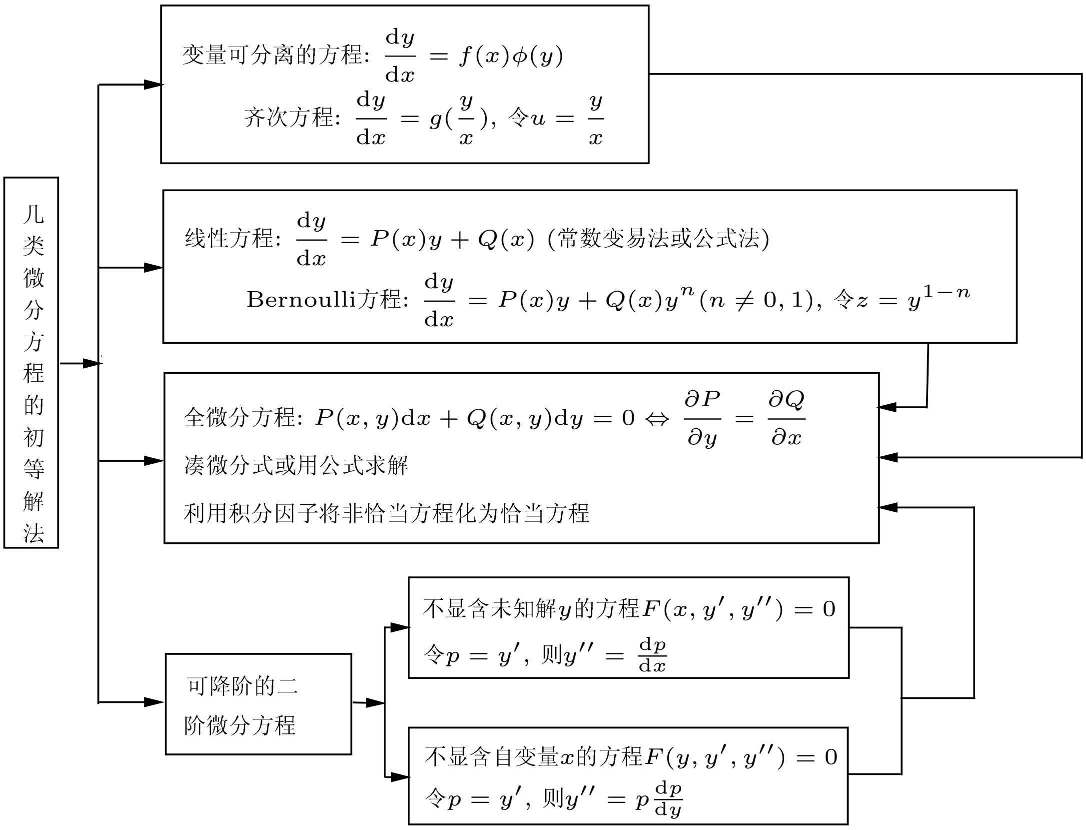
- 在变量可分离的方程与齐次方程（注意它与线性齐次方程是不同的）中，使$\phi(y) = 0$与$g(u) - u = 0$的点为方程的特解，在求解过程中不可丢掉 (例10.2.2, 例10.2.5)。
- 有时可通过变量替换改变自变量或因变量的形式，如将x看作y的函数等，达到简化方程的目的 (例10.3.2，习题10.3: 1(5)(8))。
- 常用的全微分式

$$\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x \pm y); \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right);$$

$$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy); \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right);$$

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2); \qquad \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\mathrm{d}\,y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right);$$



3. 线性微分方程解的性质与结构

- 若$y_1(x), y_2(x)$为齐次方程的两个特解，则其线性组合$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$仍为齐次方程的解. 特别地，若$y_1(x)$与$y_2(x)$线性无关，则齐次方程的通解为$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.
- 设$y_1(x), y_2(x)$为齐次方程的两个解，

$$y_1(x), y_2(x)\text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k, \quad x \in (a, b).$$

- 设$y_1(x), y_2(x)$均为非齐次方程的特解，则其差$y_1(x) - y_2(x)$为相应齐次方程的特解。
- 设$y^*(x)$为非齐次方程的一个特解，$y(x)$为齐次方程的任意特解，则其和$y^*(x) + y(x)$ 为非齐次方程的解。特别地，若$y_1(x), y_2(x)$为齐次方程的两个线性无关的特解，则非齐次方程的通解为$y(x) = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, 其中$C_1, C_2$为任意常数。
- (叠加原理)设$y_1(x), y_2(x)$分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \qquad \text{与} \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的两个特解，则$y_1(x) + y_2(x)$为方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$的特解。

4. 二阶常系数线性方程

- 二阶常系数线性齐次微分方程的解由特征方程确定，由通解表达式可知特征根，由特征根可得特征方程，由特征方程可得微分方程(注意：特征方程$\lambda^2-2\lambda+2=0$对应的微分方程为$y''-2y'+2y=0$, 不是$y''-2y'+2=0$)。

(2006年第七题)
给定方程$x''+8x'+7x=f(t)$, $f(t)$在$[0,\infty)$上有界，证明上述方程的每个解都在$[0,\infty)$上有界.

- 常数变易法

(1). (2004年第六题)求$y''+y=x^3+\sin x+\tan x$的通解.
(2). (2007年第三题)已知方程$xy''+2y'-xy=0$有一个解：$y_1(x)=\dfrac{1}{x}e^x$. 求其通解.

- 对于$y''+py'+qy=f(x)$, 不同的$f(x)$对应于不同形式的特解（待定系数法）。

$f(x)$ 形状	关系	特解 y^* 的形状
$e^{rx}P_m(x)$ m 为 $p_m(x)$ 的次数	r 非特征根	$e^{rx}Q_m(x)$
	r 是特征根	$x^ke^{rx}Q_m(x)$, k 为 r 的重数
$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha\pm\beta i$ 非特征根	$e^{\alpha x}[R_M(x)\cos\beta x+S_M(x)\sin\beta x]$
	$\alpha\pm\beta i$ 是特征根	$x^ke^{\alpha x}[R_M(x)\cos\beta x+S_M(x)\sin\beta x]$ k 为共轭复根重数, $M=\max\{m,n\}$

5. 需要建立微分方程的问题

- 由积分方程引出微分方程时，其初始条件一般应从已知积分等式中去寻找.

(1). (2008年第五题)
设函数$f(x)$连续，满足$f(t)=2+\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里$D$为$x^2+y^2\le t^2$, 求$f(x)$.

(2). 设$f(x)$连续，且满足$f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$, 求$f(x)$.

(3). 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 当$n>1$时有$a_{n-2}=n(n-1)a_n$, 且$a_0=4$, $a_1=1$, 求级数的和函数.

(4). $f(x)$是以2π为周期二阶可导的函数，满足$f(x)+f'(x+\pi)=\sin x$, 求$f(x)$.

(5). (2012年第三题)
设函数$f(x)$, $g(x)$连续可微，$f(0)=g(0)=0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+(f(x)y-g(x))\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出$f(x)$, $g(x)$, 并求该曲线积分的值。

2010年大学数学（第一层次）第二学期期末考试参考答案

一. (1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{2}{3}\pi ab$; (3) $\frac{10}{\sqrt{11}}$; (4) π; (5) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2$; (6) $x^2+y^2 = Ce^{-2\arctan\frac{y}{x}}$; (7) $\frac{2}{3}\pi$; (8) 2π; 二. $f(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$, $x\in[-1,1]$; 三. $p>1$绝对收敛，$p\le 1$条件收敛（提示：设$a_n = \cos n\theta, b_n = \frac{1}{n^p}$, 利用Dirichlet判别法，类似例8.7.4）; 四. $f(x) = \tan x$（提示：利用导数的定义）; 五. $f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx$, $x\in[-\pi,\pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$; 六. 收敛半径$R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n = \frac{x}{1-x-x^2}$, $x\in\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$（提示：需要首先确定$\frac{a_{n+1}}{a_n}$的极限。设$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$. 如果$b_n$的极限存在，那么等式两端取极限，得极限值$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 再证明$b_n$的极限值确实是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 证明方法第一章已经讲过，由$|b_n - A| = \left|\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{A}\right| \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}|b_{n-1} - A|$递推下去.）.