习题7.4. 计算第一类曲面积分一般都用投影法$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 注意合理使用对称性。

(1) $\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma z\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} z\cdot\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\sigma(D_{xy}) = \pi a^3$;

(2) $\iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S = (\sqrt{2}+1)\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$;

(3) $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2} = (\sqrt{3}+1)\iint_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} + \iint_{D_{yz}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+y)^2} + \iint_{D_{xz}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$
$= (\sqrt{3}+1)(\ln 2 - \frac{1}{2}) + 2(2-1-\ln 2) = (\sqrt{3}-1)\ln 2 + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$;

(4) $\iint_\Sigma (z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma 4\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} 4\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{61}$;

(5) $\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\mathrm{d}S = \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} [xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}$.

习题7.5. 第二类曲面积分常用高斯公式化成三重积分计算，或利用$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma} = \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos\beta} = \mathrm{d}S$, 将投影区域化到同一个坐标平面上去算。

第1,2,6题用高斯公式十分方便。第3,4题需要加曲面使新曲面闭合，然后再使用高斯公式。对于这两个问题恰好新加的曲面上积分为0.
(5). $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = 2\iint_{D_{xy}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{ab\rho}{c\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \frac{4\pi ab}{c}$. 算出这部分剩下几个类似。
(7). 单位法向是$(x,y,0)$, 则$\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \pi$;
(8). 原式$=\iint_\Sigma -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -2\times 2 - \int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{\ln 2} 2e^x\mathrm{d}x = -8$.

习题8.2. 判断正项级数是否收敛关键是看一般项u_n的收敛阶，含有参数的问题需要讨论。

(12). 与$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$做比较，用积分判别法，容易得到$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散;
(14). 当$p>1$时，$u_n \le \frac{1}{n(\ln n)^p}$, 由(12)可知其收敛；当$p<1$时，$u_n \ge \frac{1}{n(\ln n)^{p+\epsilon}}$, 因此发散（这里用到了一个重要结论：当$n$充分大时，$\ln n < n^\epsilon$, 其中$\epsilon$是任意正数，这是因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\epsilon} = 0$）。当$p=1$时就要看$q$了，这时候$u_n = \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q}$, 又可以与$f(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$做比较，用积分判别法, 可知$q>1$时收敛，$q\le 1$时发散。

习题8.6. 第5题是常考题型：通过逐项积分（微分），变量代换或四则运算等将给定的幂级数转化成等比级数或是常用展开式中的一种形式，得到和函数再做相应的逆操作。

(1) 设$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 则$S_1'(x) = S_2(x), S_2'(x) = S_1(x)$, 再由$S_1(0) =$

$1, S_2(0)=0$可得$S_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, S_2(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbf{R}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2}$, $x\in\mathbf{R}$;

(3) 设$S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 则$S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$, 因此$S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=(x+1)\ln(1+x)-x$, $x\in[-1,1]$;

(4) $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1$, $x\in[-1,1]$.

习题8.7. 判断广义积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的收敛性，关键是：

①确定积分的奇点，即$\pm\infty$或使得$f(x)$发散的点；

②如果$f(x)$是正的（负的）函数，一般需要找到在奇点处与$f(x)$的收敛性相当的比较函数$g(x)$, 一般取$g(x)=\dfrac{1}{x^p}$或$\dfrac{1}{(x-a)^p}$等，因为它们的敛散性是已知的。如果$f(x)$是变号函数，则一般需要用到Dirichlet判别法（定理8.7.7）或Abel判别法（定理8.7.8)，具体过程可参考例8.7.4. 下面对习题1做个简答，这题里函数都是正函数或负函数，因此主要就是看奇点处函数的收敛阶。注意：碰到ln函数时可能要利用类似$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\epsilon}}=0$, $\forall\epsilon>0$的结果, 即$\ln x$在当x趋于$+\infty$时比一切正指数的幂函数发散的速度都慢。

(1) 0和$+\infty$是奇点。在0附近，$f(x)\sim x^{-\frac{1}{2}}$, 在$+\infty$处$f(x)<e^{-x}$, 收敛;

(2) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$f(x)\sim\dfrac{1}{x^2}$, 收敛;

(3) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$f(x)\sim\dfrac{1}{x^2}$, 收敛;

(4) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$f(x)>\dfrac{1}{1+x}$, 发散;

(5) $\dfrac{\pi}{2}$是奇点，而$\ln\cos x=\ln\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)\sim\ln(\dfrac{\pi}{2}-x)$, 因此当$x$充分接近$\dfrac{\pi}{2}$时，$|\ln\cos x|<(\dfrac{\pi}{2}-x)^{-\frac{1}{2}}$，积分收敛;

(6) 0和$+\infty$是可能奇点。在0附近，$x^p\ln(1+x)\sim x^{p+1}$, 因此要使积分收敛，需要$p+1>-1$, 即$p>-2$. 在$+\infty$处$\dfrac{x^p\ln(1+x)}{x^{p+\epsilon}}\to 0$. 这说明在$+\infty$附近，$f(x)$的“主要”的阶是$x^p$，即$p<-1$一定是收敛的，$p>-1$一定是发散的，而在$p=-1$时，$x^p\ln(1+x)\sim\dfrac{\ln x}{x}$, 而后者显然是发散的。综上所述，要使整个积分收敛，必须$-2<p<-1$;

(7) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$f(x)>\dfrac{1}{1+x}$, 发散;

(8) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$\dfrac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\to 0$, 收敛;

(9) $+\infty$是奇点。在$+\infty$处$f(x)\sim\dfrac{\pi}{2}x^{-2}$, 收敛;

(10) 1是奇点。在1处$f(x)\sim\dfrac{1}{(x-1)^3}$, 发散;

(11) 1是奇点。在1处$f(x)\sim\dfrac{1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, 收敛;

(12) 0是奇点。和(5)相似，因为$\ln(\sin x)\sim\ln x$, 收敛;

(13) 1和$+\infty$是奇点。在1处$f(x)\sim(x-1)^{-q}$, 因此$q<1$方能保证1处积分收敛。在$+\infty$处，$f(x)$的“主

要"的阶是$\dfrac{1}{x^p}$，即$p>1$一定是收敛的，$p<1$一定是发散的；而在$p=1$时，加上前面推出的$q<1$，可知积分一定发散。综上所述，要使整个积分收敛，必须$p>1, q<1$;

(14) 0和$\dfrac{\pi}{2}$是奇点。在0处$f(x)\sim x^{p-1}$, 在$\dfrac{\pi}{2}$处，$f(x)\sim(\dfrac{\pi}{2}-x)^{q-1}$，由$0<p,q<1$知积分收敛.

3(4) 0和$+\infty$是奇点。在0处$f(x)\sim x^{p+1}$, 因此$p+1>-1$即$p>-2$方能保证0处积分收敛。在$+\infty$处，x充分大时$f(x)$是振荡的，因此需要用到Dirichlet判别法（这可以仿照例8.7.4），当$p<q$时是收敛的。再考虑绝对收敛性：因为$|f(x)|<\dfrac{1}{x^{q-p}}$, 因此$q>p+1$时一定绝对收敛的；因为$|f(x)|>\dfrac{x^p\sin^2 x}{1+x^q}$，因此$q\le p+1$时是条件收敛的(参考例8.7.4).

习题10.6. 求解二阶常系数线性微分方程是常考题型，对于一般的右端项用常数变易法（如习题6(6)(7)）。但对于定理10.6.16和定理10.6.17中给出的几种形式用待定系数法往往要简单很多（特别地，可以试试习题6(4)(9)就可知道繁简差别）。

(4) 可设特解为$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$;

(9) 可设特解为$y^*=x(ax^2+bx+c)$.