

在鸽巢原理中，小于等于 $x$ 的最大整数的正确写法是 $\lfloor x \rfloor$ ，不是 $[x]$ ，大多数同学写的是后者，批改的时候没有算错，但是今后写到的时候需要注意。

### 习题 1.3

23/24. 几个常用的集合中，自然数集/整数集/有理数集都是无限可数集合，实数集/复数集是无限不可数集合。可数集是指每个元素能与自然数集  $\mathbb{N}$  的每个元素之间能建立一一对应的集合；有限集是指集合的个数是固定的。

### 习题 3.1

34. 我们知道 $5^k$ 与足够多的偶数（非 5 的倍数）相乘末尾产生  $k$  个 0，那么在  $n!$  末尾的 0 中，凡 5 的倍数会贡献 1 个，凡 25 的倍数会多贡献 1 个...那么  $n!$  的末尾共有  $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$  个 0，其中  $5^k \leq n < 5^{k+1}$ 。本题有些同学写了个 C 函数，只要思路正确即可。

### 习题 3.3

17.  $\forall x \in \mathbb{N}^*, x = m * 2^n$ ，其中  $m$  是正奇数。

当  $n$  为偶数时，取  $1, 3, \dots, n-1$  构成  $n/2$  个鸽巢，那么每个数都可以根据其奇数部分  $m$  分配到某个鸽巢中，若要保证至少 1 个鸽巢中有两个数，则至少需要取  $n/2+1$  个数。

当  $n$  为奇数时，取  $1, 3, \dots, n$  构成  $(n+1)/2$  个鸽巢，那么每个数都可以根据其奇数部分  $m$  分配到某个鸽巢中，若要保证至少 1 个鸽巢中有两个数，则至少需要取  $(n+1)/2+1$  个数。

因此，至少需要取  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$  个数。

下面我们说明这种构造方式确实可以保证取最少的数。 $\forall x \in \mathbb{N}^*$ ，当  $x$  为偶数时，取  $\frac{x}{2} + 1, \frac{x}{2} + 2, \dots, x$  必定不存在倍数关系，此时再取一个值必定与之前取的某个数构成 2 倍关系；同理可说明当  $x$  为奇数时的情况。

综上，至少取  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$  个数可以保证其中两个数有倍数关系。

23. 本题可以分为 6 个数中有多于 3 个 1、有 2 个 1、有 1 个 1、没有 1 四种情况讨论。

24. 有理数都可以表示成  $\frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ) 的形式，用  $q$  除  $p$ ，余  $0, 1, \dots, q-1$ ，若余 0 则是有限小数，结论得证；否则再用  $q$  除余数\*10 得到又一余数，那么根据鸽巢原理，最多  $n$  步即可出现相同余数，此后小数部分将会循环。

### 习题 3.4

41. 本题需要注意两点：

1、扑克牌中的 A、J、K 都不能视为奇数，只有 3、5、7、9 是奇数。

2、题干中 **draw** 是抽取的意思，**replace** 是放回的意思。因此(a)的意思是指同时抽两张牌，(b)的意思是指抽一张牌再放回后再抽一张牌。

(a)  $\frac{8}{52} * \frac{7}{51}$

(b)  $\frac{8}{52} * \frac{8}{52}$