作业参考答案

一．符号化以下命题：

1，任意的偶数 x 与 y 都有公约数；

P(x,y): x,y 是偶数;　Q(x,y): x,y 有公约数

$\forall x(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$

2，不存在最大的自然数。

P(x): x 是自然数；Q(x,y): x<y

$\forall x \exists y[P(x) \wedge P(y) \Rightarrow Q(x,y)]$

3，说所有火车比所有汽车都快是不对的；

① P(x): x 是汽车；Q(y): y 是火车；H(x,y): y 比 x 快

$\exists x \exists y(P(x) \wedge Q(y) \wedge H(x,y))$

② P(x): x 是汽车；Q(y): y 是火车；H(x,y): x 比 y 快

$\sim \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow H(x,y))$

4，说有的汽车比有的火车快是正确的；

P(x): x 是火车；Q(y): y 是汽车；H(x,y): y 比 x 快

$\exists x \exists y(P(x) \wedge Q(y) \wedge H(x,y))$

二、验证以下推理是否正确

1，实数不是有理数就是无理数，无理数都不是分数。所以，若有分数，则必有有理数。

令 Q(x): x 是有理数；S(x): x 是无理数；T(x): x 是分数

前提：$\forall x (Q(x) \vee S(x))$, $\forall x(S(x) \Rightarrow \sim T(x))$

结论：$\exists x(T(x) \Rightarrow Q(x))$

证明：

1	$\forall x (Q(x) \vee S(x))$	前提引入
2	$Q(c) \vee S(c)$	UI,1
3	$\sim Q(c) \Rightarrow S(c)$	置换,2
4	$\forall x(S(x) \Rightarrow \sim T(x))$	前提引入
5	$S(c) \Rightarrow \sim T(c)$	UI,4
6	$\sim Q(c) \Rightarrow \sim T(c)$	假设三段论，3,5
7	$T(c) \Rightarrow Q(c)$	置换,6
8	$\exists x(T(x) \Rightarrow Q(x))$	EG,7

2，人都喜欢吃素菜，但说所有人都喜欢吃鱼是不对的，所以存在着只喜欢吃素菜而不喜欢吃鱼的人。

令 P(x): x 是人；H(x): x 喜欢吃素菜；G(x): x 喜欢吃鱼

前提：$\forall x(P(x) \Rightarrow H(x))$, $\sim \forall x(P(x) \Rightarrow G(x))$

结论：$\exists x(P(x) \wedge H(x) \wedge \sim G(x))$

证明：

1	$\forall x(P(x) \Rightarrow H(x))$	前提引入
2	$P(c) \Rightarrow H(c)$	UI,1
3	$\sim \forall x(P(x) \Rightarrow G(x))$	前提引入
4	$\exists x \sim (P(x) \Rightarrow G(x))$	置换,3

5 $\exists x(P(x) \wedge \sim G(x))$　　置换,4

6 $P(c) \wedge \sim G(c)$　　EI,5

7 $P(c)$　　化简,6

8 $H(c)$　　假言推论,2,7

9 $P(c) \wedge H(c) \sim G(c)$　　合取,6,8

10 $\exists x(P(x) \wedge H(x) \wedge \sim G(x))$　　EG,9

18. (1)$\forall x(\sim p(x))$

(2)$\exists x \exists y(R(x,y))$

(3)$\sim\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(4) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

作业常见问题

1.$\forall x\ (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$ 和 $\forall x\ P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$, 这两种形式含义相同吗?

$\forall x \sim P(x)$ 和 $\sim(\forall x\ P(x))$，这两种形式含义相同吗？

2.要注意全称量词和存在量词符号化的形式是不同的，注意以下两种形式：

(a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(b) $\forall x(P(x)\text{->}Q(x))$

3.如果命题 P=True，那么可以直接表示为“P”

如果命题 P=False，那么可以直接表示为“~P”

4.关于推理的证明

常见的证明推理的方法：

I.真值表法

得出结论为重言式，即真值表的最后一列全为一。

II.等值演算法

直接用等值演算来判断推理的形式结构是否是重言式。

III.构造证明

使用以下的推理定律进行证明：

①全称量词消去规则(UI 规则)

$\forall xA(x) \Rightarrow A(c)$

②全称量词引入规则(UG 规则)

$A(y) \Rightarrow \forall xA(x)$

③存在量词消去规则(EI 规则)

$\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$

④存在量词引入规则(EG 规则)

$A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$

5.有同学在作业中给出如下定义：

定义 Q(x)：“x 为喜欢吃鱼的人。” 并顺理成章的得到了~Q(x)是“x 是不喜欢吃鱼的人”

那么请问~Q(x)到底是什么？

按同学的逻辑，Q(x)可以拆解为两个更加简单的命题：“x 是人”且“x 喜欢吃鱼”，这样大家来看一下~Q(x)应该是“x 不是人”或者“x 不喜欢吃鱼”。看到问题所在了吧，切忌想当然。

思考题

1.“不存在最大的自然数”中，令 P(x)：“x 是自然数”，Q(x,y)：“x > y”。

如果我们解读成为：

“对于任意自然数 y，都存在自然数 x，x > y”

则可以表示成为

$\forall x\, \exists y\, [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow Q(x,y)]$ ①

如果我们解读成为：

“不存在自然数 x，使得他对任意自然数 y，都有 x > y”

则可以表示成为

$\sim(\exists x\, \forall y\, [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow Q(x,y)])$ ②

如果①式和②式表达了相同的语义，那么他们也应该是恒等的，即①<=>②应该是永真式，那么如何通过精确的计算来证明呢？

附加资料

首先，区分两个概念：命题逻辑和一阶逻辑（谓词逻辑）

命题逻辑处理简单的陈述性命题，一阶逻辑补充覆盖了谓词和量化。

在命题逻辑中，命题是命题演算的基本单位，不再对简单命题进行分解。因而无法研究命题的内部结构及命题内在的联系，甚至无法处理一些简单而又常见的推理过程。例如，在命题逻辑中，对著名的“苏格拉底三段论”就无法判断其正确性。

凡人都是要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

如果用 p、q、r 表示以上三个命题，则（pq）->r 表示上述推理，这个命题公式不是重言式。这就是命题逻辑的局限性。

一阶逻辑中对简单命题进一步分析，分析出其中的个体词、谓词、量词等，研究它们的结构形式及逻辑关系。

以下看起来很专业的定律和推论，大家能给出证明吗？或者映射到现实中的简单例子上？

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2. $A \wedge B \Rightarrow A$	化简律
3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言真理
4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$	假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$	等价三段论
8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)

9 . $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难