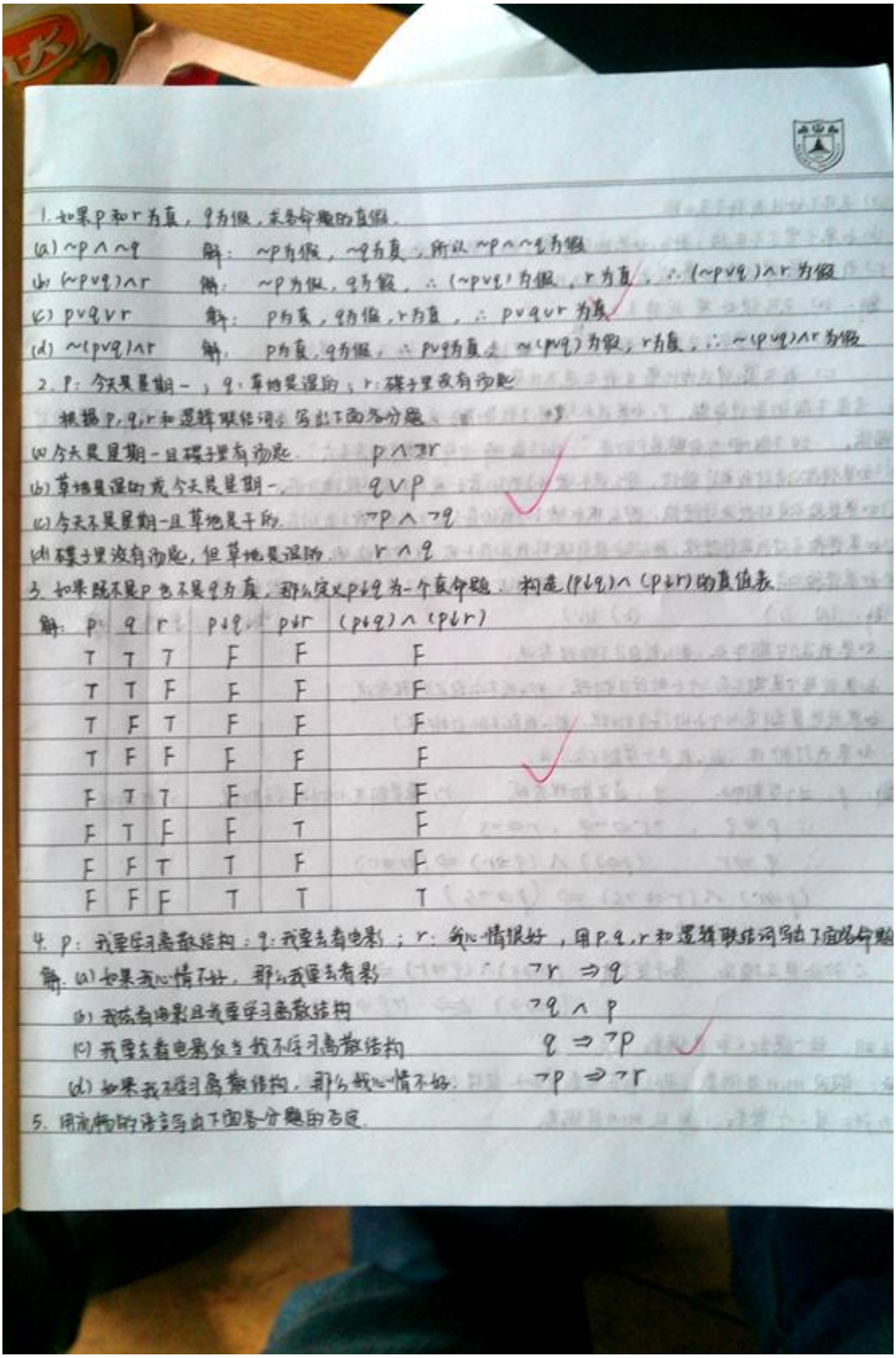
作业答案

以后每次都会从同学们当中挑选出做的好的作业贴出来给大家做参考。
本次作业贴的是张璐璐同学的作业，做的 very nice！



1. 如果p和r为真，q为假，求各命题的真假。

(a) $\sim p \wedge \sim q$　　解：$\sim p$为假，$\sim q$为真，所以$\sim p \wedge \sim q$为假

(b) $(\sim p \vee q) \wedge r$　　解：$\sim p$为假，q为假，$\therefore (\sim p \vee q)$为假，r为真，$\therefore (\sim p \vee q) \wedge r$为假

(c) $p \vee q \vee r$　　解：p为真，q为假，r为真，$\therefore p \vee q \vee r$为真

(d) $\sim(p \vee q) \wedge r$　　解：p为真，q为假，$\therefore p \vee q$为真，$\therefore \sim(p \vee q)$为假，r为真，$\therefore \sim(p \vee q) \wedge r$为假

2. p：今天是星期一；q：草地是湿的；r：碟子里有西瓜

根据p，q，r和逻辑联结词写出下面各命题

(a) 今天是星期一且碟子里有西瓜。　$p \wedge \neg r$

(b) 草地是湿的或今天是星期一。　$q \vee p$

(c) 今天不是星期一且草地是干的。　$\neg p \wedge \neg q$

(d) 碟子里没有西瓜，但草地是湿的。　$r \wedge q$

3. 如果既不是p也不是q为真，那么定义$p \downarrow q$为一个真命题。构造$(p \downarrow q) \wedge (p \downarrow r)$的真值表

解：

p	q	r	$p \downarrow q$	$p \downarrow r$	$(p \downarrow q) \wedge (p \downarrow r)$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T

4. p：我要学习离散结构；q：我要去看电影；r：我心情很好，用p，q，r和逻辑联结词写出下面各命题

解：(a) 如果我心情不好，那么我要去看电影　$\neg r \Rightarrow q$

(b) 我不去看电影且我要学习离散结构　$\neg q \wedge p$

(c) 我要去看电影仅当我不学习离散结构　$q \Rightarrow \neg p$

(d) 如果我不学习离散结构，那么我心情不好。　$\neg p \Rightarrow \neg r$

5. 用流畅的语言写出下面各命题的否定。

(a) 天气不好且我将不去上班.

(b) 如果卡罗尔不生病，那么，如果她去野餐，她会玩得很开心.

(c) 我不会赢得这场比赛或我不会进入比赛.

解: (a) 天气很好或我将去上班

(b) 如果卡罗尔不生病，~~那么，如果~~ 且 她去野餐且她不会玩得很开心.

(c) 我会赢得这场比赛且我会进入比赛.

6. 考虑下面的条件命题. p: 如果洪水毁坏了我的房子或大火烧毁了我的房子，那么保险公司将对我进行赔偿. (a) 下面哪一个命题是p的逆? (b) 下面哪一个命题是p的逆否式?

(i) 如果保险公司对我进行赔偿，那么洪水毁坏了我的房子或大火烧毁了我的房子.

(ii) 如果保险公司对我进行赔偿，那么洪水毁坏了我的房子且大火烧毁了我的房子.

(iii) 如果保险不对我进行赔偿，那么洪水没有毁坏我的房子或大火没有烧毁我的房子.

(iv) 如果保险公司不对我进行赔偿，那么洪水没有毁坏我的房子且大火没有烧毁我的房子.

解: (a) (i)　　(b) (iv)

7. 如果我这个学期毕业，那么我通过了物理考试.

如果我每个星期不花10个小时学习物理，那么我不会通过物理考试

如果我每星期花10个小时学习物理，那么我就不能打排球了.

∴ 如果我打排球，那么我这个学期不会毕业.

解: p: 这个学期毕业　q: 通过物理考试　r: 每星期花10个小时学习物理　s: 打排球

$\because p \Rightarrow q$, $\neg r \Rightarrow \neg q$, $r \Rightarrow \neg s$

$\therefore q \Rightarrow r$　　$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg s)$

$\therefore s \Rightarrow \neg p$

∴ 论证是正确的. 基于重言式 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

8. 证明: 两个偶数之和是偶数.

证: 假设 m, n 是偶数，那么存在整数 j 和 k 使得 $m=2j$, $n=2k$, 则 $m+n = 2j+2k = 2(j+k)$

因为 $j+k$ 是一个整数，所以 $m+n$ 是偶数.

9. 证明或反驳：任何5个连续整数之和能被5整除.

证：设5个连续整数 $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ （m为整数）

则 $m-2+m-1+m+m+1+m+2 = 5m$

因为m为整数，所以能被5整除.

10. 判断下面的论证是否正确，解释你的结论.

解：正确. p：π是一个无理数　q：1-π是一个无理数

要证 $p \Rightarrow q$ 即证 $\neg q \Rightarrow \neg p$　∴论证有效

10.18

~~题中证明 $\neg q \Rightarrow \neg p$，但是[illegible]~~

题中使用的是反证法，并不是直接证明

另：第 2.3 节第 30 题
题目所给论证是正确的。
采用了反证法，p:x 是一个无理数，q:1-x 是一个无理数。先假设~q，由~q 推出~p 与题设矛盾。基于的重言式为(~q=>~p)∧p => q。

作业中的典型问题

1. 首先，大家上课要注意听，记清楚作业。此次作业有部分同学出现少写，写错的情况。
2. 看清题干，例如题目中已经给出了命题变量，就不必再自己设定命题变量了。
3. 第 2.3 节第 8 题
   很多同学的写法(p=>r) ∧(~q=>~r) ∧(q=>~s)<=> (s=>~p)，
   (p=>r) ∧(~q=>~r) ∧(q=>~s) ≡ (s=>~p)
   这里一定要注意等价符号的使用，很简单的判断方法，左边和右边的命题变量个数是不相等的，所以肯定是不等价的，只能由左边推出右边。
4. 第 2.3 节第 14 题
   任意两个偶数 m,n，设 m=2k,n=2j(k,j∈N)
   注意偶数、奇数是在整数范围之内的，所以 k,j∈Z.

5．真值表的书写顺序问题（大可跳过不看）

2.1 第 28 题需要大家写出真值表，其中的变量有 p,q,r 三个，那么真值情况应该有 2^3=8 种。而有的同学只写了 4 种，有的同学 8 种中有重复的，那么怎么写这 8 行真值才能有条不紊？假如变量数量增加了，真值情况又指数级增加了，那么又怎样写真值表才能井然有序？提供两种思路：

①　（同学们在软院了，1 对应 True，0 对应 False，千万记得！）
先做个数数游戏，3 位的二进制无符号整数，请你从小到大数一下：
000,001,010,011,100,101,110,111
相信大家都能完成。那么，把三位分别作为 p,q,r 三个变量的真值就行，这样 8 行就出来了：

三位二进制整数	p	q	r
0　0　0	F	F	F
0　0　1	F	F	T
0　1　0	F	T	F
0　1　1	F	T	T
1　0　0	T	F	F
1　0　1	T	F	T
1　1　0	T	T	F
1　1　1	T	T	T

类似的，如果要你书写一个有 6 个变量的真值表（事实上没有老师会这么不人道），那么你得考虑到的真值表将有 2^6=64 行，那么我们开始数数：
000001,000010,000011,000100,……
然后对应的 0 写为 F，1 写为 T，不用继续说明了吧。

② 按照有限个变量中“真/假”的数量来顺序书写：
3 个变量中 0 个为 T，3 个为 F，排列一下；
3 个变量中 1 个为 T，2 个为 F，排列一下；
3 个变量中 2 个为 T，1 个为 F，排列一下；
3 个变量中 3 个为 T，0 个为 F，排列一下。

很明显，当变量数量增加的时候，你的“排列”操作就越来越可能犯错误，所以这种方法并不推荐。

6.“如果……那么……”的逻辑关系可以用连接词“=>”表示（但是“=>”并不表示前后命题有特定的因果关系，只是一个表达式中的运算符）;
“当且仅当”的逻辑关系可以用连接词“<=>”表示;
“仅当”的逻辑关系可以用连接词“=>”表示。
参考课件：

- P if Q: Q=>P
- P only if Q: P=>Q
- P if and only if Q：P<=>Q

因此我们学到现在的逻辑连接词有“∧（且，合取）”,“∨（或，析取）”,“=>”,“<=”,“<=>（≡，等价）”。
“~（非）”是一元运算符，并没有连接两个变量，因此是否算作连接词，请看具体场合，一般不做区分。

7.第 2.2 节第 20 题(b)的否命题是什么？
原命题是形如“p=>(q=>r)”的形式，p,q,r 大家参考题目自己给出。
那么这个命题的否定，我们不能想当然的写出“p=>(q=>~r)”，需要计算，即给整个命题做非运算，其中两次用到重言式：~(p=>q) ≡ p∧~q。
~(p=>(q=>r)) ≡ p∧~(q=>r) ≡ p∧q∧~r
再把题头你设定的 p,q,r 代入，答案就出来了。至于答案这么说拗不拗口，另当别论了。

8.第 2.2 节第 6 题“p 仅当 q”，看到这个连接词，应该想到使用哪个符号？
“=>”而不是“<=>”，表示 p 是 q 的必要条件，而不是充要条件。

9.第 2.3 节第 24 题，5 个连续整数 blablabla……
大家都很自然的想到表示出 5 个整数，把他们加起来等等。问题是，怎么表示这 5 个整数？
部分同学表示为：n,n+1,n+2,n+3,n+4，这样没什么不好，是的，加起来也很简单，1+2+3+4=10。
问题是，如果题目扩展到证明“739 个连续整数之和是 739 的倍数？”“14159265 个连续整数之和是 14159265 的倍数？”后面拖一串尾巴做高斯小学做过的事……是不是很憋屈？
那么表示这些数字有个技巧，设 5 个连续整数中间的那个数为 n，那么 5 个数可以表示为：
n-2,n-1,n,n+1,n+2
加起来，-2 和 2，-1 和 1，都没了，只剩下 5n。
也许看起来没什么不同，但这是个思想，数字规模扩大的时候，这样的思想可以帮你们更加方便的进行运算。

10.①“p=>q∧r”与②“(p=>q)∧r”是否等价？
不相同，运算“∧”,“∨”比运算“=>”具有更高的优先级，所以①式等价于“p=>(q∧r)”，而不等价于②式。
参考：逻辑连接词@wikepedia

课堂遗留问题

1.三个人来自三座不同的城市：

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.

Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.

Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

陶老师上课有一个推论，很多同学可能不太明白：

$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge((p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_3\wedge p_4)) = (\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)$，怎么得来的？

好，我们注意观察题目，有三个隐含的假设，即：

P1，P3，P5 不可能同时为真（不可能有人同时来自 Boston）；

P1，P4，P6 不可能同时为真（Bill 只可能来自一座城市）；

P2，P4 不可能同时为真（不可能有人同时来自 Chicago）。

开始运算吧：

$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge((p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_3\wedge p_4))$使用德·摩根定律展开

$$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge((p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_3\wedge p_4))$$

$$=(p_1\wedge\sim p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\vee(p_1\wedge\sim p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4)\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4))\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4)$$

① ②③④

观察上式，①，②，③，④四块析取，那么如果其中哪项始终为假就可以消去，因为任何一个命题析取一个假命题，其真值保持不变。

其中：

因为 P1，P3 不能同时为真，所以①为假，消去；

因为 P1，P4 不能同时为真，所以②为假，消去；

因为 P2，P4 不能同时为真，所以④为假，消去；

只剩③。

于是有了 PPT 中的 Notes:$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge((p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_3\wedge p_4)) = (\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)$

进一步推论，与$((p_5\wedge\sim p_6)\vee(\sim p_5\wedge p_6))$做合取，继续应用德·摩根定律

$$(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\wedge((p_5\wedge\sim p_6)\vee(\sim p_5\wedge p_6))$$

$$=(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4\wedge p_5\wedge\sim p_6)\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4\wedge\sim p_5\wedge p_6)$$

① ②

因为 P3，P5 不能同时为真，所以①为假，消去；

只剩②。

于是原式化简为$(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4\wedge\sim p_5\wedge p_6)$，应当始终为 True，即其中进行合取的每个部分的真值均为 True。最终有 P1=F, P2=T, P3=T, P4=F, P5=F, P6=T。

2.PPT 第 65 张，

$$\text{US: } \forall x P(x) \rightarrow P(c)$$

$$\text{UG: } P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$\text{ES: } \exists x P(x) \rightarrow P(c)$$

$$\text{EG: } P(c) \rightarrow \exists x P(x)$$

意思是全称量化和存在量化可以和命题之间进行转换，其中 x 表示定义域内的任意取值，而 c 为定义域内某个特定取值。

具体应用请参考课件 66 页“苏格拉底会死”的例子及 69 页“一些人不喜欢步行”的例子。

思考题

1.考虑以下推论错误的原因？

“物理学家发现了万有引力定律”

“爱因斯坦是物理学家”

∴“爱因斯坦发现了万有引力定律”

2.命题 P：”5=2+2”；命题 Q：“罗素是皇帝”

请问：①蕴含“P=>Q”为重言式，为什么？②如何在 P 作为假设前提下推出命题 Q？请设计 P 到 Q 的中间细节。