1. Пусть $a \preceq b = \{|a|, sign(a)\} \preceq \{|b|, sign(b)\}$

1.(альтернативное решение)
мы можем построить биекцию между натуральными и целыми/рациональными множествами => можно вполне упорядочить.
так как всего коэфицентов N^3, на каждую комбинацию 2 корня => множество счетно => можно вполне упорядочить

3.

акоима степени

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

$\varphi(x) = (\forall X.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subset X) \land \exists z.z \in y \land z = x$

b)

contains(x): $\exists y.y \in X \& y = x$

filter: аксиома выделения

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow (y \in x \,\&\, \varphi(y))$$

где x = a, a $\varphi = \neg$ contains(b)
при такой подстановке получаем minus

pair: аксиома пары

$$\forall a.\forall b.\exists s.a \in s \,\&\, b \in s \,\&\, \forall c.c \in s \to c = a \lor c = b$$

где a = minus(x, y), a b = minus(y, x)
flatten: аксиома объединения

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

где x = pair(minus(x, y), minus(y, x)) (то что мы получили на предыдущем шаге) при такой подстановке получаем sym

```
minus[A](a : List[A], b : List[A]): List[A] = filter(_ ∉ b)(a)(b)
sym[A](a: List[A], b : List[A]): List[A] = flatten(
  pair(minus(a, b), minus(b, a)))
```

c)

- Делаем wrapped
  - `powerset.filter(y => x \ y == emptyset  )`
- Powerset с нулем
- `x \ 0 in wrapped`

4.

$< a,b >=< c,d > \;\; \Leftrightarrow \;\; (a=c) \wedge (b=d)$

$\rhd$

<= очевидно по построению

=> т.к. $A=B \equiv \forall x.x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \forall x.x \in B \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow$ A и B содержат одинаковые элементы $\Rightarrow$ если $< a,b >=< c,d >$, тогда

$(\{a\}=\{c\} \vee \{a\}=\{c,d\}) \wedge (\{a,b\}=\{c\} \wedge \{a,b\}=\{c,d\})$

$1)\{a\}=\{c\} \wedge \{a,b\}=\{c,d\} \Rightarrow a=c, b=d$

$2)\{a\}=\{c,d\} \wedge \{a,b\}=\{c\} \Rightarrow a=c=d, b=c=a=d$

в обоих случаях $a=c \wedge b=d$

$\lhd$

5. **a**

- $\varphi(x) = \forall t.t \in x, t = \mathring{\varnothing} \parallel \exists z.z \in x \wedge z' = t$
- $w = \{x \mid \varphi(x)\}$

5b)

w - ординал $\Leftrightarrow w -$ волне упорядоченное отношением $(\in)$ транзитивное множество

$w = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', ...\}$

$x' = x \cup \{x\}$

$1)w -$ волне упорядоченное :

1. чатичный порядок:

антисимметричность: $\forall a,b : (a \in b \rightarrow b \in a) \rightarrow a=b, (a \in b \rightarrow b \in a) = 0 \Rightarrow$ все ок

транзитивность: $\forall a \in w, \forall b \in w, \forall c \in w : (a \in b \rightarrow b \in c) \rightarrow a \in c :$

действительно, так как w это $w = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', ...\}$, где $\emptyset \in \emptyset', \emptyset' \in \emptyset''...$ то w транзитивно

2.$\forall a \in w, \forall b \in w : a \in b \vee b \in a$ логика та же, что и при транзитивности

3. есть наименьший элемент: да - $\emptyset$

$2)w -$ транзитивное множество

нужно доказать, что $\forall x, \forall y : (x \in y \wedge y \in w) \Rightarrow x \in w$

$y \in w \Rightarrow y = \emptyset^{n+1}$

$x \in y \Rightarrow x \in \emptyset^n \cup \{\emptyset^n\}$

$\Rightarrow$ есть 2 случая:

1.$x \in \emptyset^n$

2.$x = \emptyset^n$

1. очевидно $x \in w$(просто делаем эти шаги, пока непопадем на 2)
2. очевидно $x \in w$

6a.

$(i) A = \{b, c, \{b, c\}\}$

транзитивно: все элементы $b, c, \{b, c\} \in A$

не вполне упорядочено: $b \notin c \wedge c \notin b$

очевидно, что аксииомы выполняются

$(ii) A = \{b, \{b\}, \{a, b, \{b\}\}\}$

не транзитивно $a \notin A$

вполне упорядочено $b \in \{b\} \in \{a, b, \{b\}\}$

очевидно, что аксииомы выполняются

6b.

$x' = x \cup \{x\}$

транзитивность:

$\forall a \in x \;\; x \in x' \Rightarrow a \in x'$ (да, так как x' = x $\cup$ {x}, x $\in x'$)

$\forall a \in \{x\} \;\; \{x\} \in x' \Rightarrow a \in x'$ (да, так как x' = x $\cup$ {x}, a = x)

вполне упорядочено:

1) частичный порядок:

антисимметричность: очевидно

транзитивность: так как x ординал, то x - вполне упорядочен $\Rightarrow$ x' транзитивно

2) $\forall a \in x', \forall b \in x' : a \in b \vee b \in a$. x вполне упорядочен и $x \in x'$ $\Rightarrow$ x' имеет линейный порядок

3) так как в x есть наименьший, то он и пододет для x' $\Rightarrow$ x' вполне упорядочен

6c.

$x' = x \cup \{x\}$

x' – транзитивное множество $\Rightarrow$ x тоже транзитивное множество

x' – вполне упорядочен $\Rightarrow$ транзитивность рассмотрим только на x

и очевидно для x' транзитивность выполняется

$\Rightarrow$ выполняется и для x,

линейность тоже рассмотрим только для элементов из x

$\Rightarrow$ раз x' вполне упорядочен, то x имеет линейный порядок

в x' есть наименьший элемент и очевидно,

что он находится в левой части, а левая часть это буквально x $\Rightarrow$ в x тот же наименьший элемент

6d.

$\sqsupset x - \text{ординал} \land x \neq \emptyset$

так как любой элемент из x - ординал $\Rightarrow$ любой элемент это множество

пусть наименьший элемент это a $\neq \emptyset$, тогда a - множество не содержащее множеств и содержащее хотя

так как иначе по транзитивности в x существовал бы элемент,

который "меньше" a.

тогда по транзитивности $b \in x$, но b - не множество $\Rightarrow a = \emptyset$

6e.

$p = a \cup \{a\}$

$x \in p \Rightarrow x \in a \lor x = a$

если $x = a \Rightarrow x' = a \cup \{a\} = p$

если $x \in a \Rightarrow$ x - ординал, который $\in p$, не равен p и не равен a

$\Rightarrow x' = x \cup \{x\} - \text{ординал}, x' \neq p(\text{так как x} \neq a),\ p \notin x'(\text{так как x} \in p \text{ и x} \neq a) \Rightarrow x' \in p$

7.

сама аксиома: $\forall x.x = \emptyset \lor \exists y.y \in x \land (\forall z.z \in x \to z \notin y)$

заметим, что $(\forall z.z \in x \to z \notin y) \sim y \cap x = \emptyset$

тогда аксиома имеет вид: $\forall x.x = \emptyset \lor \exists y.(y \in x \land y \cap x = \emptyset)$

тогда ее отрицание равно: $\exists x.x \neq \emptyset \land \forall y.(y \notin x \lor y \cap x \neq \emptyset)$

нас интересуют y $\in x \Rightarrow$ левая часть равна 0

тогда рассмотрим какой-нибудь элемент $x_1 \in x$:

$x_1 \cap x \neq \emptyset$

тогда пусть $x_2 \in x_1 \cap x$

$x_2 \cap x \neq \emptyset$

и так далее. в итоге мы получили бесконечную последовательность вида:

$x_1, x_2, x_3 ...,$ такую что $x_2 \in x_1, x_3 \in x_2, ...$

тогда аксиома запрещает существование такой последовательности множеств

если же $x \in x,$ тогда можно выписать такую последовательность x, x, x, ...,

такую что: $x \in x, x \in x, x \in x ...,$

но она запрещена аксиомой $\Rightarrow x \notin x$

8a.

$\forall x.x \in w \to x' \neq \emptyset$

если x' = $\emptyset$, то $\nexists x,$ так как $\emptyset$ наименьший элемент $w \Rightarrow x' \neq \emptyset$

9.

$\omega * \overline{2} = \omega * \overline{1}' = \left(\omega * \overline{1}\right) + \omega = \left(\omega * \overline{0}'\right) + \omega = \left(\omega * \overline{0} + \omega\right) + \omega = \left(\overline{0} + \omega\right) + \omega = \omega + \omega$

10.

$1^w = upb\{1^0, 1^1, 1^2, ...\}$

докажем по индукции, что $1^a = 1 :$

База: $1^0 = 1$

Шаг: $1^a = 1 \Rightarrow 1^{a'} = 1 :$

$1^{a'} = (1^a) \cdot a = 1 \cdot 1 = (1 \cdot 0) + 1 = 0 + 1 = (0 + 0)' = 0' = 1$

$\Rightarrow 1^w = upb\{1, 1, 1, ...\} = 1 \neq w$

$w^1 = w^0 \cdot w = 1 \cdot w = upb\{\emptyset, 1, 2, 3, ...\} \neq w$ (так как все элементы upb строго меньше w)