1. **a)**
   - MiP, SaM, SiP
   - $\exists x.U(x) \wedge F(x), \forall y, S(y) \to U(x) \vdash \exists x : S(x) \wedge F(x)$

5. **a)** $\forall x.\varphi \vdash \forall y.\varphi[x := y]$
   - $\forall x.\varphi \to \varphi[x := y]$ по условию y входит свободно в φ вместо x (аксиома 11)
   - $\varphi[x := y]$ M. P.
   - $\varphi[x := y] \to \varphi[x := y] \to \varphi[x := y]$
   - $\varphi[x := y] \to \varphi[x := y]$ M. P
   - $\varphi[x := y] \to \forall y.\varphi[x := y]$ по условию y не входит свободно в φ (правило вывода для $\forall$)
   - $\forall y.\varphi[x := y]$

   b) $\vdash (\forall x.\varphi \to \exists x.\varphi) \Rightarrow \forall x.\varphi \vdash \exists x.\varphi$
   - $\forall x.\varphi \to \varphi[x := \theta]$ где θ свободна для подстановки в φ **axiom 11**
   - $\varphi[x := \theta]$ M. P.
   - $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$ **axiom 12**
   - $\exists x.\varphi$ M. P

   $\vdash \forall x.\forall x.\varphi \to \forall x.\varphi \Rightarrow \forall x.\forall x.\varphi \vdash \forall x.\varphi$
   - $\forall x.\forall x.\varphi \to \forall x.\varphi[x := x]$ **axiom 11** подстановка x вместо x всегда свободна
   - $\forall x.\varphi[x := x] \equiv \forall x.\varphi$

   c) $\forall x.\varphi \vdash \neg\exists x.\neg\varphi$

   $\exists x.\neg\varphi \to \neg\forall x.\varphi$
   - $(\forall x.\varphi \to \neg\exists x.\neg\varphi) \to (\exists x.\neg\varphi \to \neg\forall x.\varphi)$ - контрпозиция

   d) $\forall x.\alpha \vee \beta \to \neg\exists\neg\alpha \wedge \neg\exists\neg\beta$
   - $\forall x.x > 1 \vee x > 3$
   - $x = 2$ выполняется α но не β

   e)

6.

7.

8. $\forall x : \exists y : \varphi \to \exists x : \forall y : \varphi$
   - Возьмем $D = \mathbb{N}$
   - $\forall x : \exists y : x < y$
   - Но $\neg\exists x : \forall y : x < y$

   $\exists x.\forall y.\varphi \to \forall x.\exists y.\varphi$
   - $f(x, y) = \begin{cases} \text{true if } x = \alpha \\ \text{false if } x \neq \alpha \end{cases}$
   - $D = \{\alpha, \beta\}$