Solved:
1: a, b, c, d, e
2: a, b, c, d, e
3: a, b, d, e, g, i, j, k, l
5 , 6(?)

Total: 21

1.

(a)

$\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$ ж

1. $(A \to A) \to (A \to A \to B) \to (A \to B)$(сх. 2 $\alpha = A, \beta = A, \gamma = B$)
2. $A \to A \to A$(сх. 1 $\alpha = A, \beta = A$)
3. $(A \to A \to A) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$(сх. 2 $\alpha = A, \beta = (A \to A), \gamma = A$)
4. $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$(M.P. 2, 3)
5. $A \to (A \to A) \to A$(сх. 1 $\alpha = A, \beta = (A \to A)$)
6. $A \to A$(M.P. 4, 5)
7. $(A \to A \to B) \to (A \to B)$(M.P. 1, 6)

(b)

$\vdash \neg(A \& \neg A)$

1. $((A \& \neg A) \to A) \to ((A \& \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \& \neg A)$(сх. 9 $\alpha = (A \& \neg A), \beta = A$)
2. $(A \& \neg A) \to A$(сх. 4)$\alpha = A, \beta = \neg A$
3. $(A \& \neg A) \to \neg A$(сх. 5 $\alpha = A, \beta = \neg A$)
4. $((A \& \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \& \neg A)$
5. $\neg(A \& \neg A)$(M.P. 3, 4)

(c)

$(\vdash A \& B \to B \& A) \Leftrightarrow (A \& B \vdash B \& A)$(Дедукция)

1. $A \& B -$ гип.
2. $A \& B \to A$(сх.4, $\alpha = A, \beta = B$)
3. $A \& B \to B$(сх.5, $\alpha = A, \beta = B$)
4. A(M.P. 1, 2)
5. B(M.P. 1, 3)
6. $B \to A \to B \& A$(сх.3, $\alpha = B, \beta = A$)
7. $A \to B \& A$(M.P.5, 6)
8. $B \& A$(M.P. 5, 7)

(d)

$\vdash A \vee B \to B \vee A$

1. $(A \to B \vee A) \to (B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)$(сх.8 $\alpha = A, \beta = B, \gamma = (B \vee A)$)
2. $A \to B \vee A$(сх.7, $\alpha = B, \beta = A$)

3. $B \to B \vee A$(сх.6, $\alpha = B, \beta = A$)
4. $(B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)$(M.P.1, 2)
5. $A \vee B \to B \vee A$(M.P.3, 4)

(e)

$A\&\neg A \vdash B$

1. $A\&\neg A$ – гипотеза
2. $A\&\neg A \to A$(сх.4, $\alpha = A, \beta = \neg A$)
3. A(M.P. 1, 2)
4. $A\&\neg A \to \neg A$(сх.5, $\alpha = A, \beta = \neg A$)
5. $\neg A$(M.P. 1, 4)
6. $A \to \neg B \to A$(сх.1, $\alpha = A, \beta = B$)
7. $\neg B \to A$(M.P. 3, 6)
8. $\neg A \to \neg B \to \neg A$(сх.1, $\alpha = \neg A, \beta = \neg B$)
9. $\neg B \to \neg A$(M.P. 5, 8)
10. $(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$(сх.9, $\alpha = \neg B, \beta = A$)
11. $(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$(M.P. 7, 10)
12. $\neg\neg B$(M.P. 9, 11)
13. $\neg\neg B \to B$(сх.10, $\alpha = B$)
14. B(M.P. 12, 13)

2.

(a)

$\vdash A \to \neg\neg A \Leftrightarrow A \vdash \neg\neg A$

1. A – гипотеза
2. $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$(сх.9, $\alpha = \neg A, \beta = A$)
3. $A \to \neg A \to A$(сх.1, $\alpha = A, \beta = \neg A$)
4. $\neg A \to A$(M.P. 1, 3)
5. $\neg A \to \neg A$(очев уже в 1а доказано)
6. $(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$(M.P. 2, 4)
7. $\neg\neg A$(M.P. 5, 6)

(b)

$\neg A, B \vdash \neg(A\&B)$

1. $\neg A$ — гип
2. B — гип
3. $((A\&B) \to A) \to ((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$(сх. 9 $\alpha = (A\&B), \beta = A$)
4. $((A\&B) \to A)$(сх. 4, $\alpha = A, \beta = B$)
5. $((A\&B) \to \neg A) \to \neg(A\&B)$(М.Р. 3, 4)
6. $\neg A \to (A\&B) \to \neg A$(сх. 1 $\alpha = \neg A, \beta = (A\&B)$
7. $((A\&B) \to \neg A$(М.Р 1, 6)
8. $\neg(A\&B)$(М.Р.)

(c)

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1. $(A \vee B \to \neg A\&\neg B) \to (A \vee B \to \neg(\neg A\&\neg B)) \to \neg(A \vee B)$
   (сх. $9, \alpha = A \vee B, \beta = \neg A\&\neg B$)
2. $(A \to (\neg A\&\neg B)) \to (B \to (\neg A\&\neg B)) \to ((A \vee B) \to \neg A\&\neg B)$
   (сх. $8, \alpha = A, \beta = B, \gamma = \neg A\&\neg B$)
3. $\neg A$ — по гипотезе
4. $\neg B$ — по гипотезе
5. $\neg A \to (\neg B \to \neg A\&\neg B)$ (сх. $3, \alpha = \neg A, \beta = \neg B$)
6. $\neg B \to \neg A\&\neg B$ (m.p. 3, 5)
7. $\neg A\&\neg B$ (m.p. 4, 6)
8. $\neg A\&\neg B \to (A \to \neg A\&\neg B)$ (сх. $1, \alpha = \neg A\&\neg B, \beta = A$)
9. $\neg A\&\neg B \to (B \to \neg A\&\neg B)$ (сх. $1, \alpha = \neg A\&\neg B, \beta = B$)
10. $A \to \neg A\&\neg B$ (m.p. 7, 8)
11. $B \to \neg A\&\neg B$ (m.p. 7, 9)
12. $(B \to \neg A\&\neg B) \to (A \vee B \to \neg A\&\neg B)$ (m.p. 2, 10)
13. $A \vee B \to \neg A\&\neg B$ (m.p. 11, 12)
14. $(A \vee B \to \neg(\neg A\&\neg B)) \to \neg(A \vee B)$ (m.p. 1, 13)
15. $A \vee B \to \neg(\neg A\&\neg B)$ (см задачу 3.d)
16. $\neg(A \vee B)$ (m.p. 14, 15)

(d)

$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

1. $((A \to B) \to B) \to ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$ (Сх. 9)
2. $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to B)$ (Сх. 2)
3. Доказательство $(A \to B) \to (A \to B)$ следует из доказательства $\alpha \to \alpha$ путем замены метапеременной α на $A \to B$, доказательство $\alpha \to \alpha$ оставляется любопытному читателю.
4. $A \to (A \to B) \to A$
5. $(A \to B) \to A$
6. $(A \to B) \to B$
7. $\neg B \to (A \to B) \to \neg B$
8. $(A \to B) \to \neg B$
9. $\neg(A \to B)$

(e)

$\neg A, B \vdash A \to B \Leftrightarrow \neg A, B, A \vdash B$

1. B - гипотеза

3.

(a)

$\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C) \Leftrightarrow A \to B, B \to C \vdash A \to C$

1. $A \to B -$ гипотеза
2. $B \to C -$ гипотеза
3. $(A \to B) \to (A \to B \to C) \to (A \to C)$ $(\text{сх. } 2, \alpha = A, \beta = B, \gamma = C)$
4. $(A \to (B \to C)) \to (A \to C)$ (M.P. 1, 3)
5. $(B \to C) \to A \to (B \to C)$ $(\text{сх.}1, \alpha = B \to C, \beta = A)$
6. $A \to (B \to C)$ (M.P. 2, 5)
7. $A \to C$ (M.P. 4, 6)

(b)

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \Leftrightarrow (A \to B), \neg B \vdash \neg A$

1. $A \to B -$ гипотеза
2. $\neg B -$ гипотеза
3. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ $(\text{сх.}9, \alpha = A, \beta = B)$
4. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (M.P. 1, 2)
5. $\neg B \to A \to \neg B(\text{сх.}1, \alpha = \neg B, \beta = A)$
6. $(A \to \neg B)$(M.P. 2, 5)
7. $\neg A$ (Modus Chipses 4, 6) - 100%

(d)

$\vdash \boldsymbol{(A \lor B) \to \neg(\neg A \& \neg B)}$

1. $\alpha \to \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$ закон снятия двойного отрицания
2. $\neg A \& \neg B \to \neg B$ sch. 5.
3. $\neg A \& \neg B \to \neg B$ sch. 5.
4. $\neg\neg A \to \neg(\neg A \& \neg B)$ правило контрпозиции
5. $\neg\neg B \to \neg(\neg A \& \neg B)$ правило контрпозиции
6. $A \to \neg(\neg A \& \neg B)$ закон снятия двойного отрицания
7. $B \to \neg(\neg A \& \neg B)$ закон снятия двойного отрицания
8. $(A \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (B \to \neg(\neg A \& \neg B)) \to (A \lor B \to \neg(\neg A \& \neg B))$
9. два раз М. Р

(e)

$\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A\&B)$

1. $\vdash A\&B \to A$
2. $\vdash \neg A \to \neg(A\&B)$ [Правило контрпозиции]
3. $\vdash A\&B \to B$
4. $\vdash \neg B \to \neg(A\&B)$ [Правило контрпозиции]
5. $\vdash (\neg A \to \neg(A\&B)) \to (\neg B \to \neg(A\&B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A\&B))$ [сх. 8]
6. $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A\&B)$ [М.р. 2, 4, 5]

(g)

$\vdash A\&B \to A \vee B \Leftrightarrow A\&B \vdash A \vee B$

1. $A\&B$ — гипотеза
2. $A\&B \to A(\text{сх.}4, \alpha = A, \beta = B)$
3. $A(\text{М.Р. } 1,\ 2)$
4. $A \to A \vee B(\text{сх.}6, \alpha = A, \beta = B)$
5. $A \vee B(\text{М.Р. } 3,\ 4)$

(i)

$\vdash A \vee \neg A$

1. $(\neg A\&A \to A) \to (\neg A\&A \to \neg A) \to \neg(\neg A\&A)$ [Схема 9, $\alpha = \neg A \vee A, \beta = A$]
2. $\neg A\&A \to A$ [Схема 5]
3. $(\neg A\&A \to \neg A) \to \neg(\neg A\&A)$ [М.р. 1, 2]
4. $\neg A\&A \to \neg A$ [Схема 4]
5. $\neg(\neg A\&A)$ (М.р. 3)
6. $\neg(\neg A\&A) \to \neg\neg A \vee \neg A$ [Де Морган из 3.с]
7. $\neg\neg A \vee \neg A$ [М.р. 5, 6]
8. $(\neg\neg A \to (A \vee \neg A)) \to (\neg A \to (A \vee \neg A)) \to ((\neg\neg A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A))$
   [Схема 8, $\alpha = \neg\neg A, \beta = \neg A, \gamma = A \vee \neg A$]
9. $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to (A \to (A \vee \neg A))) \to (\neg\neg A \to (A \vee \neg A))$
   [Схема 3, $\alpha = \neg\neg A, \beta = A, \gamma = A \vee \neg A$]
10. $\neg\neg A \to A$ [Схема 10]
11. $(\neg\neg A \to (A \to (A \vee \neg A))) \to (\neg\neg A \to (A \vee \neg A))$ [М.р. 9, 10]
12. $A \to (A \vee \neg A)$ [Схема 8]
13. $(A \to (A \vee \neg A)) \to \neg\neg A \to (A \to (A \vee \neg A))$
    [Схема 1, $\alpha = A \to (A \vee \neg A), \beta = \neg\neg A$]
14. $\neg\neg A \to (A \to (A \vee \neg A))$ [М.р. 12, 13]
15. $\neg\neg A \to (A \vee \neg A)$ [М.р. 11, 14]
16. $(\neg A \to (A \vee \neg A)) \to (\neg\neg A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$ [М.р. 8, 15]
17. $\neg A \to (A \vee \neg A)$ [Схема 7]
18. $(\neg\neg A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$ [М.р. 16, 17]
19. $A \vee \neg A$ [М.р. 7, 18]

(j)

Достаточно доказать $(A\&B \to C), A, B \vdash C$

1. $A \to B \to A\&B$(сх.3 $\alpha = A, \beta = B$)
2. $B \to A\&B$
3. $A\&B$
4. $A\&B \to C$
5. C

(k)

$\boldsymbol{A\&(B \vee C) \vdash (A\&B) \vee (A\&C)}$

1. правило разбиения коньюнкции

$$\frac{\{A, B \vdash C\}}{\{A\&B \vdash C\}}$$

1. $A, B \vee C \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$
2. правило разбиения случаев:

$$\frac{\{\Gamma, A \vdash C\&\Gamma, B \vdash C\}}{\{\Gamma, A \vee B \vdash C\}}$$

1. по правилу разбиения случаев, т.д.: $A, B \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$ и $A, C \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$
2. A
3. B
4. $A \to B \to (A\&B)$ | sch. 3.
5. $A\&B$ M. P. 2, 3, 4
6. $A\&B \to A\&B \vee A\&C$ sch. 6.
7. $A, B \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$
8. Аналогично доказываем: $A, C \vdash (A\&B) \vee (A\&C)$

(l)

$\vdash (A \to B \to C) \to (A\&B \to C)$

$(A \to B \to C), A\&B \vdash C$(дедукция)

1. $A\&B -$ гип
2. $A\&B \to A$(сх. 4 $\alpha = A, \beta = B$)
3. $A\&B \to B$(сх. 5 $\alpha = A, \beta = B$)
4. A(M.P.1, 2)
5. B(M.P.1, 3)
6. $A \to B \to C$(гип)
7. $B \to C$(M.P. 6, 4)
8. C(M.P. 7, 5)

5.

По дедукции $\vdash \alpha \to \beta$ и $\vdash \neg\alpha \to \beta$, тогда по схеме 8 верно:

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta), \quad \vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \quad \Rightarrow \quad \vdash \beta$

6.

В качестве базы индукции воспользуемся базой Арсена Маркаряна. Необходимо проверить, что если из предположения о том, что мы адекватны, следует, что все женщины должны носить хиджабы и предположения, что все женщины не носят хиджабы, следует, что мы неадекватны. Последнее очевидно. Ч.Т.Д.

Пусть в выводе есть формулы $\delta_j, \delta_k = \delta_j \to \delta_n, \delta_n$ (причем $\max(i, j) < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению,

$\delta_n = \neg\varphi$,
$\delta_j = \varphi \to \psi$
$\delta_i = \neg\psi$
общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\delta_i] = \text{И}$ и $[\delta_i \to \delta_n] = \text{И}$ иначе говоря $[\neg\varphi] = \text{И}$ и $[\neg\varphi \to \neg\psi] = \text{И}$.

Построим таблицу истинности для импликации:

$[\![\neg\phi]\!]$	$[\![\phi \to \psi]\!]$	$[\![\neg\psi]\!]$
Л	И	Л
Л	Л	И
И	И	Л
И	И	И

из таблицы видно что когда $[\neg\psi] = \text{И}$ и $[\varphi \to \psi]$, то $[\neg\varphi] = \text{И}$. Отсюда следует что Modus Tollens можно раскрыть через аксиомы и Modus Ponens.

```
int main() {
  int helloWo
}
```