1.

В КИВ: В КИВ общезначимость и доказуемость эквивалентны.

Пусть $\llbracket A \rrbracket = \text{Л}$. Оценим $\varphi \equiv (A \to A \to A) \to (A \to A) \to A$.

$\llbracket A \to A \to A \rrbracket = \text{И}$
$\llbracket (A \to A) \to A \rrbracket = \text{Л}$
$\llbracket A \to A \to A \to (A \to A) \to A \rrbracket = \text{Л}$

Формула $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \to \gamma)$ истинна при любых оценках (проверяется таблицей истинности).

В ИВВ:

Пусть $\llbracket A \rrbracket = \varnothing$. Оценим $\varphi \equiv (A \to A \to A) \to (A \to A) \to A$.

$\llbracket A \to A \to A \rrbracket = \{0, 1, 2\}$
$\llbracket (A \to A) \to A \rrbracket = \varnothing$
$\llbracket (A \to A \to A) \to (A \to A) \to A \rrbracket = \varnothing$ (ложь)

Тогда $\varphi$ недоказуемо.

Докажем $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \to \gamma)$.

В ИВВ тоже справедлива теорема о дедукции. Значит, необходимо доказать:

$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$, что эквивалентно $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha \vdash \beta \to \gamma$, что эквивалентно $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \gamma$. Тогда:

1. $((\alpha \to \beta) \to \gamma)$ (гипотеза)
2. $\alpha$ (гипотеза)
3. $\beta$ (гипотеза)
4. $\beta \to \alpha \to \beta$ (сх. аксиом 1)
5. $\alpha \to \beta$ (М. Р. 3, 4)
6. $\gamma$ (М. Р. 1, 5)

2. • Докажем: $\Gamma, \alpha \vDash \beta \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha \to \beta$
   - Таблица истинности: $\alpha \to \beta$.
   - Если $\alpha = 0 \Rightarrow$ импликация верна.
   - Если $\alpha = 1 \Rightarrow$ импликация зависит только от $\Gamma$ по предположению, что $\beta$ общезначима при $\Gamma, \alpha$
   - Пусть $\Gamma = \{\xi_1, \xi_2 ... \xi_n\}$
   - $(\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha) \Leftrightarrow (\vDash \xi_1 \to \xi_2 \to ... \to \xi_n \to \alpha \Rightarrow \vdash \xi_1 \to ... \to \xi_n \to \alpha)$

3. $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha$
   - В выводе встречаются: аксиомы, М.Р, гипотезы
   - Все аксиомы общезначимы
   - М.Р из общезначимых - общезначим
   - М.Р из гипотез общезначима если гипотеза верна
   - Или можно провернуть тот же трюк с дедукцией для общезначимости

4. $\alpha \to \alpha$ и $\alpha \to \beta$. Все коллизии имеют вид $\alpha \equiv \beta$. Докажем???

5. Докажем, что можно перестроить любое доказательство из $\neg$ в доказательство из $\perp$ и наоборот.

   - $\perp \to \neg:$
     $((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$
     $((\alpha \to A \& \neg A) \to A \& \neg A) \to \alpha$
     по общезначимости (Пусть $\varphi = ((\alpha \to 0) \to 0) \to \alpha$. Тогда $[\![\varphi]\!] = \text{И} \Rightarrow \vdash \varphi$ по т. о полноте)
   - $\neg \to \perp$
     - 9 схема : $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
       $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \perp) \to (\alpha \to \perp)$, схема 2 $\Rightarrow$ верно в аксиоматике $\perp$
     - 10 схема : $\neg\neg\alpha \to \alpha$
       $(\neg\alpha \to \perp) \to \alpha$
       $((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$, это и есть 9 схема из аксоматики $\perp$

   К каждой строке доказательства из $\neg$ применим трансляцию в $\perp$ (аналогично доказательствам из лекции по индукции по длине вывода)

   1. Если $\delta_i$ получена из схем аксиом 1-8, тогда ничего не изменилось, и строка $\delta_i$ валидная строка в доказательстве в $\perp$. Если это аксиома 9 или 10, тогда вставим их доказательство в аксиоматике $\perp$ (см. выше) перед $\delta_i$. Этот пункт так же доказывает базу индукции, так как первое утверждение не может быть получено по Modus Ponens.

   2. По индукционному предположению все формулы с $k < i$ были перестроены как $|\delta_k|_\perp$ и являются верными строками в доказательстве в $\perp$. Если $\delta_i$ получена из M. P. $\delta_k, d_j \equiv \delta_k \to \delta_i$, тогда $|\delta_i|_\perp$ будет также M. P. $|\delta_k|_\perp$, $|\delta_j|_\perp$ в $\perp$.

   В другую сторону аналогично.

   К каждой строке доказательства из $\perp$ применим трансляцию в $\neg$

   1. Если $\delta_i$ получена из схем аксиом 1-8, тогда ничего не изменилось, и строка $\delta_i$ валидная строка в доказательстве в $\perp$. Если это аксиома $9_\perp$, тогда вставим ее доказательство в аксиоматике $\neg$ (см. выше) перед $\delta_i$. Этот пункт так же доказывает базу индукции, так как первое утверждение не может быть получено по Modus Ponens.

   2. по индукционному предположению все формулы с $k < i$ были перестроены как $|\delta_k|_\neg$ и являются верными строками в доказательстве в $\neg$. если $\delta_i$ получена из M. P. $\delta_k, \delta_j \equiv \delta_k \to \delta_i$, тогда $|\delta_i|_\neg$ будет также M. P. $|\delta_k|_\neg$, $|\delta_j|_\neg$ в $\neg$.

6.

ОТСТОЙ:

- $\Omega$ – топология, пораждённая шарами : $\text{B}_r(x) = \{y \in R | \ \rho(x, y) < r\}$
- $\Omega_\text{B}$ – топология, пораждённая базой: $\ \text{B} = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$
- Докажем, что для каждого отрезка есть шар

- $$\forall x \in (a,b) : \begin{cases} x \in \left(a, a + \frac{b-a}{2}\right) \\ x \in \left(a + \frac{b-a}{2}\right) \\ x = \left(a + \frac{b-a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow (a,b) \subseteq \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

- $$\forall x \in \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right) : \begin{cases} x < a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < x < a + \frac{b-a}{2} < b \\ x > a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < a + \frac{b-a}{2} < x < b \\ x = a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < a + \frac{b-a}{2} = x < b \\ \end{cases} \Rightarrow \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \subseteq (a,b)$$

Альтернативное условие:

- $\Omega$ — топология, порожденная определением : $\forall a \in \Omega \exists R > 0 : V_{a(R)} \subset \mathbb{R}$
- $\Omega_{\mathrm{B}}$ — топология, порожденная базой: $\mathrm{B} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

1. $\Omega \subset \Omega_{\mathrm{B}}$

Пусть $V \in \Omega$. Тогда $\forall a \in V \exists R > 0 : V_{a(R)} \subset V$. Объединим все такие окрестности (для каждой точки возьмем любую окрестность).
Пусть $A = \cup_{a \in V} V_a, V_a \in \Omega_{\mathrm{B}}$
$A \subset \Omega_{\mathrm{B}}$. Покажем, что $A = V$, то есть $A$ порождается базой $B$.

Пусть $a \in A$. Тогда $\exists$ какая-то окрестность $V_a \subset V \Rightarrow a \in V$.
Пусть $a \in V$. Тогда а принадлежит какой-то окрестности $V_a \subset A \Rightarrow a \in A$

2. $\Omega_{\mathrm{B}} \subset \Omega$.

Пусть $V \in \Omega_{\mathrm{B}}$. Тогда $\forall a \in V \exists (x,y) \in B : a \in (x,y).(x,y) \subset V$, т. е. а внутренняя.

7. - Дискретная
     1. $X, \varnothing \in \mathcal{P}(X)$.
     2. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(X), A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ - тоже подмножество $X$.
     3. $\cup A_\alpha$ - тоже какое-то подмножество $X$.
   - Антидискретная
     1. $X, \varnothing \in \{X, \varnothing\}$.
     2. $X \cap \varnothing = \varnothing \in \{X, \varnothing\}$.
     3. $X \cup \varnothing = X \in \{X, \varnothing\}$.
   - Топология Зарисского $\mathcal{T} = \{X, \varnothing\} \cup \{V \mid V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), c\ V \text{ конечно}\}$
     1. $X, \varnothing \in \mathcal{P}(X)$
     2. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow c(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = cA_1 \cup cA_2 \cup ... \cup cA_n$ (Закон де Моргана). Объединение конечного числа конечных множеств конечно.
     3. $c(\cup A_\alpha) = \cap_\alpha cA_\alpha$ - не больше одного из множеств $cA_\alpha \Rightarrow$ конечно.

8. - (1) $\langle X, \Omega = \{X\} \rangle, \varnothing \not\in \Omega$
   - (2) $\langle X = \{0,1,2\}, \Omega = \{\varnothing, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\} \rangle$, пересечение = $\{0\} \not\in \Omega$
   - (3) $\langle X = \{0,1,2\}, \Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1,2\}\} \rangle$, $\{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \not\in \Omega$

9. Рассмотрим топологию $\mathbb{O} = \langle \mathbb{R}, \{\mathbb{R}, \varnothing, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \{1\}\} \rangle$, в ее корректности можно убедиться прямой проверкой.

$|\mathbb{O}|$ - четное(доказывается не сложно/очев).

у каждого одновременно открытого и замкнутого множества дополнение тоже одновременно открыто и замкнуто

Пусть $V : V \in \Omega$ и $cV \in \Omega$. Т. к. $V \neq cV$, либо $cV = X$ либо $cV = \varnothing$

10. • (b) Топология стрелки:

    Пусть в $B$ есть два луча $(x; +\infty)$, $(y; +\infty)$. Н.У.О. $y > x$. Тогда $(y; +\infty) \subset (x; +\infty)$. Тогда если в разложении $V \in \Omega$ есть $(x; +\infty)$, то туда можно добавить (если отсутствует) или убрать (если не принадлежит) $(y; +\infty)$, т. е. база не минимальна.

    (c) не знаю

11. • $\langle X = \mathbb{N}, \Omega = \{\varnothing, \mathbb{N}, \{2\}, \{4\}, ..., \{2n\}, \{2, 4\}, \{\text{любой набор из четных чисел}\}\}\rangle$
    • $\langle X = [-1; 1], \Omega = \{\varnothing, \{0\}\} \cup \{[-x, x] \mid x \in (0, 1]\}\rangle$

12. • $(X, \Omega) : \forall A \subset X : \exists A^\circ$

    Пусть $\exists I_1 \neq I_2 : I_1, I_2$ - внутренность A, $|I_1| = |I_2|, I_1 \neq I_2$. Пусть $I = I_1 \cup I_2$, но тогда $I \in \Omega$, $I \subset A$, $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$. Т. е. $I$ больше $I_1, I_2$ и открыто, следовательно, является еще большим открытым - внутренностью.

13. $(X, \Omega)$

    **a)**

$$A - \text{открыто} \Leftrightarrow \forall x \in A : \exists \varepsilon : U_\varepsilon(x) \subset A$$

- $\Rightarrow$

**(b)**

1. связь $A^{\bigcirc}$ и $B^{\bigcirc}$

пусть $A^{\bigcirc} \not\subseteq B^{\bigcirc}$, все внутренние точки A находятся в $A^{\bigcirc}$, но в то же время все внутренние точки A являются внутренними точками B (т.к $A \subseteq B$), тогда получается, что $B^{\bigcirc}$ не содержит все внутренние точки B, противоречие 13a

2. связь $\overline{A}$ и $\overline{B}$

рассмотрим граничные точки A

они являются либо граничными точками B, либо внутренними точками B (если любая окрестность пересекается с A и с дополнением B, то граничными (определение выполняется), если же с A и с B, то тогда существует окрестность, лежащая в B => точка внутренняя)

если $\overline{A} \not\subseteq \overline{B}$, то тогда $\overline{B}$ не содержит все граничные и внутренние точки B, противоречие

- Верно ли $(A \cap B)^{\bigcirc} = A^{\bigcirc} \cap B^{\bigcirc}$ ?
- Пусть $x \in A^{\bigcirc} \cap B^{\bigcirc}$
- (1) $x \in A^{\bigcirc}$
- (2) $x \in B^{\bigcirc}$
- (3) $A^{\bigcirc} \cap B^{\bigcirc} \in A \cap B$
- (4) (из предположения $+ (3))x \in A \cap B$
- (5) $((1) + (2) + (4)) \Rightarrow x \in (A \cap B)^{\bigcirc}$

- Верно ли $A^{\bigcirc} \cup B^{\bigcirc} = (A \cup B)^{\bigcirc}$
- Рассмотрим следующую конфигурацию:
- $C_1 \in A, C_2 \in B, C = C_1 \cup C_2$, и $C$ открыто, при этом $C_1, C_2$ не открыты
- Тогда $(A \cup B)^{\bigcirc} = A^{\bigcirc} \cup B^{\bigcirc} \cup C \neq A^{\bigcirc} \cup B^{\bigcirc}$, следовательно, неверно

14.

(a) В КИВ: ложь может быть, только если $[A] \coloneqq$ Л, тогда при любой оценке В $[A \to B] =$ И и $[(A \to B) \to A] =$ Л, тогда выражение исчисляется как Л $\to$ Л $=$ И

в остальных случаях импликация выдает истинность

следовательно, высказывание общезначимо

в ИИВ работаем в следующей топологии над множеством $\{0, 1\}$:

$$\{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$$

в ИИВ:
- $[\![A]\!] = \{0\}, [\![B]\!] = \varnothing$
- $\{0\} \to \varnothing : (\{1\} \cup \varnothing)^{\bigcirc} = \{1\}^{\bigcirc} = \varnothing$
- $\varnothing \to \{0\} : (\{0, 1\} \cup \{0\})^{\bigcirc} = \{0, 1\}$
- $\{0, 1\} \to \{0\} : (\varnothing \cup \{0\})^{\bigcirc} = \{0\}$
- $\{0\} \neq \{0, 1\} \Rightarrow$ формула опровергнута

(b) в КИВ: сх. 10 $[\alpha \coloneqq A]$

в ИИВ:

- $[\![A]\!] = \{0\}$
- $\neg\{0\} : \{1\}^{\bigcirc} = \varnothing$
- $\neg\varnothing : \{0, 1\}^{\bigcirc} = \{0, 1\}$
- $\{0, 1\} \to \{0\} : (\varnothing \cup \{0\})^{\bigcirc} = \{0\}$
- $\{0\} \neq \{0, 1\} \Rightarrow$ опровергнуто

(c) $(A \to B) \vee (B \to A)$

в КИВ: чтобы оценить в ложь, нам нужно, чтобы обе импликации оценивались в ложь, т.е $[B] \coloneqq$ Л, $[A] \coloneqq$ Л, но тогда [Л $\to$ Л] $=$ И и [И $\vee$ И] $=$ И

в остальных случаях хотя бы одна из импликаций оценивается в истину

следовательно, высказывание общезначимо

в ИИВ: работаем в следующей топологии над множеством $\{0, 1, 2\}$

$$\Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$$

тогда

- $[[A]] \coloneqq \{0\}, [[B]] \coloneqq \{1\}$
- $\{0\} \to \{1\} : (\{1, 2\} \cup \{1\})^{\bigcirc} = \{1, 2\}^{\bigcirc} = \{1\}$
- $\{1\} \to \{0\} : (\{0, 2\} \cup \{0\})^{\bigcirc} = \{0, 2\}^{\bigcirc} = \{0\}$

- $\{1\} \vee \{0\} : \{1\} \cup \{0\} = \{0, 1\}$
- $\{0, 1\} \neq \{0, 1, 2\} \Rightarrow$ опровергнуто

(d) $[\![A]\!] = \{0, 1\}, [\![B]\!] = \{0\}, [\![C]\!] = \varnothing$

в КИВ:

чтобы высказывание оценилось в ложь, нужно, чтобы обе импликации оценились в ложь, что возможно только при $[B] := 0, [C] := 0$, но тогда $[B \to C] = 0 \to 0 = 1$ и $[(A \to B) \vee (B \to C)] = [? \vee 1] = 1$

при любых других оценках хотя бы одна из импликаций оценивается в истину -> высказывание общезначимо

в ИИВ:

- $[\![A]\!] = \{0, 1\}, [\![B]\!] = \{0\}, [\![C]\!] = \varnothing$
- $[[A \to B]] : \{0, 1\} \to \{0\} = (\varnothing \cup \{0\})^{\circ} = \{0\}^{\circ} = \{0\}$
- $[[B \to C]] : \{0\} \to \varnothing = (\{1\} \cup \varnothing)^{\circ} = \{1\}^{\circ} = \varnothing$
- $[[(A \to B) \vee (B \to C)]] : \{0\} \vee \varnothing = (\{0\} \cup \varnothing) = \{0\}$
- $\{0\} \neq \{0, 1\} \Rightarrow$ высказывание оценивается в ложь, не общезначимо

15. $\exists \varphi(A, B) : \vdash A * B \to \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \to A * B$