2. **a**
    1. $|a| = \overline{0} \Rightarrow a = \varnothing$
        - $|a| = 0 \Rightarrow |\varnothing| = |a| \Rightarrow \exists f : a \to \varnothing$ и f — биекция
        - по определению функции $\forall x \in a. \exists y \in \varnothing : f(x) = y$
        - Если бы существовал $x \in a$, тогда существовал бы $y \in \varnothing$
    2. $a = \varnothing \Rightarrow |a| = |\varnothing| \Rightarrow |a| = \overline{0}$

    b
    - $$|a| \leq |b| \Rightarrow \exists f : a \to b \land f \text{ — иньекция}$$
    - $$\forall p : g \to a \in F(g, a) : f \circ p \in F(g, b)$$
    - $$l : F(g, a) \to F(g, b) : l(p) = f \circ p$$
    - $p_1 \neq p_2 \Rightarrow \exists x : p_1(x) \neq p_2(x) \Rightarrow f(p_1(x)) \neq f(p_2(x)) \Rightarrow l(p_1) \neq l(p_2)$
    - $$\text{Отсюда l - инъекция} \Rightarrow F(g, a) \leq F(g, b)$$

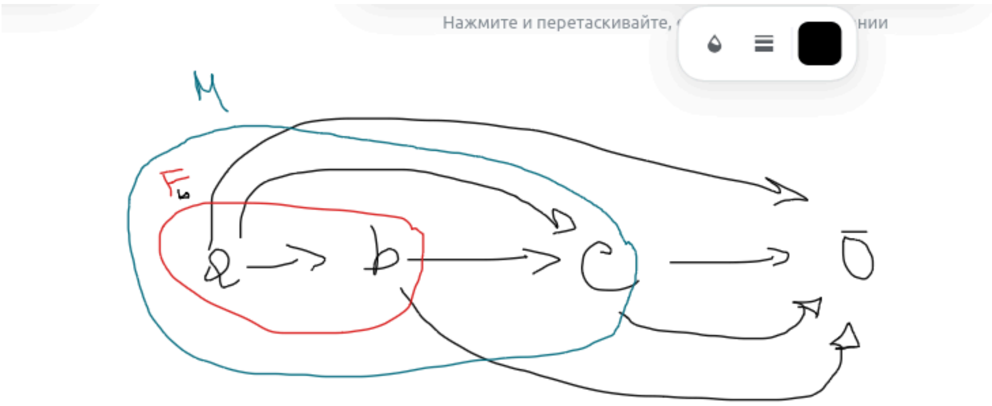
    c
    - $$|a| \leq |b| \Rightarrow \exists f : a \to b \land f \text{ — иньекция}$$
    - $f' : a \to \mathrm{Im}\ f \Rightarrow \exists f^{-1} : \mathrm{Im}\ f \to a.$
    - Для любого $p \in F(a, g)$ $l(p) : F(a, g) \to F(b, g)$ определяется следующим образом: если $b \in \mathrm{Im}\ f$, тогда $l(p)(b) = p(f^{-1}(b))$, иначе $l(p)(b) = g_0$, где g_0 – любое из g, $\overline{0} < |g|$.
    - l - инъекция: пусть $p_1 \neq p_2 \Rightarrow \exists a : p_1(a) \neq p_2(a)$, тогда $l(p_1)(f(a)) = p_1(f^{-1}(f(a)))$ и $l(p_1)(f(a)) \neq l(p_2)(f(a)) \Rightarrow l(p_1) \neq l(p_2)$.

    d
    - Функциональное отношение $R \subset \overline{0} \times a$ пусто, так как $\overline{0} \times a$ пусто. $F(\overline{0}, a) = \{\varnothing\}$, $\varnothing$ - функциональное отношение, так как выполняется $\forall x. x \in \overline{0} \to \exists! y. \langle x, y \rangle \in \varnothing$, тогда $F(\overline{0}, a) = \{\varnothing\} = \overline{1}$.
    - $f \in F(a, \overline{1})$ удовлетворяет условию $\forall x. x \in a \to \exists! y. \langle x, y \rangle \in R$, то есть $y \in \overline{1} = \{\varnothing\}$, тогда $y = \varnothing$, тогда $\forall x. x \in a \to \langle x, \varnothing \rangle \in R$, тогда R очевидно единственно и равно $\{\langle a_0, \overline{0} \rangle \mid a_0 \in a\}$. Тогда $F(a, \overline{1}) = \{\{\langle a_0, \overline{0} \rangle \mid a_0 \in a\}\}$, то есть $|F(a, \overline{1})| = \overline{1}$, так как есть биекция: $\varnothing \leftrightarrow R$.
    - Рассмотрим $\forall R \in F(a, \overline{0}), a \neq \varnothing$, тогда $\forall x. x \in a \to \exists! y : \langle x, y \rangle \in R$, но $y \in \varnothing$ и существует $x : x \in a \to \exists! y : \langle x, y \rangle \in R$ ложно. Тогда R - не функциональное отношение. Тогда $F(a, \overline{0}) = \varnothing \Rightarrow |F(a, \overline{0})| = \overline{0}$

4. $\forall y. \exists! x. \varphi(x, y) \equiv \forall y. (\exists x. \varphi(x, y)) \& \forall p. \forall q. \varphi(p, y) \& \varphi(q, y) \to p = q$

    Д-ть: $y. y \in b$

6. **a**



$$F_b = \{x \in L \mid b \leq x\}$$
$$M = \{x \in L \mid c \leq x\}$$

- F_b — решетка
- M_c — решетка
- $F_b \subseteq M_c \Rightarrow F_b$ — собственный подфильтр для M
- Где я неправ?

d

- Пусть F_0 - данный в начале фильтр.
- Пусть S множество всех фильтров, которые содержат F_0
- $\forall i : F_i \subseteq F_{i+1}$
- Возьмем произвольную цепь C на S.
- Утверждение:

$$\cup_{F_j \in C} F_j = F \text{ — фильтр}$$

  - 0 не принадлежит ни одному фильтру, значит не принадлежит и объединению.
  - $$a, b \in F \Rightarrow \exists i : a, b \in F_i \Rightarrow a \cdot b \in F_i \Rightarrow a \cdot b \in F$$
  - $$a \in F \Rightarrow a \in F_i \Rightarrow b \in F_i \Rightarrow b \in F$$
- Доказали, что каждая цепь имеет верхнюю грань, значит у S есть максимальный элемент (по лемме Цорна) - значит это ультрафильтр по определению.