РЕШЕНЫ: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14 (b, c, d, e)

1. а) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

   1) $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \gamma$ (дедукция)

   2) $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \beta \to \alpha \to \beta$ (сх. 1)

   3) $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$ (MP гипотеза, 2)

   4) $((\alpha \to \beta) \to \gamma), \alpha, \beta \vdash \gamma$ (MP 3, гипотеза)

   б) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to \gamma)$

   КИВ: при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ левая часть 1, правая 0; $1 \to 0$ = 0

   ИИВ: $\alpha = (0;1), \beta = (1;2), \gamma = (2;3)$

   $\alpha \to (\beta \to \gamma):$

   $\beta \to \gamma = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$

   $\alpha \to (\beta \to \gamma) = \mathbb{R}$

   $(\alpha \to \beta) \to \gamma:$

   $\alpha \to \beta = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

   $(\alpha \to \beta) \to \gamma = (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

2.
   - Докажем: $\Gamma, \alpha \vDash \beta \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha \to \beta$
   - Таблица истинности: $\alpha \to \beta$.
   - Если $\alpha = 0 \Rightarrow$ импликация верна.
   - Если $\alpha = 1 \Rightarrow$ импликация зависит только от Γ по предположению, что β общезначима при Γ, α
   - Пусть $\Gamma = \{\xi_1, \xi_2 ... \xi_n\}$
   - $(\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha) \Rightarrow (\vDash \xi_1 \to \xi_2 \to ... \to \xi_n \to \alpha \Rightarrow \vdash \xi_1 \to ... \to \xi_n \to \alpha)$

3. $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha$
   - В выводе встречаются: аксиомы, М.Р, гипотезы
   - Все аксиомы общезначимы
   - М.Р из общезначимых - общезначим
   - М.Р из гипотез общезначима если гипотеза верна
   - Или можно провернуть тот же трюк с дедукцией для общезначимости

4.

5. Докажем, что можно перестроить любое доказательство из $\neg$ в доказательство из $\perp$ и наоборот.

   - $\perp \to \neg:$
     $((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$
     $((\alpha \to A \& \neg A) \to A \& \neg A) \to \alpha$
     по общезначимости (Пусть $\varphi = ((\alpha \to 0) \to 0) \to \alpha$. Тогда $[\![\varphi]\!] =$ И $\Rightarrow \vdash \varphi$ по т. о полноте)

- $\neg \to \perp$
  - 9 схема : $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
    $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \perp) \to (\alpha \to \perp)$, схема 2 $\Rightarrow$ верно в аксиоматике $\perp$
  - 10 схема : $\neg\neg\alpha \to \alpha$
    $(\neg\alpha \to \perp) \to \alpha$
    $((\alpha \to \perp) \to \perp) \to \alpha$, это и есть 9 схема из аксоматики $\perp$

6. - Ω — топология, пораждённая шарами : $\mathrm{B}_r(x) = \{y \in R | \ \rho(x, y) < r\}$
   - Ω_{B} — топология, пораждённая базой: $\mathrm{B} = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$
   - Докажем, что для каждого отрезка есть шар
   - $$\forall x \in (a, b) : \begin{cases} x \in \left(a, a + \frac{b-a}{2}\right) \\ x \in \left(a + \frac{b-a}{2}\right) \\ x = \left(a + \frac{b-a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow (a, b) \subseteq \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$
   - $$\forall x \in \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right) : \begin{cases} x < a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < x < a + \frac{b-a}{2} < b \\ x > a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < a + \frac{b-a}{2} < x < b \\ x = a + \frac{b-a}{2} \Rightarrow a < a + \frac{b-a}{2} = x < b \\ \end{cases} \Rightarrow \mathrm{B}_{\frac{b-a}{2}}\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \subseteq (a, b)$$

Альтернативное условие:
- Ω — топология, порожденная определением : $\forall a \in \Omega \exists R > 0 : V_{a(R)} \subset \mathbb{R}$
- Ω_{B} — топология, порожденная базой: $\mathrm{B} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

7. - Дискретная
   - Антидискретная
     - Очев
     -

8. - (1) $\langle X, \Omega = \{X\}\rangle, \varnothing \not\in \Omega$
   - (2) $\langle X = \{0, 1, 2\}, \Omega = \{\varnothing, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}\rangle$, пересечение = $\{0\} \not\in \Omega$
   - (3) $\langle X = \{0, 1, 2\}, \Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1, 2\}\}\rangle$, $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \not\in \Omega$

9. Рассмотрим топологию $\mathbb{O} = \langle \mathbb{R}, \varnothing, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \{1\}\rangle$, в ее корректности можно убедиться прямой проверкой. $|\mathbb{O}|$ - четное(доказывается не сложно).

10. -

11. - $\langle X = \mathbb{N}, \Omega = \{\varnothing, \mathbb{N}, \{2\}, \{4\}, ..., \{2n\}, \{2, 4\}, \{\text{любой набор из четных чисел}\}\}\rangle$
    - $\langle X = [-1; 1], \Omega = \{\varnothing, \{0\}\} \cup \{[-x, x] \mid x \in (0, 1]\}\rangle$

12.

13.

14.
    a)
    -

    b) $\neg\neg A \to A$
    - КИВ очев (аксиома)
    - Если неправда, то есть опровержение на R
    - $A = (a, b) \Rightarrow \neg A = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

- $\neg\neg A = \left((\neg A)^C\right)^\circ = (a, b)$
- $\neg\neg A \to A = \left(A^C \cup A\right)^\circ) = R$

c) $(A \to B) \vee (B \to A)$

- КИВ по таблице истинности - да
- Если неправда, то есть опровержение на $\mathbb{R}$
- $A = (a, b),\ B = (c, d)$
- $(A \to B) = \left((a, b)^C \ \cup \ (c, d)\right)^\circ$
- $(B \to A) = \left((c, d)^C \ \cup \ (a, b)\right)^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = \left((a, b)^C \ \cup \ (c, d)\right)^\circ \ \cup \ \left((c, d)^C \ \cup \ (a, b)\right)^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = ((-\infty, a] \ \cup \ [b, +\infty) \ \cup \ (c, d))^\circ \ \cup$ $((-\infty, c] \ \cup \ [d, +\infty) \ \cup \ (a, b))^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = (-\infty, a) \ \cup \ (b, +\infty) \ \cup (c, d) \ \cup \ (-\infty, c) \ \cup \ (d, +\infty) \ \cup \ (a, b)$
- $c = 0,\ a = 0,\ b = 2,\ d = 2$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = (-\infty, 0) \ \cup \ (2, +\infty) \ \cup (0, 2) \ \cup \ (-\infty, 0) \ \cup \ (2, +\infty) \ \cup \ (0, 2)$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = (-\infty, 0) \ \cup \ (0, 2) \ \cup \ (2, +\infty)$
- $(A \to B) \vee (B \to A) = \mathbb{R} \setminus \{2, 0\}$
- $(A \to B) \vee (B \to A) \neq \mathbb{R}$

d) $(A \to B) \vee (B \to C)$

- КИВ - да по таблице истинности
- Если неправда, то есть опровержение на $\mathbb{R}$
- $A = (a, b),\ B = (c, d),\ C = (e, f)$
- $(A \to B) = \left((a, b)^C \ \cup \ (c, d)\right)^\circ$
- $(B \to C) = \left((c, d)^C \ \cup \ (e, f)\right)^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = \left((a, b)^C \ \cup \ (c, d)\right)^\circ \ \cup \ \left((c, d)^C \ \cup \ (e, f)\right)^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = ((-\infty, a] \ \cup [b, +\infty) \ \cup (c, d))^\circ \ \cup \ ((-\infty, c] \ \cup [d, +\infty) \ \cup (e, f))^\circ$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = (-\infty, a) \ \cup (b, +\infty) \ \cup (c, d) \ \cup (-\infty, c) \ \cup (d, +\infty) \ \cup (e, f)$
- $a = 0,\ c = 1,\ e = 2,\ f = 3,\ d = 4,\ b = 5$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = (-\infty, 0) \ \cup (5, +\infty) \ \cup (1, 4) \ \cup (-\infty, 1) \ \cup (4, +\infty) \ \cup (2, 3)$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = (-\infty, 1) \ \cup (1, 4) \ \cup (4, +\infty)$
- $(A \to B) \vee (B \to C) = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$
- $(A \to B) \vee (B \to C) \neq \mathbb{R}$

e) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$

- в КИВ: очев (таблица истинности)
- в ИИВ: $A = B = (0; 1)$

  $(B \vee \neg B) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

  $A \to (B \vee \neg B) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

  $\neg A \to (B \vee \neg B) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

  $(A \to (B \vee \neg B) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

f) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta), \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$

- в КИВ: просто законы де Моргана

g) $\neg\alpha \ \& \ \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta), \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \ \& \ \neg\beta$
- в КИВ: просто законы де Моргана

h) $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$
- в КИВ: очев