1.1. SƠ LƯỢC VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ

1.1.1. Mệnh đề

- Lôgích mệnh đề là một hệ thống lôgich đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các *mệnh đề* mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.
- Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái p, q, r … và gọi chúng là các *biến mệnh đề*.
- Nếu biến mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của p.
- *Mệnh đề phức hợp* được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgich mệnh đề.

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.1.2. Các phép liên kết lôgich mệnh đề

1. Phép phủ định (negation)

Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$ đọc là không p

Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng

2. Phép hội (conjunction)

Hội của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q)

Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng

3. Phép tuyển (disjunction)

Tuyển của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (p hoặc q)

Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

4. Phép kéo theo (implication)

Mệnh đề p kéo theo q, ký hiệu $p \Rightarrow q$, (đọc p kéo theo q, p suy ra q)

Mệnh đề p kéo theo q chỉ sai khi p đúng q sai

5. Phép tương đương (equivalence)

Mệnh đề p tương đương q, $p \Leftrightarrow q$, là mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại

- Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một *công thức mệnh đề.*
- Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị.*

MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

- Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 trong mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức.
- Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "≡" thay cho "⇔"

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

1.1.3. Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ *luật phủ định kép.*

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

3) $p \wedge q \equiv q \wedge p,\ \ p \vee q \equiv q \vee p$ *luật giao hoán*

4) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *luật kết hợp*

5) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *luật phân phối*

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng *luật bài trung*
$p \wedge \overline{p}$ luôn sai *luật mâu thuẫn*

7) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q};\ \ \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ *luật De Morgan*

1.2. TẬP HỢP

- Khái niệm tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6).
- Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau.
- Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lô gich hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lô gích này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

1.2.1. Khái niệm tập hợp

- Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết
- Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học
- Tập hợp được đặc trưng tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp

Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$

x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$

Có thể biểu diễn tập hợp theo hai cách sau

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Trường hợp tập hợp có hữu hạn phần tử hoặc các phần tử của tập hợp có thể liệt kê theo một quy luật dễ nhận biết thì ta có thể biểu diễn các phần tử trong dấu ngoặc nhọn

Ví dụ 1.1: *Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ *là* $\{-1, 1\}$

Tập hợp các số tự nhiên chẵn có thể biểu diễn dưới dạng:

$$P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

b) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta biểu diễn tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.2: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n=2m,\ m\in\mathbb{N}\}$.

Giản đồ Venn

Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là ***giản đồ Venn***

1.2.3. Một số tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}=\{0,\,1,\,2,\,...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}=\{0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}=\{p/q\,|\,q\neq 0,\ p,q\in\mathbb{Z}\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$ (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ).
- Tập các số phức $\mathbb{C}=\{z=x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R};\,i^2=-1\}$.

- Tập hợp có thể được biểu diễn bằng cách đặc trưng tính chất của phần tử thông qua khái niệm *hàm mệnh đề*
- Hàm mệnh đề xác định trong tập hợp D là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x\in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgich (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai)
- Tập hợp các phần tử $x\in D$ sao cho $S(x)$ đúng là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$ và ký hiệu $D_{S(x)}$ hoặc $\{x\in D\,|\,S(x)\}$

1.2.4. Tập con

- Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu $A\subset B$ hay $B\supset A$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

- Hai tập A,B bằng nhau, ký hiệu $A=B$ khi và chỉ khi $A\subset B$ và $B\subset A$

Để chứng minh $A\subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Rightarrow x\in B$

Để chứng minh $A=B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Leftrightarrow x\in B$

- ***Tập rỗng*** là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$
- Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$

Vậy $A \in \mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A \subset X$

Tập X là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất

$\varnothing$ là phần tử bé nhất trong $\mathscr{P}(X)$

Ví dụ 1.5: $X = \{a,b,c\}$

$$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, X\}$$

Nếu X có n phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử

1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp

1. Phép hợp

Hợp của hai tập A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A, B

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

2. Phép giao

Giao của hai tập A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập A, B

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

3. Hiệu của hai tập

Hiệu của hai tập A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

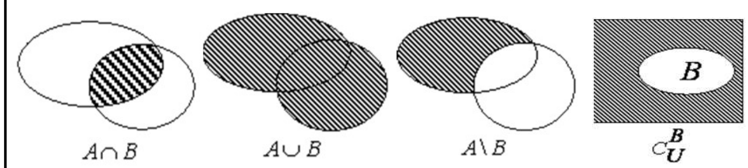
Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là *tập phổ dụng* U. Tập $U \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U và được ký hiệu là C_U^B hoặc $\overline{B}$

Ví dụ 1.5

Xét các tập $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,d,e,f\}$, $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\},\ A \cap B = \{b,d\},\ A \setminus B = \{a,c\}$$

$$C_U^A = \{e,f,g,h\},\ C_U^B = \{a,c,g,h\}$$



Phép hợp và giao các tập hợp được mở rộng cho n tập con $A_1, \dots, A_n$ như sau:

Hợp $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (hoặc ký hiệu $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$) là tập có các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập $A_1, \dots, A_n$.

Giao $A_1 \cap \dots \cap A_n$ (hoặc ký hiệu $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$) là tập có các phần tử thuộc đồng thời tất cả các tập $A_1, \dots, A_n$.

Ví dụ 1.6:

Chứng minh rằng nếu $A \cup C \subset A \cup B,\ A \cap C \subset A \cap B$ thì $C \subset B$

Tính chất

1. $A \cup B = B \cup A,\quad A \cap B = B \cap A$ *tính giao hoán*
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *tính kết hợp*
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *tính phân bố*
4. $\overline{\overline{A}} = A;\ A \cup \varnothing = A;\ A \cap U = A$
5. $A \cup \overline{A} = U;\ A \cap \overline{A} = \varnothing$

Tính chất

6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *luật De Morgan*
7. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$
8. $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ *tính lũy đẳng*
9. $A \cap B \subset A \subset A \cup B;\ A \cap B \subset B \subset A \cup B.$
10. $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subset C;\ \begin{cases} D \subset A \\ D \subset B \end{cases} \Rightarrow D \subset A \cap B.$

1.2.7 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập D có miền đúng $D_{S(x)} = \{x \in D | S(x)\}$

a) Mệnh đề $\forall x \in D, S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D$, $S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∀(đọc là với mọi) được gọi là ***lượng từ phổ biến***

Khi D đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x, S(x)$ hay $(\forall x), S(x)$

b) Mệnh đề $\exists x \in D, S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D$, $S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∃(đọc là tồn tại) được gọi là ***lượng từ tồn tại***

Mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists !\, x \in D,\ S(x)$

(đọc là tồn tại duy nhất $x \in D$, $S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử

Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\exists x \in D,\ \overline{S(x)}\right)$$

$$\overline{\exists x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\forall x \in D,\ \overline{S(x)}\right)$$

Ví dụ 1.7

Theo định nghĩa của giới hạn

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0;\forall x:\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Sử dụng mệnh đề hằng đúng $(p\Rightarrow q)\equiv(\bar{p}\vee q)$

ta có $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ tương đương với

$$\overline{\left(|x-a|<\delta\right)}\vee\left(|f(x)-L|<\varepsilon\right)$$

Vậy phủ định của $\lim_{x\to a} f(x)=L$ là

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0;\exists x:\ \left(0<|x-a|<\delta\right)\wedge\left(|f(x)-L|\geq\varepsilon\right)$$

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.2.7. Phép hợp và giao suy rộng

$\bigcup_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó

$\bigcap_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc mọi tập A_i

$$x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \left(\exists i_0\in I;\ x\in A_{i_0}\right)$$

$$x\in\bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \left(\forall i\in I;\ x\in A_i\right)$$

Ví dụ 1.8

$$A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\leq x\leq n/(n+1)\right\}\ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=[0;1)$$

$$B_n=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1/(n+1)\leq x<1+1/(n+1)\right\}\ \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=[0;1]$$

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.3. Tích Descartes của các tập hợp

Tích Descartes của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X\times Y$, gồm các phần tử có dạng (x,y) trong đó $x\in X$ và $y\in Y$

$$X\times Y=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\in X\ \text{ và }\ y\in Y\right\}$$

Ví dụ 1.9 $X=\{a,b,c\},\quad Y=\{1,2\}$

$$X\times Y=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$$

$$Y\times X=\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$$

Ta có thể chứng minh được rằng nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X\times Y$ có $n\cdot m$ phần tử

Tích Descartes của n tập hợp $X_1, X_2,\dots, X_n$

$$X_1\times X_2\times\dots\times X_n=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\middle|\,x_i\in X_i,\ i=1,2,\dots,n\right\}$$

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

Nhận xét 1.1

1. Với mọi $(x_1,\dots,x_n)\in X_1\times\dots\times X_n;\ (x'_1,\dots,x'_n)\in X_1\times\dots\times X_n$

   ta có $(x_1,\dots,x_n)=(x'_1,\dots,x'_n)\Leftrightarrow x_i=x'_i, \forall i=1,\dots,n$

2. Tích Descartes $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i\in I} X_i$

3. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán

4. Khi $X_1=\dots=X_n=X$ ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X\times\dots\times X}_{n\ \text{lần}}$

Chẳng hạn $\mathbb{R}^n=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\middle|\,x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$

$$\mathbb{R}^2=\left\{(x,y)\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}\qquad \mathbb{R}^3=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$(x,y)=(1,-3)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}$$