1 dfgfg

2 dđfg

CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.1. Tích phân phụ thuộc tham số

2.1.1. Tích phân xác định

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ thỏa mãn $f(x,y)$ khả tích theo biến x trên $[a,b]$ với mỗi $y\in[c,d]$. Khi đó, hàm số

$$g(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

được gọi là *hàm tích phân phụ thuộc vào tham số y*. Hàm số $g(y)$ xác định trên $[c,d]$ và có các tính chất sau:

Định lý 2.1. *(Tính chất liên tục) Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, thì hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.*

Chứng minh. Với mọi $y_0\in(c,d), \Delta_y\in(c,d)$ sao cho $y=y_0+\Delta_y\in(c,d)$. Từ giả thiết $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ suy ra $f(x,y)$ liên tục đều trên miền đó. Theo định nghĩa của hàm liên tục đều, với mọi $\epsilon>0$ tồn tại $\delta>0$, với mọi Δ_y thỏa mãn $|\Delta_y|<\delta$, ta có

$$|f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall x\in[a,b].$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
|g(y)-g(y_0)| &= |g(y_0+\Delta_y)-g(y_0)| \\
&= \left|\int\limits_a^b [f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)]dx\right| \\
&\le \int\limits_a^b |f(x,y_0+\Delta_y)-f(x,y_0)|dx \\
&< \int\limits_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa, hàm $g(y)$ liên tục tại y_0. Vậy, hàm số $g(y)$ liên tục trên (c,d). Ta dễ dàng chứng minh được rằng $g(y)$ cũng liên tục phải tại c và liên tục trái tại d. □

Kết quả trên có thể được tổng quát hơn bởi định lý dưới đây.

Chú ý 2.2. *Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, các hàm số $\alpha(y),\beta(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và*

$$a\le\alpha(y)\le b, a\le\beta(y)\le b\ \ \forall y\in[c,d]$$

thì hàm số

$$g(y):=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

liên tục trên đoạn $[c,d]$.

Ví dụ 2.3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$g(y):=\int\limits_0^1 \frac{y^2f(x)}{x^2+y^2}dx$$

liên tục trên $(0,+\infty)$.

Bài giải: Giả sử $y_0>0$, tồn tại số c,d sao cho $0<c<y_0<d<+\infty$. Ký hiệu $D:=[0,1]\times[c,d]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$, nên hàm dưới dấu tích phân $\frac{y^2f(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên D. Theo định lý 2.1, hàm $g(y)$ liên tục trên $[c,d]$, nên hàm $g(y)$ liên tục tại y_0. Vậy $g(y)$ liên tục trên khoảng $(0,+\infty)$.

Định lý 2.4. *(Tính chất khả vi) Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục theo biến x trên $[a,b]$ với mỗi $y\in[c,d]$ và đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D=[a,b]\times[c,d]$. Khi đó*

$$g(y):=\int\limits_a^b f(x,y)dx\Rightarrow g'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật D, suy ra $f'_y(x,y)$ liên tục đều trên miền D. Khi đó, với mọi $\epsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ (số δ chỉ phụ thuộc vào ϵ) sao cho

$$|\Delta_y|<\delta,(x,y+\Delta_y)\in D\Rightarrow|f'_y(x,y+\Delta_y)-f'_y(x,y)|<\frac{\epsilon}{b-a}\ \ \forall x\in[a,b],y\in[c,d].$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(y+\Delta_y)-g(y)}{\Delta_y}-\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| &= \left|\int\limits_a^b \frac{f(x,y+\Delta_y)-f(x,y)}{\Delta_y}dx-\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx\right| \\
&\leq \int\limits_a^b \left|\frac{f(x,y+\Delta_y)-f(x,y)}{\Delta_y}-f'_y(x,y)\right|dx \\
&= \int\limits_a^b |f'_y(x,y+\theta\Delta_y)-f'_y(x,y)|dx \\
&< \int\limits_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

với $\theta \in (0,1)$. Do đó

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{g(y+\Delta_y)-g(y)}{\Delta_y}=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$$

hay

$$g'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

□

Định lý 2.4 được tổng quát bởi kết quả dưới đây.

Chú ý 2.5. *Nếu hàm $f(x,y)$ có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D=[a,b]\times[c,d]$, các hàm số $\alpha(y),\beta(y)$ khả vi trên $[c,d]$ và*

$$a\leq\alpha(y)\leq b, a\leq\beta(y)\leq b \ \ \forall y\in[c,d]$$

thì hàm số

$$g(y):=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

khả vi trên đoạn $[c,d]$ và

$$g'(y):=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+f(\beta(y),y).\beta'(y)-f(\alpha(y),y).\alpha'(y).$$

Ví dụ 2.6. Tìm đạo hàm của hàm số

$$g(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(y^2-\sin^2x)dx \ \ (y>1).$$

Bài giải: Hàm số $f(x,y) = \ln(y^2 - \sin^2 x)$ liên tục trên miền $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times (1, +\infty)$ và có đạo hàm riêng

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{y^2 - \sin^2 x}, \quad y > 1$$

liên tục trên miền D. Khi đó theo định lý 2.4, hàm $g(y)$ khả vi trên $(1, +\infty)$ và

$$g'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y}{y^2 - \sin^2 x} dx = 2y \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(y^2 - 1) + \cos^2 x}.$$

Đổi biến $t = \tan x$, ta có

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{y^2 + (y^2 - 1)t^2} \\ &= \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}} arctan \frac{\sqrt{y^2 - 1}t}{y} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2y\sqrt{y^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Định lý 2.7. *(Tích phân) Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$. Khi đó*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \Rightarrow \int\limits_c^d g(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

(Chứng minh của định lý này được trình bày ở phần tích phân kép).

Ví dụ 2.8. Cho $0 < a < b$, hãy tính tích phân sau:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Bài giải: Thay

$$x^b - x^a = \ln x \int\limits_a^b x^y dy$$

vào tích phân I, ta có

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b x^y dy \right) dx.$$

Theo định lý 2.7, ta có

$$I = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^1 x^y dx \right) dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

2.1.2. Tích phân suy rộng

Cho hàm 2 biến $f(x,y)$ xác định trên $D = [a, +\infty] \times [c, d]$. Khi đó, hàm số

$$g(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

được gọi là *tích phân suy rộng phụ thuộc vào tham số* y.

• Hàm số $g(y)$ được gọi là *hội tụ* với mỗi $y \in [c,d]$, nếu

$$\forall \epsilon_y > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon_y) > 0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \epsilon_y.$$

• Hàm số $g(y)$ được gọi là *hội tụ đều* trên đoạn $[c,d]$, nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \epsilon \quad \forall y \in [c,d].$$

Định lý dưới đây cho ta điều kiện đủ về điều kiện hội tụ đều của hàm $g(y)$.

Định lý 2.9. *(Dấu hiệu Weierstrass) Nếu hàm* $\int\limits_a^{+\infty} h(x)dx$ *hội tụ và*

$$|f(x,y)| \leq h(x) \quad \forall (x,y) \in D$$

thì hàm số $g(y)$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$.

Chứng minh. Theo tích chất của tích phân suy rộng, ta có

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| \leq \int\limits_b^{+\infty} |f(x,y)|dx \leq \int\limits_b^{+\infty} h(x)dx.$$

Vì $\int\limits_b^{+\infty} h(x)dx$ hội tụ, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} h(x)dx \right| < \epsilon.$$

Do vậy

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \epsilon.$$

□

Ví dụ 2.10. Chứng minh rằng hàm số

$$g(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(y+x)}{2+3x^2+y^2} dx$$

hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Bài giải: Ta có

$$\left|\frac{\sin(x+y)}{2+3x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2+3x^2}.$$

Mặt khác $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2+3x^2} dx$ hội tụ. Theo định lý 2.9, hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Tính chất liên tục của hàm số $g(y)$ được khẳng định bởi định lý dưới đây.

Định lý 2.11. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền D và hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên đoạn $[c,d]$, thì $g(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.*

Chứng minh. Do $g(y)$ hội tụ đều trên $[c,d]$, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\epsilon}{3} \ \ \forall y \in [c,d]. \tag{2.1}$$

Theo Định lý 2.1, với $b > a$ hàm số $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ liên tục trên $[c,d]$ hay với $y \in [c,d]$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall \Delta_y : \ y + \Delta_y \in [c,d], \ |\Delta_y| < \delta \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x, y+\Delta_y)dx - \int\limits_a^b f(x,y)dx\right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.2}$$

Từ (2.1) và (2.2), suy ra

$$\begin{aligned}
|g(y+\Delta_y) - g(y)| &= \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right| \\
&= \left|\int\limits_a^b [f(x,y+\Delta_y) - f(x,y)]dx - \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx\right| \\
&\leq \left|\int\limits_a^b [f(x,y+\Delta_y) - f(x,y)]dx\right| + \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y+\Delta_y)dx\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa, hàm số $g(y)$ liên tục trên $[c,d]$. □

Ví dụ 2.12. Chứng minh rằng hàm số

$$g(y) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^y}$$

liên tục trên $(2, +\infty)$.

Bài giải: Ta lấy $y_0 > 2$, tồn tại số thực a sao cho $y_0 > a > 2$. Khi đó, với mọi $x \geq 1, y > a$, ta có

$$\frac{x}{2 + x^y} \leq \frac{x}{2 + x^a}.$$

Mặt khác

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2 + x^a} : \frac{1}{x^{a-1}}\right) = 1 \quad (\text{vì } a - 1 > 1)$$

và tích phân suy rộng $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-1}}$ hội tụ, theo dấu hiệu so sánh ta suy ra tích phân $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^y}$ hội tụ. Do vậy, theo Định lý 2.9 ta có $g(y)$ hội tụ đều trên $(2, +\infty)$.

Hơn nữa hàm dưới dấu tích phân $\frac{x}{2+x^y}$ liên tục trên miền $[1, +\infty) \times [a, +\infty)$. Theo Định lý 2.11, hàm số $g(y)$ liên tục tại y_0. Do đó, $g(y)$ liên tục trên $(2, +\infty)$.

Định lý 2.13. *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D và hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên đoạn $[c, d]$, thì*

$$\int\limits_{c}^{d} g(y)dy = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_{a}^{+\infty} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy \right) dx.$$

Chứng minh. Do hàm số $g(y)$ hội tụ đều trên $[c, d]$, nên

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall b > n_0 \Rightarrow |\int\limits_{b}^{+\infty} f(x, y)dx| < \epsilon \quad \forall y \in [c, d].$$

Khi đó, theo định lý 2.7 ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx-\int_c^d g(y)dy\right| &= \left|\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy-\int_c^d g(y)dy\right| \\
&= \left|\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx-g(y)\right]dy\right| \\
&= \left|\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy\right| \\
&= \left|\int_c^d\left[\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy\right| \\
&\le \int_c^d\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|dy \\
&\le \frac{\epsilon}{d-c}.(d-c)=\epsilon.
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa của giới hạn, ta có

$$\int_c^d g(y)dy=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx.$$

□

Ví dụ 2.14. Cho $b>a>0$, tính tích phân sau:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$$

Bài giải: Ta nhận thấy

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-yx}dy.$$

Do vậy, ta có thể viết

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-yx}dy\right)dx.$$

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$g(y)=\int_0^{+\infty} e^{-yx}dx \quad \text{với} \quad y\in[a,b].$$

Ta có $e^{-yx} \le e^{-ax} \ \ \forall y \in [a,b], x \in [0,+\infty]$ và $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$ $(a > 0)$ hội tụ. Theo định lý 2.9, tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx$ hội tụ đều trên $[a,b]$. Hơn nữa, hàm dưới dấu tích phân e^{-yx} liên tục trên miền $[0,+\infty) \times [a,b]$ cho nên theo Định lý 2.13, ta có thể viết

$$I = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx \right) dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}.$$

Định lý 2.15. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền D thỏa mãn các giả thiết sau:*

- *$f(x,y)$ liên tục theo biến x trên $[a,+\infty)$ với mỗi $y \in [c,d]$,*
- *$f'_y(x,y)$ liên tục trên miền D,*
- *$g(y)$ hội tụ với mỗi $y \in [c,d]$,*
- *$\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều trên đoạn $[c,d]$.*

Khi đó

$$g(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \Rightarrow g'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \ \ y \in [c,d].$$

Chứng minh. Theo giả thiết hàm số $f'_y(x,y)$ thỏa mãn các giả thiết của định lý 2.13, nên

$$\begin{aligned} \int\limits_c^y (\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx)dy &= \int\limits_a^{+\infty} (\int\limits_c^y f'_y(x,y)dy)dx \\ &= \int\limits_a^{+\infty} [f(x,y)_-f(x,c)]dx \\ &= \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - K, \end{aligned}$$

trong đó $K = \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx$ (const) vì $g(c)$ hội tụ. Lấy đạo hàm 2 vế của đẳng thức trên, ta có

$$\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = (\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx)'$$

hay

$$g'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \ \ y \in [c,d].$$

□

Ví dụ 2.16. Tìm đạo hàm của hàm số

$$g(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{[1-\cos(xy)]dx}{xe^{2x}} \quad \text{với} \ \ y \in (0,+\infty).$$

Từ đó tính $g(y)$.

Bài giải: Đặt hàm số

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xe^{2x}}.$$

Khi đó,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(xy)}{xe^{2x}} = 0.$$

Ta xác định thêm giá trị của hàm $f(x,y)$ tại điểm $x=0$, bằng cách đặt $f(0,y)=0$. Khi đó, $f(x,y)$ liên tục trên $D=[0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Hơn nữa

$$f'_y(x,y) = e^{-2x}.\sin xy, \quad |f'_y(x,y)| \le e^{-2x} \quad \forall (x,y)\in D.$$

Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} e^{-2x}dx$ hội tụ, nên theo định lý 2.9, tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}.\sin xydx$$

hội tụ đều trên miền $[0,+\infty)$. Khi đó, theo định lý 2.15, ta có

$$g'(y) = \int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin xydx = \frac{y}{4+y^2}.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta có

$$g(y) = \frac{1}{2}\ln(4+y^2)+C.$$

Thay $y=0$ vào $g(y)$, ta nhận được

$$C = -\ln 2.$$

Vậy

$$g(y) = \frac{1}{2}\ln(4+y^2)-\ln 2.$$

2.2. Tích phân kép

2.2.1. Định nghĩa

Cho hàm hai biến số $z=f(x,y)$ xác định trên miền đóng bị chặn $D\subset\mathbb{R}^2$.

• Chia miền D tùy ý (ký hiệu P) thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ có các diện tích tương ứng là $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n$.

• Chọn một điểm tùy ý $(x_i,y_i)\in D_i \ \ \forall i=1,2,...,n$.

Khi đó, tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta D_i$$

được gọi là *tổng tích phân* của hàm $f(x,y)$ trên miền D. Ta định nghĩa *đường kính* của tập hợp D_i được xác định bởi

$$diam(D_i) = \sup\{AB : \ A \in D_i, B \in D_i\}.$$

Ký hiệu

$$\Delta_P = \max\{diam(D_1), diam(D_2), ..., diam(D_n)\}.$$

Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép chia P và phép chọn điểm (x_i, y_i) thì I được gọi là *tích phân kép* của hàm $f(x,y)$ trên miền D và được ký hiệu là

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

D được gọi là miền lấy tích phân. Nếu tích phân trên tồn tại, ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ khả tích trên miền D. Người ta chứng minh được rằng, nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền D đóng và chị chặn thì hàm $f(x,y)$ khả tích trên miền D.

2.2.2. Điều kiện khả tích.

Đặt

$$m_i = \inf\{f(x,y) : \ (x,y) \in D_i\}, \ \ M_i = \sup\{f(x,y) : \ (x,y) \in D_i\}.$$

Khi đó

$$m_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta D_i$$

được gọi là *tổng Darboux dưới* của hàm $f(x,y)$ ứng với phép phân hoạch P.

$$M_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta D_i$$

được gọi là *tổng Darboux trên* của hàm $f(x,y)$ ứng với phép phân hoạch P.

Định lý 2.17. *Hàm số $f(x,y)$ khả tích trên miền D khi và chỉ khi*

$$\lim_{\Delta_P \to 0} (M_P - m_P) = 0.$$

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử $f(x,y)$ khả tích trên miền D. Hay tồn tại

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P,$$

tức là

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall P : \ |\Delta_P| < \delta \Rightarrow |\sigma_P - I| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Mặt khác, từ định nghĩa của $\inf$ và $\sup$, tồn tại phân hoạch P sao cho

$$\sigma_P - \frac{\epsilon}{4} < m_P \text{ và } M_P < \sigma_P + \frac{\epsilon}{4}.$$

Khi đó

$$I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_P - \frac{\epsilon}{4} < m_P \leq M_P < \sigma_P + \frac{\epsilon}{4} < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Do vậy

$$|m_P - I| < \frac{\epsilon}{2} \text{ và } |M_P - I| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |M_P - m_P| = |M_P - I + I - m_P| \leq |M_P - I| + |I - m_P| < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Cho $\lim\limits_{\Delta_P \to 0}(M_P - m_P) = 0$. Đặt

$$I_* = \sup\{m_P : \ P\},\ I^* = \inf\{M_P : \ P\}.$$

Khi đó, từ

$$m_P \leq I_* \leq I^* \leq M_P \ \ \forall P$$

suy ra $I^* = I_*$, đặt $I_* = I$. Theo định nghĩa,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P : |P| < \delta \Rightarrow I - \epsilon = I_* - \epsilon < m_P \leq \sigma_P \leq M_P < I^* + \epsilon = I + \epsilon.$$

Do đó

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P : |\Delta_P| < \delta \Rightarrow |\sigma_P - I| < \epsilon$$

hay $\lim\limits_{\Delta_P} \sigma_P = I$. □

Hệ quả 2.18. *Cho $D \subseteq \mathbb{R}^2$ là một tập compact. Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền D, thì f sẽ khả tích trên miền D.*

2.2.3. Các tính chất.

Tích phân kép cũng có tính chất tương tự như tích phân xác định với các giả thiết là các tích phân dưới đây đều tồn tại.

- Nếu $f(x,y) = 1$, thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ là diện tích của miền D.
- $\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$
- $\iint\limits_D [f(x,y) - g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy - \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$
- $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với $k = const$.
- Nếu D chia thành 2 mảnh nhỏ D_1, D_2 sao cho $int(D_1 \cap D_2) = \emptyset$, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy.$$

• Nếu $f(x,y) \leq g(x,y) \ \ \forall (x,y) \in D$, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

• *(Định lý giá trị trung bình)* Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền D đóng và bị chặn có diện tích $dt(D) \in (0,+\infty)$, thì tồn tại điểm $(x^0,y^0) \in D$ sao cho

$$f(x^0,y^0) = \frac{1}{dt(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

2.2.4. Định lý Fubini.

Trong mục này, ta sẽ trình bày phương pháp tính tích phân kép, trước hết ta xét miền D là một hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$.

Định lý 2.19. *Cho hàm số $f(x,y)$ khả tích trên D. Khi đó*

i) Nếu hàm số $f(x,y)$ khả tích trên $[c,d]$ với mỗi $x \in [a,b]$, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

ii) Nếu hàm số $f(x,y)$ khả tích trên $[a,b]$ với mỗi $y \in [c,d]$, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Chứng minh. i) Ta chia miền D bởi phép chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_m = d.$$

Đặt

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j, D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \ \forall i = 1,2,...,n-1, j = 1,2,...,m-1,$$

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y): \ (x,y) \in D_{ij}\}, M_{ij} = \sup\{f(x,y): \ (x,y) \in D_{ij}\}.$$

Ta có

$$m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij} \ \ \forall (x,y) \in D_{ij}.$$

Lấy $x = \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, ta có

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \ \ \forall y \in [y_j, y_{j+1}]$$

và

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j \quad \forall j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j \quad \forall i = 0, 1, ..., n-1.$$

Nhân các vế với Δx_i và cộng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y)dy \right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Ta đặt

$$\Delta_x = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}, \Delta_y = \{\Delta y_0, \Delta y_1, ..., \Delta y_{m-1}\}, \Delta_P = \max\{\Delta_x, \Delta_y\}.$$

Khi đó,

$$\lim_{\Delta_P} m_P \leq \lim_{\Delta_x} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y)dy \right) \leq \lim_{\Delta_P} M_P.$$

Vì $f(x, y)$ khả tích trên D, nên theo Định lý 2.17, ta có

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy \right) dx.$$

ii) Được chứng minh tương tự. □

Chú ý 2.20. *Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D, thì f(x,y) liên tục trên $[a, b]$ với mỗi $y \in [c, d]$ và trên $[c, d]$ với mỗi $x \in [a, b]$. Khi đó, theo Định lý 2.19, ta có*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} f(x, y)dx \right) dy.$$

Như vậy Định lý 2.7 được chứng minh.

Ví dụ 2.21. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_{D} x^2 y dxdy,$$

trong đó $D = [0, 1] \times [0, 2]$.

Bài giải: Theo Định lý 2.19, ta có

$$I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Hệ quả 2.22. *Giả sử miền*

$$D = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

bị chặn và các hàm số $\phi(x), \varphi(x)$ khả tích trên $[a, b]$, $\phi(x) \leq \varphi(x) \ \ \forall x \in [a, b]$, hàm số $f(x, y)$ khả tích trên D và khả tích trên $[\phi(x), \varphi(x)]$ với mỗi $y \in [c, d]$. Khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Chứng minh. Giả thiết cho $\phi(x), \varphi(x)$ bị chặn trên $[a, b]$, nên tồn tại c, d sao cho $c \leq \phi(x) \leq \varphi(x) \ \ \forall x \in [a, b]$. Khi đó, ta đặt $E = [a, b] \times [c, d]$ và

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in E \setminus D. \end{cases}$$

Rõ ràng $F(x, y)$ khả tích trên E. Theo định lý 2.19, ta có

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E F(x, y) dx dy = \int_a^b (\int_c^d F(x, y) dy) dx.$$

Nhưng với mỗi $x \in [a, b]$, ta có

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } y \in [\phi(x), \varphi(x)], \\ 0 & \text{nếu } y \notin [\phi(x), \varphi(x)]. \end{cases}$$

Do vậy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b (\int_c^{\phi(x)} F(x, y) dy) dx + \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} F(x, y) dy) dx + \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{d} F(x, y) dy) dx.$$

$$= \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} F(x, y) dy) dx = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy) dx.$$

□

Ví dụ 2.23. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ D \text{ được giới hạn bởi các đường } \ x = 2, y = x, xy = 1.$$

Bài giải: Dễ nhận thấy rằng miền D được viết dưới dạng:

$$D = \{(x, y) :\ 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}.$$

Theo Hệ quả 2.22, ta có

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int\limits_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

Hệ quả 2.24. *Giả sử miền*

$$D = \{(x, y) :\ c \le y \le d, \phi(y) \le x \le \varphi(y)\}$$

bị chặn và các hàm số $\phi(y), \varphi(y)$ khả tích trên $[c, d]$, $\phi(y) \le \varphi(y)\ \ \forall y \in [c, d]$, hàm số $f(x, y)$ khả tích trên D và khả tích trên $[\phi(y), \varphi(y)]$ với mỗi $x \in [a, b]$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\phi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Chứng minh tương tự như Hệ quả 2.22.

Ví dụ 2.25. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y} dy}{4 - y} \right) dx.$$

Bài giải: Nếu tính tích phân $\int\limits_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y} dy}{4-y}$, thì việc tính này rất khó. Tích phân I thỏa mãn các giả thiết của các Hệ quả 2.22 và 2.24. Do đó, ta dùng cách tính thông qua việc *đổi thứ tự* của tích phân. ta có

$$D = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2\}$$

có thể được viết lại dưới dạng

$$D = \{(x, y) :\ 0 \le y \le 4, 0 \le x \le \sqrt{4 - y}\}.$$

Khi đó

$$I = \iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4 - y} dxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y} dx}{4 - y} \right) dy = \int\limits_0^4 \frac{e^{2y}}{4 - y} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2} e^{2y} dy = \frac{e^8}{4}.$$

2.2.5. Công thức đổi biến.

Xét tích phân kép

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

với hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền D. Giả sử phép đổi biến

$$(x,y) \to (u,v): \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

thỏa mãn các giả thiết:

i) Phép đổi biến trên là một song ánh từ D' vào miền D hay $(x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in D'$.

ii) Các hàm số $x(u,v)$ và $y(u,v)$ liên tục trên miền D' của hệ trục tọa độ $(O'uv)$.

iii) Định thức Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D'.$$

Khi đó

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv. \tag{2.3}$$

Chứng minh. Thực hiện phép phân hoạch P' miền D' gồm các đường thẳng song song với các trục $O'u$ và $O'v$ thành các mảnh nhỏ $D'_1, D'_2, ..., D'_n$ với độ dài phân hoạch $\Delta_{P'}$, chọn điểm tùy ý $(u_i, v_i) \in D'_i \;\; \forall i = 1, 2, ..., n$. Qua song ánh, phân hoạch P' thành phân hoạch P của miền D với độ dài phân hoạch Δ_P và điểm (u_i, v_i) thành điểm $(x_i, y_i) \in D_i$. Khi đó, theo định nghĩa ta có

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) S_{D_i},$$

trong đó S_{D_i} là diện tích của miền D_i.

Bây giờ, ta xét mối quan hệ giữa S_{D_i} và diện tích của miền $S_{D'_i}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng D'_i được tạo bởi hình chữ nhật có 4 đỉnh $(a,b), (a+\Delta_u, b), (a+\Delta_u, b+\Delta_v), (a, b+\Delta_v)$. Qua song ánh, miền D_i có 4 đỉnh tương ứng $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)$ hay

$$\begin{cases} x_1 = x(a,b) \\ y_1 = y(a,b) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x(a+\Delta_u, b) \\ y_2 = y(a+\Delta_u, b) \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = x(a+\Delta_u, b+\Delta_v) \\ y_3 = y(a+\Delta_u, b+\Delta_v) \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = x(a, b+\Delta_v) \\ y_4 = y(a, b+\Delta_v). \end{cases}$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x(a,b) & y_1 &= y(a,b)\\
x_2 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\Delta_u & y_2 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\Delta_u\\
x_3 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial u}(a,b)\Delta_u + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\Delta_v & y_3 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial u}(a,b)\Delta_u + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\Delta_v\\
x_4 &\approx x(a,b) + \frac{\partial x}{\partial v}(a,b)\Delta_v & y_4 &= \approx y(a,b) + \frac{\partial y}{\partial v}(a,b)\Delta_v.
\end{aligned}
$$

Khi đó,

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &\approx x_3 - x_4 \qquad x_4 - x_1 \approx x_3 - x_2\\
y_2 - y_1 &\approx y_3 - y_4 \qquad y_4 - y_1 \approx y_3 - y_2.
\end{aligned}
$$

Diện tích của D_i được tính xấp xỉ bởi trị tuyệt đối của

$$
\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a,b) \end{vmatrix} \Delta_u\Delta_v = J\Delta_u\Delta_v.
$$

Như vậy $S_{D_i} = |J|S_{D_i'}$. Thay S_{D_i} vào tích phân I, ta nhận được

$$
I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)S_{D_i} = \lim_{\Delta_{P'} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\big(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)\big)|J|S_{D_i'} = \iint\limits_{D'} f(u,v)|J|dudv.
$$

□

Ví dụ 2.26. Tính tích phân

$$
I = \iint\limits_{D} xydxdy,
$$

trong đó miền D được giới hạn bởi các đường cong

$$
y = x,\ y = 2x,\ y^2 = x,\ y^2 = 3x.
$$

Bài giải: Dễ thấy rằng, miền D có thể được viết được dưới dạng:

$$
D = \{(x,y):\ 0 < x \le y \le 2x,\ x \le y^2 \le 3x\},
$$

hay

$$
D = \{(x,y):\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ 1 \le \frac{y^2}{x} \le 3\}.
$$

Khi đó, đặt

$$
\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{u}{v^2} \\ y = \frac{u}{v}. \end{cases}
$$

Ta có các hàm số $x(u,v), y(u,v)$ thỏa mãn các giả thiết của công thức (2.3) với $D' = [1,3] \times [1,2]$ và $|J| = |\frac{u}{v^4}|$.

$$I = \int_1^3 (\int_1^2 \frac{u^3 dv}{v^7}) du = \frac{105}{32}.$$

2.2.6. Công thức đổi biến trong tọa độ cực.

Trong mục này, ta xét một trường hợp đặc biệt của phương pháp đổi biến

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Định thức J được xác định bởi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r.$$

Ta biến đổi

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow (r,\varphi) \in D'.$$

Khi đó, ta có

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi. \tag{2.4}$$

Ví dụ 2.27. Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

trong đó $D = \{(x,y): \ x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Bài giải: Chuyển sang hệ trục toạ độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \geq 0 \\ \sin\varphi \geq 0 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Theo công thức (2.4), ta có

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}) d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{d(r^2+1)}{2\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

2.2.7. Ứng dụng của tích phân kép.

• *Tính thể tích.*

Thể tích của vật thể hình trụ tạo bởi mặt $z = f(x, y) \geq 0 \;\; \forall (x, y) \in D$, liên tục trên miền D và các đường sinh song song với Oz được tính bởi công thức

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \tag{2.5}$$

Ví dụ 2.28. Tính thể tích của hình tạo bởi các mặt:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x^2, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Bài giải: Theo giả thiết, ta xác định

$$D = \{(x, y) : \; y = x^2, y = 1\}, \;\; f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Theo công thức (2.5), ta có

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)dx$$

$$= \int\limits_0^1 2(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^2\sqrt{y})dy = \frac{88}{105}.$$

• *Tính diện tích hình phẳng.*

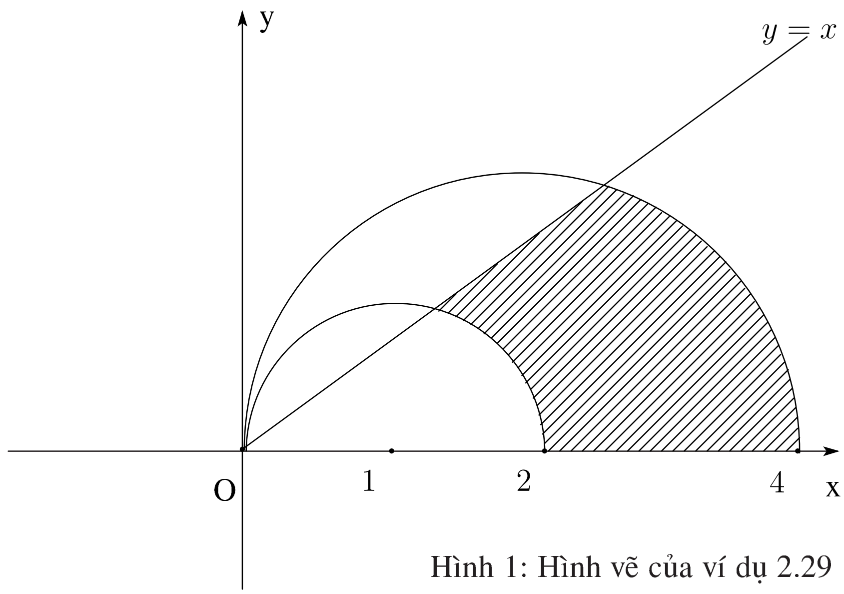
Từ định nghĩa của tích phân, ta dễ nhận thấy rằng diện tích miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được xác định bởi công thức

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \tag{2.6}$$

Ví dụ 2.29. Tính diện tích của miền D tạo bởi các đường cong:

$$(D) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ y = x, \\ y = 0. \end{cases}$$

.



Hình 1: Hình vẽ của ví dụ 2.29

Bài giải: Chuyển sang hệ trục tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Dễ nhận thấy rằng $(x, y) \in D$ khi và chỉ khi

$$(r, \varphi) \in \{(r, \varphi) : \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi\}.$$

Khi đó, theo công thức đổi biến trong hệ tọa độ cực, ta có

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{3(\pi+2)}{4}.$$

• *Tính diện tích mặt cong.*

Như cách xây dựng định nghĩa của tích phân kép trên miền D, diện tích của mặt cong (S) được tính như sau

Định lý 2.30. *Cho mặt cong $(S): \ z = f(x, y) \ \ (x, y) \in D$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại và liên lục trên miền D. Khi đó,*

$$dt(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy.$$

Ví dụ 2.31. Cho $a > 0$, tính diện tích của mặt cong

$$az = xy$$

trên miền $D = \{(x, y): \ x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bài giải: Đặt $f(x, y) = \frac{xy}{a}$. Khi đó $f'_x(x, y) = \frac{y}{a}, \ f'_y(x, y) = \frac{x}{a}$. Theo định lý 2.30, diện tích mặt (S) được tính như sau:

$$dt(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2} dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2} dxdy.$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_0 = \{(r, \varphi): \ 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$dt(S) = \frac{1}{a} \iint\limits_{D_0} \sqrt{a^2 + r^2} r dr d\varphi = \frac{1}{a} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{a} \int\limits_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{a} \int\limits_0^a (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 + r^2) = \frac{3\pi}{2a} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{3a^2\pi(2\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

• Ý *nghĩa cơ học của tích phân kép.*

Cho bản mặt không đồng chất D trong mặt phẳng (Oxy) có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ là một hàm số liên tục trên miền D. Khi đó

+) Khối lượng của bản mặt D được xác định bởi

$$m_D = \iint\limits_D \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Ox là

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Oy là

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục gốc tọa độ O là

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy.$$

+) Tọa độ trọng tâm $G(x_g, y_G)$ được xác định bởi:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy,$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Ví dụ 2.32. Cho bản mặt

$$D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

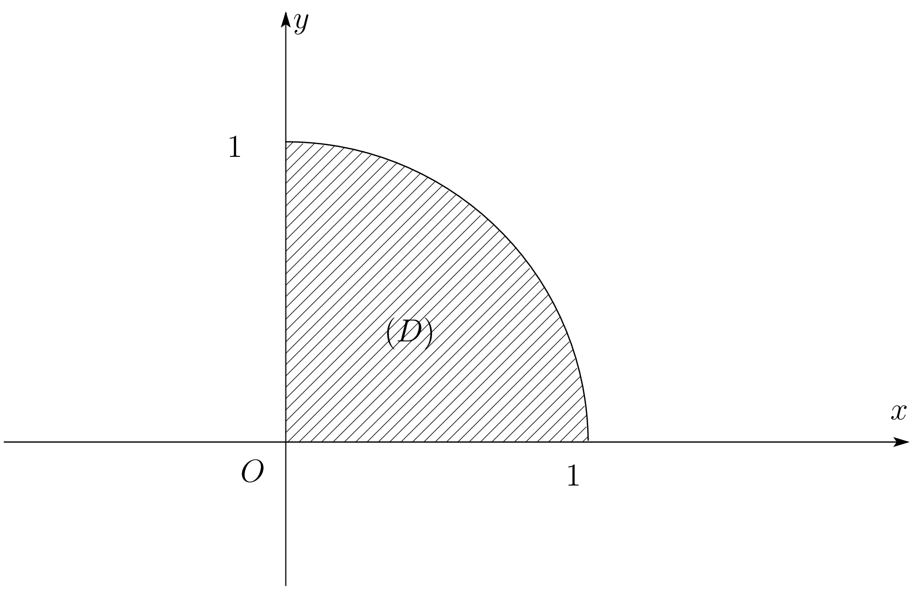
có khối lượng riêng $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Tính

i) Khối lượng riêng m_D.

ii) Tọa độ trọng tâm của D.

iii) Mômen quán tính của D đối với các trục Ox, Oy và điểm O.

Bài giải: i) Khối lượng của bản mặt D được xác định bởi công thức



Hình 2: Hình vẽ của ví dụ 2.32

$$m_D = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_0 = \{(r, \varphi) :\ 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$m_D = \iint\limits_{D_0} r^2 dr d\varphi = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

ii) Theo công thức tọa độ trọng tâm $G(x_g, y_G)$ được xác định bởi:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x, y) dx dy = \frac{6}{\pi} \iint\limits_D x\sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Bằng cách đổi sang hệ tọa độ cực như i), ta có

$$x_G = \frac{6}{\pi} \iint\limits_{D_0} r^3 \cos\varphi dr d\varphi = \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{3}{2\pi} \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}.$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint\limits_D y\rho(x, y) dx dy = \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = -\frac{3}{2\pi} \cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}.$$

Như vậy, tọa độ trọng tâm của bản mặt D là $G(\frac{3}{2\pi}, \frac{3}{2\pi})$.

iii) Bằng cách áp dụng các công thức tính I_x, I_y, I_O và sử dụng công thức đổi sang hệ trục tọa độ cực, ta có

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Ox là

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dx dy = \iint\limits_D y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint\limits_{D_0} r^4 \sin^2\varphi dr d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{10} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{10}(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{20}.$$

Bằng cách tính tương tự, ta có

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục Oy là

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dx dy = \frac{\pi}{20}.$$

+) Mômen quán tính của bản mặt D đối với trục gốc tọa độ O là

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \frac{\pi}{10}.$$

2.3. Tích phân bội ba.

2.3.1. Định nghĩa.

Cho hàm 3 biến số $f(x,y,z)$ xác định trên miền khối $D \subseteq \mathbb{R}^3$ đóng và bị chặn.

+ Phân hoạch P khối D thành các khối nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$. Ký hiệu Δ_{D_i} là thể tích của khối D_i $i = 1, 2, ..., n$ và $diamD_i$ là đường kính của khối D_i theo nghĩa

$$diamD_i = \sup\{||u - v|| : \ u, v \in D_i\}.$$

Khi đó độ dài phân hoạch được xác định bởi

$$\Delta_P = \max\{diamD_1, diamD_2, ..., diamD_n\}.$$

+ Chọn một điểm bất kỳ $M_i(x_i, y_i, z_i) \in D_i$ $\ i = 1, 2..., n$.

Khi đó, tổng

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_{D_i}$$

được gọi là *tổng tích phân bội 3* của hàm $f(x,y,z)$ trên khối D. Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phân hoạch P và phép chọn điểm M_i, thì I được gọi là tích phân bội 3 của hàm số $f(x,y,z)$ trên miền khối D và được ký hiệu bởi

$$I = \iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz.$$

Chú ý 2.33. Nếu hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên miền D đóng và bị chặn trên $Oxyz$, thì tồn tại I (hay ta còn nói hàm $f(x,y,z)$ *khả tích* trên D).

2.3.2. Công thức tính.

Nếu miền D được cho bởi:

$$D = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in D_0, \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\}$$

Khi đó

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_0} dxdy \int\limits_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.7}$$

Trong trường hợp đặc biệt: Nếu miền D được cho bởi

$$D = \{(x,y,z) : \ a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

ta có

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

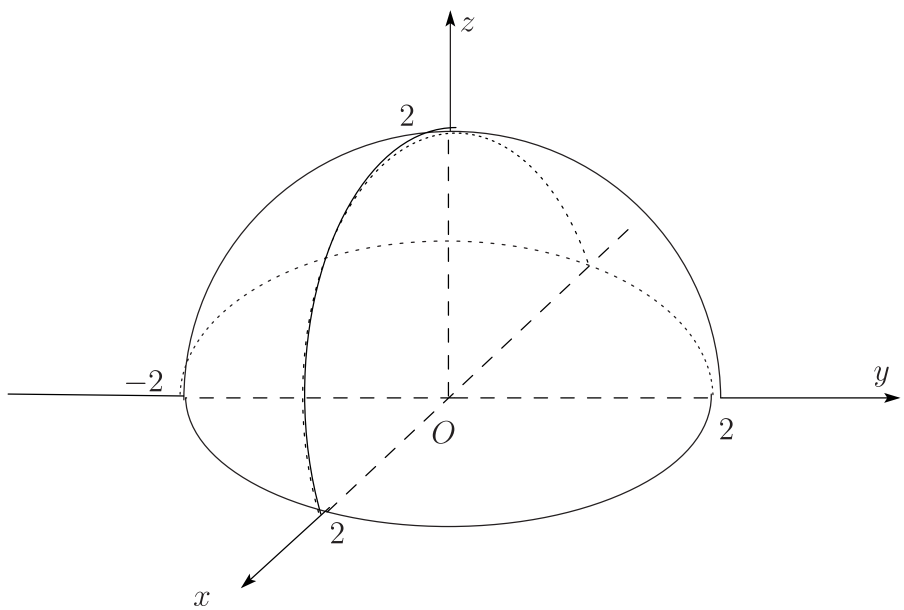
Các công thức tương tự, khi giao hoán vị trí của x, y, z.

Ví dụ 2.34. Tính

$$I = \iiint\limits_D (2z^3 + z)dxdydz,$$

trong đó $D = \{(x, y, z) : \ 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.

Bài giải: Đặt D_0 là hình chiếu của D trên Oxy. Khi đó



Hình 3: Hình vẽ của ví dụ 2.34

$$D_0 = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Theo công thức (2.7), ta có

$$I = \iint\limits_{D_0} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (2z^3 + z)dz = \iint\limits_{D_0} (\frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^2)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D_0} \big((4 - x^2 - y^2)^2 + 4 - x^2 - y^2\big)dxdy$$

Đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Khi đó

$$(x, y) \in D_0 \Leftrightarrow (r, \varphi) \in D_1 = \{(r, \varphi) : \ 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Theo công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực, ta có

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} \left((4-r^2)^2 + 4 - r^2\right) r dr d\varphi = \pi \int\limits_0^2 (r^5 - 9r^3 + 20r) dr$$

$$= \pi\left(\frac{1}{6}r^6 - \frac{9}{4}r^4 + 10r^2\right)\Big|_0^2 = \frac{44\pi}{3}.$$

2.3.3. Phương pháp đổi biến.

Vấn đề đặt ra là: Nếu ta đổi biến từ $(x, y, z) \to (u, v, w)$ bởi công thức

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

thì tích phân bội 3

$$I = \iiint\limits_D f(x, y, z) dx dy dz$$

được thay đổi như thế nào? Sự thay đổi của I được khẳng định bởi định lý dưới đây.

Định lý 2.35. *Nếu các hàm số x, y, z theo các ẩn (u, v, w) thỏa mãn các điều kiện:*

i) Tồn tại một song ánh $G : (u, v, w) \in D_0 \mapsto (x, y, z) \in D$.

ii) Các hàm số x, y, z liên tục trên tập mở chứa D_0.

iii) Định thức Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w. \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall (u, v, w) \in D_0.$$

Khi đó

$$I = \iiint\limits_{D_0} f(x, y, z) |J| du dv dw,$$

trong đó $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$.

Chú ý 2.36. Trong trường hợp đổi biến đặc biệt $(u, v, w) \equiv (r, \varphi, z)$ và

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$

(còn gọi là công thức đổi biến từ hệ tọa độ đề các vuông góc sang *hệ tọa độ trụ*). Khi đó, ta dễ dàng tính được $J = r$. Do vậy, ta có công thức

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint\limits_{D_0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Ví dụ 2.37. Cho miền khối

$$D = \{(x, y, z) : \ 4 \geq z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (3x^2 + 3y^2 + 2z^2) dxdydz.$$

Bài giải: Dùng công thức đổi biến sang hệ tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Ta có

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (r, \varphi, z) \in \{(r, \varphi, z) : \ 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq z \leq 4\}.$$

Do vậy

$$I = \int\limits_0^2 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^4 (3r^2 + 2z^2) r dz = 2\pi \int\limits_0^2 dr \int\limits_r^4 (3r^2 + 2z^2) r dz$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 (3r^3 z + \frac{2}{3} r z^3)\Big|_r^4 dr = 2\pi \int\limits_0^2 (-\frac{11}{3} r^4 + 6r^3 + \frac{16r}{3}) dr = \frac{336\pi}{15}.$$

Chú ý 2.38. Trong trường hợp đổi biến đặc biệt $(u, v, w) \equiv (r, \varphi, \theta)$ và

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

(còn gọi là công thức đổi biến từ hệ tọa độ đề các vuông góc sang *hệ tọa độ cầu*). Khi đó, ta dễ dàng tính được $J = -r^2 \sin\varphi$. Do vậy, ta có công thức

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{D_0} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 |\sin\varphi| dr d\varphi d\theta.$$

Ví dụ 2.39. Cho miền khối

$$D = \{(x, y, z) : \ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2 + 2z^2) dxdydz.$$

Bài giải: Dùng công thức đổi biến sang hệ tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (r,\varphi,\theta) \in \{(r,\varphi,\theta):\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{2} (r^2\sin^2\varphi + 2r^2\cos^2\varphi) r^2 |\sin\varphi| dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2} r^4(1+\cos^2\varphi)|\sin\varphi| dr \\ &= \frac{64\pi}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{5} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (5\sin\varphi + \sin 3\varphi) d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{5}(-5\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{256\pi}{15}. \end{aligned}$$

Bài tập chương 2

Bài 2.1. Cho hai hàm eliptic đầy đủ

$$E(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,\ \ F(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}} \ \text{ với } x \in (0,1).$$

1) Tính các đạo hàm $E'(x), F'(x)$.

2) Biểu diễn $E'(x), F'(x)$ qua $E(x)$ và $F(x)$.

3) Chứng minh rằng:

$$E''(x) + \frac{1}{x}E'(x) + \frac{1}{1-x^2}E(x) = 0.$$

4) Chứng minh rằng:

$$\int\limits_0^x tF(t)dt = E(x) - (1-x^2)F(x).$$

5) Chứng minh rằng:

$$\int\limits_0^x tE(t)dt = \frac{1}{3}(1+x^2)E(x) - (1-x^2)F(x).$$

Bài 2.2. Đổi thứ tự của tích phân sau:

1) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

2) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx.$

3) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx.$

4) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{2} f(x,y)dy.$

5) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$

6) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$

7) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$

8) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy.$

Bài 2.3. Dùng phương pháp dưới dấu tích phân để tính

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$$

Bài 2.4. Tính các tích phân kép

$I_1 = \iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, trong đó D là tam giác nối các đỉnh $O, A(10,1), B(1,1)$.

$I_2 = \iint\limits_D |x + 2y|dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ -1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1\}$.

$I_3 = \iint\limits_D x\sqrt{4 - y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$.

$I_4 = \iint\limits_D x\sqrt{|y + x^2|}dxdy$, trong đó $D = [0,2] \times [-4,0]$.

$I_5 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2 + y^2,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

$I_6 = \iint\limits_D e^{x^2+2y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

$I_7 = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + xy + y^2}dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) :\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

$I_8 = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường cong $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

$I_9 = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, với D giới hạn bởi đường cong $x^2 + y^2 = 2x$.

$I_{10} = \iint\limits_D \sqrt{2y - x^2 - y^2}dxdy$, với D là miền giới hạn bởi đường cong $x^2 + y^2 = 2y$.

Bài 2.5. Dùng tích phân kép, tính diện tích các miền phẳng giới hạn bởi:

1) $xy = 2,\ xy = 4,\ y = x,\ y = 4x.$

2) $xy = 2,\ xy = 6,\ y^2 = 2x,\ y^2 = 4x.$

3) $x + y = 2,\ x + y = 4,\ y = x,\ y = 3x.$

4) $y^2 = x, y^2 = 2x, x^2 = 2y, x^2 = 4y.$

5) Hoa hồng 4 cánh $r = a\sin 2\varphi$ với $a > 0$.

6) $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi$.

7) $y^2 = x^3, y^2 = (6-x)^3$.

8) Một nhịp xicloit $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Bài 2.6. Dùng tích phân kép, tính thể tích vật thể được giới hạn bởi:

1) $3x + y = 6,\ 3x + 2y = 12,\ x + y + z = 6,\ y = 0,\ z = 0$.

2) $z = y^2,\ z = 0,\ x = 0, x = 1, y = 1, y = -1$.

3) $z = x,\ z = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$.

4) $z = x + y,\ z = x^2 + y^2$.

5) $z = x^2 + y^2,\ z^2 = xy$.

6) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$.

7) $z^2 = x^2 + y^2,\ 2z = x^2 + y^2 + z^2$.

8) $2x = y^2 + z^2,\ (y^2 + z^2)^2 = 4(y^2 - z^2), x = 0$.

9) $\frac{x}{3} + (\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4})^2 = 1,\ x = 0$.

10) $z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x^2 \le y \le 1$.

Bài 2.7. Dùng tích phân kép, tính diện tích của bề mặt:

1) Phần mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nằm giữa các mặt phẳng tọa độ.

2) Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

3) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 2x$.

4) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5) $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 \le 4$.

6) Mặt parapoloid $y^2 + z^2 = 4x$ nằm giữa mặt trụ $y^2 = x$ và mặt phẳng $x = 3$.

7) Mặt trụ $z = \sqrt{4x}$ với $(x, y) \in \{(x, y) :\ x \ge 0, y^2 \le 4x, x \le 1\}$.

Bài 2.8. Tính tọa độ trọng tâm, mômen quán tính đối với trục Ox, Oy, điểm O của bản mặt đồng chất giới hạn bởi các đường cong:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, y \ge 0, x \ge 0$.

2) $y = 2x^2,\ y = 2$.

3) $y = x^2 - 2x + 1,\ y = -x + 3,\ y = 0$.

4) $y = x^2,\ x = y^2$.

5) Tứ giác với các đỉnh $(4, 4),\ (5, 7),\ (10, 10), (12, 4)$.

Bài 2.9. Tính các tích phân bội 3

1) $\iiint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdydz$ với $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le z \le 9\}$.

2) $\iiint\limits_D \cos(\pi\sqrt{x^2 + y^2}) dxdydz$ với $D = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le z^2 \le 4\}$.

3) $\iiint\limits_D z^2 dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2+z^2 \le 4z\}$.

4) $\iiint\limits_D (x+y+z)^2 dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2,\ x^2+y^2 \le 2az\}$.

5) $\iiint\limits_D xyzdxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2\}$.

6) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le x\}$.

7) $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ với $D = \{(x,y,z):\ 3(x^2+y^2)+z^2 \le 3a^2\}$.

Hướng dẫn giải bài tập chương 2

Bài 2.1.

1) $E'_x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2\sin^2\varphi)'_x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} d\varphi = -\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$.

2) $E'_x = F(x) - xE(x)$.

4) $\int_0^x tF(t)dt - \int_0^x t\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-t^2\sin^2\varphi}}$.

Bài 2.2. 1) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

2) $\int_0^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x,y)dy$.

3) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

4) $\int_0^2 dy \int_{-1\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx$.

5) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

6) $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)dx$.

7) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$.

8) $\int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$.

Bài 2.3. $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

Bài 2.4.

$I_1 = 6$.

$I_2 = 11$.

$I_3 = 3\pi$.

$I_4 = \frac{104}{15}$.

$I_5 = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$I_6 = \pi(e-1)$.

$I_7 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

$I_8 = 8\pi - \frac{32}{9}$.

$I_9 = \frac{8\pi}{3} + \frac{32}{9}$.

$I_{10} = \pi$.

Bài 2.5.

$1) 2(\arctan 4 - \frac{\pi}{4})$.

$2) \frac{4}{3} \ln 2$.

$3) 4$.

$4) \frac{2}{5}$.

$5) \frac{\pi a^2}{2}$.

$6) \frac{3\pi}{4}$.

$7) 2(18\sqrt{3} - 135)$.

$8) 3\pi$.

Bài 2.8.

1) $I_{Ox} = \frac{ab^3}{16}$, $I_{Oy} = \frac{a^3 b}{16}$, $I_O = \frac{(a^2+b^2)ab}{16}$.

2) $I_{Ox} = \frac{16}{3}$, $I_{Oy} = 0$.