GIỚI THIỆU VỀ CHƯƠNG I

BÀI 1: TẬP SỐ THỰC VÀ SỐ PHỨC

BÀI 2: GiỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

BÀI 1: TẬP SỐ THỰC VÀ SỐ PHỨC

I.Tập số thực

1. Các khái niệm số thực

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,.....\}$$ - tập các số tự nhiên

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3.....\}$$ - tập các số tự nhiên dương

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,...\}$$ - tập các số tự nhiên

Chú ý:
$$\mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3...\} \equiv \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{Z}_-^* = \{-1,-2,-3...\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{mod}(m,n)=1\}$$ - tập hữu tỷ

Bài toán: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 1.Tính độ dài 2 đường chéo

Sự cần thiết ra đời của số thực

Tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ tạo thành tập hợp số thực. Kí hiệu tập số thực là $\mathbb{R}$.

Vậy tập số vô tỉ là $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

II. SỐ PHỨC

1. Dạng tổng quát của số phức

$z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực

$\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$

$\bar{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp với số phức $z = x + iy$

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2;\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Tập hợp tất cả các số phức ký hiệu $\mathbb{C}$

2. Các phép toán

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$

Phép cộng

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Phép trừ

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Phép nhân

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Phép chia $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2};\ \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ví dụ 1: $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

Ví dụ 2:

$$(3-2i)(1+3i) = 3+6+i(-2+9) = 9+7i$$

$$\frac{-5+5i}{4-3i} = \frac{-5(1-i)(4+3i)}{16+9} = \frac{-5((4+3)+i(-4+3))}{25} = \frac{-7}{5} + \frac{i}{5}$$

$$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

Ví dụ 3: Đồng nhất phần thực, phần ảo của phương trình

$$5(x+y)(1+i) - (x+2i)(3+i) = 3-11i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5y+2=3 \\ 4x+5y-6=-11 \end{cases} \Rightarrow x=-3,\ y=\frac{7}{5}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z + iw = 1 \\ 2z + w = 1 + i \end{cases}$

Nhân i vào phương trình thứ nhất, cộng vào phương trình thứ hai ta được

$$(2+i)z = 1+2i \Rightarrow z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{5} = \frac{4+3i}{5}$$

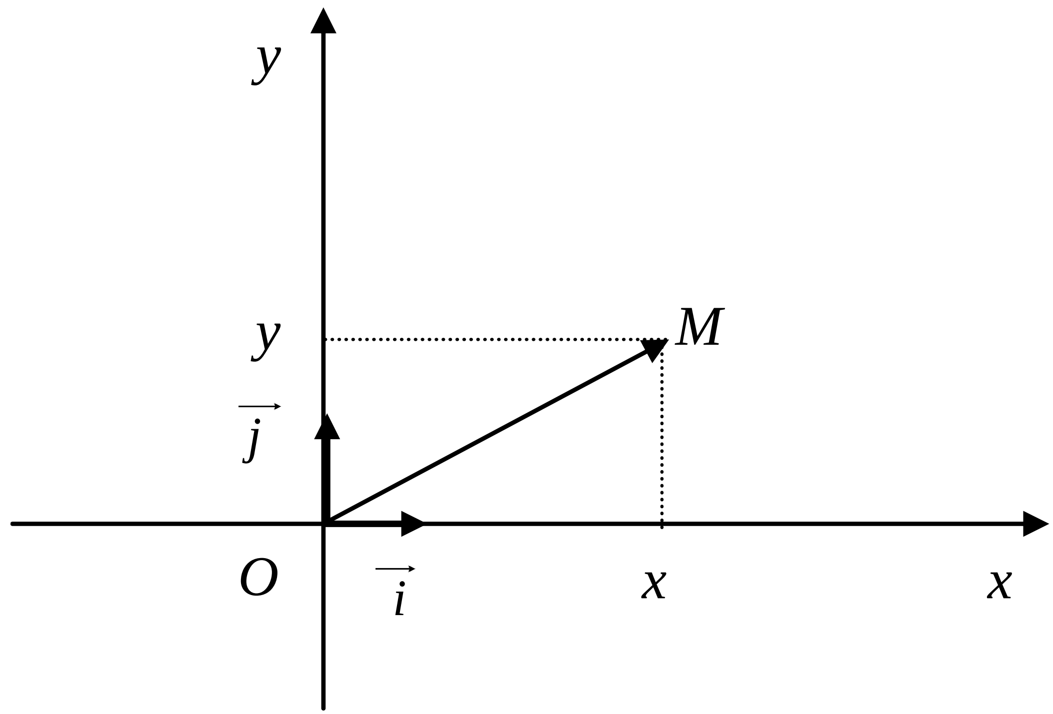
$$\Rightarrow w = i(z-1) = i\left(\frac{-1+3i}{5}\right) = -\frac{3+i}{5}$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 - (2i)^2 = (z+1-2i)(z+1+2i)$$

$$\Rightarrow z_1 = -1 + 2i \,,\ z_2 = -1 - 2i$$

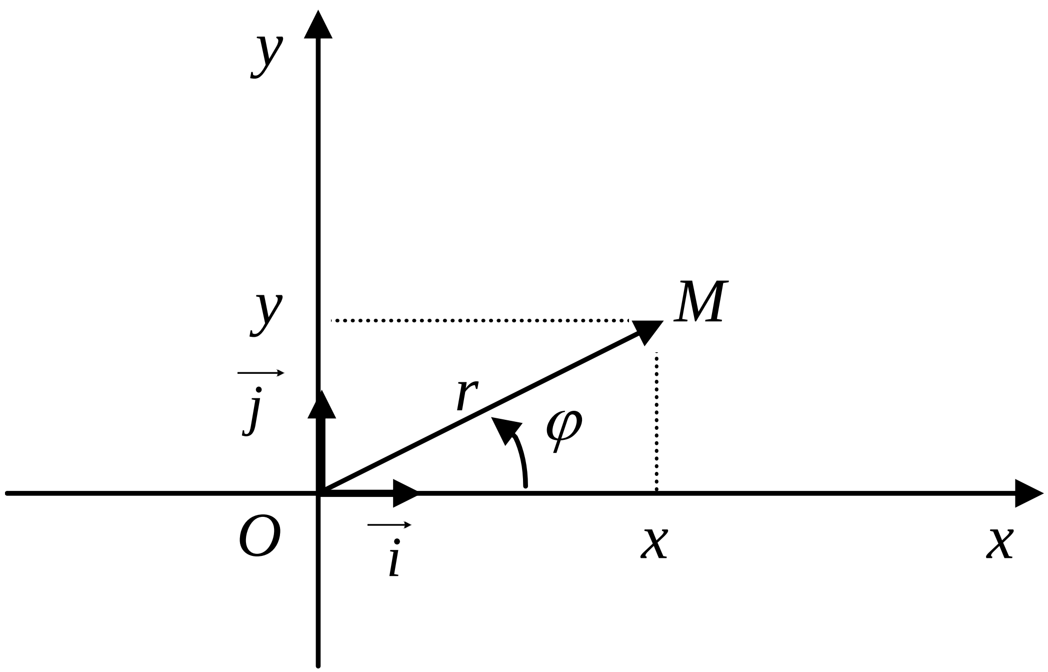
3. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức



Đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x; y)$ với số phức $z = x + iy$

lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức

4. Dạng lượng giác của số phức



mô đun

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

argument

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

dạng lượng giác $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

5. Lũy thừa và căn của số phức

Lũy thừa bậc n $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),\ \operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$$

Công thức Moivre

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Căn bậc n

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow \omega^n = z \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, \quad k \in \overline{0, n-1} \end{cases}$$

Ví dụ 6:Tính $I=(1+i)^8$ do $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow I=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\frac{\pi}{4}}=16e^{i2\pi}=16$

Ví dụ 7: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2^9(-1+i\sqrt{3})$$

Ví dụ 8: Đặt $C=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$

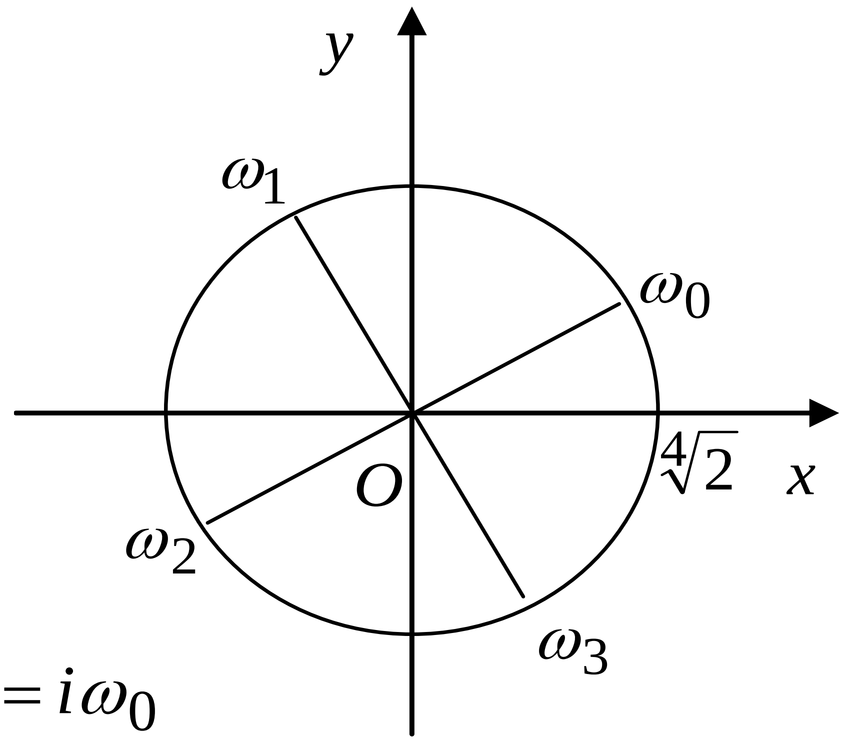
$S=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$ $\qquad z=\cos\varphi+i\sin\varphi$

$$C+iS=z+z^2+\cdots+z^n=z(1+z+\cdots+z^{n-1})=z\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{z^{n+1}-z}{z-1}$$

$$=\frac{\left(z^{n+1}-z\right)\overline{(z-1)}}{(z-1)\overline{(z-1)}}=\frac{z^n z\bar{z}-z\bar{z}-z^{n+1}+z}{z\bar{z}-\left(z+\bar{z}\right)+1}=\frac{z^n-1-z^{n+1}+z}{1-\left(z+\bar{z}\right)+1}$$

$$\Rightarrow C=\frac{\cos n\varphi-1-\cos(n+1)\varphi+\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)},\ S=\frac{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

Ví dụ 9: Tính $\sqrt[4]{1+i}$



$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\omega_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$\omega_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=i\omega_0$$

$$\omega_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)\right)=i^2\omega_0=-\omega_0$$

$$\omega_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=i^3\omega_0=-i\omega_0$$

BÀI 2: GiỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

1. Định nghĩa dãy số thực, dãy số đơn điệu, dãy số bị chặn
2. Giới hạn dãy số, dãy số hội tụ, dãy số phân kì
3. Tính chất của dãy số hội tụ
4. Dãy kề nhau
5. Dãy con
6. Tiêu chuẩn Cô si về sự hội tụ của dãy số

1. Các khái niệm về dãy số thực

a. Định nghĩa:

Hàm số $u:\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

gọi là một dãy số thực.

Dãy số thường được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

u_n gọi là số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$.

Ví dụ 1: $u_n = 2n+1$ $\quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad u_n = (-1)^n$

b. Dãy số đơn điệu

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là

tăng nếu $u_n \le u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

tăng ngặt nếu $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

giảm nếu $u_n \ge u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

giảm ngặt nếu $u_n > u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số tăng hoặc giảm gọi là dãy số đơn điệu.

Dãy số tăng ngặt hoặc giảm ngặt gọi là dãy số đơn điệu ngặt.

c. Dãy số bị chặn:

Ta nói rằng dãy $\{u_n\}$

bị chặn trên nếu $\exists a \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n \le a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

bị chặn dưới nếu $\exists b \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n \ge b, \forall n \in \mathbb{N}^*$

bị chặn nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho $|u_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Giới hạn dãy số

Đinh nghĩa 1.

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ nếu với mỗi số dương ε cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ hoặc $u_n \to l$ khi $n \to \infty$

- **Dãy $\{u_n\}$ được gọi là hội tụ nếu có số $l \in \mathbb{R}$ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$**

Đinh nghĩa 2.

Dãy số không hội tụ gọi là dãy phân kì.

Định nghĩa 3.

- Dãy $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương A cho trước lớn tùy ý, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Định nghĩa 4.

- Dãy $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm A cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \geq n_0 \Rightarrow u_n < A.$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Giải:

$$\forall\varepsilon>0,\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

Chọn n_0 là số tự nhiên mà $n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$

Ta có: $\forall n\geq n_0\Rightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Ví dụ 3:

Xét dãy $\{u_n\}$ trong đó $u_n = a$ với mọi n.

Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

3. Tính chất của dãy số hội tụ

a. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí 1:

Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

b. Tính bị chặn

* Dãy $\{u_n\}$ hội tụ thì bị chặn trong tập $\mathbb{R}$.

* Dãy $\{u_n\}$ tiến đến $+\infty$ thì bị chặn dưới trong tập $\mathbb{R}$.

* Dãy $\{u_n\}$ tiến đến $-\infty$ thì bị chặn trên trong tập $\mathbb{R}$.

Chú ý:

a. Tồn tại các dãy số bị chặn nhưng chưa chắc hội tụ, chẳng hạn $\{u_n\} = \{(-1)^n\}$.

b. Mọi dãy không bị chặn sẽ phân kỳ.

c. Một dãy tiến tới $+\infty$ thì không bị chặn trên, điều ngược lại không đúng, ví dụ: $\{u_n\} = \{(-1)^n n\}$.

c. Tính chất của dãy hội tụ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda a$, λ là hằng số.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,\ \{v_n\}$ bị chặn $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = 0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

d. Tính chất về thứ tự và nguyên lý kẹp

1. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ và $a < l < b$. Khi đó

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq n_0 \Rightarrow a < u_n < b.$

2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ và $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow a \leq u_n \leq b.$

Khi đó $a \leq l \leq b.$

3. Giả sử 3 dãy $\{u_n\}, \{v_n\}, \{\mathrm{w}_\mathrm{n}\}$ thoả mãn:

$\exists n_0$: $\forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l.$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l.$

4. Giả sử $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty.$ Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty.$

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & khi\ |a|<1 \\ 1 & khi\ a=1 \\ +\infty & khi\ a>1 \end{cases}$$

Ví dụ 6: Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^\alpha}\quad (a>1, \alpha\in\mathbb{N}^*)$

Ví dụ 7: Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\ (a\in\mathbb{R})$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\qquad \forall a>0$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

e. Tính chất của dãy số đơn điệu

1. Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

2. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

3. Dãy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên thì dần đến $+\infty$.

4. Dãy $\{u_n\}$ giảm và không bị chặn dưới thì dần đến $-\infty$

Ví dụ 9: Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ví dụ 10: Tìm giới hạn của $\{u_n\}$ biết $u_n = \dfrac{5+u_{n-1}^2}{2u_{n-1}}, u_1 > 5$

4. Dãy kề nhau

Định nghĩa: Hai dãy $\{u_n\},\{v_n\}$ được gọi là kề nhau nếu

$\{u_n\}$ tăng, $\{v_n\}$ giảm và $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Ví dụ 11: $\left\{-\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$ là hai dãy kề nhau

Định lí 2:

Hai dãy kề nhau thì cùng hội tụ về một giới hạn l và

$$u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n, \quad \forall n$$

Định lí 3: (về dãy các đoạn bao nhau và thắt)

Cho hai dãy $\{a_n\},\{b_n\}$ **sao cho** $a_n \le b_n$,

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ **với mọi** n **và**

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Thế thì tồn tại duy nhất $c \in [a_n, b_n],\ \forall n.$

5. Dãy con

Định nghĩa: Cho dãy số $\{u_n\}$.

Từ dãy $\{u_n\}$ ta trích ra một dãy con $\{u_{n_k}\}$ với

$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ Dãy $\{u_{n_k}\}$ gọi là dãy con của dãy $\{u_n\}$.

Ví dụ 12: Các dãy $\{u_{2n}\}, \{u_{2n+1}\}, \{u_{n^2}\}$

là các dãy con của dãy $\{u_n\}$.

Chú ý: Dãy con $\{u_{2n}\}$ được gọi là dãy chỉ số chẵn

Dãy con $\{u_{2n+1}\}$ được gọi là dãy chỉ số lẻ

Định lí 4:

Nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a thì mội dãy con cũng hội tụ về a.

Định lí 5: Điều kiện cần và đủ để dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a là hai dãy con $\{u_{2n}\}, \{u_{2n+1}\}$ cùng hội tụ về a.

Ví dụ 13 : Chứng minh rằng dãy số $\{(-1)^n\}$ phân kỳ

Chú ý: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = +\infty$

Định lí 6: (Bolzano- Weierstrass)

Mỗi dãy số thực bị chặn đều có một dãy con hội tụ.

6. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của dãy số

Dãy $\{u_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Dãy $\{u_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : (\forall m \geq n_0, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Ví dụ 14: Chứng minh rằng các dãy số sau là hội tụ

$$\text{a) } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{và} \quad \text{b) } \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Ví dụ 15: Chứng minh rằng dãy số sau là phân kỳ

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$