

Bài tập chương 3

1. Tính các tích phân đường sau:

- a) $\int_L xy ds$, L là biên của hình chữ nhật $ABCD$, $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$.
- b) $\int_{\widehat{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ theo đường $4x + y^2 = 4$.
- c) $\int_{AB} (x - y) ds$, AB là đoạn thẳng nối hai điểm $A(0, 0)$, $B(4, 3)$.
- d) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$.
- e) $\int_L |y| ds$, L là đường cardioid: $r = a(1 + \cos \phi)$ ($a > 0$).
- f) $\int_L z ds$, L là đường $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến điểm $(a, a, a\sqrt{2})$ ($a > 0$).

2. Tính khối lượng của:

- a) Đường $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $0 \leq x \leq a$, biết khối lượng riêng $p(x, y) = \frac{1}{y}$.
- b) Đường $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ biết khối lượng riêng $p(x, y) = |x|$.
- c) Đường đinh ốc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ biết khối lượng riêng $p(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Tích phân đường $\int (1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}) dx + (\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}) dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân đó từ $A(1, \pi)$ đến $B(2, \pi)$ theo một cung không cắt Oy .

4. Tính:

- a) $\oint_L \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- b) $\int_L y dx - (y + x^2) dy$, L là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ.
- c) $\int_{\widehat{AB}} \sqrt{x} dy - \sqrt{x} \ln(x + 1) dx$, \widehat{AB} là cung đường $y = (x - 1) \ln(x + 1)$ giữa hai điểm có hoành độ 0 và 1.

5. Tính các tích phân mặt:

- a) $\iint_S xyz dx dy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- b) $\iint_S x dy dz + dx dz + zx^2 dx dy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- c) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, S là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, $R \geq 0$.

6. Tính $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (y^2 + x^2) dz$ với L là giao tuyến của các mặt

$x^2 + y^2 + z^2 = 2ay, x^2 + y^2 = 2by, z > 0, a > b > 0$ hướng đi trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía $z > 0$.

7. Tính các tích phân mặt:

a) $\iint_S xzdydz + yxdzdx + zydx dy, S$ là phía ngoài của biên của hình chóp $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$.

b) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy, S$ là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

8. Tính trực tiếp các tích phân đường sau rồi kiểm tra lại bằng công thức Green

a) $\int_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy, L$ là đường kín gồm hai cung parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ theo chiều dương.

b) $\int_L (2x^3 - y^3)dx, L$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ theo chiều dương.

9. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx + Qdy$ sau đây là vi phân toàn phần của một

hàm số $u(x, y)$ nào đó. Tìm u : a) $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$. HD: $u = \frac{x^3+y^3}{3} + 3(x+y) - x^2y^2 + C$.

b) $(2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$. HD: $u = x^2 + 2xy - \frac{3}{2}x^2y^2 + y^2 + C$.

c) $[e^{x+y} + \cos(x-y)]dx + [e^{x+y} - \cos(x-y) + 2]dy$. HD: $u = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.

d) $\frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}ydy$. HD: $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \frac{y^2}{2} + C$.

10. Chứng minh các công thức

a) $\text{div}(g\vec{F}) = g\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{F} + g.\text{div}\vec{F}$,

b) $\text{div}(\vec{G} \wedge \vec{F}) = \vec{F}.\vec{\text{rot}}\vec{G} - \vec{G}.\vec{\text{rot}}\vec{F}$,

c) $\vec{\text{rot}}(g\vec{F}) = g\vec{\text{grad}}g \wedge \vec{F} + g\vec{\text{rot}}\vec{F}$.

11. Tính thông lượng của các trường vector sau: $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ qua phía ngoài của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

12. Tính $\int_L 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz, L$ là đường $x = \cos t, y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z = \frac{1}{2}\sin t$ hướng theo chiều tăng của t .

13. Tính các tích phân mặt

a) $\iint_S (x + y + z)dS, S$ là biên của hình lập phương $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

b) $\iint_S (z + 2x + \frac{4y}{3})dS, S$ là phần của mặt phẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

c) $\iint_S (yz + zx + xy)dS, S$ là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ax = 0 (a > 0)$.

14. Tìm khối lượng riêng của mặt S xác định bởi $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 1$, nếu khối lượng riêng $p(x, y, z) = z$.
15. Dùng công thức Ostrogradsky, tính các tích phân mặt sau:
- a) $\iint_S xzdydz + yxdzdx + zydx dy, S$ là phía ngoài biên của hình chóp $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z + y + x \leq 1$.
- b) $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy, S$ là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
16. Tính các tích phân mặt
- a) $\iint_S xyzdxdy, S$ là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$.
- b) $\iint_S xdydz + dx dz + xz^2dxdy, S$ là mặt ngoài của phần hình cầu xác định bởi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, (R > 0)$.
- c) $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}, S$ là mặt ngoài của eplipxoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Đáp số bài tập chương 3

1. Tính các tích phân đường sau:
- a) 0.
- b) $-\frac{1}{5}$.
- c) $\frac{5}{2}$.
- d) $\frac{4}{3}(\sqrt{2} + 2)$.
- e) f) $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17})$.
2. Tính khối lượng của:
- a) 1.
- b) $2a^2$.
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2} [2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$.
3. Tích phân đường $\int (1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x})dx + (\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x})dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân đó từ $A(1, \pi)$ đến $B(2, \pi)$ theo một cung không cắt Oy . HD: Không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.
4. Tính:
- a) 0.
- b) 4.
- c) $\pi - \frac{10}{3}$.

5. Tính các tích phân mặt:
- $\frac{2}{15}$.
 - $\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}$.
 - $\frac{4}{3}(a+b+c)\pi^2 R^3$.
6. $-2\pi ab^2$.
7. Tính các tích phân mặt:
- $\frac{1}{8}$.
 - $\frac{12}{5}\pi R^5$.
8. Tính trực tiếp các tích phân đường sau rồi kiểm tra lại bằng công thức Green
- $\frac{1}{30}$.
 - $\frac{3\pi}{4}$ Green $\frac{3\pi}{2}$.
9. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx + Qdy$ sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó. Tìm u
- HD: $u = \frac{x^3+y^3}{3} + 3(x+y) - x^2y^2 + C$.
 - HD: $u = x^2 + 2xy - \frac{3}{2}x^2y^2 + y^2 + C$.
 - HD: $u = e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.
 - HD: $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \frac{y^2}{2} + C$.
10. Chứng minh các công thức
- $\text{div}(g\vec{F}) = g\text{div}(\vec{F}) + g\vec{r}\text{ad}g\vec{F}$.
 -
 -
11. $\frac{3\pi R^4}{16}$.
12. 0.
13. Tính các tích phân mặt
- 9.
 - $4\sqrt{61}$. c) $\frac{64a^4\sqrt{2}}{15}$.
14. $\frac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}$.
15. Dùng công thức Ostrogradsky, tính các tích phân mặt
- $\frac{1}{8}$.
 - $\frac{12}{5}\pi R^5$.

16. Tính các tích phân mặt

a) $\frac{2}{15}$.

b) $\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}$.

c) $4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$.