1 dfgfg

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hoạt động khoa học và kỹ thuật thường gặp nhiều vấn đề có liên quan đến hàm nhiều biến số và các ứng dụng của chúng. Do vậy, giải tích hàm nhiều biến số là một môn học đang giữ một vị trí quan trọng trong các lĩnh vực ứng dụng và trong hệ thống các môn học của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông. Các kiến thức và phương pháp tiếp cận của giải tích hàm nhiều biến số đã hỗ trợ hiệu quả các kiến thức nền tảng cho các môn học như vật lý, xác suất thống kê, toán kỹ thuật, toán rời rạc và các môn chuyên ngành khác.

Bài giảng "Giải tích hàm nhiều biến số" được biên soạn lại theo chương trình qui định của Học viện cho hệ đại học chuyên ngành Điện tử-Viễn thông-Công nghệ thông tin với hình thức đào tạo theo tín chỉ. Do đối tượng sinh viên rất đa dạng với trình độ cơ bản khác nhau, chúng tôi đã cố gắng tìm cách tiếp cận đơn giản và hợp lý để trình bày nội dung theo phương pháp dễ hiểu hơn, nhằm giúp cho sinh viên nắm được các kiến thức cơ bản nhất.

Để vừa ôn tập, vừa tự kiểm tra kiến thức và để hình dung được mức độ của một đề thi hết môn, sau mỗi phần lý thuyết quan trọng chúng tôi thường đưa ra các ví dụ minh họa chi tiết. Nội dung được chia thành 4 chương. Chương 1 dành cho phép tính vi phân của hàm nhiều biến số. Chương 2 và 3 trình bày chi tiết về tích phân đường và tích phân mặt. Phương trình vi phân và các phương pháp giải được đưa ra trong chương 4. Các khái niệm và công thức được trình bày tương đối đơn giản và được minh họa bằng nhiều ví dụ với các hình vẽ sinh động. Các chứng minh khó được lược bớt có chọn lọc để giúp cho giáo trình không quá cồng kềnh nhưng vẫn đảm bảo được, để tiện cho sinh viên học tập chuyên sâu và tra cứu phục vụ quá trình học tập các môn học khác. Cuối mỗi chương học đều có các bài tập để sinh viên tự giải nhằm giúp các em hiểu sâu sắc hơn về lý thuyết và rèn luyện kỹ năng thực hành.

Tác giả hy vọng rằng giáo trình này có ích cho các em sinh viên và các bạn đồng nghiệp trong quá trình học tập và giảng dạy về môn học giải tích hàm nhiều biến số. Tác giả cũng cám ơn mọi ý kiến góp ý để giáo trình bài giảng này được hoàn thiện hơn nhằm nâng cao chất lượng dạy và học môn học này.

11/2013, Tác giả: PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Không gian $\mathcal{R}^n$

1.1.1. Các phép toán

Cho hai véc tơ

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{R}^n.$$

Khi đó, ta nhắc lại các phép toán quen thuộc trong không gian n chiều $\mathcal{R}^n$:

+ Phép cộng và trừ:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n).$$

+ Phép nhân véc tơ với 1 số thực:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}.$$

+ Phép nhân vô hướng 2 véc tơ:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Khi đó, ta có véc tơ x vuông góc với y khi và chỉ khi $x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = 0$.

+ Góc giữa 2 véc tơ $x \neq 0$ và $y \neq 0$ xác định bởi công thức:

$$\cos(x, y) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}}.$$

1.1.2. Chuẩn và hàm khoảng cách.

Cho véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n$. Khi đó, *chuẩn* của véc tơ x là một số thực được ký hiệu bởi $\|x\|$ và được xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Chuẩn có các tính chất cơ bản sau:

+ $\|x\| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n$ và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

+ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n, \lambda \in \mathcal{R}$.

+ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in \mathcal{R}^n$.

Khi đó, khoảng cách giữa $x \in \mathcal{R}^n$ và $y \in \mathcal{R}^n$ được xác định bởi công thức

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

1.1.3. Tôpô.

Cho $x \in \mathcal{R}^n, \epsilon > 0$. Khi đó

+ $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n : \|y - x\| < \epsilon\}$ gọi là *hình cầu mở* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ $\bar{B}(x, \epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n : \|y - x\| \leq \epsilon\}$ gọi là *hình cầu đóng* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ Điểm $x \in M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là điểm *trong*, nêu tồn tại một hình cầu mở $B(x, \epsilon)$ sao cho $B(x, \epsilon) \subseteq M$. Tập hợp các điểm trong của M được gọi là *phần trong* của M và ký hiệu bởi $intM$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập mở, nếu $intM = M$.

+ Cho $M \subseteq \mathcal{R}^n$. Điểm x được gọi là điểm *biên* của M, nếu với mọi $\epsilon > 0$ thì $B(x, \epsilon)$ chứa những điểm thuộc M và những điểm không thuộc M. Tập hợp các điểm biên của M được ký hiệu là ∂M.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là một tập *đóng*, nếu $\partial M \subseteq M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là *bị chặn* bởi $\alpha > 0$, nếu $\|x\| \leq \alpha \;\; \forall x \in M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập *compact*, nếu M là tập đóng và bị chặn.

1.2. Hàm số nhiều biến

Cho $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{R}^n$. Khi đó, ánh xạ

$$f : D \to \mathcal{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \longmapsto y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}$$

được gọi là một *hàm số nhiều biến*, Tập D được gọi là *miền xác định* của hàm số f. Các số $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các *biến số* của hàm số f.

Ví dụ 1.1. *Cho $R > 0$. Tìm miền xác định của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}.$$

Giải.

Theo định nghĩa, miền xác định D được xác định bởi

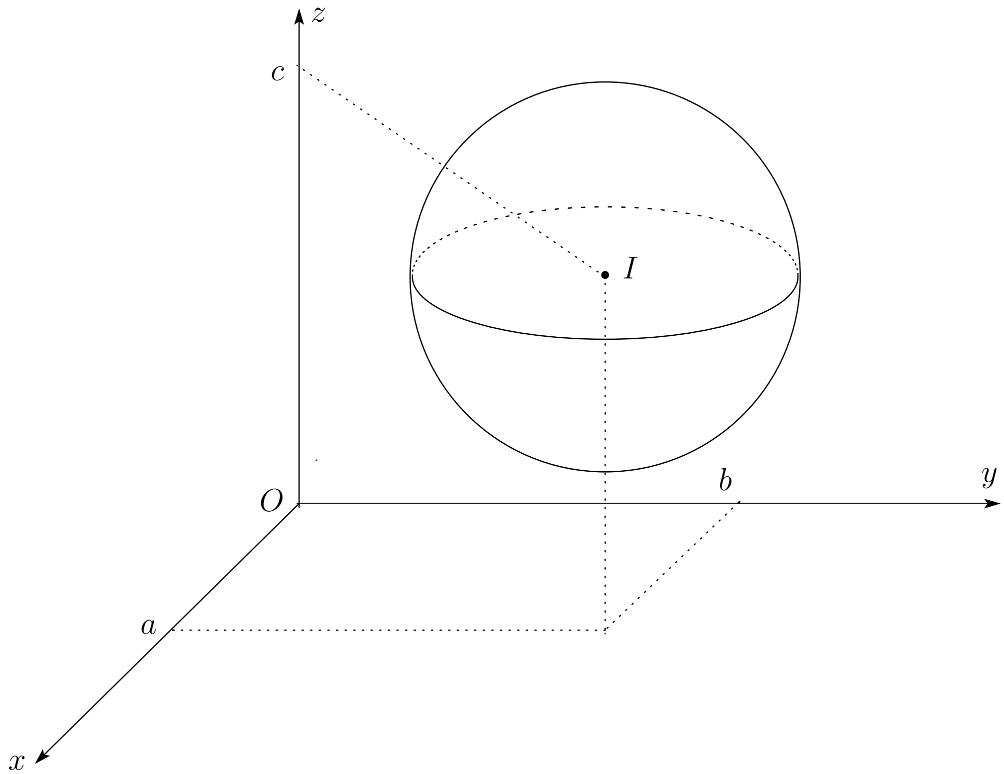
$$\begin{aligned} D =& \{x \in \mathcal{R}^n : \; R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0\} \\ =& \{x \in \mathcal{R}^n : \; \|x - 0\|^2 \leq R^2\} \\ =& \bar{B}(0, R). \end{aligned}$$

Dưới đây là một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian $\mathcal{R}^3$.

1.2.1. Mặt cầu

Phương trình:

$$(S) = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : \; (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\}.$$



Hình 1: Mặt cầu.

Khi đó, điểm $I(a, b, c)$ gọi là *tâm* và R gọi là *bán kính* của mặt cầu (S).

1.2.2. Mặt Elipxoit

Phương trình:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy) \ z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(Oyz) \ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz) \ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

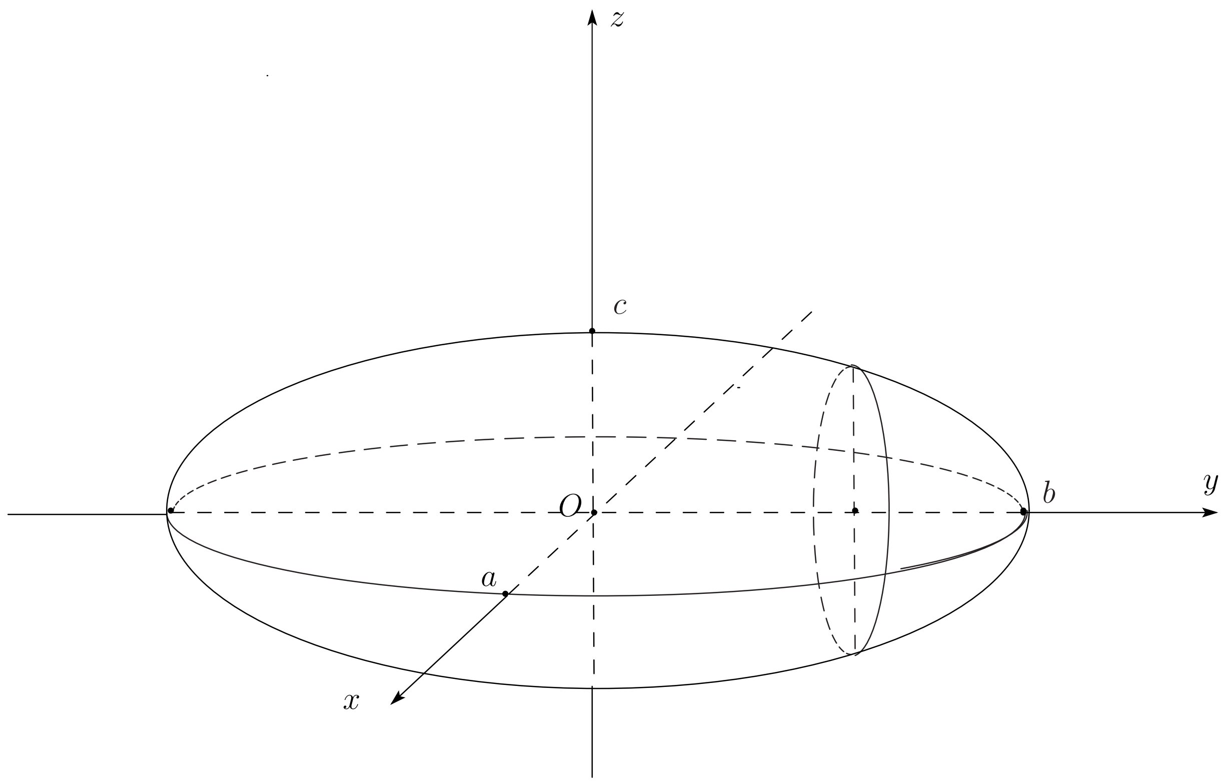
1.2.3. Mặt hypeboloit 1 tầng

Phương trình:

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy) \ z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hình 2: Mặt elipxoit.

$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1.2.4. Mặt hypeboloit 2 tầng

Phương trình:

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\ (a, b, c > 0).$$

Điều kiện

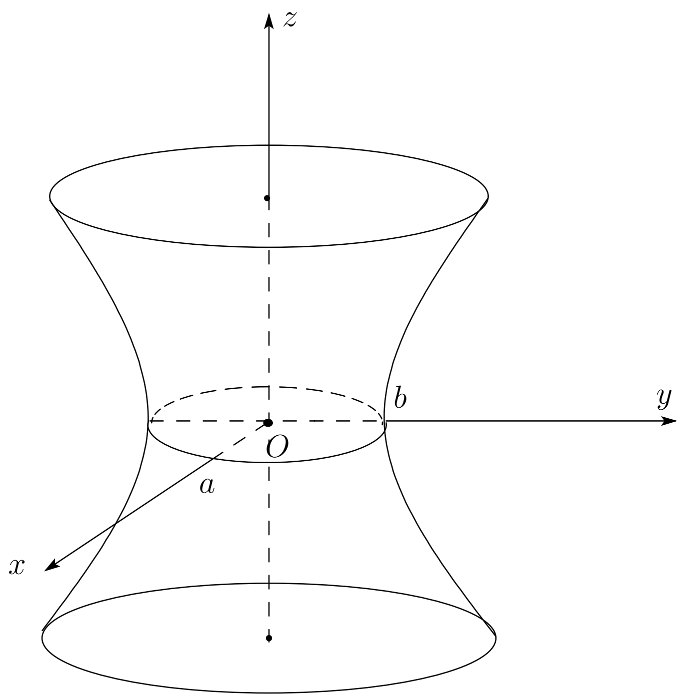
$$\frac{z^2}{c^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z \in (-\infty, -c] \cup [c, +\infty).$$

Các mặt cắt

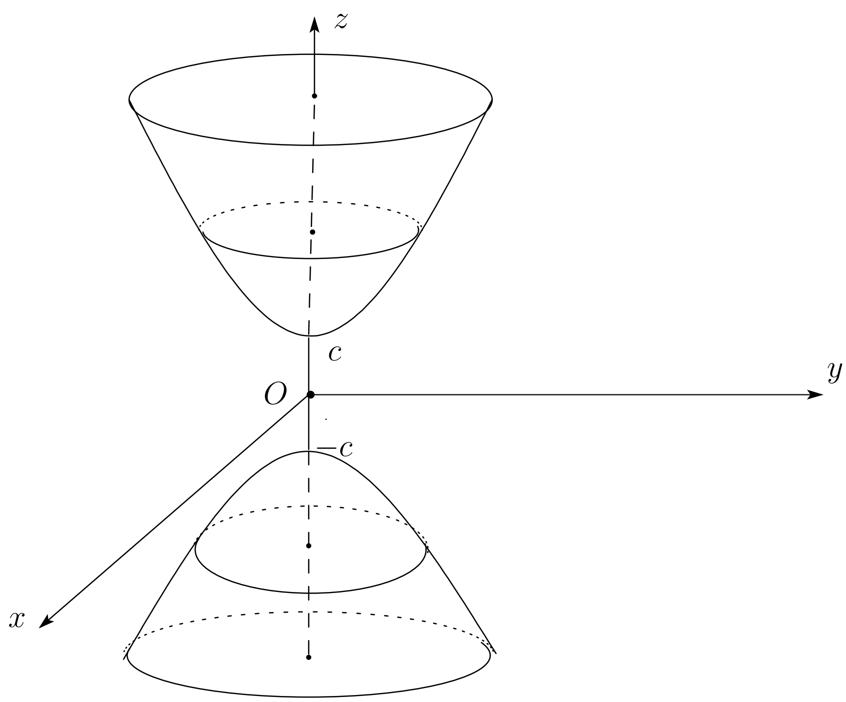
$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(P)\ z = h > c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$



Hình 3: Mặt hypeboloit 1 tầng.



Hình 4: Mặt hypeboloit 2 tầng.

1.2.5. Mặt paraboloit-eliptic

Phương trình:

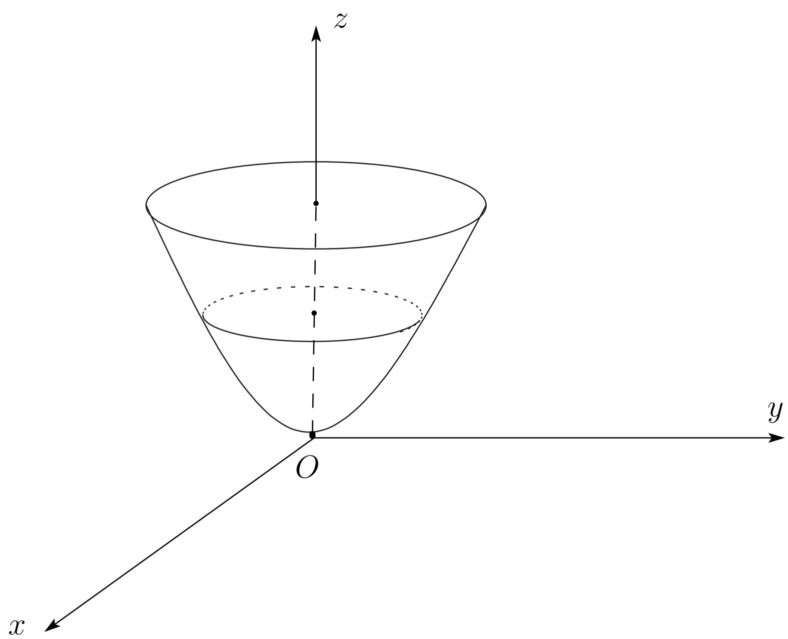
$$(PE): \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0),$$

với điều kiện $z \geq 0$. Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y^2 = 2qz.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : x^2 = 2pz.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h.$$



Hình 5: Mặt hypeboloit-eliptic.

1.2.6. Mặt trụ

Phương trình:

$$(T_z) : f(x, y) = 0 \ \text{ song song với trục } Oz,$$

$$(T_y) : g(x, z) = 0 \ \text{ song song với trục } Oy,$$

$$(T_x) : f(y, z) = 0 \ \text{ song song với trục } Ox,$$

trong đó $f, g, h : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$.

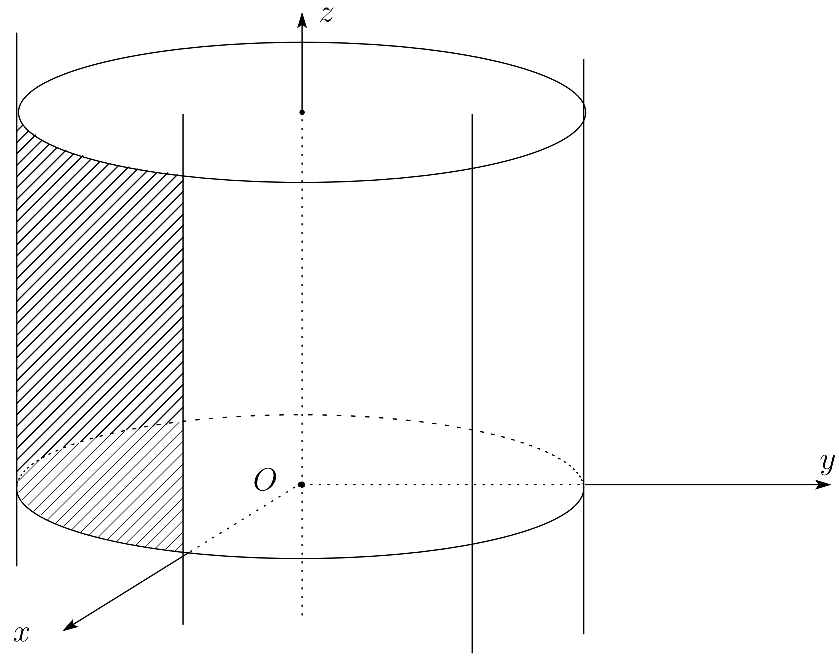
1.2.7. Mặt nón bậc hai

Phương trình:

$$(N) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y = \pm\frac{b}{c}z.$$



Hình 6: Mặt trụ song song Oz.

$$(Oxz)\ y = 0 : x = \pm\frac{a}{c}z.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

1.3. Giới hạn hàm nhiều biến số

Để hiểu về giới hạn hàm nhiều biến số trong không gian $\mathcal{R}^n$, ta có thể nghiên cứu thông qua giới hạn của hàm hai biến số. Một dãy điểm $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ được gọi là *dần tới* điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$, viết tắt là $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$, nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên $n(\epsilon)$ sao cho

$$M_n \in B(M_0, \epsilon) \ \ \forall n \geq n(\epsilon).$$

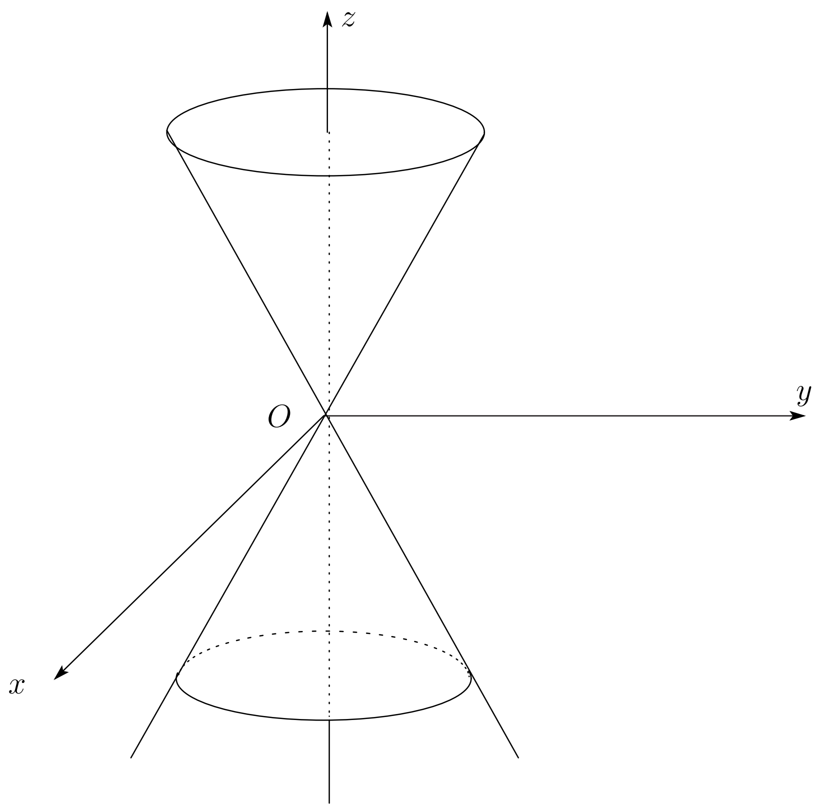
Trong trường hợp đặc biệt: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ thì điểm $M_n(x_n, y_n) \to M_0(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$.

Cho một hàm 2 biến số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$ có thể trừ điểm M_0. Khi đó, số m được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần tới $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$, nếu với mọi dãy điểm bất kỳ $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = m.$$

Ta có thể chứng minh được rằng: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$ khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in B(M_0, \delta) \Rightarrow |f(M) - m| < \epsilon.$$



Hình 7: Mặt nón bậc hai.

Ví dụ 1.2. *Tìm giới hạn*

$$I_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{x^2y}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Từ bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{2x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ \ \forall (x,y) \in D,$$

ta có $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|$ với mọi $(x,y) \in D$. Do đó

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2y}{2x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0.$$

Vậy $I_1 = 0$.

Ví dụ 1.3. *Tìm giới hạn*

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{xy}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Ta xét 2 trường hợp đặc biệt sau:

+ Điểm $(x, y) \in d : y = x$. Khi đó $(x, y) \to (0, 0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2 + x^2} = \frac{1}{3}.$$

+ Điểm $(x, y) \in d : y = 3x$. Khi đó $(x, y) \to (0, 0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2 + 9x^2} = \frac{3}{11}.$$

Do vậy I_2 không tồn tại.

1.4. Hàm số liên tục

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và điểm $M_0 \in D$. Khi đó,

+ Hàm số f liên tục tại điểm M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

+ Hàm số f liên tục trên miền D nếu f liên tục tại mọi điểm $M \in D$.

+ Hàm số f liên tục đều trên miền D nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall (x, y), (x', y') \in D : \|(x, y) - (x', y')\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon.$$

Bằng cách dùng định nghĩa, ta có nhận xét sau.

Nhận xét 1.4. + *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ liên tục đều trên miền D, thì f liên tục trên miền D. Điều ngược lại không đúng.*

+ *Nếu f liên tục trên miền D và D là tập compact, thì f liên tục đều trên miền D.*

+ *Nếu f liên tục trên miền compact D, thì f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.*

1.5. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến số

Cho hàm số $z = f(x)$ xác định trên miền $D \subseteq \mathcal{R}^n$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

1.5.1. Đạo hàm riêng

Nếu hàm một biến số $x_1 \longmapsto f(x_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ có đạo hàm tại x_1, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_1* tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_1}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}).$$

Bằng cách hiểu tương tự, ta cũng có các *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_i* $(i = 1, 2, ..., n)$ tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_i}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

Ví dụ 1.5. *Tìm các đạo hàm riêng của hàm số sau:*

$$f(x,y) = x^2 \tan(x^3 + 2y).$$

Giải.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan(x^3+2y) + x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.3x^2 = 2x\tan(x^3+2y) + \frac{3x^4}{\cos^2(x^3+2y)}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.2 = \frac{2x^2}{\cos^2(x^3+2y)}.$$

1.5.2. Hàm khả vi

Cho hàm nhiều biến $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

+ Với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, đặt

$$\Delta_{x_i} = x_i - \bar{x}_i.$$

Khi đó

$$\Delta_f = f(\bar{x}_1 + \Delta_{x_1}, \bar{x}_2 + \Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n + \Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

được gọi là *số gia của hàm số* tại điểm $\bar{x}$.

+ Nếu số gia của hàm số có dạng

$$\Delta_f = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n} + \alpha_1\Delta_{x_1} + \alpha_2\Delta_{x_2} + ... + \alpha_n\Delta_{x_n},$$

trong đó $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ chỉ phụ thuộc vào $\bar{x}$, không phụ thuộc vào $\Delta_x = (\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n})$ và

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \alpha_k = 0 \ \ \forall k = 1, 2, ..., n,$$

thì hàm số f được gọi là *khả vi* tại điểm $\bar{x}$. Khi đó

$$df = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n}$$

được gọi là *vi phân toàn phần* của f tại điểm $\bar{x}$.

+ Hàm số f được gọi là khả vi trên miền D, nếu f khả vi tại mọi điểm $\bar{x} \in D$.

Định lý 1.6. *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\bar{x} \in D$, thì f sẽ khả vi tại điểm $\bar{x}$ và*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})\Delta_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})\Delta_{x_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\Delta_{x_n}.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}\Delta_f =& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1}, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)\\ =& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1}, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\ &+\cdots\\ &+f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n).\end{aligned}$$

Theo công thức số gia giới nội, tồn tại các số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \in (0, 1)$ sao cho

$$\begin{aligned}&f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}+\Delta_{x_{i+1}}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\ &\qquad\qquad = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\Delta_{x_i}.\end{aligned}$$

Do các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm $\bar{x}$ nên

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \alpha_i(\Delta_x),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta_x} \alpha_i(\Delta_x) = 0 \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$. Do vậy, định lý được chứng minh.

Nhận xét 1.7. *Trong trường hợp hàm 3 biến số $f(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0, z_0), theo định lý trên, ta có*

$$\Delta_f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta_z + \alpha\Delta_x + \beta\Delta_y + \gamma\Delta_z.$$

Đặt $\rho = \sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}$ và $\epsilon = \frac{1}{\rho}(\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z)$. Khi đó, theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có

$$|\epsilon| = \frac{1}{\rho}|\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z| \leq \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2)}}{\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Do đó

$$\lim_{(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)\to 0} \epsilon = 0$$

và

$$\alpha\Delta_x + \beta\Delta_y + \gamma\Delta_z = o(\rho).$$

Như vậy

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta_z + o(\rho).$$

Khi các số $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ khá nhỏ, ta có

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta_z. \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.8. *Dùng vi phân, tính xấp xỉ giá trị biểu thức sau:*

$$S = \arctan \frac{1,02}{0,95}.$$

Giải: Từ

$$S = \arctan \frac{1+0,02}{1-0,05}$$

ta đặt $x_0 = 1, y_0 = 1, \Delta_x = 0,02, \Delta_y = -0,05$ và $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Theo công thức (1.1) cho hàm số có 2 biến, ta có

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= \Delta_f + f(x_0,y_0) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y + f(x_0,y_0) \\ &= f(1,1) + \frac{1.0,02 + 1.0,05}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0,035 \\ &= 0,82rad. \end{aligned}$$

1.6. Đạo hàm theo phương

Cho véc tơ $d \in \mathcal{R}^n$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x}+\lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda},$$

thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm theo phương* d của hàm f tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu bởi $D_d f(\bar{x})$.

Ví dụ 1.9. *Tìm đạo hàm theo phương* $D_d f(\bar{x})$ *của hàm số* $f(x,y,z) = 2x + 3y + z^2$*, trong đó* $d = (1,2,0), \bar{x} = (3,-1,1)$

Giải:

Theo định nghĩa, đạo hàm $D_d f(\bar{x})$ được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(1 + 3\lambda, -1 + 2\lambda, 1) - f(3, -1, 1)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{2(1 + 3\lambda) + 3(-1 + 2\lambda) + 1^2 - (2.3 + 3.(-1) + 1^2)}{\lambda} \\ &= 12. \end{aligned}$$

Dựa vào định nghĩa, ta có nhận xét sau:

Nhận xét 1.10. *Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một hệ cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{R}^n$, hàm số $f(x)$ tồn tại các đạo hàm riêng trên D và $\bar{x} \in D$. Khi đó*

$$D_{e_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

1.7. Quan hệ giữa đạo hàm theo phương và đạo hàm riêng

Cho hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ khả vi tại điểm $\bar{x} \in D$. Khi đó, đạo hàm theo phương $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ được xác định bởi công thức:

$$D_d f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n. \tag{1.2}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, hàm số f khả vi tại điểm $\bar{x}$ hay

$$\Delta_f = A_1 \Delta_{x_1} + A_2 \Delta_{x_2} + ... + A_n \Delta_{x_n} + \alpha_1 \Delta_{x_1} + \alpha_2 \Delta_{x_2} + ... + \alpha_n \Delta_{x_n},$$

trong đó $\Delta_f = f(\bar{x} + \Delta_x) - f(\bar{x})$, $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\lim\limits_{\Delta_x \to 0} \alpha_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Dùng công thức trên với $\Delta_{x_i} = \lambda d_i$, ta có

$$\begin{aligned} D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\ &= \lim_{\Delta_x \to 0} (A_1 d_1 + ... + A_n d_n + \alpha_1 d_1 + ... + \alpha_n d_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.11. *Tìm đạo hàm theo phương $d = (-1, 3)$ tại điểm $\bar{x} = (e, e^2)$ của hàm số*

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y).$$

Giải.

Tính các đạo hàm theo phương

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + y}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = \frac{2x}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{e},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = \frac{1}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{2e^2}.$$

Theo công thức (1.2), ta có

$$\begin{aligned} D_d f(\bar{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})d_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})d_2 \\ &= \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{2e^2}3 \\ &= \frac{3}{2e^2} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

1.8. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Cho hàm véc tơ $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ và hàm số $g : f(D) \to \mathcal{R}$. Khi đó hàm số $h = gof : D \to \mathcal{R}$ được xác định bởi

$$gof(x) = g\big(f(x)\big)$$

được gọi là *hàm hợp* của 2 hàm số g và f. Nếu các hàm số g, hàm số trong tọa độ thành phần của f và các đạo hàm riêng của chúng liên tục tại điểm $x = (x_1, ..., x_n)$ và $f(x)$ tương ứng. Khi đó các đạo hàm riêng của hàm hợp h được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ &... \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa, ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta g}{\Delta_{x_1}} =& \frac{g\big(f(x+\Delta_x)\big)-g\big(f(x)\big)}{\Delta_{x_1}}\\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1},...,x_n+\Delta_{x_n})\big)-g\big(f(x_1,...,x_n)\big)}{\Delta_{x_1}}\\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1},...,x_n+\Delta_{x_n})\big)-g\big(f(x_1,x_2+\Delta_{x_2},...,x_n+\Delta_{x_n})\big)}{\Delta_{x_1}}\\
& + ... + \frac{g\big(f(x_1,...,x_{n-1},x_n+\Delta_{x_n})\big)-g\big(f(x_1,...,x_n)\big)}{\Delta_{x_1}}\\
=& \frac{g\big(f(x_1+\Delta_{x_1},...)\big)-g\big(f(x_1,x_2+\Delta_{x_2},...)\big)}{f(x_1+\Delta_{x_1},...,x_n+\Delta_{x_n})-f(x_1,x_2+\Delta_{x_2},...,x_n+\Delta_{x_n})}\\
& \times \frac{f(x_1+\Delta_{x_1},...)-f(x_1,x_2+\Delta_{x_2},...)}{\Delta_{x_1}}\\
& + ... + \frac{g\big(f(x_1,...,x_{n-1},x_n+\Delta_{x_n})\big)-g\big(f(x_1,...,x_n)\big)}{f(x_1,...,x_{n-1},x_n+\Delta_{x_n})-f(x_1,...,x_n)}\\
& \times \frac{f(x_1,...,x_{n-1},x_n+\Delta_{x_n})-f(x_1,...,x_n)}{\Delta_{x_1}}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Do giả thiết liên tục của các hàm số và cho $\Delta_{x_1} \to 0$, ta nhận được

$$\frac{\partial h}{x_1} = \frac{\partial g}{f_1}\frac{\partial f_1}{x_1} + \frac{\partial g}{f_2}\frac{\partial f_2}{x_2} + ... + \frac{\partial g}{f_m}\frac{\partial f_m}{x_1}.$$

Bằng cách làm tương tự, ta nhận được điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.12. *Tìm đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ của hàm số sau*

$$f(x,y) = (u^2+1)\log_2 v, u = xy, v = 2x+y.$$

Giải:

Theo công thức (1.3), ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= 2u\log_2 v.y + \frac{u^2+1}{v\ln 2}.2\\
&= 2xy^2\log_2(2x+y) + \frac{2(x^2y^2+1)}{(2x+y)\ln 2}.
\end{aligned}
$$

1.9. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

Cho hàm véc tơ $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 1*. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f"_{x_i x_j}(x), \quad i, j = 1, 2, ..., n \ (i \neq j) \ \text{ hoặc } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f"_{x_i^2}(x)$$

được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2*. Bằng cách hiểu tương tự, ta cũng có các đạo hàm riêng n.

Ví dụ 1.13. *Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số*

$$f(x, y) = (x^2 + y^3)\sin 2y.$$

Giải:

Các đạo hàm riêng cấp 1 là

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x\sin 2y, \\ f'_y &= 3y^2 \sin 2y + 2(x^2 + y^3)\cos 2y. \end{aligned}$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= 2\sin 2y, \\ f''_{xy} &= 4x\cos 2y, \\ f''_{y^2} &= 6y\sin 2y + 6y^2\cos 2y + 6y^3\cos 2y - 4(x^2 + y^3)\sin 2y \\ &= 2(3y - 2x^2 - 2y^3)\sin 2y + y^2(1 + y)\cos 2y. \end{aligned}$$

Định lý 1.14. *(Schwarz)*

Nếu hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0).$$

Chứng minh: Đặt

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x + \Delta_x, y) - f(x, y), \\ h(x, y) &= f(x, y + \Delta_y) - f(x, y). \end{aligned}$$

Khi đó, ta dễ dàng thử lại rằng

$$g(x, y + \Delta_y) - g(x, y) = h(x + \Delta_x, y) - h(x, y). \tag{1.5}$$

Theo định lý Lagrange, ta có

$$\begin{aligned} g(x, y + \Delta_y) - g(x, y) &= g'_y(x, y + \theta_y \Delta_y).\Delta_y \ \text{ với } \ 0 < \theta_y < 1 \\ &= \Delta_y \Big(f'_y(x + \Delta_x, y + \theta_y \Delta_y) - f'_y(x, y + \theta_y \Delta_y) \Big) \\ &= \Delta_x \Delta_y f''_{yx}(x + \theta_x \Delta_x, y + \theta_y \Delta_y) \ \text{ với } \ 0 < \theta_x < 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tương tự, ta cũng có

$$h(x+\Delta_x, y) - h(x, y) = \Delta_x\Delta_y f''_{xy}(x+\alpha_x\Delta_x, y+\alpha_y\Delta_y) \text{ với } 0 < \alpha_x, \alpha_y < 1. \tag{1.7}$$

Từ các đẳng thức (1.5), (1.6) và (1.7), ta có

$$f''_{yx}(x+\theta_x\Delta_x, y+\theta_y\Delta_y) = f''_{xy}(x+\alpha_x\Delta_x, y+\alpha_y\Delta_y).$$

Do các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục và cho $(\Delta_x, \Delta_y) \to 0$, ta có định lý được chứng minh.

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Khi đó vi phân toàn phần

$$df = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + ... + f'_{x_n}dx_n$$

được gọi là *vi phân cấp 1* của hàm f. Vi phân toàn phần của df nếu tồn tại, được gọi là *vi phân cấp 2* của hàm f và được ký hiệu d^2f hay

$$d^2f = d(df) = d(f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + ... + f'_{x_n}dx_n).$$

Bằng cách hiểu tương tự, ta có *vi phân cấp n* của hàm số f.

$$d^nf = d(d^{n-1}f).$$

Trong trường hợp hàm 2 biến $f(x, y)$ và các đạo hàm bậc 2 liên tục, theo định lý Schwarz, ta có công thức

$$d^2f = f''_{x^2}dx^2 + f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2.$$

1.10. Công thức Taylor của hàm 2 biến số

Cho hàm hai biến $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$. Nếu hàm f có các đạo hàm riêng cấp $n+1$ liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta_{x_0}, y_0+\Delta_{y_0}) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta_x, y_0+\theta\Delta_y). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Đặt

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta_{x_0}, y_0 + t\Delta_{y_0}).$$

Khi đó $g(t)$ là hàm một biến số và

$$g(1) - g(0) = f(x_0 + \Delta_{x_0}, y_0 + \Delta_{y_0}) - f(x_0, y_0).$$

Theo công thức Taylor cho hàm một biến số $g(t)$, ta có

$$g(1) - g(0) = \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + ... + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + \frac{1}{n!}g^{(n+1)}(\theta) \text{ với } 0 < \theta < 1.$$

Mặt khác

$$g'(0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta_x + f'_y(x_0, y_0)\Delta_y = df(x_0, y_0)$$
$$g''(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0)\Delta_x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta_x\Delta_y + f''_{y^2}(x_0, y_0)\Delta_{y^2} = df(x_0, y_0)$$
$$...$$
$$g^{(n)}(0) = d^n f(x_0, y_0)$$
$$g^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y).$$

Trong trường hợp đặc biệt $n = 1$, ta có công thức

$$f(x_0 + \Delta_{x_0}, y_0 + \Delta_{y_0}) - f(x_0, y_0) = df(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y) \text{ với } 0 < \theta < 1$$

được gọi là *công thức số gia giới nội* của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 1.15. *Khai triển hàm số*

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

theo công thức Taylor trong lân cận của điểm $M_0(1, -2)$.

Giải: Theo công thức (1.8), ta tính các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x - y - 6,$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x - 2y - 3,$$

và các đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 4,$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1,$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2.$$

Tính các giá trị của hàm số và đạo hàm tại M_0

$$f(M_0) = 5, \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = -2.$$

Khi đó, công thức (1.8) có dạng

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(M_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y+2) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}(x-1)(y+2) + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}(y+2)^2\right) \\ =& 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \end{aligned}$$

1.11. Hàm ẩn

Cho hàm véc tơ $F : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$. Khi đó, hệ thức giữa 2 biến x, y có dạng

$$F(x,y) = 0.$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm ẩn* của hệ thức trên, nếu $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức trên.

Ví dụ 1.16. *Từ hệ thức*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta xác định được 2 hàm ẩn

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

trên đoạn $[-a, a]$.

Định lý 1.17. *Cho $(x_0, y_0) \in D$ và F thỏa mãn 3 điều kiện sau:*
(i) $F(x_0, y_0) = 0$. (ii) F'_y liên tục trên tập mở U chứa điểm (x_0, y_0).
(iii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Khi đó tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$ xác định trong lân cận $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Hơn nữa,
+ f liên tục trên miền V.
+ f' liên tục trên miền V và được xác định bởi

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}(x,y).$$

Chứng minh: + *Tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$.*
Từ giả thiết $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, ta có thể giả sử rằng

$$F'_y(x_0, y_0) > 0.$$

Do $F'_y(x,y)$ liên tục trên tập mở U chứa (x_0, y_0) nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$F'_y(x,y) > 0, \quad \forall (x,y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha].$$

Khi đó

$$F'_y(x_0, y) > 0, \quad \forall y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha].$$

Vậy hàm số $F(x_0, y)$ đồng biến trên $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Nhưng giả thiết $F(x_0, y_0) = 0$ và hàm số F liên tục, nên ta có

$$F(x_0, y_0 - \alpha) < 0 \text{ và } F(x_0, y_0 + \alpha) > 0.$$

Do F liên tục, nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$F(x, y_0 - \alpha) < 0 \text{ và } F(x, y_0 + \alpha) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Như vậy, mỗi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tồn tại $y \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ sao cho $F(x, y) = 0$. Mặt khác $F(x, \cdot)$ tăng ngặt theo y, nên tồn tại duy nhất $y = f(x)$.

+ *Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

$$f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha).$$

Lấy $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bất kỳ, tồn tại $y_1 \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ sao cho

$$y_1 = f(x_1) \text{ và } F(x_1, y_1) = 0.$$

Theo chứng minh trên, với mọi $\alpha_1 > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho phương trinh ẩn $F(x, y) = 0$ xác định duy nhất hàm ẩn

$$f_1 : (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \to (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1).$$

Chọn $\alpha_1 < \epsilon$ sao cho

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha).$$

Khi đó

$$f_1(x) = f(x), \quad \forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1).$$

Do vậy, vợi mọi x thỏa mãn $|x - x_1| < \delta_1$, ta có

$$|f_1(x) - y_1| = |f(x) - f(x_1)| < \alpha_1 < \epsilon.$$

Hay f liên tục tại x_1. + *Chứng minh rằng $y = f(x)$ khả vi trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và $x + h \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ta có

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ và } F(x + h, f(x + h)) = 0.$$

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) = 0.$$

Hay

$$h.F'_x(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x)) + \big(f(x+h)-f(x)\big).F'_y\big(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))\big).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))}{F'_y\big(x+\theta h, f(x)+\theta(f(x+h)-f(x))\big)}.$$

Cho $h \to 0$, ta nhận được

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}(x, y).$$

Ví dụ 1.18. *Cho hệ thức*

$$e^z = x + y + z.$$

Tìm các đạo hàm riêng của hàm z theo các ẩn x, y.

Giải: Đặt

$$F(x, y, z) = e^z - x - y - z.$$

Khi đó, ta có

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1-e^z} = \frac{1}{e^z-1},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1}{e^z-1}.$$

1.12. Cực trị của hàm nhiều biến

1.12.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ và điểm $M_0 \in D$.

+ Điểm M_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm f trên miền D, nếu tồn tại hình cầu $B(M_0, \epsilon) \subseteq D$ sao cho

$$f(M_0) \le f(M), \ \ \forall M \in B(M_0, \epsilon).$$

+ Điểm M_0 được gọi là *điểm cực đại* của hàm f trên miền D, nếu tồn tại hình cầu $B(M_0, \epsilon) \subseteq D$ sao cho

$$f(M_0) \ge f(M), \ \ \forall M \in B(M_0, \epsilon).$$

+ Điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*.

1.12.2. Cực trị không điều kiện

Dưới đây là điều kiện cần của cực trị.

Định lý 1.19. *(Fermat)*

Nếu hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có các đạo hàm riêng trong lân cận của điểm M_0, thì

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$$

Chứng minh: Đặt

$$\varphi(x) = f(x, y_0).$$

Theo định nghĩa, x_0 là điểm cực trị của hàm số φ. Theo định lý Fermat cho hàm một biến φ, ta có

$$\varphi'(x_0) = 0.$$

Hay $f'_x(M_0) = 0$. Bằng cách làm tương tự, ta cũng có $f'_y(M_0) = 0$. Định lý được chứng minh.

Điểm M_0 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

được gọi là *điểm dừng* của hàm số f. Trong trường hợp tổng quát, định lý Fermat chỉ ra rằng một điểm cực trị là điểm dừng. Xong chiều ngược lại, một điểm dừng chưa chắc đã là một điểm cực trị. Như vậy, khi nào thì điểm dừng sẽ là điểm cực trị? Định lý dưới đây khẳng định điều này.

Định lý 1.20. *Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$ và hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của điểm M_0. Đặt*

$$A = f"_{x^2}(M_0), B = f"_{xy}(M_0), C = f"_{y^2}(M_0), \Delta = B^2 - AC.$$

Khi đó,

(i) Nếu $\Delta > 0$, thì hàm số không đạt cực trị tại điểm M_0.

(ii) Nếu $\Delta = 0$, thì hàm số $f(x, y)$ có thể đạt cực trị tại M_0 hoặc không đạt cực trị tại điểm M_0.

(iii) Nếu $\Delta < 0$ và

+ *$A > 0$, thì M_0 là điểm cực tiểu.*
+ *$A < 0$, thì M_0 là điểm cực đại.*

Chứng minh: (i) Giả sử $\Delta > 0$. Theo công thức Taylor cho hàm hai biến số, ta có

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y),$$

trong đó $0 < \theta < 1$. Do M_0 là điểm dừng, nên $df(x_0, y_0) = 0$. Khi đó

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big(A_0\Delta_x^2 + 2B_0\Delta_x\Delta_y + C_0\Delta_y^2\Big),$$

trong đó

$$\begin{cases} A_0 = f"_{x^2}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y), \\ B_0 = f"_{xy}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y), \\ C_0 = f"_{y^2}(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \theta\Delta_y). \end{cases}$$

Do vậy, tam thức bậc hai

$$g(x) = A_0x^2 + 2B_0x + C_0$$

đổi dấu qua 2 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Tồn tại α, β sao cho

$$g(\alpha) > 0, g(\beta) < 0$$

và

$$\lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0}(A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0) = g(\alpha) > 0, \lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0}(A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0) = g(\beta) < 0.$$

Khi đó, tồn tại $\epsilon_0 > 0$ sao cho

$$A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0 > 0 \text{ và } A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0 < 0, \quad \forall(\Delta_x, \Delta_y) \in B(O, \epsilon_0).$$

Với mọi $0 < \epsilon < \epsilon_0$, ta chọn $\delta > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \delta < \frac{\epsilon}{2}, \\ |\delta\alpha| < \frac{\epsilon}{2}, \\ |\delta\beta| < \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Xét 2 điểm $(\delta\alpha, \delta)$ và $(\delta\beta, \delta)$. Khi đó, ta dễ thử lại rằng

$$\begin{aligned} &(\delta\alpha, \delta) \in B(O, \epsilon_0), \\ &(\delta\beta, \delta) \in B(O, \epsilon_0), \\ &f(x_0 + \delta\alpha, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\delta^2(A_0\alpha^2 + 2B_0\alpha + C_0) > 0, \\ &f(x_0 + \delta\beta, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\delta^2(A_0\beta^2 + 2B_0\beta + C_0) < 0. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa, điểm M_0 không là điểm cực trị.

(ii) Giả sử $\Delta = 0$. Với hàm số

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

cho ta $\Delta = 0$ tại điểm $O(0,0)$ và điểm O là điểm cực tiểu.

Với hàm số

$$f(x,y) = x^3 + y^3$$

cho ta $\Delta = 0$ tại điểm $O(0,0)$ và điểm O là không là điểm cực trị.

(iii) Giả sử $\Delta < 0$ và $A > 0$. Theo giả thiết liên tục của các đạo hàm riêng cấp 2, ta có

$$\lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0} \Delta_0 = \Delta < 0 \;\text{ và }\; \lim_{(\Delta_x,\Delta_y)\to 0} A_0 = A > 0.$$

Hay tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho

$$\Delta_0 < 0, A_0 > 0 \;\; \forall (\Delta_x, \Delta_y) \in B(O,\epsilon).$$

Khi đó

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\Big(A_0\Delta_x^2 + 2B_0\Delta_x\Delta_y + C_0\Delta_y^2\Big) \geq 0,$$

với mọi $(\Delta_x, \Delta_y) \in B(O,\epsilon)$. Vậy điểm M_0 là điểm cực tiểu. Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có trường hợp $\Delta < 0$ và $A < 0$. Như vậy, định lý được chứng minh.

Ví dụ 1.21. *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Giải: Tìm các điểm dừng hay giải hệ phương trình

$$f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0,$$

ta nhận được các nghiệm $(0,0), (-1,-1), (1,1)$. Để tìm điều kiện đủ của cực trị, ta tính các đạo hàm riêng cấp 2

$$f"_{x^2} = 12x^2 - 2, f"_{xy} = -2, f"_{y^2} = 12y^2 - 2.$$

+ Xét tại điểm $(-1,-1)$.

Ta có

$$A = 10, B = -2, C = 10, \Delta = B^2 - AC < 0.$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(-1,-1)$ và giá trị cực tiểu $f(-1,-1) = -2$.

+ Xét tại điểm $(1,1)$.

Ta có

$$A = 10, B = -2, C = 10, \Delta = B^2 - AC < 0.$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1,1)$ và giá trị cực tiểu $f(-1,-1) = -2$.

+ Xét tại điểm $(0,0)$.

Ta có

$$A = -2, B = -2, C = -2, \Delta = B^2 - AC = 0.$$

Để tìm hiểu sự tồn tại cực trị, ta xét số gia của hàm số tại điểm $(0,0)$:

$$\Delta_f = f(\Delta_x, \Delta_y) - f(0,0) = \Delta_x^4 + \Delta_y^4 - \Delta_x^2 - \Delta_y^2 - 2\Delta_x\Delta_y.$$

Nếu $0 < \Delta_x = \Delta_y < \sqrt{\frac{3}{2}}$, thì

$$\Delta_f = 2\Delta_x^4 - 4\Delta_x^2 < 2\Delta_x^4 - 3\Delta_x^2 = 2\Delta_x^2(\Delta_x^2 - \frac{3}{2}) < 0.$$

Nếu $0 < \Delta_x = -\Delta_y$, thì

$$\Delta_f = \Delta_x^4 + \Delta_x^4 - \Delta_x^2 - \Delta_x^2 + 2\Delta_x^2 = 2\Delta_x^4 > 0.$$

Theo định nghĩa, điểm $(0,0)$ không là điểm cực trị. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại 2 điểm $(-1,-1)$, điểm $(1,1)$ và $f_{\min} = -2$.

1.12.3. Cực trị có điều kiện

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên tập mở $D \subseteq \mathcal{R}^2$. một đường cong có phương trình $\varphi(x,y) = 0$. Người ta gọi cực trị của hàm số $f(x,y)$ trong đó các biến x, y bị ràng buộc bởi hệ thức $\varphi(x,y) = 0$ là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 1.22. *(điều kiện cần)*

Giả sử điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$ với rằng buộc $\varphi(x,y) = 0$. Các hàm số $f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) Các đạo hàm riêng của các hàm số f, φ liên tục trên một lân cận của điểm (x_0, y_0).

(ii) $\varphi'_x(x_0,y_0) \neq 0, \varphi'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Khi đó, tồn tại λ (gọi là nhân tử Lagrange) sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0,y_0) = 0, \\ f'_y(x_0,y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0,y_0) = 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh: Hàm số $f(x,y)$ với rằng buộc $\varphi(x,y) = 0$ đạt cực trị tại điểm (x_0, y_0), nên $\varphi(x_0,y_0) = 0$. Giả sử $\varphi'_x(x_0,y_0) \neq 0$, theo định lý hàm ẩn, tồn tại hàm ẩn $y = y(x)$ từ phương trình $\varphi(x, y) = 0$. Khi đó, hàm số $z = f(x, y(x))$ đạt cực trị tại điểm x_0. Theo định lý Fermat, ta có $z'(x_0) = 0$. Hay

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0.$$

Mặt khác, từ phương trình $\varphi(x, y(x)) = 0$ tại điểm (x_0, y_0), ta có

$$\varphi'_x(x_0, y_0) + \varphi'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0.$$

Kết hợp 2 hệ thức trên, ta có

$$\Big(f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0)\Big) + \Big(f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0)\Big).y'(x_0) = 0.$$

Vì $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên tồn tại $\lambda \in \mathcal{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Định lý được chứng minh.

Hàm số

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

được gọi là *hàm Lagrange*. Bây giờ ta xét điều kiện đủ cho cực trị có điều kiện. Với mỗi λ_0 cố định, ta cần xét xem điểm dừng có điều kiện (x_0, y_0) có là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$ với ràng buộc $\varphi(x, y)$ không? Từ hệ thức

$$\begin{aligned} \Delta F(x_0, y_0, \lambda_0) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) + \lambda_0\Big(\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\Big) \\ &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \Delta f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Như vậy, với mỗi λ_0 cố định, nếu điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $L(x, y, \lambda_0)$ thì (x_0, y_0) cũng là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$. Cực trị của hàm $L(x, y, \lambda_0)$ là cực trị không điều kiện, do vậy điểm (x_0, y_0) là điểm cực trị hay không, hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2.$$

Do $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0$ và ta chỉ xét các điểm (x, y) sao cho $\varphi(x, y) = 0$. Khi đó, thay

$$dy = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}dx$$

vào biểu thức $d^2f(x_0, y_0, \lambda_0)$, ta nhận được

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = G(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2.$$

Do đó,

+ Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.

+ Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì điểm (x_0, y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Ví dụ 1.23. *Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = xy$ với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$.*

Giải: Hàm Lagrange có dạng

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

+ Tìm điểm dừng có điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ta nhận được 4 nghiệm

$$A_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), A_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), A_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}), A_4(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Với mọi điểm (x, y) thuộc miền ràng buộc hay $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, ta có

$$2xdx + 2ydy = 0 \quad \text{và } F"_{x^2} = 2\lambda, F"_{xy} = 1, F"_{y^2} = 2\lambda.$$

Ta xét tại các điểm:

+ Điểm $A_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} d^2F(A_1) =& dx^2 + 2dxdy + dy^2 \\ =& (dx + dy)^2 \\ =& 4dx^2. \end{aligned}$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm A_1 và giá trị cực tiểu $f(A_1) = -\frac{1}{2}$.

+ Bằng cách làm tương tự, hàm số đạt cực tiểu tại điểm A_2 và giá trị cực tiểu $f(A_2) = -\frac{1}{2}$. Hàm số đạt cực đại tại các điểm A_3, A_4 và giá trị cực đại $f(A_3) = f(A_4) = \frac{1}{2}$.

1.13. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

1.13.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ và điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.

+ Hàm số f được gọi là *đạt giá trị lớn nhất* tại điểm M_0 trên miền D, nếu

$$f(M_0) \geq f(M), \;\; \forall M \in D.$$

+ Hàm số f được gọi là *đạt giá trị nhỏ nhất* tại điểm M_0 trên miền D, nếu

$$f(M_0) \leq f(M), \;\; \forall M \in D.$$

Chú ý rằng mọi hàm $f(x, y)$ liên tục trên một miền đóng và bị chặn $D \subseteq \mathcal{R}^2$ đều tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D.

1.13.2. Phương pháp tìm

Ta nhận thấy rằng: Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất tai điểm $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathcal{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in intD$, thì (x_0, y_0) sẽ là điểm cực trị không điều kiện. Khi đó, điểm này cũng là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$. Do vậy, ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đồ thị hàm số $f(x, y)$ trên miền D như sau:

Bước 1. Tìm các điểm dừng không điều kiện trên miền D: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$.

Bước 2. Tìm các điểm dừng có điều kiện trên miền biên ∂D hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên ∂D: $(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2}), ...(x_m, y_m)$.

Bước 3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ trên miền D xác định bởi công thức:

$$f_{LN} = \max\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...f(x_m, y_m)\},$$

$$f_{NN} = \min\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), ...f(x_m, y_m)\}.$$

Ví dụ 1.24. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x, y) = 8x^2 + 3y^2 - (2x^2 + y^2 + 1)^2,$$

trên miền $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Giải: Miền D là một hình tròn đơn vị. Do đó, D là đóng và bị chặn. Hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D, nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.

+ Tìm các điểm dừng không điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0, \end{cases}$$

cho ta các điểm dừng:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_5 = 0. \end{cases}$$

+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên miền biên $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Thay $y^2 = 1 - x^2$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,y) = 8x^2 + 3(1-x^2) - (2x^2 + 1 - x^2 - 1)^2 = x^2 - x^4 - 1,$$

với $x \in [-1,1]$. Dễ dàng thấy rằng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $(x^2 = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{1}{2})$, nhỏ nhất tại $(x = 0, y^2 = 1)$ hoặc $(x^2 = 1, y = 0)$.

+ Kết luận: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ được xác định bởi:

$$f_{LN} = \max\{f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), ...\} = f(0,0) = -1,$$

$$f_{NN} = \min\{f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), ...\} = f(x_4,y_4) = f(x_5,y_5) = 0.$$

Ví dụ 1.25. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x,y) = e^x(x+y)(x-y+4),$$

trên tam giác OAB, với $A(-5,0), B(0,5)$.

Giải: + Tìm các điểm dừng không điều kiện: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x(x^2 - y^2 + 6x + 4y + 4) = 0 \\ e^x(-2y + 4) = 0, \end{cases}$$

cho ta các điểm dừng:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Điểm $(x_1, y_1) \in (OAB)$ thỏa mãn. Điểm (x_2, y_2) không thuộc miền ràng buộc.

+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên biên $OA : y = 0, \ \ x \in [-5,0]$. Thay $y = 0$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,0) = e^x(x^2 + 4x),$$

với $x \in [-5,0]$. Ta có $f'(x,0) = e^x(x^2 + 6x + 4)$. Vì loại điểm (x_2, y_2) và để tiện cho việc sử dụng, ta ký hiệu các điểm dừng và 2 điểm đầu mút của đoạn OA là

$$\begin{cases} x_2 = -3 - \sqrt{5} \\ y_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên biên $OB: x=0,\ \ y\in[0,5]$. Thay $x=0$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,0)=-y^2+4y,$$

với $y\in[0,5]$. Ta có $f'(0,y)=-2y+4$. Khi đó, ta có thêm điểm đầu mút $(x_5=0,y_5=5)$.

+ Xét hàm số $f(x,y)$ trên biên $AB: y=x+5,\ \ x\in[-5,0]$. Thay $y=x+5$ vào hàm số $f(x,y)$, ta nhận được

$$f(x,x+5)=e^x(-2x-5),$$

với $x\in[-5,0]$. Ta có $f'(x,x+5)=e^x(-2x-7)$. Khi đó, ta có thêm điểm dừng $(x_6=-\frac{7}{2},y_6=\frac{3}{2})$.

+ Kết luận: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ được xác định bởi:

$$f_{LN}=\max\{f(x_1,y_1),f(x_2,y_2),...,f(x_6,y_6)\}=f(x_1,y_1)=f(x_3,y_3)=0,$$
$$f_{NN}=\min\{f(x_1,y_1),f(x_2,y_2),...,f(x_6,y_6)\}=f(x_2,y_2)=e^{-3-\sqrt{5}}(-2\sqrt{5}-10).$$

Bài tập chương 1

Bài 1.1. Cho hàm số $z=z(x,y)$ được xác định bởi phương trình ẩn:

$$x=e^{2z}(z+y^2+2y).$$

Tính vi phân toàn phần $dz(x,y)$.

Bài 1.2. Tính gần đúng số

$$I=\sqrt{e^{-0.02}+2.11^3}.$$

Bài 1.3. Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình

$$z=x^3\sin(yz)+3xe^{\frac{y^2}{z}}.$$

Tính gần đúng giá trị của z tại điểm $(0.98,0.01)$.

Bài 1.4. Cho hàm số

$$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\frac{y}{x}.$$

a) Rút gọn biểu thức: $A=z''_{x^2}+z''_{y^2}$.

b) Tính giá trị của $d^2z(0,1)$.

Bài 1.5. Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình ẩn

$$z=x^2y+2xe^{\frac{y}{z}}.$$

Tính gần đúng giá trị của z tại điểm $(0.99,0.02)$.

Bài 1.6. Tìm cực trị không điều kiện của các hàm số sau:

a) $z = xye^{x-y}$.

b) $z = e^{2x}(x^2 + y^2 - 2)$.

c) $z = xy^2 + x^4 + y^4$.

d) $z = xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

e) $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

f) $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

g) $z = e^x(x + y)(x - y + 4)$.

Bài 1.7. Tìm các hằng số A, B, C để hàm số

$$z = 2x^3 + 3xy - 2y^3 + Ax + By + C,$$

đạt cực trị tại các điểm $M_1(1, -1)$ và $z(1, -1) = 0$.

Bài 1.8. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{4}y^4$$

với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $z = x^2 + y^2 - 2x^2y + 1$ trên miền $D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bài 1.10. Cho hàm số $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

a) Tìm cực trị của z.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền $D = \{(x, y) :\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Hướng dẫn giải bài tập chương 1

Bài 1.1. Sử dụng công thức $dz = z'_x dx + z'_y dy$, với

$$z'_x = \frac{e^{-2z}}{2(y+1)^2 + 2z - 1}, z'_y = \frac{-2(y+1)}{2(y+1)^2 + 2z - 1}.$$

Bài 1.2. Đặt hàm số $f(x, y) = \sqrt{2^{2x} + y^3}$. Khi đó $I = f(-0.02, 2.11)$ và

$$I \approx f(0, 2) + df(0, 2) = 3 - \frac{1}{3} \times 0.01 + 2 \times 0.11 = 3.2167.$$

Bài 1.3. Theo công thức:

$$z(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta_x + z'_y(x_0, y_0)\Delta_y,$$

trong đó $(x_0, y_0) = (1, 0), \Delta_x = -0.02, \Delta_y = 0.01$. Khi đó, $z(0.98, 0.01) \approx 2.97$.

Bài 1.4. Cho hàm số

$$z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\frac{y}{x}.$$

a) Rút gọn biểu thức: $I = z''_{x^2} + z''_{y^2}$.

b) Tính giá trị của $d^2z(0,1)$.

Ta có

$$z''_{x^2} = \frac{-x^2+2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z''_{y^2} = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z''_{xy} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Khi đó, ta có $I = 0, d^2z(0,1) = dx^2 + 2dxdy - dy^2$.

Bài 1.5. Theo công thức:

$$z(x_0+\delta_x, y_0+\delta_y) \approx z(x_0,y_0) + z'_x(x_0,y_0)\Delta_x + z'_y(x_0,y_0)\Delta_y,$$

trong đó $(x_0,y_0) = (1,0), \Delta_x = -0.01, \Delta_y = 0.02$. Khi đó, $z(0.99, 0.02) \approx 2.02$.

Bài 1.6. a) $z = xye^{x-y}$.

b) $z = e^{2x}(x^2+y^2-2)$.

$$\begin{cases} z'_x = y(x+1)e^{x-y} = 0 \\ z'_y = x(1-y)e^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta = {z''_{xy}}^2 - z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1,y_1) = 1 > 0, \Delta(x_2,y_2) = -1 < 0 \Rightarrow z_{min} = z(x_2,y_2) = -e^{-2}.$$

c) $z = xy^2 + x^4 + y^4$.

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 + y^2 = 0 \\ z'_y = 2y(x+2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta = {z''_{xy}}^2 - z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_2,y_2) > 0, \Delta(x_3,y_3) > 0, \Delta(x_1,y_1) = 0.$$

Xét tại (x_1,y_1).

$$z(0,0) = 0, z(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4} < 0 \ \forall n \geq n_0, z(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4} < 0 \ \forall n \geq n_0.$$

Như vậy, hàm số không có cực trị.

d) $z = xy\sqrt{1+x^2+y^2}$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0, \end{cases}$$

$$z(0,0)=0, z(\frac{1}{n},\frac{1}{n})>0\ \forall n\geq n_0, z(\frac{1}{n},-\frac{1}{n})<0\ \forall n\geq n_0.$$

Như vậy, hàm số không có cực trị.

e) $z=3x^2y+y^3-18x-30y$.

$$\begin{cases} z'_x=6xy-18=0 \\ z'_y=3y^2+3x^2-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=3, \end{cases} \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3, \end{cases} \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1, \end{cases} \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1,y_1)=\Delta(x_2,y_2)<0, \Delta(x_3,y_3)=\Delta(x_4,y_4)>0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại (x_2,y_2) và đạt cực tiểu tại (x_1,y_1).

f) $z=x^4+y^4-4xy+1$.

$$\begin{cases} z'_x=4x^4-4y=0 \\ z'_y=4y^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0, \end{cases} \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1, \end{cases} \begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=-1. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_3,y_3)=\Delta(x_2,y_2)<0, \Delta(x_1,y_1)=0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại (x_2,y_2) và đạt cực tiểu tại (x_3,y_3). Hàm số không đạt cực trị tại (x_1,y_1).

g) $z=e^x(x+y)(x-y+4)$.

$$\begin{cases} z'_x=e^x(x^2-y^2+6x+4y+4)=0 \\ z'_y=e^x(-2y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=-4 \\ y_2=2. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$\Delta={z''_{xy}}^2-z''_{x^2}.z''_{y^2}, \Delta(x_1,y_1)>0, \Delta(x_2,y_2)<0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại (x_2,y_2).

Bài 1.7. Tìm các hằng số A,B,C để hàm số

$$z=2x^3+3xy-2y^3+Ax+By+C,$$

đạt cực trị tại các điểm $M_1(1,-1)$ và $z(1,-1)=0$.

$$\begin{cases} z'_x(1,-1)=0 \\ z'_y(1,-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3, \end{cases} \quad z(1,-1)=0 \Rightarrow C=5.$$

Thử lại: Thỏa mãn.

Bài 1.8. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{4}y^4$$

với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}, (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}});$$

$$\lambda = \frac{3}{4}, (x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

$$d^2L(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{4}) = -6dx^2 < 0, d^2L(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{4}) = -6dx^2 < 0$$

$$d^2L(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}) = 10dx^2 > 0, d^2L(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}) = 10dx^2 > 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ và cực tiểu tại $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $z = x^2 + y^2 - 2x^2y + 1$ trên miền $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}).$$

Tại biên $x^2 + y^2 = 1$, ta có $z(x,y) = f(y) = 2(y^3 - y + 1)$ với $|y| \leq 1$.

$$f(-1) = f(1) = 2, f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}), f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Vậy hàm số đạt nhỏ nhất là $2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ và lớn nhất là $2(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Bài 1.10. Cho hàm số $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

a) Tìm cực trị của z:

$$z_{\min} = -\frac{9}{8} \text{ tại } (-\frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 1).$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền $D = \{(x,y) :\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$: Xét trên các biên và các điểm cực trị trên miền D.