

BÀI TẬP GIẢI TÍCH I CHO CÁC LỚP TÍN CHỈ

CHƯƠNG I: GIỚI HẠN DÃY SỐ

1.1. Viết các số phức sau dưới dạng đại số.

a. $\frac{1}{1+3i} - \frac{1}{1-3i}$; b. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$; c. $\frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^3(1-i)}$; d. $\sqrt[3]{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}$

1.2.

a. Cho số phức $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, tính z^{2012} .

b. Tìm phần thực và ảo của $z = (1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c. Biểu diễn hàm số $\cos 5x$, $\sin 5x$ theo các hàm số $\cos x$, $\sin x$.

1.3. Giải các phương trình sau trong tập số phức.

a. $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 6) - z^2 = 0$; b. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$

c. $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$; c. $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$

1.4. (Olympic 2000) Cho số tự nhiên $m > 1$ và số phức z có môđun bằng 1. Chứng minh rằng

phương trình $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = z$ chỉ có các nghiệm thực.

1.5. Bằng định nghĩa hãy chứng minh sự hội tụ của các dãy số với phân tử tổng quát thứ n tương ứng sau:

a. $u_n = \frac{n+1}{4n+1}$; b. $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$; c. $u_n = \frac{3+(-3)^n}{4^n}$

1.6. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right)$;

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \cos 2n}$;

d. $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 1} \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 10} - 2n^2}{3n - 5}$.

1.7. Cho dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ với $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$

a. Chứng tỏ rằng $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Biểu diễn u_{n+1} qua u_n .

c. Tính $u_{n+1} - u_n$ và chứng tỏ rằng $\{u_n\}$ đơn điệu. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1.8.

a. Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2}$, $y_n = x_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$, $\forall n \geq 3$.

Chứng minh rằng: Hai dãy (x_n) và (y_n) kề nhau.

b. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $0 \leq x_{n+m} \leq \frac{n+m}{nm}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

1.9. Tìm giới hạn của dãy sau:

a. $u_n = \frac{2}{u_{n-1}} + 1$, $u_0 = 1$,

b. $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$, $u_0 = \sqrt{3}$.

c. $u_n(3 + u_{n-1}) + 1 = 0$, $u_0 = 1$,

d. $u_n = \sqrt{a+u_{n-1}}$, $(n > 1)$, $u_1 = \sqrt{a}$, $a > 0$.

e. $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$,

f. $u_n = \frac{1}{2} + \frac{u_{n-1}^2}{2}$, $u_1 = \frac{1}{2}$.

1.10 (Olympic 2005) Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_{n+1} = u_n^2 - 2$, $u_1 = 5$. Hãy tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n}$.

CHƯƠNG II: PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

$$y = \sqrt{1 - \ln(x^2 - 1)}; y = \frac{1}{2|x| + |x-1| - 3}; y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \arcsin \frac{2x+1}{x-2}; y = \log \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} + \ln x$$

2.2. Tìm miền giá trị của các hàm số sau :

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2}; y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}; y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}; y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

2.3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$

b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$;

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{3x-1}}{x-3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 5} \right)^{(x^2 - 2)}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$$

2.4. Tính các giới hạn sau.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \arctan x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x) \arcsin 2x}{(e^{2x} - 1) \tan^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln x}{\arctan^2(x-1)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+3 \sin x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin 5x}{(e^{3x} - 1) \ln(1 + \tan x)}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(1+3x^2)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1-2x)}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1 + \tan 2x)}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin 2x}}{\ln(1+2x)}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 3x} - 1}{\ln(1 + \tan 2x)}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{\arctan^2 x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \tan^2 x \right)^{\frac{1}{\ln(1+x \sin 3x)}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{3x} + \sin 2x \right)^{\cot x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2 e^x \right)^{\frac{1}{1-\cos 7x}}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x + \tan 5x}{3x + x^5}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x - \sin^2 x}{\tan^2 x + \ln(1+7x)}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2-x^5)}{(e^x - 1)^2 + \tan^3 x}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x (\cos 4x - 1)}{\ln(1+x^3) + \arcsin^5 x}$$

2.5. Khảo sát tính liên tục của các hàm số

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{1 + xe^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

2.6. Xác định các giá trị của tham số để các hàm sau liên tục trên miền xác định

a) Tìm hằng số A để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{e^x - e^{-x}} & \text{khi } 0 < |x| < 1 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

b) Xác định hằng số A để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x \neq 0 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x+a & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sin 2x \ln(1+x^2)}{x^3} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x > 0 \\ (1+3\sin^2 x) & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

2.7. Tìm điểm gián đoạn và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau

1) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

2) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{3|x-2|}$

3) $y = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$

4) $y = \frac{\sqrt[3]{5x-4} - 1}{x^2 - x}$

5) $y = x \cot x$

6) $y = \frac{1}{1 - e^{2-x}}$

7) $y = \frac{1}{x^2 + e^{\frac{1}{x-3}}}$

8) $y = \begin{cases} 4 & \text{khi } |x| > 2 \\ 2 & \text{khi } x = 0, x = \pm 2 \\ 4 - x^2 & \text{khi } 0 < |x| < 2 \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{\ln(1+2x^2)} & \text{khi } x < 0 \\ -2x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

2.8. Tính các đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; b) $y = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$;

c) $y = \ln(x + \sqrt{5 + x^2})$

d) $y = e^{2x+1} \ln \sin x$;

e) $y = x^{-x} 2^x x^2$;

f) $y = x^{x^x}$.

2.9. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$. Tính $f'(1)$

2.10. Xét tính khả vi của các hàm số sau:

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} e^x & ; x > 0 \\ 1 + \sin x & ; x \leq 0 \end{cases}; \quad \text{b. } f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{khi } x > 0 \\ \sin x + \cos x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases};$$

$$\text{c. } y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^2|; \quad \text{d. } y = |x| + |x+2|$$

2.11. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{1}{x-x^2}; \quad \text{b) } y = \sin ax \cdot \sin bx; \quad \text{c) } y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, y^{(20)}$$

$$\text{d) } y = (x^2+1)\sin x; \quad \text{e) } y = e^{ax} \sin(bx+c); \quad \text{f) } y = e^x \cdot \sin x$$

$$\text{g) Chứng minh hàm số } y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}} \text{ thỏa mãn } y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

2.12. Tính:

$$\text{a) } d(xe^x); \quad \text{b) } d(\sqrt{x^2+a^2}); \quad \text{c) } \frac{d}{d(x^3)}(x^3-7x^6+11x^9); \quad \text{d) } \frac{d}{d(\cos x^2)}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

2.13.

a) Chứng minh rằng với mọi m , phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ không thể có 2 nghiệm khác nhau trong $[0,1]$.

b) Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có 3 nghiệm thực, trong đó

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

c) Cho $f(x)$ khả vi trên $[a,b]$ và có đạo hàm đến cấp hai trên (a,b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a,b)$ có thể tìm được ít nhất số $C_x \in (a,b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(C_x)$$

2.14. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

$$\text{a. } \frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}, (0 < b \leq a); \quad \text{b. } \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \tan \alpha - \tan \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}, (0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{c. } nb^{n-1}(a-b) \leq a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b), (b < a), n \in \mathbb{N}, \quad \text{d. } |\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|.$$

2.15. Sử dụng qui tắc L'Hopital tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{\ln(1+x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctan(x^2) - \pi}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x \sin 5x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin 2x - \cos x}{1 - \cos 5x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + 2x)}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi x}{2}}{\cot \pi x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\pi/2 - \arctan x)}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right]$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{7x+2}{x-1} - \frac{9}{\ln x} \right)$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x+4}{x-3} - \frac{13}{\ln(x-2)} \right)$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x)$$

$$26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left[\ln(x+1) - \ln x \right] \right\}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \cot(\pi x)$$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \tan x$$

$$31) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(\pi - 2 \arctan x)$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x - 1) \tan^2 2x$$

$$33) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$$

$$35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$$

$$36) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}}$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$40) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cot x}}$$

$$\begin{aligned}
 41) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos 4x}} & \quad 42) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\cos 2x + \tan x)^{\frac{1}{(4x - \pi)^2}} & 43) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} + \sin 2x - 3x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \\
 44) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} & 45) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} & 46) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}} \\
 47) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi/2 - \arctan x)^{\frac{1}{x}} & 48) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} & 49) \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{\frac{1}{\ln(\sin 5x)}}
 \end{aligned}$$

2.16 (Olympic 2003) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} f(a) = \frac{1}{2}(a - b) \\ f(b) = \frac{1}{2}(b - a) \end{cases}; f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0. \text{ Chứng minh rằng tồn tại các số đôi một khác nhau}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in (a, b) \text{ sao cho } f'(c_1) \cdot f'(c_2) \cdot f'(c_3) = 1$$

CHƯƠNG III : PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1. Tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx & \quad 2) \int \frac{(1-x)^2}{x^3 \sqrt{x}} dx & 3) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx \\
 4) \int (2^x + 3^x)^2 dx & 5) \int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx & 6) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx \\
 7) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx & 8) \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx & 9) \int \frac{dx}{x^4 - 1} \\
 10) \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx & 11) \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx & 12) \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx \\
 13) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx & 14) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx & 15) \int \cot^2 x dx \\
 16) \int \tan^2 x dx & 17) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} & 18) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 19) \int (3x+1)^3 dx & 20) \int \frac{dx}{\sqrt{-2x+1}} & 21) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\
 22) \int \frac{dx}{4x^2-1} & 23) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} & 24) \int \frac{dx}{\cos^2 9x} \\
 25) \int (3x^3+1)^3 x^2 dx & 26) \int (x^2+1)^{10} x dx & 27) \int x^2 \cos(x^3+2) dx \\
 28) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx & 29) \int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)} & 30) \int e^{3x^2+1} x dx \\
 31) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx & 32) \int \frac{\arccot 3x}{1+9x^2} dx & 33) \int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 34) \int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3} dx & 35) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tan x}} & 36) \int \frac{x+\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx \\
 37) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx & 38) \int \frac{e^x + e^{2x}}{1-e^x} dx & 39) \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3-\sin^4 x}} dx
 \end{array}$$

3.2. Sử dụng phương pháp đổi biến số hãy tính các tích các tích phân sau

$$\begin{array}{lll}
 1) \int x^3(1-2x^4)^{10} dx & 2) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} & 3) \int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx \\
 4) \int x^3 \sqrt{a-x^2} dx & 5) \int \frac{\sin 4x}{\cos^2 2x+4} dx & 6) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx \\
 7) \int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}} dx & 8) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} & 9) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx \\
 10) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} & 11) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}} & 12) \int \frac{x^2-x}{(x-2)^5} dx \\
 13) \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx & 14) \int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)} & 15) \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \\
 16) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} & 17) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} & 18) \int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} \\
 19) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & 20) \int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx & 21) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx
 \end{array}$$

3.3. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx; \quad 2) \int x^3 \cos(2x^2) dx \quad 3) \int x^3 \ln^2 x dx; \quad 4) \int (x^3 + 2x^2 + 1)e^{-2x} dx \\
 &5) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \quad 6) \int e^{-2x} (\cos 3x - \sin 4x) dx; \quad 7) \int \sin \sqrt[3]{x} dx; \quad 8) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx \\
 &9) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx; \quad 10) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx; \quad 11) \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad 12) \int \ln(x + \sqrt{16+x^2}) dx
 \end{aligned}$$

3.4. Tính tích phân các hàm hữu tỷ sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{2x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} dx; \quad 2) \int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} dx; \quad 3) \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx; \quad 4) \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2} \\
 &5) \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}; \quad 6) \int \frac{(3x+1) dx}{x(x^2+1)^2}; \quad 7) \int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2+3)(x^2+1)} dx; \quad 8) \int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx;
 \end{aligned}$$

3.5. Tính tích phân các hàm lượng giác sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} \quad 2) \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} \quad 3) \int \frac{dx}{3 \sin x + \cos x} \\
 &4) \int \frac{dx}{(3 + \cos 5x) \sin 5x} \quad 5) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1} dx \quad 6) \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx \\
 &7) \int \frac{\sin 2x}{4 \cos^2 x + 12 \cos x - 7} dx \quad 8) \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x} \quad 9) \int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx \\
 &10) \int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} dx \quad 11) \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad 12) \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} \\
 &13) \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx \quad 14) \int \frac{3 \cos x + 7 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx \quad 15) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} dx
 \end{aligned}$$

3.6. Tính tích phân các hàm vô tỷ

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx \quad 2) \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} \\
 &4) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad 5) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} \quad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}} \\
 &7) \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} \quad 8) \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2} \quad 9) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} \\
 &10) \int \frac{5x+1}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx \quad 11) \int \frac{-4x+2}{\sqrt{-9x^2+12x-3}} dx \quad 12) \int (-3x+7) \sqrt{x^2+4x+5} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 13) \int (3x+4)\sqrt{-4x^2+4x} dx & 14) \int \frac{3x^3+2x+1}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx & 15) \int \frac{-4x^3+5x^2+3x+1}{\sqrt{-4x^2+4x}} dx \\
 16) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}} & 17) \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} & 18) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}
 \end{array}$$

3.7. Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}; & 2) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx; & 3) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}; & 4) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \\
 5) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx; & 6) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; & 7) \int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.
 \end{array}$$

B: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.8. Sử dụng trực tiếp định nghĩa, tính các tích phân xác định sau:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^1 x^2 dx; & b) \int_1^2 e^x dx; & c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx
 \end{array}$$

3.9. Sử dụng tổng tích phân, tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right); & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \dots + \frac{n^2}{2n} \right) \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} \right); & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)
 \end{array}$$

3.10. Tính các tích phân xác định sau:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx & 2) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} & 3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx \\
 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} & 5) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4} & 6) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx \\
 7) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} dx & 8) \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx & 9) \int_3^{\sqrt{3}} x^2 \sqrt{9-x^2} dx \\
 10) \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx & 11) \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} & 12) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx
 \end{array}$$

$$13) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$14) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$$

$$15) \int_0^{\sqrt{5}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$$

3.11. Tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx; \quad & 2) \int_1^2 (x^2+3x) \log_2 x dx; \quad & 3) \int_{-1}^1 x^3 \cdot \arctan x dx; \quad & 4) \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ 5) \int_0^1 (2x^3+x+3)e^{-3x} dx; \quad & 6) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad & & & 7) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \end{aligned}$$

3.12. Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi các đường

$$\begin{aligned} 1) y^2 = 16 - 8x, y^2 - 24x = 48; \quad & 2) y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, y = 0, (0 \leq y \leq 1); \\ 3) y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}; \quad & 4) y^2 = 16 - 8x, y^2 - 24x = 48; \quad & 5) y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x. \end{aligned}$$

3.13.

a. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh trục Ox.

$$\begin{aligned} 1. y = x^2 - 4x + 3, y = -2x + 3; \quad & 2. y = x^2; y = 12 - 4x; y = 0; x \geq 0 \\ 3. y = 9 - x^2; 9x + 2y - 18 = 0; \quad & 4. x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 + 2x = 0 \end{aligned}$$

b. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh trục Oy.

$$\begin{aligned} 1. y = x^2 - 4x + 3, y = -2x + 3; \quad & 2. y = x^2; y = 12 - 4x; y = 0; x \geq 0 \\ 3. y = 9 - x^2; 9x + 2y - 18 = 0; \quad & 4. x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ 5. x^2 + y^2 = a^2 (a > 0); \quad & 6. y = x^3, y = 2x. \end{aligned}$$

3.14. Tính độ dài đường cong cho bởi các phương trình sau

$$\begin{aligned} 1) y = e^x, 0 \leq x \leq 1; \quad & 2) y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}; 0 \leq x \leq b < a \\ 3) x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, 0 < b \leq y \leq a; \quad & 4) y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ 5) x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y, 1 \leq y \leq e; \quad & 6) x = a \cos^3 t; y = \sin^3 t, a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi \\ 7. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

3.15. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay các đường cong sau theo các trục:

$$\begin{aligned} 1) y = \frac{x^3}{3}, 0 \leq x \leq a \text{ quay quanh Ox}; \quad & 2) x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e \text{ quay quanh Oy} \\ 3) y^2 = 4x, (0 \leq x \leq 1) \text{ khi quay quanh Ox}; \quad & 4) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ quay quanh Oy}. \end{aligned}$$

3.16. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad (x > 0);$

b. $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1,$

c. $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}.$

C. TÍCH PHÂN SUY RỘNG CÓ CẬN VÔ HẠN

3.16. Tính các tích phân suy rộng sau

1) $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

3) $\int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+8)^2}$

5) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

6) $\int_0^{+\infty} (2x^3+4x^2+6x)e^{-3x} dx$

7) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

9) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

11) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx$

12) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

13) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+x-6)}$

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

3.17. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$

2) $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}} \right) dx$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{2+x^2} dx$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left(e^{\frac{1}{3x}} - 1 \right) dx$

5) $\int_0^{+\infty} \left(\cos \frac{5}{x} - \cos \frac{7}{x} \right) dx$

6) $\int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-x} \right) \cdot \tan \frac{1}{x^2} dx$

7) $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \tan^2 \frac{1}{x} \right) dx$

8) $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2+1} dx$

9) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{x}+5x^2} dx$

10) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{3x^{15}+2x+1}}$

11) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^9+\ln x}} dx$

12) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x^2+3\ln x} dx$

$$13) \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5 + e^x}} dx$$

$$14) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3 + \sin x} dx$$

$$15) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$16) \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x^3 + 3x + \ln x} dx$$

$$17) \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{3x^3 + 5x^2 + 1}} dx$$

$$18) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$$

D. TÍCH PHÂN SUY RỘNG CÓ HÀM DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN CÓ ĐIỂM CỰC

3.18. Tính các tích phân suy rộng sau:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$2) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

$$3) \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$5) \int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$6) \int_0^2 \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$7) \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$9) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

3.19. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$1) \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x}} dx$$

$$3) \int_0^1 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}} dx$$

$$5) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$$

$$6) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin 3x} - 1}$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3-1}}$$

$$8) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$$

$$9) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 4x}{\sqrt{5x^{10}+2x^9}} dx$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^8+7x^3+x}} dx$$

$$11) \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+3x}} dx$$

$$12) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}} dx$$

$$13) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$$

$$14) \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$$

$$15) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

CHƯƠNG 4: LÝ THUYẾT CHUỖI

4.1. Chứng minh rằng các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây hội tụ và hãy tìm tổng của chúng.

a. $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; b. $u_n = \frac{1}{n^2+n}$; c. $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; d. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$
 e) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^{n-1}}$; f) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n}$; g) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$; h) $\sum_{n \geq 0} \ln^{2n} 2$

4.2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

a) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$; b) $u_n = \arctan \frac{n^2-n}{n^2+1}$; c) $u_n = \frac{2^n+n}{3^n+n^3+3}$; d) $u_n = \ln(1 + \tan \frac{1}{n^2})$
 e) $u_n = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+3\ln n}$; f. $u_n = \frac{2+\cos n}{n^\alpha}, \alpha > 0$; g. $u_n = n^{-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$; h. $u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2}$
 i) $u_n = \frac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$; j. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$; k. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$; l. $u_n = \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x+1}}$.

4.3. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$; b. $u_n = \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$; c. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$; d. $u_n = n! \prod_{k=1}^n \sin \frac{1}{2^k}$; e. $u_n = \frac{2.4...(2n)}{n^n}$;
 f. $u_n = \frac{a^n}{n^2+1}$, $a > 0$; g. $u_n = (\frac{n+1}{2n-1})^{n \ln n}$; h. $u_n = (\arctan \frac{1}{n})^n$; i. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

4.4. Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $u_n = (-1)^n (\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}})$; b. $u_n = (1 - \frac{n}{\ln n})^{-n}$; c. $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^4+1})$; d. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+2}$,
 e. $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$; f. $u_n = \sin \pi(\frac{1}{n} + n)$; g. $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$; h. $u_n = \frac{(-1)^n n^2}{(\ln n)^n}$.

4.5. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (\frac{2x+1}{x+2})^n$ hội tụ đều trên đoạn $[-1,1]$

4.6. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

- Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.
- Xét sự liên tục của tổng $S(x)$.
- Xét sự khả vi của tổng $S(x)$.

4.7. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa có số hạng tổng quát sau:

- a. $u_n(x) = x^n \ln n$; b. $u_n(x) = (nx)^n$; c. $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; d. $u_n(x) = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$
 e. $u_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$; f. $u_n(x) = \frac{(5x)^n}{n!}$; g. $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$; h. $u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}, \alpha > 0$

4.8. Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi lũy thừa có số hạng tổng quát sau:

- a. $u_n(x) = (3n+1)x^{3n}, n \geq 1$; b. $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n, n \geq 0$; c. $u_n(x) = \frac{n^2 + 3n - 1}{n+3} \frac{x^n}{n!}, n \geq 0$,
 d. $u_n(x) = \cosinhna.x^n, a > 0, n \geq 0$; e. $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n}, n \geq 1$.

4.9. Khai triển thành chuỗi Taylor của các hàm số sau:

- a. $f(x) = \frac{1}{x}$ tại lân cận điểm $x = 3$.
 b. $f(x) = e^{x-1}$ tại lân cận điểm $x = -1$.
 c. $f(x) = \sin x$ tại lân cận điểm $x = 2$.

4.10. Khai triển thành chuỗi M'claurin các hàm số sau:

- a. $f(x) = x^2 e^x$; b. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; c. $f(x) = \sin^2 x$
 d. $f(x) = e^x \cos x$; e. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$; f. $f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$
 g. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

4.12. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và

$$f(x) = \pi - x \quad \text{với } 0 < x < \pi.$$

4.12. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x) =$

$$1 - \frac{2x}{\pi} \quad \text{với } 0 < x < \pi. \text{ Từ đó hãy tính tổng } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4.13. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ với $-\pi < x < \pi$

$$\text{Từ đó tính tổng } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

4.14. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số: $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ với $-\pi < x < \pi$

4.15. Khai triển hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ thành chuỗi theo các hàm

a. $\sin nx$;

b. $\cos nx, n \in \mathbb{N}$

Từ đó tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4.16. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ $T = 2l$

a) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 3x & \text{nếu } 2 < x < 4 \end{cases}$, $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 4$

b) $f(x) = x^2, x \in (0, \pi)$, $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = \pi$.

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -3 < x \leq 0 \\ x & \text{nếu } 0 < x < 3 \end{cases}$, $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 6$.

Từ đó tính tổng chuỗi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

d) $f(x) = x - \frac{x^2}{2}, x \in [0, 2]$, $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2$.

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 3-x & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 3$

4.17. Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier theo hàm số sin

a) $f(x) = x \cos x, x \in (0, \pi)$;

b) $f(x) = x(\pi - x), 0 \leq x < \pi$.

c) $f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $f(x) = |\sin x|, x \in [-\pi, \pi]$.

4.18. Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier theo hàm số cosin

a) $f(x) = x \cos x, x \in (0, \pi)$. Tính tổng chuỗi $\sum_{n \geq 0} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2}$

b) $f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x \leq \pi \end{cases}$. Tính tổng $S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$; $S_2 = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$

d) $f(x) = |\cos x|$. Tính $S_1 = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{4n^2 - 1}$; $S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$

e) $f(x) = |\sin x|, x \in [-\pi, \pi]$. Tính $S = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

4.19. Hãy khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi Fourier

a) $f(x) = x, x \in (0, 2)$.

b) $f(x) = x^2, x \in (0, 1)$. Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.