

ÔN TẬP MÔN GIẢI TÍCH 1

Bài 1: Tính các giới hạn sau

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{\ln(1 - 2x^2)}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{x \sin x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 4x)^{\ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\ln x}$; 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{x}}$; 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$;
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \frac{\cos \frac{1}{x}}{x}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}$; 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x + 1)}{x^3}$; 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}})$; 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1 + x \sin 4x)}{3^{x^2} - 1}$

Bài 2:

1. Xác định hằng số A để các hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{e^x - e^{-x}} & \text{khi } 0 < |x| < 1 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases} ; \text{ b. } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2)} & \text{khi } x \neq 0 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ Xét sự liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{1 + xe^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0.$$

$$3. \text{ Phân loại điểm gián đoạn của hàm số } f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x+1}}}$$

Bài 3:

1. Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, a]$. Chứng minh $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$. Áp

$$\text{dụng tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

$$2. \text{ Cho } I(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(1+t^2)}. \text{ CM: } I(x) \text{ là hằng số với } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

và tính $I(x)$.

Bài 4: Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x)^3} dx; \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x)} dx;$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x^2-1}} dx; \quad 5. \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - \cos x} dx; \quad 6. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(e^{x^2} - e^{-x^2})}} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^3} dx; \quad 8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx;$$

9. Xét sự hội tụ theo tham số α của các tích phân sau:

$$a. \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x^2} dx; \quad b. \int_0^1 x^\alpha \ln x dx; \quad c. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d. \text{Cho } I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}. \text{ Chứng minh tích phân hội tụ } \forall \alpha \text{ và tính } I.$$

Bài 5:

- Cho hàm số $y = x^2 e^{-x}$. Tính $d^2 y(0)$ và tìm đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Cho $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$. Tính $y^{(2010)}(0)$ và khai triển Taylor đến $o((x-2)^n)$.
- Cho $y = (1+x)^2 \cos 4x$. Tính $y^{(20)}(0)$ và khai triển Maclaurin đến $o(x^6)$.
- a. Cho hàm số $y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$. Tính $dy(1)$; b. Cho $y = \frac{1}{1-x^2}$. Tính $y^{(2014)}(0)$.
- c. Cho $y = \frac{x^3}{x-1}$. Tính $y^{(2014)}(0)$; d. Cho $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. Tính $y^{(2014)}(2)$.
- Cho hàm số $y = x^2 \sin 2x$. Tính $y^{(50)}(\frac{\pi}{4})$.

Bài 6: Chứng minh rằng

- $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \forall x > 1;$
- $x > \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0$
- $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2), \forall x;$
- $\cos x > x - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0.$
- CMR: $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x.$

Bài 7:

- Khai triển Taylor của hàm số $y = x + \arctan x$ đến $o((x-1)^3)$.
- Xác định hằng số A để hàm số sau khả vi tại $x = 0$ và tính $f'(0)$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ A & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- Tính gần đúng giá trị của số $a = \sqrt[4]{\frac{3-0,01}{3+0,01}}$

4. Tính gần đúng giá trị của số $a = \sqrt[3]{\frac{e^{0,01}}{0,99}}$

5. Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{3} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ tại $x = 1$.

6. Cho hàm số $y = x(1 + \frac{1}{x})^x$, $x > 0$. Tính $dy(x)$.

7. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Viết 4 số hạng đầu tiên trong công thức Taylor tại lân cận $x = 1$ và tìm giá trị trung gian $c \in [1, 4]$ trong công thức Lagrange.

8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ Tính $f'(0)$? và chứng minh $f''(0)$ không tồn tại.

Bài 8: Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n^2 + 3n + 5)}{\sqrt{4n^4 + 3n^3 + 5}}; \quad 2. \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos \frac{2}{n}); \quad 3. \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \tan \frac{1}{n^2})$$

Bài 9:

1. Khai triển hàm số $f(x) = x$, $x \in (0, 2)$ thành chuỗi Fourier và tính tổng S của chuỗi số $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

2. Khai triển hàm số $f(x) = x$, $x \in (0, 2)$ thành chuỗi các hàm cosin và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. Khai triển hàm số $f(x) = x^2$, $x \in (0, 1)$ thành chuỗi Fourier và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. Khai triển hàm số $f(x) = \ln(2 + x^2)$ thành chuỗi lũy thừa của x và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$.

5. Khai triển hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ thành chuỗi lũy thừa của $(x+1)$ và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^{n+1}}$.

6. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{x}{x+4}$ thành chuỗi lũy thừa của $(x-1)$ và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$.

7. Khai triển hàm số $f(x) = xe^x$ thành chuỗi lũy thừa của $(x+2)$ và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n(n-2)}{n!}$.

8. Khai triển hàm số $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận $x = -1$ và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)4^{n+1}}$.

9. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ thành chuỗi M'claurin và tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^{3n}}$.

Bài 10: Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n (x-1)^{2n+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \left(\frac{x+2}{x} \right)^n$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+3)4^n} (x+1)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-2} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{2n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} (x-1)^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^2 4^n} (x+3)^n$

Bài 11:

1. Cho hàm số $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Tính tích phân $I = \int_{-\ln 3}^{-\ln 2} f(x) dx$.

2. Cho hàm số $y(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Chứng minh rằng $\forall x \in (-1, 1)$ thì $y'(1-x) = 1+x-y$.

3. Cho hàm số $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

a. Tìm miền xác định của hàm số.

b. Tính tổng S của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.