BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) \to (q \vee r)$. Mệnh đề đã cho có phải là hằng đúng không?

Giải

Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \vee q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)$	$q \vee r$	Mệnh đề
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho luôn nhận giá trị 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

2. Lập bảng giá trị chân lý của mênh đề $[(p \leftrightarrow q) \oplus (\overline{p} \vee \overline{r})] \vee (q \wedge r)$. Mệnh đề đã cho có phải là hằng đúng hay không?

Giải

Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{r}$	$\overline{p} \vee \overline{r}$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\overline{p} \vee \overline{r})$	$q \wedge r$	Mệnh đề
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho nhận giá trị cả 0 và 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho không phải là một hằng đúng.

3. Chứng minh mệnh đề sau là một hằng đúng $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$.

Giải

Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề đã cho:

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)]$	Mệnh đề
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có mệnh đề đã cho luôn nhận giá trị 1.

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử mệnh đề đã cho không phải là hằng đúng.

Khi đó tồn tại các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r = 0$.

Suy ra $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) = 1$ (1) và $r = 0$ (2).

Từ (1) có $p \vee q = 1$ (3), $p \to r = 1$ (4) và $q \to r = 1$ (5). Từ (2) và (4) có $p = 0$. Từ (2) và (5) có $q = 0$. Do đó $p \vee q = 0$. Điều này mâu thuẫn với (3).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

Cách 3: Chứng minh bằng biến đổi tương đương và các mệnh đề tương đương cơ bản:

Có các mệnh đề tương đương cơ bản:

$p \to q = \neg p \vee q$, $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee 1 = 1$,

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, $p \vee \neg p = 1$, $p \wedge \neg p = 0$, $p \wedge 1 = p$, $p \vee 0 = p$.

Suy ra $p \to r = \neg p \vee r$, $q \to r = \neg q \vee r$.

Từ đó $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r = \neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r = [\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee r = \neg(p \vee q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee r$.

Có $(q \wedge \neg r) \vee r = (q \vee r) \wedge (\neg r \vee r) = (q \vee r)$.

Có $(p \wedge \neg r) \vee (q \vee r) = [(q \vee r) \vee p] \wedge [(q \vee r) \vee \neg r] = [(p \vee q) \vee r] \wedge [q \vee (r \vee \neg r)] = (p \vee q) \vee r$.

Có $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee r = \neg(p \vee q) \vee (p \vee q) \vee r = 1$

Kết luận: Mệnh đề đã cho là một hằng đúng.

4. Chứng minh: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Giải

<u>Cách 1:</u> Lập bảng giá trị chân lý các mệnh đề ở hai vế của đẳng thức mệnh đề đã cho:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý có $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Đó là điều cần chứng minh.

<u>Cách 2</u>: Chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử có $p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Khi đó tồn tại các giá trị của các mệnh đề p, q và r để có các trường hợp sau đây.

<u>Trường hợp 1</u>: $p \wedge (q \vee r) = 1$ và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = 0$. Khi đó có $p = 1$ (1), $q \vee r = 1$ (2), $p \wedge q = 0$ (3), $p \wedge r = 0$ (4).

Từ (1) và (3) có $q = 0$. Từ (1) và (4) có $r = 0$. Suy ra $q \vee r = 0$. Điều này mâu thuẫn với (2).

<u>Trường hợp 2</u>: $p \wedge (q \vee r) = 0$ (1) và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = 1$ (2).

Từ (2), nếu $p \wedge q = 1$ thì $p = 1$ và $q = 1$. Khi đó có $p \wedge (q \vee r) = 1$ là trái với (1).

Nếu $p \wedge r = 1$ thì $p = 1$ và $r = 1$. Khi đó có $p \wedge (q \vee r) = 1$ là trái với (1).

Kết luận: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

5. Không dùng bảng chân lý, chứng minh các mệnh đề dưới đây là hằng đúng:

a) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

b) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

c) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

Giải

a) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) = 0$.

Từ đó, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) = 1$ và $p \rightarrow r = 0$. Suy ra, $p \rightarrow q = 1$ (1), $q \rightarrow r = 1$ (2) và $p = 1$ (3), $r = 0$ (4). Từ (1) và (3) có $q = 1$. Từ (2) và (4) có $q = 0$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ mệnh đề đã cho là hằng đúng.

b) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p và q để $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q = 0$.

Từ đó, $p \wedge (p \rightarrow q) = 1$, q = 0. Suy ra, p = 1 (1), p $\rightarrow$ q = 1 (2) và q = 0 (3). Từ (1) và (3) có p $\rightarrow$ q = 0. Điều này mâu thuẫn với (2).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là hằng đúng.

c) Giả sử mệnh đề đã cho không là hằng đúng. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p, q và r để $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r = 0$.

Từ đó, $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) = 1$ và r = 0. Suy ra, $p \vee q = 1$ (1), p $\rightarrow$ r = 1 (2), q $\rightarrow$ r = 1 (3) và r = 0 (4).

Từ (2) và (4) có p = 0. Từ (3) và (4) có q = 0. Như vậy, $p \vee q = 0$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Kết luận: Mệnh đề đã cho là hằng đúng.

6. Không dùng bảng chân lý, chứng minh các cặp mệnh đề sau là tương đương:

a) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

b) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

c) $\overline{p \oplus q} \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

d) $(\overline{p \leftrightarrow q}) \Leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow q)$

Giải

a) Giả sử cặp mệnh đề đã cho không tương đương. Khi đó, có các giá trị của các mệnh đề p và q để xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $p \leftrightarrow q = 1 (1)$ và $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$ (2). Từ (2) có $p \wedge q = 0$ và $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$. Suy ra p và q có giá trị khác nhau. Điều này mâu thuẫn với (1).

Trường hợp 2: $p \leftrightarrow q = 0$ (1) và $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 1$ (2). Từ (1) có p và q nhận giá trị khác nhau nên $p \wedge q = 0$ và $(\bar{p} \wedge \bar{q}) = 0$. Điều này mâu thuẫn với (2).

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

b) Có $p \rightarrow q = \bar{p} \vee$ q và $\bar{q} \rightarrow \bar{p} =$ q $\vee \bar{p}$. Từ đó, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

c) Mệnh đề $\overline{p \oplus q} = 1 \Leftrightarrow p \oplus q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị như nhau. Mệnh đề $p \leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị như nhau.

Mệnh đề $\overline{p \oplus q} = 0 \Leftrightarrow p \oplus q = 1 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau. Mệnh đề $p \leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

d) Mệnh đề $\overline{p \leftrightarrow q} = 1 \Leftrightarrow p \leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Mệnh đề $\bar{p} \leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow \bar{p}$ và q nhận giá trị như nhau $\Leftrightarrow$ p và q nhận giá trị khác nhau.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

7. Sử dụng các phép biến đổi tương đương và các mệnh đề tương đương cơ bản, chứng minh sự tương đương logic sau

$$\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$$

Giải

Có mệnh đề tương đương cơ bản: $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

Mệnh đề $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = p \vee (\neg q \vee r) = p \vee (\neg q) \vee r$.

Mệnh đề $q \Rightarrow (p \vee r) = \neg q \vee (p \vee r) = p \vee (\neg q) \vee r$.

Kết luận: Cặp mệnh đề đã cho là tương đương.

8. Viết biểu thức logic mô tả điều kiện của các số thực a, b, c để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực dương.

Giải

Đặt t = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực dương".

Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực dương nếu có:

Trường hợp 1: Phương trình có vô số nghiệm: $p = (a = 0) \wedge (b = 0) \wedge (c = 0)$.

Trường hợp 2: Phương trình là bậc 1 có nghiệm thực dương: $q = (a = 0) \wedge (b*c < 0)$.

Trường hợp 3: Phương trình là bậc 2 có 1 nghiệm thực dương, 1 nghiệm thực âm: $r = a*c < 0$.

Trường hợp 4: Phương trình là bậc 2 có nghiệm thực dương: $s = (a*b < 0) \wedge (b*b - 4*a*c \geq 0)$.

Kết luận: Điều kiện cần tìm là $(p \vee q \vee r \vee s) \rightarrow t$.

9. Một tập hợp các toán tử logic được gọi là đầy đủ, nếu mỗi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề chỉ chứa các toán tử logic đó.

a) Chứng minh rằng $\vee, \wedge$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

b) Chứng minh rằng $\neg$ và $\vee$ cũng tạo thành một tập đầy đủ các toán tử logic.

Giải

a) Cần chứng minh các toán tử logic kéo theo ($\rightarrow$), tương đương ($\leftrightarrow$) và tuyển loại trừ ($\oplus$) được biểu diễn qua các toán tử $\vee, \wedge$ và $\neg$.

Có $p \rightarrow q = \neg p \vee q$.

Thật vây, $p \rightarrow q$ chỉ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi $p = 1$ và $q = 0$. Mặt khác, $\neg p \vee q$ chỉ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi $\neg p = q = 0$, tức là $p = 1$ và $q = 0$.

Có $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Có $p \oplus q$ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị.

Có $p \leftrightarrow q$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị. Do đó $p \oplus q = \neg(p \leftrightarrow q)$

Mặt khác, $\neg(p \leftrightarrow q) = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ cũng nhận giá trị 0 khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị. Từ đó $p \oplus q = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$.

Kết luận: Các toán tử $\vee, \wedge$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

b) Dựa vào kết quả câu a), cần chứng minh toán tử $\wedge$ biểu diễn qua các toán tử $\vee$ và $\neg$.

Có $p \wedge q$ nhận giá tri 1 khi và chỉ khi $p = q = 1$. Mặt khác, $\neg p \vee \neg q$ nhận giá trị 0 khi và chỉ khi $p = q = 1$. Do đó $\neg(\neg p \vee \neg q)$ nhận giá tri 1 khi và chỉ khi $p = q = 1$.

Từ đó có $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Kết luận: Các toán tử $\vee$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

10. Chứng minh

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

Giải

a) Lập bảng giá trị thuộc hai vế của đẳng thức:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị thuộc có $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ nhận cùng giá trị.

Kết luận: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Lập bảng giá trị thuộc hai vế của đẳng thức:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	Vế trái	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \cap \overline{C}$	Vế phải
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Từ bảng giá trị thuộc suy ra vế trái và vế phải có cùng giá trị.

Kết luận: $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$.