CHƯƠNG 3: BIẾN ĐỔI Z

Nội dung chính:

□ Chuyển đổi tín hiệu trên miền thời gian rời rạc sang miền z.

□ Biết các tính chất của biến đổi z.

□ Biểu diễn hàm hệ thống của LTI có quan hệ vào – ra là phương trình sai phân hệ số hằng bằng biến đổi z hữu tỉ.

*Các hàm Matlab liên quan:

Signal Processing Toolbox

freqz impz residuez tf2zp zp2sos zp2tf zplane

3.1 CÁC ĐIỂM CỰC VÀ ĐIỂM KHÔNG

Tóm tắt lý thuyết:

Biến đổi z của tín hiệu rời rạc x(n):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

X(z) là hàm hữu tỉ:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Giả sử a0 và b0 khác 0:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0} z^{M-1} + \dots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N + \frac{a_1}{a_0} z^{M-1} + \dots + \frac{a_M}{a_0}}$$

Do N(z) và D(z) là các đa thức theo z nên có thể biểu diễn như sau:

$$X(z) = Gz^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

Để biểu diễn trên đồ thị, điểm cực được đánh dấu bằng x và điểm không được đánh dấu bằng o.

Bài 3.1. Xác định điểm cực và điểm không dựa vào hàm zplane:

```
num = [1 2 3]; % Tử số
den = [2 4 7]; % Mẫu số
zplane(num,den);
```

Ta có thể vẽ các điểm cực và điểm không nếu đã biết điểm cực và điểm không bằng cách đưa thông số vào hàm **zplane** ở dạng vector cột:

```
zero = [-1 1+j*1];
pole = [j*2 -1+j];
zplane(zero',pole');
```

Để xác định điểm cực và điểm không, ta dùng hàm *tf2zp*: [z,p,k] = tf2zp(num,den) trong đó z, p là các điểm cực và điểm không lưu dạng vector hàng, k là hệ số khuếch đại:

```
num = [1 \ 2 \ 3]; % Tử số den = [2 \ 4 \ 7]; % Mẫu số [z,p,k] = tf2zp(num,den)
```

Nếu đã cho điểm cực và điểm không, ta có thể xác định lại biểu thức của biến đổi z bằng hàm *zp2tf*: [num,den] = zp2tf(z,p,k) (z, p ở dạng vector cột)

```
zero = [-1 1+j*1];
pole = [j*2 -1+j];
k = 2;
[num,den] = zp2tf(zero',pole',k)
```

Bài 3.2. Chương trình Matlab tính toán và hiển thị các điểm cực, điểm không, tăng tích; tính toán và hiển thị dạng phân số của biến đổi z sau:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-N}}$$

Sử dụng hàm tf2zp để tìm các điểm cực, điểm không, tăng tích;

Chương trình còn sử dụng hàm zp2sos cho kết quả là một ma trận Lx6, trong đó các hệ số ma trận là các hệ số của các thành phần hàm bậc hai của công thức (*)

$$sos = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{0L} & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix}$$

Nghĩa là:

$$H(z) = g {\prod_{k=1}^L} \, H_k(z) = g {\prod_{k=1}^L} \, \frac{{{b_0}_k}^+ {b_1}_k {z^{-1}}_+ {b_2}_k {z^{-2}}}{{{1 + a_1}_k {z^{-1}}_+ {a_2}_k {z^{-2}}}}$$

```
num=input('nhap cac he so o tu =');
den=input('nhap cac he so o mau so=');
[z,p,k]=tf2zp(num,den);grid;
m=abs(p);
disp('cac diem cuc tai');disp(z);
disp(' cac diem khong tai');disp(p);
disp(' he so tang ic'); disp(k);
disp('ban kinh diem cuc'); disp(m);
sos=zp2sos(z,p,k);
disp(' cac thanh phan bac 2:'); disp(real(sos));
zplane(num,den);
```

Chương trình vẽ điểm cực, điểm không của các hàm hệ thống sau:

$$H(z) = \frac{2 + 5z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4}}{5 + 45z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}$$

Cho kết quả như sau:

```
nhap cac he so o tu =[2 5 4 5 3];
nhap cac he so o mau so=[5 45 2 1 1];
cac diem cuc tai
  -1.9255 + 0.0000i
   0.0906 + 1.0112i
   0.0906 - 1.0112i
```

-0.7558 + 0.0000i

cac diem khong tai

-8.9576 + 0.0000i

-0.2718 + 0.0000i

0.1147 + 0.2627i

0.1147 - 0.2627i

he so tang ic

0.4000

ban kinh diem cuc

8.9576

0.2718

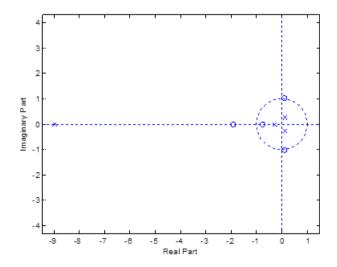
0.2866

0.2866

cac thanh phan bac 2:

0.4000 1.0725 0.5821 1.0000 9.2293 2.4344

1.0000 -0.1813 1.0308 1.0000 -0.2293 0.0822



Hình 3.1 Biểu đồ cực-zero

Bài 3.3 Chương trình Matlab tính và hiển thị biến đổi z dưới dạng phân số hữu tỷ từ các điểm không, điểm cực và tăng ích của nó.

Sử dụng hàm zp2tf

```
A=input('nhap cac diem khong duoi dang vecto hang=');
B=input(' nhap cac diem cuc duoi dang veto hang=');
a=A';b=B';
k=input('nhap he so thang ichk=');
[num, den] = zp2tf(z, p, k);
disp(' cac he so cua da thuc tu so:'); disp(num);
disp('cac he so cua da thuc mau so:'); disp( den);
Kết quả mô phỏng với các điểm không là 0,5; 2,2;-0,2+j0,3;-0,2-j0,3; và các điểm
cực tại 0.4; -0.75; 0.5+j0.6; 0.5-j0.6; và tăng ích k=3.7 như sau:
nhap cac diem khong duoi dang vecto hang=[0.5 2.2 -
0.2+0.3i -0.2-0.3i
nhap cac diem cuc duoi dang veto hang=[0.4 -0.75
0.5+0.6i \ 0.5-0.6i
nhap he so thang ichk=3.7
 cac he so cua da thuc tu so:
    3.7000 9.2500
                        7.4000 9.2500
                                              5.5500
cac he so cua da thuc mau so:
    1.0000 9.0000
                      0.4000
                                   0.2000
                                              0.2000
```

3.2 PHÂN TÍCH DÙNG PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

Phân tích thành các thừa số theo phương pháp thặng dư:

$$\frac{N_1(z)}{D(z)} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}}$$

Bài 3.4. Xác định các hệ số của biểu thức biến đổi z bằng hàm residuez:

Cú pháp của hàm residuez như sau:

$$[r,p,k] = residuez(b,a)$$

$$[b,a] = residuez(r,p,k)$$

Residuez tìm thặng dư, các cực, các thành phần trực tiếp của việc khai triển biến đổi z có dạng H(z)=B(z)/A(z)

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1 - p(1)z^{-1}} + \dots + \frac{r(n)}{1 - p(n)z^{-1}} + k(1) + k(2)z^{-1} + \dots + k(m - n + 1)z^{-(m - n)}$$

$$num = [1 \ 2 \ 3]$$

num =

1 2 3

 $den=[2 \ 4 \ 7]$

den =

2 4 7

[A,p,k] = residuez(num,den)

A =

0.0357 - 0.0226i

0.0357 + 0.0226i

$$H(z) = \frac{0.05634(1+z^{-1})(1-1.0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.4461z^{-1}+0.7957z^{-2})}$$

$$b0 = 0.05634;$$

$$b1 = [1 1];$$

$$b2 = [1 -1.0166 1];$$

$$a1 = [1 -0.683];$$

$$a2 = [1 -1.4461 0.7957];$$

$$b = b0*conv(b1,b2);$$

$$a = conv(a1,a2);$$

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
```

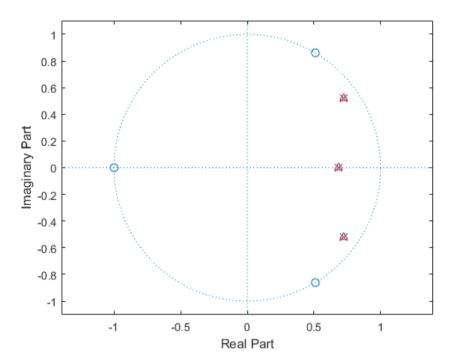
Kết quả như sau:

```
r =
-0.1153 - 0.0182i
-0.1153 + 0.0182i
0.3905 + 0.0000i
p =
0.7230 + 0.5224i
0.7230 - 0.5224i
0.6830 + 0.0000i
k =
-0.1037
```

Nếu thực hiện vẽ giản đồ Z, dùng hàm zplane,

```
zplane(b,a)
hold on
plot(p,'^r')
hold off
```

Ta có kết quả như sau:



Hình 3.2 Biểu đồ cực zero

Sử dụng hàm residuez cho cú pháp:

$$[bn,an] = residuez(r,p,k)$$

Thu được kết quả như sau:

bn =
$$0.0563 - 0.0009 - 0.0009 0.0563$$
 an = $1.0000 - 2.1291 1.7834 - 0.5435$

3.3 BIẾN ĐỔI Z VÀ Z NGƯỢC

Tóm tắt lý thuyết:

Xét hệ LTI biểu diễn bằng phương trình sai phân hệ số hằng:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Hàm hệ thống của hệ LTI biểu diễn bằng phương trình sai phân hệ số hằng:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Biến đổi z ngược:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$$

(Nếu bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số)

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} \stackrel{z}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{M-N} c_k \delta(n-k)$$

Để tính thành phần còn lại, ta phân tích thành các thừa số theo phương pháp thặng dư:

$$\frac{N_1(z)}{D(z)} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}}$$

Nếu các giá trị pj = ... = pm thì chuyển các số hạng từ Aj đến Am thành:

$$\frac{A_j}{1 - p_N z^{-1}} + \frac{A_{j+1}}{(1 - p_N z^{-1})^2} + \dots + \frac{A_{j+m-1}}{(1 - p_N z^{-1})^m}$$

Áp dụng kết quả:

$$\frac{A}{1-az^{-1}} \stackrel{z}{\leftrightarrow} Aa^n u(n), ROC: |z| > |a|$$

Bài 3.7. Dùng hàm ztrans để biến đổi z ở dạng công thức:

syms n x

$$x = 2^n;$$

 $ztrans(x)$
 $x = (-1/2)^n;$
 $ztrans(x)$
ans =

-178

186
542
170
-914
-1254
574
3082
1934
-4230
-8098
362
16558
15834
-17282
-48950
-14386
83514
112286
-54742
-279314
-169830
388798
728458
-49138
-1506054
-1407778
1604330
4419886
1211226
-7628546

Hình 3.3 Đáp ứng xung của x

Bài 3.9. Xác định và vẽ 100 mẫu đầu tiên của biến đổi z ngược của hàm:

$$X(z) = \frac{0.9 + 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2} - z^{-3} + 0.5z^{-4}}{1 + 0.5z^{-1} - 0.2z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}}$$

Để xác định biến đổi z ngược ở dạng công thức, ta dùng hàm *residuez* để phân tích thành dạng biểu thức đơn giản và dùng các kết quả biến đổi ngược để xác định.

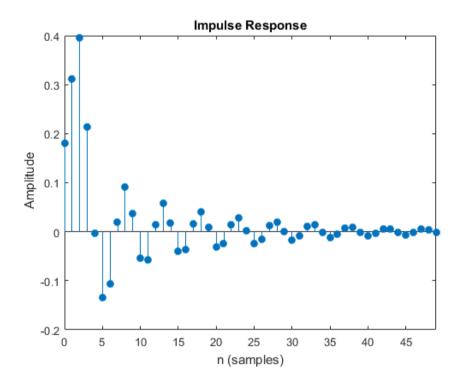
Bài 3.10. Ta cũng có thể xác định biến đổi z ngược bằng cách dùng hàm iztrans.

syms F z
$$F = 2*z^{(-1)}/(1-3*z^{(-1)});$$
iztrans(F)

Bài 3.11 Xác định đáp ứng xung của các bộ lọc eliip

$$[[b,a] = ellip(4,0.5,20,0.4);$$

impz(b,a,50)

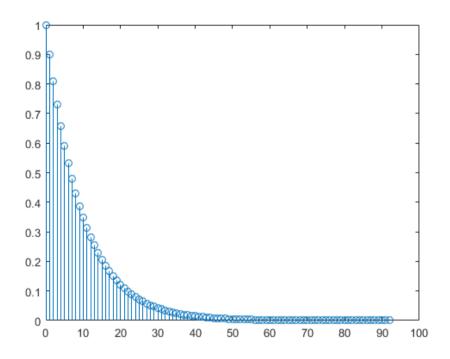


Bài 3.12: Tính chiều dài của đáp ứng xung

```
b = 1;
a = [1 -0.9];
len = impzlength(b,a)
[h,t] = impz(b,a);
stem(t,h)
h(len)

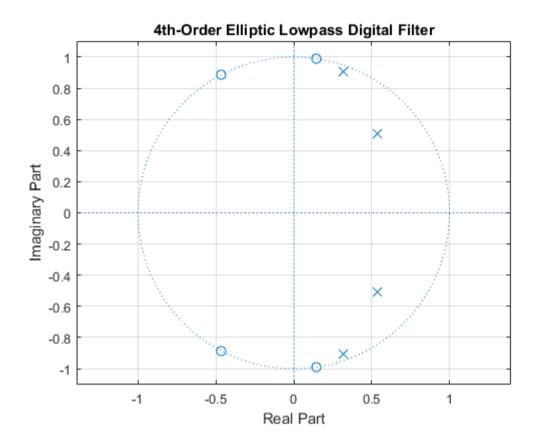
Két quå

len =
    93
ans =
    6.1704e-05
```



Bài 3.13: Điểm cực và zero của bộ lọc Eliip, tần số cắt 200 Hz, dải thông 3 dB đến 30 dB.

```
[z,p,k] = ellip(4,3,30,200/500);
zplane(z,p)
grid
title('4th-Order Elliptic Lowpass Digital Filter')
```



3.4 CÁC CHƯƠNG TRÌNH MATLAB GIẢI CÁC BÀI TOÁN PHÂN TÍCH TRONG MIỀN Z

Bài 3.14: Chương trình Matlab tính toán tìm biểu thức y(n) từ hàm Y(z)

$$Y(z) = \frac{0.85 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.05z^{-2}}$$
 num=[0.85 0.1];

Kết quả như sau:

r=
$$0.8750$$

 -0.025
p= 0.5000
 -0.1000
k=[]

Từ đó suy ra:

$$Y(z) = \frac{0.85 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.05z^{-2}} = \frac{0.8750z}{z - 0.5} - \frac{0.025z}{z + 0.1}$$

Biểu thức y(n) là:

$$y(n) = \left[0.8750(0.5)^n - 0.025(-0.1)^n\right]u(n)$$

Bài 3.15 Tìm 20 giá trị của đáp ứng xung y(n) từ Y(z)

$$Y(z) = \frac{0.85 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.05z^{-2}}$$

Ta có kết quả ngõ ra như sau:

Y =

0.8500

0.4400

0.2185

0.1094

0.0547

0.0273

0.0137

0.0068

0.0034

0.0017

0.0009

0.0004

0.0002

0.0001 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 0.0000

Bài 3.16 Chương trình Matlab tính toán tìm biểu thức y(n) từ hàm Y(z)

$$Y(z) = \frac{1.5 - 0.2z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.05z^{-2}} \left[1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2} \right]$$

Kết quả như sau:

r= 1.6369
-0.5625
0.5714
-0.1458
p= 0.5000
0.3000
-0.2000
-0.1000
k=[]
Biểu thức y(n) là:

$$y(n) = \left[1.6369(0.5)^n - 0.5625(0.3)^n + 0.5714(-0.2)^n - 0.1458(-0.1)^n\right] u(n)$$

Nếu cho n=0,1,...9

Kết quả y(n) sẽ là:

y =

Columns 1 through 6

1.5000 0.5500 0.3800 0.1850 0.0986 0.0496

Columns 7 through 10

0.0252 0.0127 0.0064 0.0032

Bài 3.17 Chương trình Matlab tính toán giá trị ngỗ ra y(n) của bài 3.16 khi tín hiệu ngỗ vào là:

$$x(n) = [(-0.2)^n + 0.5(0.3)^n]$$
 với n=0,1,...9

• Cách 1: dùng hàm filter

Kết quả cho ngõ ra y(n) bằng:

y =

Columns 1 through 6

1.2750 0.6175 0.3780 0.1952 0.1024 0.0520

```
Columns 7 through 10
    0.0264
                0.0133
                           0.0067 0.0033
  • Cách 2: Dùng hàm residuez
Từ bài 3.16 ta có biểu thức y(n) là:
      y(n) = \left[1.6369(0.5)^n - 0.5625(0.3)^n + 0.5714(-0.2)^n - 0.1458(-0.1)^n\right]u(n)
Nếu cho n=0,1,...9
     n=0:9;
     y=[1.6369*(0.5).^n-0.5625*(0.3).^n+0.5714*(-
     0.2).^n-0.1458*(-0.1).^n
Kết quả y(n) sẽ là:
y =
  Columns 1 through 6
    1.5000
                 0.5500 0.3800 0.1850
                                                    0.0986
0.0496
  Columns 7 through 10
    0.0252
                0.0127
                           0.0064 0.0032
  • Cách 3: Dùng hàm impz
     d1=[1 -0.4 -0.05];
     d2=[1 -0.1 -0.06];
     den2=conv(d1,d2);
     num = [1.5 - 0.2];
```

[y,T] = impz (num, den2)

Kết quả y(n) sẽ là:

- 1.5000
- 0.5500
- 0.3800
- 0.1850
- 0.0986
- 0.0496
- 0.0252
- 0.0127
- 0.0064
- 0.0032

Nhận xét: cả 3 cách đều cho kết quả giống nhau.

Bài 3.18 Tìm đáp ứng xung h(n) với hàm truyền H(z) như sau:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.4z^{-1} - 0.05z^{-2}}$$

$$a=[1 -0.4 -0.05];$$

Kết quả cho:

$$r=0.8333$$

$$p=0.5000$$

Từ đó suy ra biểu thức ngõ ra H(z) như sau:

$$H(z) = \frac{0.8333z}{z - 0.5} - \frac{0.16667z}{z + 0.1}$$

Biểu thức đáp ứng xung của hệ:

$$h(n) = \left[0.8333(0.5)^n - 0.1667(-0.1)^n\right]u(n)$$

Tìm đáp ứng xung từ hàm impz, như sau:

```
b=[1];
a=[1 -0.4 -0.05];
[h,T]=impz(b,a,20)
```

kết quả như sau:

h =

- 1.0000
- 0.4000
- 0.2100
- 0.1040
- 0.0521
- 0.0260
- 0.0130
- 0.0065
- 0.0033
- 0.0016
- 0.0008
- 0.0004
- 0.0002
- 0.0001
- 0.0001
- 0.0000
- 0.0000
- 0.0000
- 0.0000
- 0.0000

Sử dụng tín hiệu ngõ vào là xung đơn vị, dùng hàm filter, cũng cho kết quả tương tư như sau:

Columns 1 through 6

1.0000 0.4000 0.2100 0.1040 0.0521 0.0260

Columns 7 through 12

0.0130 0.0065 0.0033 0.0016 0.0008 0.0004

Columns 13 through 18

0.0002 0.0001 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000

Columns 19 through 20

0.0000 0.0000

Bài 3.19 Phân tích hàm truyền sử dùng hàm deconv(b,a)

$$X(z) = \frac{0.1 + 0.25z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

 $b = [0.1 \ 0.25 \ 0]$

```
a=[1 0.4 0.5];
       n=5;
       b=[b zeros(1,n-1)];
       [x,r] = deconv(b,a)
Kết quả như sau:
x =
      0.1000 0.2100 -0.1340 -0.0514 0.0876
r =
   Columns 1 through 6
              0
                              0
                                              0
                                                              0
0.0093
   Column 7
    -0.0438
Suy ra biểu thức X(z)
X(z) = \frac{0.1 + 0.25z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 0.1 + 0.21z^{-1} - 0.134z^{-2} - 0.0514z^{-3} + \frac{0.086z^{-4} - 0.0257z^{-5}}{1 + 0.4z^{-1} + 0.5z^{-2}}
Bài 3.20 X_1(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2} và X_2(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 6z^{-3}.
Tim X_3(z)=X_1(z).X_2(z)
       x1=[2,3,4];
       x2=[3,4,5,6];
       x3=conv(x1,x2)
```

x3 =

Từ đó suy ra biểu thức:

$$X_{2}(z) = 6 + 17z^{-1} + 34z^{-2} + 43z^{-3} + 38z^{-4} + 24z^{-5}$$

Bài 3.21 Nếu
$$X_1(z) = z + 2 + 3z^{-1}$$
 tương ứng $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$ và

$$X_2(z) = 2z^2 + 4z + 3 + 5z^{-1}$$
 tương ứng $x_1(n) = \{2, 4, 3, 5\}$.

$X_3(z)=X_1(z).X_2(z)$

Từ đó cho kết quả $X_3(z)$ bằng:

$$X_3(z) = 2z^3 + 8z^2 + 17z + 23 + 19z^{-1} + 15z^{-2}$$

*****Với hàm conv_m là:

3.5 BÀI TẬP

Bài tập 1. Viết chương trình Matlab cho hệ có phương trình sai phân:

$$y(n) - 0.7y(n-1) = x(n)$$

a. Tìm H(z). Vẽ đồ thị điểm cực, zero.

- b. Tìm h(n). Vẽ đáp ứng xung h(n)
- c. Tìm và vẽ y(n) nếu $x(n) = (0.8)^n u(n)$

Bài tập 2. Viết chương trình Matlab cho hệ có phương trình sai phân:

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + x(n-1)$$

- a. Tìm H(z). Vẽ đồ thị điểm cực, zero.
- b. Tìm h(n). Vẽ đáp ứng xung h(n)
- c. Tìm và vẽ y(n) nếu $x(n) = (0.6)^n u(n)$.