1 dfgfg

2 d®fg

3 dfgfg

4 d®fg

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nội dung của chương này sẽ trình bày các khái niệm, phân loại và cách giải một số phương trình vi phân như phương trình vi phân cấp 1 tách biến, Bernoulli, vi phân toàn phần; phương trình vi phân cấp 2; hệ phương trình vi phân cấp 1 thường gặp trong kỹ thuật. Để học tốt chương này, người học cần nắm vững các công thức đạo hàm và tích phân của hàm một biến số.

4.1. Khái niệm chung về phương trình vi phân

Có rất nhiều các mô hình toán học liên quan đến việc nghiên cứu và giải các phương trình vi phân, ta nhắc lại một số mô hình bài toán quen thuộc thường gặp trong chương trình phổ thông liên quan tới phương trình vi phân.

4.1.1. Các bài toán

Bài toán 1. Một vật có khối lượng m được đặt lên một lò xo đàn hồi với hệ số $k > 0$. Hãy xác định quy luật dao động của vật?

Giải. Chọn trục Oy thẳng đứng hướng từ trên xuống, gốc O đặt tại trọng tâm vật ở vị trí cân bằng. Từ đó ta dễ dàng đưa ra phương trình chuyển động của vật theo định luật Newton:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}.$$

Đặt $a = \frac{k}{m}$ và $b = \frac{\lambda}{m}$ thì ta có phương trình chuyển động của lò xo có dạng thu gọn

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4.1}$$

Đây là phương trình vi phân bậc 2 tuyến tính.

Bài toán 2. Một thanh kim loại được nung nóng đến 120^0C được đặt trong môi trường luôn có nhiệt độ không đổi 25^0C. Tìm quy luật thay đổi nhiệt độ của thanh kim loại.

Giải. Gọi $y(x)$ là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm x. Theo định luật Newton về sự giảm nhiệt của vật thì vận tốc giảm nhiệt là $\frac{dy}{dx}$ tỷ lệ với nhiệt độ của vật thể và nhiệt độ $y(x) - 25$ của môi trường tại thời điểm đó. Do vậy, ta có

$$\frac{dx}{dt} = -k(x(t) - 25),\ k > 0, \tag{4.2}$$

là phương trình vi phân cấp 1.

4.1.2. Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình quan hệ giữa biến độc lập x, hàm số cần tìm y và các đạo hàm $y', y'', ..., y^{(n)}$ của nó. Hay phương trình có dạng như sau:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{4.3}$$

hoặc

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Cấp cao nhất n của đạo hàm của hàm số y được gọi là cấp của phương trình vi phân. Ví dụ như, phương trình vi phân (4.2) là phương trình vi phân cấp 1 và (4.1) là phương trình vi phân cấp 2. *Nghiệm* của phương trình vi phân (4.3) là tất cả các hàm số $y = \varphi(x)$ thỏa mãn phương trình.

4.2. Phương trình vi phân cấp một

4.2.1. Định nghĩa và sự tồn tại nghiệm

Phương trình vi phân cấp một là một phương trình vi phân có dạng

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4.4}$$

Phương trình (4.4) được gọi là *giải được* đối với y', nếu nó có thể viết được dưới dạng:

$$y' = f(x, y). \tag{4.5}$$

Bài toán Cauchy: Tìm hàm số $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (4.4) hoặc (4.5) và điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

Ví dụ 4.1. *Giải bài toán Cauchy*

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 1.$$

Giải: Dễ dàng thấy $y = x^3 + C$ là nghiệm của phương trình. Với $x = 0, y = 1$, ta có $C = 1$. Vậy nghiệm của bài toán là $y = x^3 + 1$.

Họ hàm số $y = \varphi(x, C)$, với C là một hằng số tùy ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1 trên miền $D \subseteq \mathcal{R}^2$, nếu $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn phương trình (4.4) với mọi hằng số C và tồn tại duy nhất hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Nếu không tìm được nghiệm tổng quát mà tìm được nghiệm dưới dạng một hệ thức dạng ẩn $\phi(x, y, C) = 0$, thì hệ thức này được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1. Chú ý rằng, không phải bất kỳ nghiệm nào của phương trình vi phân cũng nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số C các giá trị cụ thể. Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là *nghiệm kỳ dị* (ta không nghiên cứu sâu về nghiệm này).

Định lý 4.2. *Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền $D \subseteq \mathcal{R}^n$ chứa (x_0, y_0), thì bài toán Cauchy (4.5) và điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ có nghiệm $y = y(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0. Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trên D thì $y = y(x)$ là nghiệm duy nhất.*

Hiện tại, không có một phương pháp tổng quát nào để giải phương trình vi phân cấp 1. Dưới đây, ta xét một số phương trình vi phân cấp 1 thông dụng có thể giải được bằng phương pháp tích phân.

4.2.2. Phương trình tách biến

Phương trình tách biến là một phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Phương pháp giải: Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Nếu có $F'(x) = f(x)$ và $G'(x) = g(x)$, thì ta có tích phân tổng quát có dạng

$$F(x) + G(y) = C.$$

Ví dụ 4.3. *Giải phương trình vi phân*

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Giải: Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Khi đó,

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C_0,$$

hay

$$(1+x^2)(1+y^2) = e^{2C_0} = C > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm dạng tích phân tổng quát

$$(1+x^2)(1+y^2) = C > 0.$$

Chú ý 4.4. *Nếu phương trình tách biến có dạng*

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

thì ta có thể đưa về phương trình tách biến. Thật vậy, nếu $f_2(x)g_1(y) \neq 0$*, bằng cách chia 2 vế cho* $f_2(x)g_1(y)$*, ta nhận được*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0,$$

đó là phương trình tách biến. Ta xét các nghiệm kỳ dị trong các trường hợp $f_2(x)g_1(y) = 0$.

Ví dụ 4.5. *Giải phương trình vi phân cấp 1*

$$y' = xy(y+2).$$

Giải: Phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$dy = xy(y+2)dx.$$

-Nếu $y(y+2) \neq 0$, phương trình có dạng tách biến

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0.$$

Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0.$$

Dễ dàng nhận được

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - x^2 = \ln|C|,\ C \neq 0.$$

Hay

$$\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2},\ C \neq 0$$

là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

-Nếu $y(y+2) = 0$, thì $y = 0$ và $y = -2$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4.6. *Giải phương trình* $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Giải: Nếu $x \neq 0,\ y \neq 0$, phương trình trở thành:

$$(\frac{1}{x} + 1)dx = (1 - \frac{1}{y})dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ln|x| + x = y - ln|y| + C,$$

hay

$$ln|xy| + x - y = C.$$

Với $x = 0,\ y = 0$ cũng thỏa mãn phương trình, chúng biểu diễn hai đường tích phân kì dị.

Chú ý 4.7. *Phương trình dạng*

$$y' = f(ax + by + c)$$

có thể đưa về được dạng tách biến. Điều này hiển nhiên với $b = 0$. Bằng cách sử dụng chú ý 4.5 trong trường hợp $a = 0$. Nếu $ab \neq 0$, thì đặt $z = ax + by + c$. Khi đó, $z' = a + by'$ và phương trình có dạng tách biến với ẩn z

$$z' = bf(z) + a.$$

Phương trình được giải bằng cách sử dụng chú ý 4.5.

Ví dụ 4.8. *Giải phương trình*

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Giải: Đặt $z = x - y - 1$, ta có $y' = 1 - z'$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$1 - z' = \cos z \quad hay\ z' = 1 - \cos z \quad hay\ dz = (1 - \cos z)dx.$$

-Nếu $1 - \cos z \neq 0$, ta có $\frac{dz}{1-\cos z} = dx$. Đây là phương trình tách biến. Lấy tích phân 2 vế, ta nhận được

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx \quad hay \ \ -\cot\frac{z}{2} = x + C.$$

Thay $z = x - y - 1$, ta nhận được

$$y = 1 - x - 2\text{arccot}(x + C) + k\pi,\ \ y \in \mathbb{Z}.$$

-Nếu $1 - \cos z = 0$, thì $z = k2\pi$ hay $y = x - 1 + k2\pi$ là nghiệm. Vậy phương trình có các nghiệm

$$y = x - 1 + k2\pi,$$
$$y = 1 - x - 2\text{arccot}(x + C) + k\pi,\ \ y \in \mathbb{Z}.$$

4.2.3. Phương trình tuyến tính

Phương trình tuyến tính cấp 1 là phương trình vi phân có dạng:

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{4.6}$$

trong đó $f(x),\ g(x)$ là các hàm liên tục. Phương trình tuyến tính cấp 1 (4.6) được gọi là thuần nhất nếu $g(x) = 0$, là không thuần nhất nếu $g(x) \neq 0$. Để giải phương trình (4.6), trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0. \tag{4.7}$$

Nếu $y \neq 0$ phương trình trở thành

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx,$$

đây là phương trình tách biến có nghiệm:

$$ln|y| = -\int f(x)dx + ln|C|,$$

với $C \neq 0$ là hằng cố tùy ý. Do đó

$$y = Ce^{-\int f(x)dx} \tag{4.8}$$

đây là nghiệm tổng quát của phương trình (4.7). Chú ý rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm của (4.7) và là một nghiệm riêng ứng với $C = 0$.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4.6), ta coi C là hàm số đối với biến x, ta cần tìm $C(x)$ để (4.8) thỏa mãn (4.6). Lấy đạo hàm hai vế của (4.8) rồi thay và (4.6) ta được:

$$e^{-\int f(x)dx}C'(x) - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)C(x)e^{-intp(x)dx} = g(x),$$

nên

$$\frac{dC(x)}{dx} = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Vậy

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + K,$$

trong đó K là hằng số tùy ý. Khi đó

$$y = Ke^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx}\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx, \tag{4.9}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (4.6). Phương pháp giải như trên gọi là phương pháp *phương pháp biến thiên hằng số.*

Ví dụ 4.9. *Giải phương trình*

$$(x^2 + 1)y' + xy = 1,$$

thỏa mãn điều kiện $y|_{x=0} = 2$.

Giải: Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$(x^2+1)y' + xy = 0 \text{ hay } \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Ta xem C là hàm số của x, thế vào phương trình không thuần nhất, ta có

$$C' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ nên } \quad C = ln(x+\sqrt{x^2+1}) + K.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \frac{ln(x+\sqrt{x^2+1}) + K}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Thay $x = 0, y = 2$ vào nghiệm tổng quát, ta nhận được $K = 2$ và do đó

$$y = \frac{ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4.2.4. Phương trình Bernoulli

Phương trình vi phân có dạng

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \tag{4.10}$$

trong đó $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục, α là một số thực khác 0 và 1, được gọi là *phương trình Bernoulli*. Với $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì phương trình (4.10) trở thành phương trình tuyến tính. Nếu $y^{\alpha} \neq 0$, chia hai vế của (4.10) cho y^{α}, ta được

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, phương trình (4.10) trở thành

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với ẩn z.

Ví dụ 4.10. *Giải phương trình*

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}.$$

Giải: Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = \frac{4}{3}$. Nếu $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $y^{\frac{4}{3}}$, ta có

$$y^{\frac{4}{3}}y' + \frac{2}{x}y^{1-\frac{4}{3}} = 3x^2.$$

Đặt $z = y^{-\frac{1}{3}}$. Khi đó, $z' = -\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}y'$ và phương trình có dạng

$$z' - \frac{2}{3x}z = -x^2.$$

Đây là phương trình tuyến cấp 1 đối với ẩn z. Giải phương trình này, ta nhận được nghiệm tổng quát

$$z = \left(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\right)x^{\frac{2}{3}}.$$

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát là

$$y^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C\right)x^{\frac{2}{3}}.$$

Ngoài ra, $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý 4.11. *Một số phương trình vi phân, khi coi y là hàm của biến số x thì nhận được phương trình không thuộc dạng đang xét. Do đó, ta có thể coi x là hàm của biến số y để nhận được phương trình quen thuộc.*

Ví dụ 4.12. *Giải phương trình*

$$(x^2y^3 + xy)dy - dx = 0.$$

Giải: Coi x là một hàm số theo ẩn y, phương trình có dạng

$$x' - yx = y^3x^2,$$

là một dạng của phương trình Bernoulli đối với x, ở đây $\alpha = 2$. Nếu $x \neq 0$, chia 2 vế x^2, ta nhận được

$$x^{-2}x' - yx^{-1} = y^3.$$

Đặt $z = x^{-1}$, suy ra $z' = -x^{-2}x'$. Khi đó, phương trình có dạng

$$z' + yz = -y^3,$$

là phương trình tuyến tính cấp 1. Dùng công thức nghiệm tổng quát, ta có

$$z = \left(-y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C\right).$$

Do vậy, tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Hơn nữa, $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

4.2.5. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là một phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0, \tag{4.11}$$

trong đó $F(x,y)$, $G(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Nếu $D = \mathcal{R}^2$, theo định lý bốn mệnh đề tương đương, tồn tại một hàm $u(x,y)$ sao cho $du(x,y) = F(x,y)dx + G(x,y)dy$ và phương trình trên có dạng $du(x,y) = 0$. Khi đó, hàm số $u(x,y)$ được xác định bởi công thức

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} F(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} G(x,y)dy + K,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} F(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} G(x,y)dx + K.$$

Ví dụ 4.13. *Giải phương trình:*

$$i)(3x^2 + 4y^3)dx + (12y^2x + 5y)dy = 0.$$

$$ii)(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$$

Giải:

i) Ta thấy $\frac{dF}{dy} = 12y^2 = \frac{dG}{dx}$ nên đây là phương trình vi phân toàn phần. Nên hàm số

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}(3x^2 + 4y^3)dx + \int_{y_0}^{y}(12y^2x + 5y)dy = x^3|_{x_0}^{x} + 4y^3x|_{x_0}^{x} + 4y^3x|_{y_0}^{y} + \frac{5}{2}y^2|_{y_0}^{y} = C.$$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$, ta có tích phân tổng quát dạng

$$x^3 + 4y^3x + 4y^4 + \frac{5}{2}y^2 = C.$$

ii) Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho y^2, ta được phương trình vi phân toàn phần

$$(2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C.$$

Ngoài ra, $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý 4.14. *Khi điều kiện (4.12) không thỏa mãn thì phương trình (4.11) không phải phương trình vi phân toàn phần. Nhưng ta có thể tìm một hàm $u(x, y)$ sao cho phương trình $u(x, y)F(x, y)dx + u(x, y)G(x, y)dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần, hàm $u(x, y)$ gọi là thừa số tích phân.*

Ví dụ 4.15. *Giải phương trình vi phân*

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$$

Giải: Đặt $F = x^2 - \sin^2 y$ và $G = x \sin 2y$, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 \sin y \cos y, \frac{\partial G}{\partial x} = \sin 2y.$$

Như vậy, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq \frac{\partial G}{\partial x}$. Tìm thừa số tích phân $u(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial uF}{\partial y} \neq \frac{\partial uG}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}^2.$$

Khi đó, ta có

$$u = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Phương trình vi phân có dạng

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx + \frac{\sin 2y}{x} dy = 0,$$

là một phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình này, ta có tích phân tổng quát

$$x + \frac{\sin^2 y}{x} = C.$$

4.3. Phương trình vi phân cấp hai

4.3.1. Định nghĩa và sự tồn tại nghiệm

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{4.13}$$

trong đó F là hàm số xác định trên một miền U trong $\mathcal{R}^4$. Phương trình (4.13) được gọi là *giải được* đối với đạo hàm y'', nếu nó có thể viết dưới dạng

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4.14}$$

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình (4.14) thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0.$$

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (4.13) trong miền $D \subseteq \mathcal{R}^3$, nếu nó là nghiệm của phương trình với mọi C_1, C_2 và với mọi điểm $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, tồn tại duy nhất cặp số (C_1^0, C_2^0) sao cho $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai dưới dạng hàm ẩn theo y được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình đó.

Sau đây ta cũng đưa ra điều kiện để phương trình (4.14) tồn tại nghiệm và có duy nhất nghiệm.

Định lý 4.16. *Cho phương trình* (4.14). *Nếu* $f(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *và* $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *liên tục trong một miền* D *nào đó trong* $\mathcal{R}^3$ *và* (x_0, y_0, y'_0) *là một điểm thuộc* D *thì trong một lân cận nào đó của điểm* $x = x_0$*, tồn tại một nghiệm duy nhất* $y = y(x)$ *của phương trình* (4.14) *thỏa mãn các điều kiện*

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Định lý này ta sẽ không chứng minh mà thừa nhận nó. Sau đây, ta sẽ trình bày một số phương pháp giải phương trình vi phân cấp hai.

4.3.2. Phương trình khuyết

a) Phương trình khuyết y, y'*:* $F(x, y'') = 0$

Đặt $y' = z$. Khi đó, ta được $F(x, p') = 0$ là một phương trình vi phân cấp một đối với ẩn z.

Ví dụ 4.17. *Giải phương trình* $x = y''^2 + 1$.

Giải: Đặt $z = y'$, ta được $x = z'^2 + 1$. Phương trình tham số của đường tích phân tổng quát của nó là: $\begin{cases} x = & t^2 + 1, \\ z = & \frac{1}{3}t^3 + t + C_1. \end{cases}$

Do đó, $y = \int zdx = \int (\frac{1}{3}t^3 + t + C_1)(2t)dt = \int (\frac{2}{3}t^4 + 2t^2 + 2C_1 t)dt = \frac{2}{15}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C_1 t^2 + C_2$.

Vậy nghiệm của phương trình có dạng: $\begin{cases} x = & t^2 + 1, \\ z = & \frac{2}{15}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C_1 t^2 + C_2. \end{cases}$

b) Phương trình khuyết y: $F(x, y', y'') = 0$.

Bằng cách đổi biến $z = y'$. Phương trình vi phân có dạng một phương trình vi phân cấp 1: $F(x, z, z') = 0$.

Ví dụ 4.18. *Giải phương trình*

$$y'' + 2y' = e^x y'^2,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Giải: Đặt $z = y'$. Phương trình có dạng

$$z' + 2z = e^x z^2,$$

là một phương trình Bernoulli đối với ẩn z. Ta có $z = 0$ hay $y = C$ là một họ nghiệm nhưng không thỏa mãn điều kiện ban đầu. Với $z \neq 0$, phương trình có dạng

$$z^{-2}z' + 2z^{-1} = e^x.$$

Đặt $z^{-1} = u$, ta được

$$u' - 2u = -e^x,$$

là một phương trình tuyến tính cấp 1 đối với ẩn u. Ta dễ nhận được nghiệm tổng quát

$$u = e^x + C_1 e^{2x}.$$

Khi đó, ta có

$$y' = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^x + C_1 e^{2x}}.$$

Kết hợp điều này với điều kiện $y'(0) = 1$, ta nhận được $C_1 = 0$. Như vậy

$$y = \int \frac{dx}{e^x} + C_2 = e^{-x} + C_2.$$

Từ $y(0) = 1$, kéo theo $C_2 = 2$. Vậy, nghiệm cần tìm là $y = -e^{-x} + 2$.

b) Phương trình khuyết x: $F(y, y', y'') = 0$.

Bằng cách đổi biến $z = y'$. Khi đó, ta có

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

và phương trình có dạng $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$ là phương trình vi phân cấp 1 đối với ẩn z.

Ví dụ 4.19. *Giải phương trình*

$$yy'' - y'^2 = y^4,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Bài giải: Đặt $z = y'$. Ta có $y'' = z\frac{dz}{dy}$ và

$$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = y^4.$$

-Nếu $y \neq 0$, thì phương trình có dạng

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z^2 = y^3,$$

là một phương trình dạng Bernoulli. Đặt $v = z^2$. Khi đó, ta có phương trịnh dang vi phân tuyến tính cấp 1:

$$v' - \frac{2}{y}v = 2y^3.$$

Giải ra

$$v = (y^2 + C_1)y^2.$$

Mà $z^2 = y'^2 = v$. Kết hợp điều này với $y'(0) = 1, y(0) = 1$, ta nhận được $C_1 = 0$ và $y'^4 = y^4$. Vì $y'(0) = 1 > 0$, nên $y' = y^2$. Hay

$$-\frac{1}{y} = x + C_2.$$

Kết hợp với $y(0) = 1$, ta có $C_2 = -1$. Như vậy, nghiệm của phương trình là

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Ngoài ra, $y = 0$ là nghiệm của phương trình ban đầu, nhưng nó không thỏa mãn các điều kiện ban đầu.

4.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là một phương trình vi phân có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{4.15}$$

trong đó các hàm số $p(x), q(x)$ và $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Nếu $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, thì (4.15) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất*. Nếu $f(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$, thì (4.15) có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.16}$$

và được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất*.

4.3.3.1. Cấu trúc nghiệm

Định lý 4.20. *Nếu $y_1 = y_1(x)$ và $y_2 = y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình thuần nhất* (4.16)*, thì $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ với 2 hằng số bất kỳ C_1 và C_2, cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất* (4.16).

Chứng minh: Ta chỉ cần thay $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ vào phương trình (4.11) và dựa vào $y_1(x),\ y_2(x)$ là nghiệm của phương trình này, ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa 4.21. *Các hàm số $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng (a, b), nếu tỉ số $\frac{y_1}{y_1} \neq C$, trong đó C là hằng số trên khoảng (a, b). Trong trường hợp trái lại, hai hàm số ấy được gọi là phụ thuộc tuyến tính.*

Việc xét một hệ hàm phụ thuộc tuyến tính hay độc lập tuyến tính nhiều khi gặp khó khăn, trong trường hợp các hàm đã cho khả vi một số lần cần thiết, việc nghiên cứu đó có thể đơn giản hơn nhờ định thức Vronski dưới đây.

Định nghĩa 4.22. *Giả sử các hàm số $y_1(x),\ y_2(x)$ khả vi trên khoảng (a, b). Khi đó định thức*

$$\begin{aligned} W(y_1(x),\ y_2(x)) =& W(x) \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

được gọi là định thức Vronski của các hàm số trên.

Định lý 4.23. *Nếu hai hàm số $y_1(x),\ y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) thì $W(y_1, y_2) = 0$ trên đoạn đó.*

Chứng minh: Thay $y_2(x) = ky_1(x)$ ta vào định thức Vronski ta có điều phải chứng minh.

Định lý 4.24. *Các nghiệm y_1, y_2 của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất* (4.16) *là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b) khi và chỉ khi định thức Vronski $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại mọi điểm trên khoảng đó.*

Chứng minh: Nếu $W(y_1, y_2) \neq 0$ trên (a, b), thì theo định lý 4.23, các hàm số y_1, y_2 là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b). Ngược lại, cho các nghiệm y_1, y_2 của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất (4.16) là độc lập tuyến tính trên đoạn (a, b). Bằng phản chứng, giả sử rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$. Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0, \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Theo định lý 4.20, $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (4.16). Hơn nữa, theo (4) thì nghiệm đó thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = 0, y'(0) = 0.$$

Theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, thì $y = 0$ là nghiệm trên (a, b). Như vậy, $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ trên (a, b), hay y_1 và y_2 phụ thuôc tuyến tính trên (a, b). Điều này trái với giả thiết. Định lý được chứng minh.

Định lý sau đây chỉ ra rằng nếu có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (4.16) thì ta đưa ra được nghiệm tổng quát của phương trình này.

Định lý 4.25. *Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình* (4.16) *thì nghiệm tổng quát của* (4.16) *là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

trong đó $C_1,\ C_2$ là những hằng số tùy ý.

Chứng minh: Theo định lý 4.20, nếu y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (4.16) thì $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ cũng là nghiệm của (4.16). Ngược lại, giả sử $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là một nghiệm của (4.16) với điều kiện ban đầu

$$y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0), x_0 \in (a, b).$$

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Vì y_1 và y_2 độc lập tuyến tính trên (a, b), theo định lý 4.24, nên định thức Wronski của hệ phương trình

$$\begin{aligned} W(y_1(x_0),\ y_2(x_0)) =& W(x_0) \\ =& \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, tồn tại duy nhất cặp số (C_1, C_2) của hệ phương trình (4) sao cho $C_1 y_1 + C_2 y_2$ là nghiệm của phương trình (4.16). Định lý được chứng minh.

Định lý 4.26. *Nếu đã biết một nghiệm riêng $y_1(x) \neq 0$ của phương trình tuyến tính thuần nhất* (4.16)*, ta có thể tìm được một nghiệm riêng $y_2(x)$ của phương trình đó, độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ có dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, trong đó*

$$u(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Chứng minh: Giả sử $y_1 = y_1(x) \neq 0$ trên (a, b) là một riêng của phương trinh thuần nhất (4.16) và $y_2 = y_1(x).u(x)$. Khi đó, ta có

$$y_2' = y_1' u + y_1 u',\ y_2'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''.$$

Thay thê y_2' và y_2'' vào (4.16), ta nhận được

$$y_1 u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' + [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)] = 0.$$

Vì y_1 là nghiệm của phương trình (4.16), nên $y_1'' + p(x)y_1' + q(x) = 0$ và do đó

$$y_1 u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' = 0.$$

Đặt $z = u'$, ta có

$$y_1 z' + [2y_1' + p(x)y_1]z = 0,$$

là một phương trình tách biến. Giải phương trình này được nghiệm

$$z = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Mà $z = u'$, nên ta có
$$u(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$
là điều phải chứng minh.

Định lý dưới đây sẽ đưa việc giải phương trình (4.15) về việc giải phương trình (4.16) và tìm một nghiệm riêng của nó.

Định lý 4.27. *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (4.15) *bằng nghiệm tổng quát* $\bar{y}$ *của phương trình thuần nhất* (4.16) *cộng với một nghiệm riêng nào đó* y_0 *của phương trình* (4.15).

Chứng minh: Theo giả thiết, ta có
$$\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)y = 0$$
$$y_0'' + p(x)y_0 + q(x)y = f(x).$$
Cộng hai đẳng thức trên, ta nhận được
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$
ở đây $y = \bar{y} + y_0$. Vậy y là nghiệm của phương trình (4.15). Vì $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (4.16), nên y phụ thuộc vào C_1, C_2. Bằng cách làm tương tự như trong chứng minh của định lý 4.25, ta có $y = \bar{y} + y_0$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.15).

Định lý 4.28. *Cho phương trình*
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1(x) + h_2(x). \tag{4.17}$$
Nếu $y_1(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1(x),$$
và $y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_2(x).$$
thì $y_0 = y_1(x) + y_2(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình vi phân* (4.17).

Chứng minh: Dễ dàng thấy được bằng cách thay trực tiếp y_0 vào phương trình (4.17).

4.3.3.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số là phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.18}$$

trong đó p, q là hai hằng số.

a) Phương trình thuần nhất

Xét phương trình dạng thuần nhất của (4.18):

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.19}$$

trong đó p, q là hai hằng số. Ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thì ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng

$$y = e^{kx},$$

với k là một hằng số. Thay $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ vào phương trình (4.19), ta có

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} > 0$, nên

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4.20}$$

Phương trình (4.20) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (4.19). Ta sẽ xét trường hợp nghiệm phức và thực của phương trình (4.20) ứng với $\Delta = p^2 - 4q$.

- Nếu $\Delta > 0$, phương trình (4.20) có *hai nghiệm* k_1, k_2 *thực và khác nhau.* Khi đó phương trình (4.19) có hai nghiệm riêng độc lập với nhau

  $$y_1(x) = e^{k_1x}, \quad y_2(x) = e^{k_2x}.$$

  Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là

  $$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},$$

  với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình (4.20) có *nghiệm kép* $k_1 = k_2$. Ta có một nghiệm riêng $y_1 = k_1x$, và ta xẽ tìm một nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 dưới dạng $y_2 = y_1.u(x) = u(x)e^{k_1x}$. Ta có

  $$\begin{aligned} y_2' &= u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x}, \\ y_2'' &= u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x}, \end{aligned}$$

thay vào phương trình (4.19), ta được

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Vì k_1 là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta có $k_1^2 + pk_1 + q = 0,\ k_1 = -\frac{p}{2}$. Do đó, ta được $e^{k_1x}u'' = 0$ nên $u = ax + b$, với a, b là các hằng số. Chọn $u = x$ hay $y_2 = xe^{k_1x}$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là

$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x),$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

- Nếu $\Delta < 0$, phương trình (4.20) có *hai nghiệm phức:* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$. Theo công thức Ơle, hai nghiệm riêng của phương trình là

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 =& e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\\ \bar{y}_2 =& e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).\end{aligned}$$

Vì tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm này cũng là các nghiệm riêng của phương trình (4.19), nên ta lấy

$$\begin{aligned}y_1 =& \frac{1}{2}[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ y_2 =& \frac{1}{2i}[\bar{y}_1 - \bar{y}_2] = e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}$$

Vì hai nghiệm y_1, y_2 độc lập tuyến tính, nên nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) là $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + \sin\beta x)$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Ta đã biết rằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số (4.18) có dạng

$$y = \bar{y} + y_0,$$

trong đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (4.19) và một nghiệm riêng y_0 của phương trình (4.19). Ngoài phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để tìm nghiệm riêng y_0, ta có phương pháp khác để tìm nghiệm riêng y_0 tiên lợi cho trường hợp hệ số hằng số như trong (4.19), đó là phương pháp *hệ số bất định*. Ta xét một số trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó α là một hằng số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

Khi đó, nghiệm riêng y_0 xác định bởi

$$y_0 = \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ không là nghiệm của phương trình đặc trưng,} \\ x e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ là 1 nghiệm đơn của phương trình đặc trưng,} \\ x^2 e^{\alpha x} Q_n(x) \text{ nếu } \alpha \text{ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng,} \end{cases} \tag{4.21}$$

trong đó, $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

Ví dụ 4.29. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' - y' - 2y = 2x^2.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = -1, k_2 = 2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' - y' - 2y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = 2x^2$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_0 = ax^2 + bx + c.$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$-2ax^2 + (-2a - 2b)x + (2a - 2b - 2c) = 2x^2, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} -2a = 2, \\ -2a - 2b = 0, \\ 2a - 2b - 2c = 0, \end{cases} \implies a = -1, b = 1, c = -\frac{3}{2}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = -x^2 + x - \frac{3}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - x^2 + x - \frac{3}{2},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.30. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + y' = 3x^2 + 4.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + k = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 0, k_2 = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y''+y' = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0 = k_1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = 3x^2 + 4$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_0 = x(ax^2 + bx + c).$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$3ax^2 + (6a + 2b)x + (2a + c) = 3x^2 + 4, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} 3a = 3, \\ 6a + 2b = 0, \\ 2a + c = 4, \end{cases} \implies a = 1, b = -3, c = 2.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = x^2 - 3x + 2$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - 3x + 2,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.31. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + y' + y = xe^x + 2e^{-x}.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + k + 1 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, k_2 == \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + y' + y = 0$ là

$$\bar{y} = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

+ Tìm nghiệm riêng y_{01} của phương trình $y'' + y' + y = xe^x$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = x$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{01} = e^x(ax + b).$$

Thay y_{01} vào phương trình $y'' + y' + y = xe^x$, ta nhận được

$$2axe^x + (2a + 2b)e^x = xe^x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta nhận được

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 2a + 2b = 0, \end{cases} \implies a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_{01} = e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$.
+ Tìm nghiệm riêng y_{02} của phương trình $y'' + y' + y = 2e^{-x}$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và $P_n(x) = x$, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{02} = ce^{-x}.$$

Thay y_{02} vào phương trình $y'' + y' + y = 2e^{-x}$, ta nhận được $c = 1$. Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_{02} = e^{-x}$. Do vậy, nghiệm riêng của phương trình ban đầu là

$$y_0 = y_{01} + y_{02}.$$

Nghiệm tổng quát dạng

$$y = \bar{y} + y_0 = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + e^{-x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$, trong đó α, β là các hằng số thực, $P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m tương ứng.

Đặt $k = \max\{m, n\}$, $R_k(x)$ và $\bar{R}_k(x)$ là các đa thức bậc k. Khi đó, nghiệm riêng y_0 của phương trình (4.18) được xác định bởi

$$y_0 = \begin{cases} e^{\alpha x}[R_k(x) \cos \beta x + \bar{R}_k(x) \sin \beta x] \text{ nếu } \alpha + i\beta \text{ không là nghiệm của (4.19)}, \\ xe^{\alpha x}[R_k(x) \cos \beta x + \bar{R}_k(x) \sin \beta x] \text{ nếu } \alpha + i\beta \text{ là nghiệm của (4.19)}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Ví dụ 4.32. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + 2y' - 3y = \cos x.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 2k - 3 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -3$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + 2y' - 3y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_0: Vì $\alpha = 0, \beta = 1$ và $\alpha + i\beta = i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.22), ta có

$$y_0 = a\cos x + b\sin x.$$

Thay y_0 vào phương trình ban đầu, ta nhận được

$$(-4a + 2b)\cos x + (-2a - 4b)\sin x = \cos x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo các hệ số của $\cos x$ và $\sin x$, ta nhận được

$$\begin{cases} -4a + 2b = 1, \\ -2a - 4b = 0, \end{cases} \implies a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{10}.$$

Do đó, phương trình có 1 nghiệm riêng $y_0 = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.33. *Giải phương trình vi phân*

$$y'' + 4y = e^x - \cos 2x.$$

Giải: + Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 4 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 2i, k_2 = -2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + 4y = 0$ là

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

+ Tìm nghiệm riêng y_{01} của phương trình $y'' + 4y = e^x$: Vì $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.21), ta có

$$y_{01} = ae^x.$$

Thay y_0 vào phương trình $y'' + 4y = e^x$, ta nhận được $a = \frac{1}{5}$. Vậy, phương trình $y'' + 4y = e^x$ có 1 nghiệm riêng $y_{01} = \frac{1}{5}e^x$.

+ Tìm nghiệm riêng y_{02} của phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$: Vì $\alpha = 0, \beta = 2$ và $\alpha + i\beta = 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.22), ta có

$$y_{02} = x(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

Thay y_{02} vào phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$, ta nhận được

$$4b\cos 2x - 4a\sin 2x = -\cos 2x, \quad \forall x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo các hệ số của $\cos 2x$ và $\sin 2x$, ta nhận được $a = 0, b = -\frac{1}{4}$. Do đó, phương trình $y'' + 4y = -\cos 2x$ có 1 nghiệm riêng $y_{02} = -\frac{1}{4}x\sin 2x$. Theo nguyên lý chồng nghiệm, nghiệm riêng của phương trình ban đầu dạng $y_0 = y_{01} + y_{02}$. Vậy, nghiệm tổng quát là

$$y = \bar{y} + y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 4.34. *Bằng cách đặt $y = \frac{u}{x^2}$, hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân*

$$x^2y'' + x(4-x)y' + 2(1-x)y = xe^x.$$

Giải: Lấy đạo hàm của hàm u, ta có

$$\begin{aligned} u' &= y'x^2 + 2xy, \\ u'' &= y''x^2 + 2xy' + 2xy' + 2y = y''x^2 + 4xy' + 2y. \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$u'' - u' = xe^x.$$

+ Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - k = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = 0, k_2 = 1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $u'' - u' = 0$ là

$$\bar{u} = C_1 + C_2e^x.$$

+ Tìm nghiệm riêng u_0: Vì $\alpha = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên theo công thức (4.21), ta có

$$u_0 = x(ax+b)e^x.$$

Thay u_0 vào phương trình $u'' - u' = xe^x$, ta nhận được $a = \frac{1}{2}, b = -1$. Do đó, phương trình ban đầu có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{u}{x^2} = \frac{C_1}{x^2} + C_2\frac{e^x}{x^2} + e^x(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

4.4. Hệ phương trình vi phân

4.4.1. Hệ phương trình vi phân cấp 1

Hệ n phương trình vi phân cấp 1 có dạng:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{4.23}$$

được gọi là hệ chuẩn tắc, trong đó x là biến độc lập và $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm cần tìm. *Bài toán Cauchy đối với hệ phương trình* (4.23): Tìm các nghiệm $(y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x))$ thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y_i(x_0) = y_{0i}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

trong đó $x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}$ là những số cho trước. Tập hợp n hàm số

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số tùy ý và $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$, được gọi là *nghiệm tổng quát* của hệ phương trình vi phân (4.23), nếu các hàm số trên thỏa mãn các điều kiện sau:
Điều kiện 1: y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là nghiệm của (4.23) với mọi $C_1, C_2, ..., C_n$.
Điều kiện 2: Với mọi điểm $(x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}) \in D$, hệ phương trình

$$y_{0i} = y_i(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

giải ra được đối với các hằng số $C_1, C_2, ..., C_n$.

Định lý 4.35. *Giả sử các hàm số* $f_i(x, y, y_1, y_2, ..., y_n)$ *và các đạo hàm riêng* $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x, y_1, y_2, ..., y_n)(i = 1, 2, ..., n)$ *liên tục trên miền* $D \subseteq \mathcal{R}^{n+1}, (x_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}) \in D$. *Khi đó, tồn tại một lân cận của điểm* x_0 *sao cho bài toán Cauchy có duy nhất một nghiệm.*

4.4.2. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1

Từ hệ phương trình vi phân cấp 1 (4.23), ta biến đổi về một phương trình vi phân đổi với một ẩn x bằng cách khử các hàm ẩn chưa biết còn lại của hệ (4.23) được một phương trình vi phân cấp cao. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, sau đó tìm các hàm còn lại. Phương pháp đó gọi là *phương pháp khử*.

Ví dụ 4.36. *Giải hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} y_1' = \cos x - y_2, \\ y_2' = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Giải: Lấy đạo hàm 2 vế của phương trình thứ nhất theo x, ta có

$$y_1'' = -\sin x - y_2'.$$

Kết hợp với phương trình thứ 2, ta nhận được

$$\begin{aligned} y_1'' &= -\sin x - 4\cos x + \sin x - 3y_1 + 4y_2 \\ &= -4\cos x - 3y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

Thay $y_2 = \cos x - y_1'$, ta có

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0.$$

Khi đó, nghiệm thu được có dạng

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Từ hệ thức $y_2 = \cos x - y_1'$, suy ra

$$y_2 = \cos x - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}.$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \\ y_2 = \cos x - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}. \end{cases}$$

4.4.3. Phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1 với hệ số hằng số

Hệ phương trình vi phân cấp 1 với hệ số hằng số có nhiều phương pháp giải. Sau đây, ta sẽ trình bày một phương pháp, gọi là *phương pháp Euler*. Không mất tính tổng quát, ta xét hệ phương trình có 3 ẩn hàm x, y, z và biến độc lập t

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y'_t = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z'_t = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{4.24}$$

Giả sử nghiệm của hệ phương trình (4.24) có dạng:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, x = \beta e^{\lambda t}, x = \gamma e^{\lambda t},$$

trong đó các tham số $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ là các hằng số cần xác định sao cho (x, y, z) là nghiệm của (4.24). Thay (x, y, z) vào hệ phương trình (4.24), ta có

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{11}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{11}\alpha + a_{22}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Hệ phương trình (4.25) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Đẳng thức này là một phương trình bậc 3 đối với ẩn λ và được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ phương trình (4.25). Nghiệm của nó được gọi là *giá trị riêng* của hệ. Ta hạn chế xét phương trình đặc trưng có 3 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Thay lần lượt các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vào hệ phương trình (4.25), ta nhân được các cặp số tương ứng

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).$$

Khi đó, nghiệm của hệ phương trình (4.24) có dạng

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t} \\ y(t) = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t} \\ y(t) = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

Ví dụ 4.37. *Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Giải: Giải phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

\+ Với $\lambda_1 = 1$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + (4-1)\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0.$$

Lấy $\alpha = 1, \beta = -1$. Khi đó, ta có các nghiệm riêng

$$x_1 = e^t, y_1 = -e^t.$$

\+ Với $\lambda_2 = 2$, tương tự ta có các nghiệm riêng

$$x_2 = 2e^{2t}, y_2 = -3e^{2t}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} \\ y = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}, \end{cases}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Bài tập chương 4

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

   a)$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0.$

   b)$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0.$

   c)$y'\cos 2y - \sin y = 0.$

   d)$y' = \cos(x-y).$

2. Giải các phương trình vi phân cấp một.

   a)$(y-x)dx + (y+x)dy = 0.$

   b)$(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0.$

   c)$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một:

   a)$2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$.

   b)$y' + 2xy = xe^{-x}$.

   c)$2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$.

   d) $y' + xy = x^3$.

   e) $y' \cos^2 x + y = tgx$ thỏa mãi $y(0) = 0$.

4. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

5. Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$. thỏa mãn điều kiện bị chặn khi $x \to \infty$.

6. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

   a) $y' - \frac{y}{x} = x^3$.

   b) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$.

7. Tìm nghiệm các phương trình Bernoulli sau:

   a)$y' + \frac{y}{x} = x(\frac{e^x}{e^x+1})y^2$.

   b) $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$.

   c) $x^2y' = y(x+y)$.

   d)$ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = \pi$.

8. Giải các phương trình sau:

   a) $(y^2+1)^{3/2}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1+y^2})dy = 0$.

   b) $e^x(2 + 2x - y^2)dx - ye^x dy = 0$.

   c) $(y\cos^2 x - \sin x)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

   d) $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3dy$.

9. Giải các phương trình:

   a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

   b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

   c) $y'' - (m-1)y' + my = e^x - x - 1$.

   d) $2xy'y'' = y'^2 - 1$. $\quad y = \frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

   e) $\sqrt{y}y'' = y'$. Nghiệm tổng quát:$x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2}ln|2\sqrt{y} + C_1| + C_2$ và ngoài ra $y = c$ cũng là nghiệm.

   f) $y'' = y'e^y$.

g) $yy'' + y^2 = 1$

h) $y'^2 + yy'' = yy'$.

10. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

$$(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0.$$

11. Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = x^2 lnx$ bằng cách đổi biến số $x = e^t$.

12. Bằng cách đặt $y = ux$ hãy giải phương trình: $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$.

13. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

14. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y' - xy = x + x^3$.

15. Chứng minh rằng hệ các vector $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.

16. Giải phương trình:

a) $y'' + y' = x + e^{-x}$.

b) $2y'' + 5y' = 29x \sin x$. Đs: $y = (-2x + \frac{185}{29}) \sin x + (-5 - \frac{16}{29}) \cos x$

c) $y'' - 2y' + 5y = x \sin 3x$. Đs: $y = (\frac{3}{26}x + \frac{57}{26}) \cos 3x + (\frac{-1}{13}x + \frac{41}{43}) \sin 3x$.

17. Giải hệ phương trình vi phân:

$$a) \begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x - 5y, \end{cases} \quad c) \begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 2y + 3z - x. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải bài tập chương 4

1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:

a) $ln|xy| + x - y = C$.

b) $\frac{x+y}{xy} + ln|\frac{y}{x}| = C$.

c) $x = ln|\tan \frac{y}{2}| + 2\cos y + C$.

d) $x + \cot \frac{x-y}{2} = C$.

2. Giải các phương trình vi phân cấp một.

   a) $y^2 + 2xy - x^2 = C^2$.

   b) $x(x^2 + y^2) - C^2 y = 0$.

   c) $e^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$.

3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một:

   a) $y = \frac{C}{\sqrt{x^2-x}} - \frac{ln(x-\frac{1}{2})+\sqrt{x^2-x}}{2\sqrt{x^2-x}}$ nếu $x < 0$ hoặc $x > 1$; $y = \frac{C}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{\arcsin(2x-1)}{2\sqrt{x-x^2}}$ nếu $0 < x < 1$.

   b) $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$.

   c) $y^2 - 2x = Cy^3$.

   d) $y' + xy = x^3$.

   HD: Nghiệm của phương trình thuần nhất $y = Ce^x$ dùng phương pháp biến thiên hằng số.

   e) $y' \cos^2 x + y = tgx$ thỏa mãi $y(0) = 0$.

   HD: Phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm $y = Ce^{-tgx}$.

4. Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

   HD: Xem x là ẩn hàm, thay $y' = \frac{1}{x'}$.

5. Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$. thỏa mãn điều kiện bị chặn khi $x \to \infty$.

6. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

   a) $y' - \frac{y}{x} = x^3$.

   b) $y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} - \cos x$.

7. Tìm nghiệm các phương trình Bernoulli sau:

   a) $y = \frac{1}{Cx - xln(e^x+1)}$.

   b) $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$.

   HD: Đặt $y' = p, z = p^{-1}$ ta được phương trình tuyến tính cấp một:

   $$z' + \frac{1}{1+x}z = \frac{x}{x+1}.$$

   Nghiệm tổng quát: $\begin{cases} ln|x^2 + C_1| + \frac{2}{\sqrt{C_1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 & \text{nếu } C_1 > 0 \\ ln|x^2 + C_1| + \frac{2}{\sqrt{-C_1}}\arctan\frac{x-\sqrt{-C_1}}{\sqrt{-C_1}+x} + C_2 & \text{nếu } C_1 < 0 \end{cases}$, chú ý $y = C$ là nghiệm kì dị.

c) $x^2y' = y(x+y)$.

HD: đặt $z = y^{-1}$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = Cx$, dùng phương pháp biến thiên hàm số.

d)$ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = \pi$.

HD: Đưa phương trình về dạng $x' + \frac{2}{y}x = \frac{2}{\cos^2 y}x^{1/2}$. Đặt $z = z^{1/2}$ ta có nghiệm tổng quát của PT: $\tan y + \frac{1}{y}ln|\cos y| + \frac{C}{y} = \sqrt{x}$.

8. Giải các phương trình sau:

a) $(y^2+1)^{3/2}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1+y^2})dy = 0$.

HD: Phương trình là phương trình vi phân toàn phần.

b) $e^x(2+2x-y^2)dx - ye^x dy = 0$.

c) $(y\cos^2 x - \sin x)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

d) $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3dy$.

9. Giải các phương trình:

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.

c) $y'' - (m-1)y' + my = e^x - x - 1$.

d) $2xy'y'' = y'^2 - 1$. $\quad y = \frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

e) $\sqrt{y}y'' = y'$. Nghiệm tổng quát:$x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2}ln|2\sqrt{y} + C_1| + C_2$ và ngoài ra $y = c$ cũng là nghiệm.

f) $\int \frac{dx}{e^y + C_1} = \begin{cases} -e^{-y} & \text{nếu } C_1 = 0 \\ \frac{1}{C_1}(y - ln|e^y + C_1|) & \text{nếu } C_1 \neq 0. \end{cases}$ và $y = C$ cũng là một nghiệm.

g) $y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$.

h) $y^2 = 2C_1e^x + C_2$.

10. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

$$(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0.$$

HD: đặt $x = u+1, y = v-3$ ta được $\frac{dv}{dx} = \frac{u+v}{v-u}$, từ đó ta có $y^2 + x^2 - 2xy - 8y + 4x = C_1$.

11. Giải phương trình $x^2y'' + xy' - 4y = x^2lnx$ bằng cách đổi biến số $x = e^t$.

12. $y = \pm x; arcsin\frac{y}{x} = lnx + C$.

13. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \Leftrightarrow y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$ đặt $u = \frac{y}{x}$. Đáp số: $y = \pm x$.

14. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}\frac{x^2}{2} + 1$.

15. Chứng minh rằng hệ các vector $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.

16. Giải phương trình:

a) Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda = 0$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm tương ứng của các phương trình: $y'' + y' = x$ và $y'' + y = e^{-x}$.

Đáp số: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x - xe^{-x}$.

b) $y = (-2x + \frac{185}{29}) \sin x + (-5 - \frac{16}{29}) \cos x$

c) $y = (\frac{3}{26}x + \frac{57}{26}) \cos 3x + (\frac{-1}{13}x + \frac{41}{43}) \sin 3x$.

17. Nghiệm có dạng:

$$a) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y = e^{-6t}[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t], \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t) \\ y = e^{3t}[(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \sin t] \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t]. \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

1. Brown, Pearcy A. and Carl, "An introduction to analysis", Graduate Texts in Mathematics, Springer-verlag, 1995.

2. Trim D., " Calculus for engineers", Springer, 2001.

3. Stewart J., "Essential Calculus", Thomson Brooks/Cole, 2006a.

4. Stewart J., "Calculus: Concepts and Contexts", Thomson Brooks/Cole, 2006.

5. Rudin W., "Principles of Mathematical Analysis", 3rd ed, McGraw-Hill, 1976.

6. Wrede R., and Spiegel M., "Theory and Problems of Advanced Calculus", McGraw-Hill, 2002.

7. N.Đ. Trí (chủ biên), "Toán học cao cấp", tập 3, NXB GD, 2003.

8. N.Đ. Bình (chủ biên), "Chuỗi và phương trình vi phân", NXB HK-KT, 2008.