1 dfgfg

2 dđfg

3 dđfgdd

CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

3.1. Tích phân đường loại 1.

3.1.1. Định nghĩa.

Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$ xác định trên cung $\widetilde{AB}$

+ Phân hoạch P cung $\widetilde{AB}$ bởi n điểm

$$A = C_0, C_1, C_2, ..., C_n = B.$$

Ký hiệu Δ_i là độ dài các cung $\widetilde{C_{i-1}C_i}$ $\forall i = 1, 2, ..., n$ và $\Delta_P = \max\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}$.

+ Chọn một điểm tùy ý $M_i \in \widetilde{C_{i-1}C_i}$.

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i$$

được gọi là *tổng tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\widetilde{AB}$. Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\widetilde{AB}$ (hay ta còn nói $f(x, y)$ khả tích trên cung $\widetilde{AB}$) và được ký hiệu là $\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds$. Người ta chứng minh được rằng nếu cung $\widetilde{AB}$ trơn từng khúc (cung xác định hàm số khả vi liên tục từng khúc) và hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$ thì hàm số $f(x, y)$ khả tích trên $\widetilde{AB}$.

Dựa vào định nghĩa, ta có các tính chất:

3.1.2. Tính chất.

+ $\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\widetilde{BA}} f(x, y)ds$.

+ $\int\limits_{\widetilde{AB}} 1ds = |\widetilde{AB}|$ là độ dài của cung $\widetilde{AB}$.

+ Nếu cung $\widetilde{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ thì $m_{\widetilde{AB}} = \int\limits_{\widetilde{AB}} \rho(x, y)ds$ là khối lượng của cung $\widetilde{AB}$.

3.1.3 Công thức tính.

a) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tổng quát

Trường hợp 1: Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng $y = \varphi(x)$ $x \in [a, b]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx. \tag{3.1}$$

Trường hợp 2: Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng $x = \phi(y)$ $y \in [c, d]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(\phi(y), y)\sqrt{1+\phi'^2(y)}dy. \tag{3.2}$$

Chứng minh: Ta chứng minh cho trường hợp 1, trường hợp 2 là tương tự. Theo định nghĩa, giả sử $C_i(x_i, y_i), \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}, \Delta_{y_i} = y_i - y_{i-1}$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. Khi Δ_{x_i} đủ nhỏ, ta có

$$\Delta_i \approx C_{i-1}C_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \Delta_{x_i}\sqrt{1 - \frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}}}.$$

Theo công thức số gia giới nội

$$\frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}} = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}}{\Delta_{x_i}} = \varphi'(\xi_i) \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1-\varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i}.$$

Đặt $\Delta_x = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y)ds = \lim_{\Delta_x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1-\varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i} = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx.$$

Ví dụ 3.1. Tính tích phân $\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds$, trong đó $A(2, 0), B(0, 1)$.

Bài giải.

+ Phương trình đường thẳng AB có dạng

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

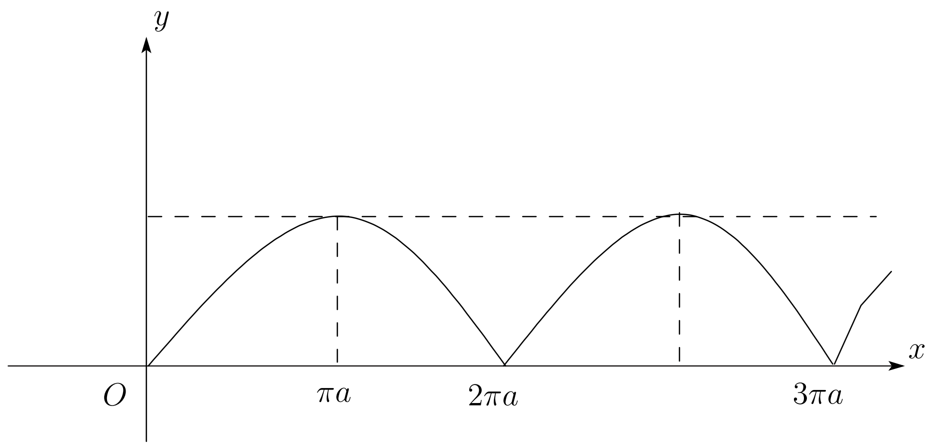
+ Theo công thức tính (3.1)

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1+y'^2}dx = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

b) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tham số trong mặt phẳng

Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta. \tag{3.3}$$



Hình 1: Hình vẽ của ví dụ 3.2

và hàm số $f(x,y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Bằng cách thay $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ vào công thức (3.2), ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.2. Tính tích phân $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y^2 ds$, trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là một nhịp của cung cycloide

$$\overset{\frown}{AB}\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \le t \le 2\pi.$$

Bài giải.

Theo công thức (3.3), ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y^2 ds &= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1 - \cos t\big)^2\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1 - \cos t\big)^2 a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}dt \\
&= \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1 - \cos t)^5}dt \\
&= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt \\
&= \frac{256a^3}{15}.
\end{aligned}$$

c) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có dạng tham số trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad \alpha \le t \le \beta. \\ x = z(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

và hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Bằng cách hiểu tương tự như trong trường hợp cung $\widetilde{AB}$ trong mặt phẳng, ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y, z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.3. Tính $I = \int\limits_{\widetilde{AB}} (x^2 + y^2 + z^2)ds$, trong đó $\widetilde{AB}$ là đoạn xoắn có phương trình tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \quad a > 0, 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Bài giải.

Theo công thức (3.4), ta có

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 = t^2)$$

và

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = a\sqrt{2}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 + t^2)a\sqrt{2}dt \\ &= a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + t^2)dt \\ &= 2\sqrt{2}a^3(1 + \frac{4}{3}\pi^2). \end{aligned}$$

d) Cung $\widetilde{AB}$ được cho dưới dạng tọa độ cực bởi phương trình

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$

Khi đó,

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\,d\varphi. \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.4. Tính độ dài đoạn cong xác định bởi

$$\widetilde{OA}\begin{cases} x^2 + y^2 = cz, \\ \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}, \quad \text{với } O(0,0,0), A(2,2,4). \end{cases}$$

Bài giải.

Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, khi đó phương trình đoạn cong $\widetilde{OA}$ có dạng:

$$r^2 = cz, \tan\varphi = \tan\frac{z}{c}.$$

Từ $0 \le z \le 4$, suy ra rằng $0 \le \varphi \le \frac{4}{\varphi}$. Do đó,

$$\widetilde{OA}\begin{cases} x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi, \\ y = c\sqrt{\varphi}\sin\varphi, \\ z = c\varphi, \quad \text{với } \ 0 \le \varphi \le \frac{4}{c}. \end{cases}$$

Theo công thức (3.4) và tính chất của tích phân đường loại 1, độ dài cung $\widetilde{OA}$ được tính bởi

$$\begin{aligned} |\widetilde{AB}| &= \int\limits_{\widetilde{AB}} ds \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{c}} \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi}\,d\varphi \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{c}} c\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\Big)d\varphi \\ &= 2\sqrt{c}(1 + \frac{8}{3c}). \end{aligned}$$

e) Tọa độ trọng tâm của dây cung.

Cho cung $\widetilde{AB}$ có khối lượng riêng xác định bởi hàm số $f(x,y)$. Khi đó, tọa độ trọng tâm G của cung $\widetilde{AB}$ được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} xf(x,y)ds, \\ y_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} yf(x,y)ds, \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó, m là khối lượng của cung $\widetilde{AB}$.

Ví dụ 3.5. Xác định tọa độ trọng tâm của một nhịp của cung cycloide đồng chất

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \le t \le \pi.$$

Bài giải.

Cung $\widetilde{AB}$ là đồng chất hay ta có thể giả thiết rằng $f(x,y) = c$ (hằng số). Theo công thức (3.6), tọa độ trọng tâm G của cung $\widetilde{AB}$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} xf(x,y)ds = \frac{c}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} xds = \frac{4a}{3}, \\ y_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} yf(x,y)ds = \frac{c}{m}\int\limits_{\widetilde{AB}} yds = \frac{4a}{3}. \end{cases}$$

3.2. Tích phân đường loại 2.

3.2.1. Định nghĩa.

Cho hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$ xác định trên cung $\widetilde{AB}$. Người ta còn viết F dưới dạng $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ hay

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Phép phân hoạch (P) cung $\widetilde{AB}$ bởi các điểm

$$A_0 = A, A_1, ..., A_n = B.$$

Chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \widetilde{A_{i-1}A_i} \subset \widetilde{AB}$ với mỗi $i = 1, 2, ..., n$. Giả sử rằng $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}, \Delta_{z_i})$. Khi đó,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

được gọi là tổng tích phân đường loại 2 của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ xác định bởi phân hoạch (P). Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta_{x_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{y_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{z_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0$, tổng tích phân I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào phép phân hoạch (P) và phép chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân được loại 2* của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ và ký hiệu

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Theo cách viết truyền thống, người ta còn viết dưới dạng

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Trong trường hợp đặc biệt khi cung $\widetilde{AB}$ là đường cong kín, tích phân đường loại 2 trên cung $\widetilde{AB}$ được viết

$$\oint_{\widetilde{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

3.2.2. Nhận xét.

Khi cung $\widetilde{AB}$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q)$, tích phân đường loại 2 của hàm $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ được ký hiệu bởi

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Đặc biệt khi cung $\widetilde{AB}$ là một đoạn $[a,b]$ nào đó trên $\mathbb{R}$, hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tích phân đường loại 2 của hàm f trên $\widetilde{AB}$ trở thành tích phân xác định.

3.2.3. Tích chất cơ học của tích phân được loại 2.

Để tính công sinh ra từ một điểm M chuyển động dọc theo cung $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B dưới tác dụng của một lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$, ta thực hiện phép phân hoạch (P) như trong định nghĩa trên. Phép chia cung $\widetilde{AB}$ min tới mức ta có thể coi cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ như đoạn thẳng, lực tác dụng vào chất điểm trên trên cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ không đổi và bằng $\vec{F}(M_i)$. Khi đó, công sinh ra trên cung $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ với tích vô hướng $\vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Vậy I_n xác định bởi định nghĩa trên xấp xỉ với công sinh ra trên cung $\widetilde{AB}$. Do đó, giá trị của tích phân đường loại 2 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ chính là công sản sinh khi chất điểm M chuyển động dọc theo quỹ đạo $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B.

3.2.4. Cách tính tích phân được loại 2.

Cho cung $\widetilde{AB}$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t : a \to b, A\big(x(a), y(a), z(a)\big), B\big(x(b), y(b), z(b)\big). \end{cases} \tag{3.7}$$

Các hàm số $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Chứng minh.

Giả sử phân hoạch (P) trong định nghĩa được xác định bởi

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

Gọi $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), z_i = z(t_i)$, và $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ sao cho

$$\begin{cases} \Delta_{x_i} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{y_i} = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{z_i} = z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \end{cases}$$

trong đó $\Delta_{t_i} = t_i - t_{i-1}$. Khi đó, điểm $M_i\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big) \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$ và

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)x'(\tau_i) + Q\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)y'(\tau_i) + R\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)z'(\tau_i)\Big)\Delta_{t_i}. \end{aligned}$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số

$$P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)$$

trên đoạn $[a, b]$. Đặt $\Delta_P = \max\{\Delta_{t_i} : i = 1, 2, ..., n\}$. Cho $\Delta_{t_i} \to 0$, ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.6. *Tính* $I = \int\limits_{\widetilde{AB}} (ydx + zdy + xdz)$*, trong đó* $a > 0, \widetilde{AB} : \{x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t : 0 \to 2\pi\}$.

Bài giải.

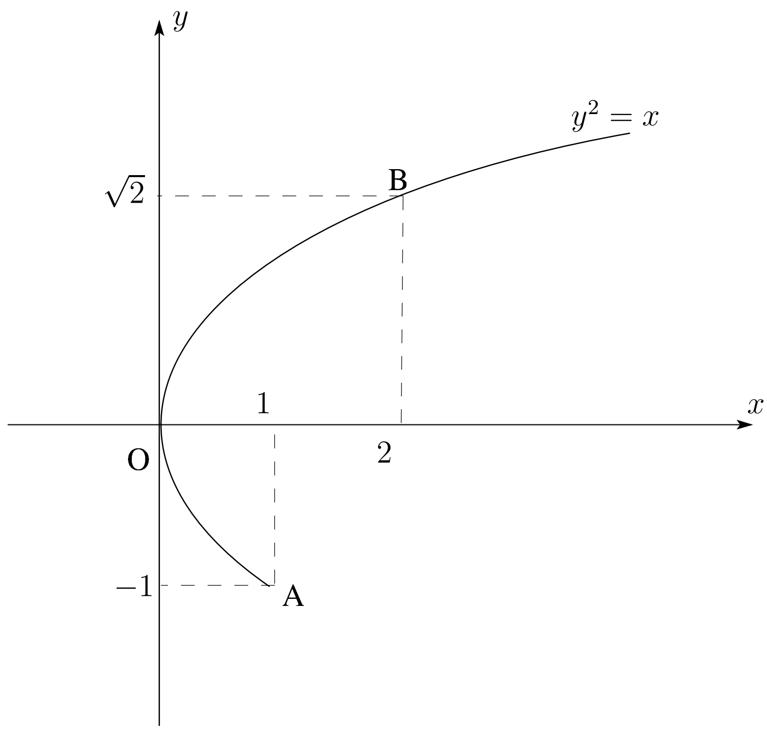
Theo công thức (3.7), ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(a\sin t(-a\sin t) + bt(a\cos t) + a\cos t.b\Big)dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(-a^2\sin^2 t + ab(1+t)\cos t\Big)dt \\ &= -\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt + ab\int\limits_0^{2\pi}(1+t)\cos t dt \\ &= -\pi a^2. \end{aligned}$$

3.2.5. Chú ý.

Cho cung $\widetilde{AB} \subset (Oxy)$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t : a \to b. \end{cases} \tag{3.8}$$



Hình 2: Hình vẽ của ví dụ 3.7

Các hàm số $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.7. Tính

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} x^2dx + xydy,$$

trong đó $\widetilde{AB} : x = y^2, A(1,-1), B(2,\sqrt{2})$.

Bài giải.

Theo công thức (3.8), nếu cung $\widetilde{AB} : x = \varphi(y), y \in [a,b]$, tích phân đường loại 2 được xác định bởi

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy &= \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(y), y)\varphi'_y + Q(\varphi(y), y)\Big)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (y^4 2y + y^3)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (2y^5 + y^3)dy \\
&= (\frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4)\Big|_{-1}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.8. Tính

$$\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy,$$

trong đó $a > 0, b > 0, (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Bài giải.

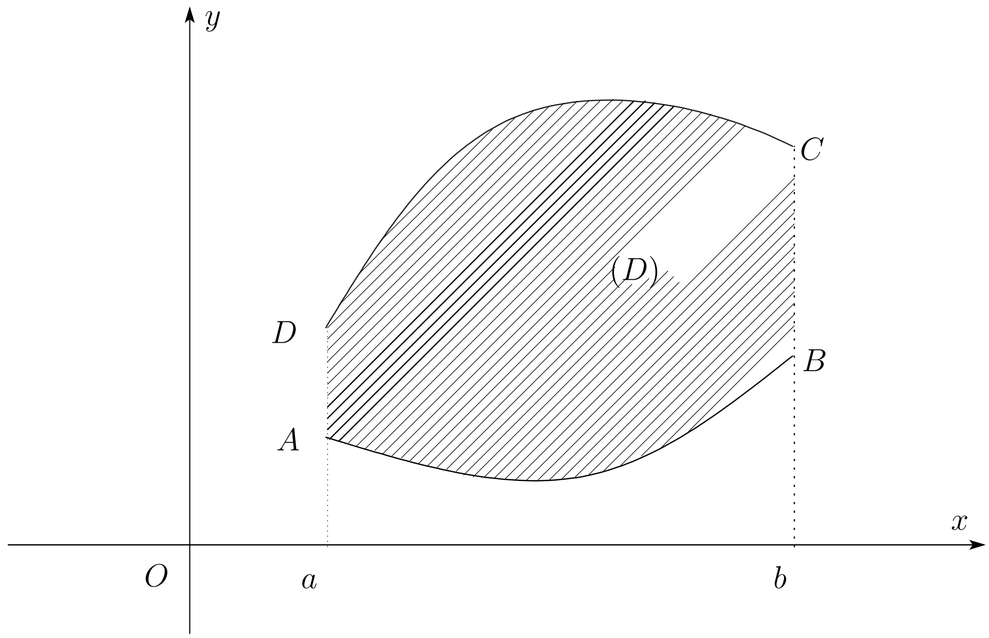
Ta chuyển đường elip (E) về dạng tham số. Đặt

$$x = a\cos t, y = b\sin t \quad \text{với} \quad t : 0 \to 2\pi.$$

Theo công thức (3.8), ta có

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(b^2\sin^2 t(-a\sin t) - a^2\cos^2 t(b\cos t)\Big)dt \\
&= -ab\int\limits_0^{2\pi} (b\sin^3 t + a\cos^3 t)dt \\
&= -\frac{ab}{4}\int\limits_0^{2\pi} \Big(b(3\sin t - \sin 3t) + a(3\cos t + \cos 3t)\Big)dt \\
&= -\frac{ab}{4}\Big(b(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t) + a(3\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.2.6. Công thức Green.



Hình 3: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Cho miền D trong mặt phẳng $\mathcal{R}^2$ là một miền liên thông, bị chặn và biên ∂D là một hay nhiều đường cong kín trơn từng khúc. Các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $D \cup \partial D$. Công thức Green được phát biểu như sau:

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Chứng minh.

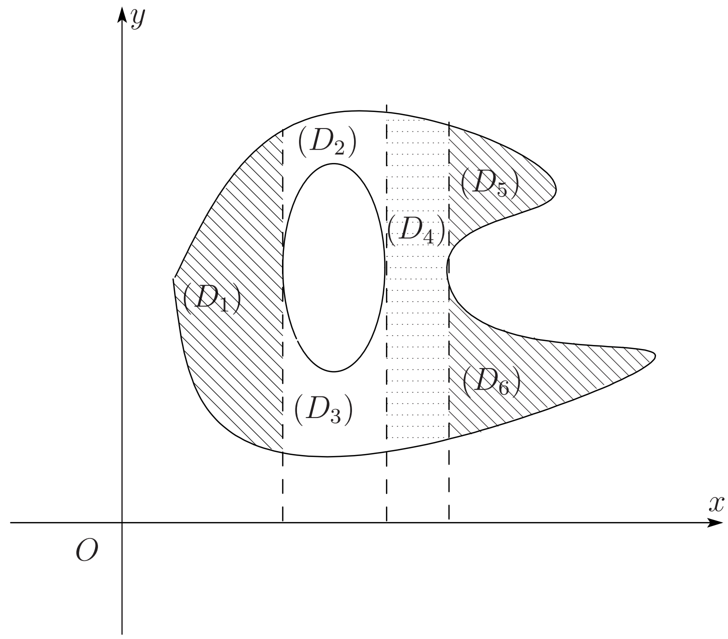
Ta xét các trường hợp của D như sau:

Trường hợp 1. $D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

Theo định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= \int\limits_a^b \Big(P(x,y_1(x)) - P(x,y_2(x))\Big) dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\bar{BC}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx + \int\limits_{\bar{DA}} P(x,y)dx \\
&= \oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

.



Hình 4: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy. \tag{3.10}$$

Từ (3.9) và (3.10) kéo theo công thức Green được chứng minh.

Trường hợp 2. Miền (D) là miền đa liên.

+ Ta chia miền (D) thành các miền nhỏ $(D_1), (D_2), ...(D_n)$ bởi các đường thẳng song song với trục Oy

+ Theo trường hợp 1, công thức Green đúng với các miền nhỏ (D_i) với $i = 1, 2, ..., n$ hay

$$\iint\limits_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint\limits_{\partial D_i} Pdx + Qdy \ \ \forall i = 1, 2, .., n.$$

+ Tổng các tích phân đường của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ trên cùng một dây cung theo hai chiều ngược nhau bằng không. Do đó,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy &= \iint\limits_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy + ... + \iint\limits_{D_n} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy \\ &= \oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy + ... + \oint\limits_{\partial D_n} Pdx + Qdy \\ &= \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.9. Dùng công thức Green để tính tích phân đường sau

$$K = \oint_{\partial C} (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy,$$

trong đó $(C) : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Bài giải.

Đặt $P(x,y) = xy + e^x \sin x + x + y, Q(x,y) = xy - e^{-y} + x - \sin y$. Khi đó,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (y+1) - (x+1) = y - x.$$

Theo công thức Green, ta có

$$\begin{aligned}
K &= \iint_{(C)} (y-x)dxdy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} (\sin\varphi - \cos\varphi) r^2 dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi)\cos^3\varphi d\varphi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

3.2.7. Định lý 4 mệnh đề tương đương.

Cho các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên $D \subset \mathcal{R}^2$ (miền không có lỗ thủng nào). Khi đó, các mênh đề sau tương đương:

(i) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \;\; \forall (x,y) \in D$.

(ii) $\oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy = 0 \;\; \forall D_1 \subset D$.

(iii) $\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A, B, với mọi $\widetilde{AB} \subset D$.

(iv) Tồn tại $u(x,y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$ Giả sử $D_1 \subset D$, Theo công thức Green, D là miền đơn liên và giả thiết (i), ta có

$$\oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Giả sử 2 đường cong bất kỳ nối A với B là $\widetilde{AmB}$ và $\widetilde{AnB}$. Theo giả thiết (ii), ta có

$$\oint_{\widetilde{AmBnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Khi đó

$$\int_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy + \int_{\widetilde{BnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Hay

$$\int_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy - \int_{\widetilde{AnB}} Pdx + Qdy = 0.$$

Như vậy, tích phân đường loại 2 của $Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối điểm A với B.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Giả sử $M(x, y) \in D$ bất kỳ. Đặt

$$u(x, y) = \int_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy \text{ (có thể sai khác một hằng số).}$$

Theo giả thiết (iii), ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{u(x + \Delta_x, y_u(x, y)}{\Delta_x} \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x}\Big(\int_{\widetilde{AM_1}} Pdx + Qdy - \int_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy \Big) \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int_{MM_1} Pdx + Qdy \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta_x} P(z, y) dz,
\end{aligned}$$

trong đó $M_1(x+\Delta_x, y) \in D$. Theo tính chất của tích phân xác định, tồn tại $z = x+\theta\Delta_x, 0 < \theta < 1$ sao cho

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta_x} P(z, y) dz = P(z, y).$$

Khi $\Delta_x \to 0$ thì $z \to x$. Theo tính liên tục của $P(x, y)$, ta cũng có $P(z, y) \to P(x, y)$ và do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y).$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng chứng minh được rằng

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Như vậy, tồn tại $u(x,y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Từ giả thiết tồn tại $u(x,u)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$ và các đạo hàm riêng của P, Q liên tục trên D. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Theo định lý Schwarz, ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ví dụ 3.10. *Tính tích phân đường*

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{(x+y)dy + (x-y)dx}{x^2+y^2},$$

trong đó $A(-1,-1), B(1,1)$.

Giải.

Dễ thử lại rằng $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ \ \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, tích phân đường I không phụ thuộc vào đường cong nối A với B. Ta có nhiều cách chọn đường cong nối A với B. Dưới đây là một cách chọn

$$(C): x^2 + y^2 = 2.$$

Đặt $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t\ \ t: -\frac{3\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$. Khi đó

$$I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \pi.$$

Hệ quả 3.11. *Nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền $\mathcal{R}^2$ và tồn tại $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x,y)dx + C.$$

Ví dụ 3.12. *Xác định hàm $u(x,y)$, biết*

$$du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}, u(0,1) = 5.$$

Giải:

Đặt

$$P(x,y) = \frac{(x+2y)}{(x+y)^2}, Q(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}.$$

Theo hệ quả 3.11, ta chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ và

$$u(x,y) = \int_1^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$$
$$= \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C.$$

Từ $u(0,1) = 5$, ta có

$$\ln(0+1) - \frac{1}{0+1} + C = 5 \Rightarrow C = 6.$$

Vậy

$$u(x,y) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + 6.$$

Hệ quả 3.13. *Nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền D, $\widetilde{AB} \subset D$ và tồn tại $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$\int_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

Ví dụ 3.14. *Tính tích phân đường*

$$J = \int_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy,$$

trong đó $A(a,0), B(0,a)$.

Giải:

Đặt

$$P(x,y) = e^x \sin y, Q(x,y) = e^x \cos y - 1.$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

Theo hệ quả 3.13, ta chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$ và

$$u(x,y) = \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$$
$$= e^x \sin y - y + C.$$

Do vậy

$$J = \int_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy = u(0,a) - u(a,0) = \sin a - a.$$

Ví dụ 3.15. *Tính tích phân đường*

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} \Big(2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)\Big)dx - x^2\sin(x+y)dy,$$

trong đó $A(\pi, 0), B(0, \pi)$.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y), Q(x,y) = x^2\sin(x+y).$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

Bằng cách làm tương tự như ví dụ 3.14, ta nhận được

$$u(x,y) = x^2\cos(x+y).$$

Theo hệ quả 3.13

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x\cos y - 1)dy = u(0,\pi) - u(\pi, 0) = \pi^2.$$

Ví dụ 3.16. *Tìm* m, n *để tích phân sau không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối điểm* $A(0,0)$ *với điểm* $B(1,1)$

$$K = \int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{y(1-x^2+my^2)dx + x(1-y^2+nx^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Từ đó, hãy tính K.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = \frac{y(1-x^2+my^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, Q(x,y) = \frac{x(1-y^2+nx^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, ta cần tính

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - x^4 + 3(m+1)x^2y^2 + 3(m-1)y^2 - my^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 3(n-1)x^2 - nx^4 + 3(n+1)x^2y^2 - y^4}{(1+x^2+y^2)^3}.$$

Các điều kiện của 4 mệnh đề tương đương được thỏa mãn. Do đó, muốn K không phụ thuộc vào đường công nối điểm A với điểm B điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Đồng nhất các hệ số, ta nhận được $m = n = 1$.

Để tính K, ta cần viết phương trình đường thẳng $AB : y = x$. Theo công thức tính tích phân đường, ta nhận được

$$\begin{aligned} K &= \int\limits_0^1 \frac{y(1-x^2+y^2)dx + x(1-y^2+x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \int\limits_0^1 \frac{2xdx}{(1+2x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+2x^2)}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.3. Tích phân mặt loại 1.

3.3.1. Các khái niệm về mặt.

Một mặt cong S trong $\mathcal{R}^3$ được tạo bởi một ánh xạ liên tục

$$g : D \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3.$$

Giả sử rằng $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Khi đó

+ Mặt S được gọi là *trơn*, nếu các đạo hàm riêng của các hàm số $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ liên tục trên miền D.

+ Mặt S được gọi là *trơn từng mảnh*, nếu mặt S có thể chia thành hữu hạn các mảnh trơn.

+ *Véc tơ pháp tuyến* của mặt trơn S là $\vec{n} = (A, B, C)$, trong đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \\ B &= \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \\ C &= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Trong trường hợp đặc biệt $S : z = g(x,y) \ \ (x,y) \in D$. Khi đó, véc tơ pháp tuyến của mặt S là

$$\vec{n} = (-g'_x, -g'_y, 1).$$

+ *Mặt định hướng được:* Mặt trơn S được gọi là định hướng được, nếu với mỗi điểm $M \in S$ xác định được một véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ (gốc tại điểm M) liên tục trên S.

+ *Diện tích mặt:* Trong không gian $\mathcal{R}^3$, ta xét mặt S có phương trình

$$z = f(x,y) \ \ (x,y) \in D.$$

trong đó, hàm số f và các đạo hàm riêng của nó liên tục trên miền D. Phân hoạch P chia miền D thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ có các diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Lấy một điểm tùy ý $N_i(x_i, y_i) \in D_i$. Gọi T_i là một phần của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ và hình chiếu vuông góc trên (Oxy) là miền D_i. Diện tích của mảnh T_i được ký hiệu là ΔT_i. Tương tự, ta cũng có các mảnh nhỏ trên mặt S là $S_1, S_2, ..., S_n$ và các diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Gọi góc tạo bởi giữa trục Oz và véc tơ pháp tuyến của T_i tại điểm M_i là α_i. Khi đó, ta nhận thấy rằng

$$\Delta D_i = \Delta T_i |\cos\alpha_i| \;\; \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Mặt khác, theo công thức tính véc tơ pháp tuyến ở trên, ta có

$$\vec{n} = \Big(-f'_x(M_i), -f'_y(M_i), 1\Big).$$

Do đó

$$|\cos\alpha_i| = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)}}.$$

Khi đường kính của phân hoạch P là $\delta_P = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ (trong đó d_i là đường kính của D_i) đủ nhỏ, thì $\Delta S_i \approx \Delta T_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Vì vậy, diện tích của mặt S có thể được tính xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i.$$

Dấu bằng xảy ra, khi độ dài phân hoạch $\Delta_P \to 0$. Khi đó, diện tích mặt S được tính bởi công thức

$$dt(S) = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy. \tag{3.12}$$

Khi đó, biểu thức

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy$$

được gọi là *vi phân mặt*.

Nếu mặt trơn S được cho dưới dạng phương trình tham số

$$S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \;\; (u, v) \in D.$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có $dS = \sqrt{AC - B^2} dudv$ và diện tích mặt cong cho bởi công thức

$$dt(S) = \iint_D \sqrt{AC - B^2} dudv, \tag{3.13}$$

trong đó

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$B = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$C = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \tag{3.14}$$

3.3.2. Định nghĩa.

Trong không gian $\mathcal{R}^3$, cho mặt S và một hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt S.

+ Một phân hoạch P chia mặt S thành các mảnh nhỏ $S_1, S_2, ..., S_n$ có các diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và đường kính $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$. Khi đó, $\delta_P = \max\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$ gọi là đường kính của phân hoạch P.

+ Chọn một điểm bất kỳ $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$. Khi đó tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \tag{3.15}$$

được gọi là *tổng tích phân mặt loại 1* của hàm f ứng với phân hoạch P và phép chọn điểm M_i. Xét giới hạn

$$I = \lim_{\delta_P \to 0} \sigma_n.$$

Nếu I tồn tại hữu hạn không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và phép chọn các điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân mặt loại 1* của hàm f trên mặt S và được ký hiệu là

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dS.$$

Người ta chứng minh được rằng: Nếu mặt S trơn và hàm số f liên tục trên S, thì tồn tại tích phân mặt I.

3.3.3. Cách tính.

(i) Nếu mặt (S) cho bởi phương trình tổng quát

$$(S) : z = z(x, y) \text{ với } (x, y) \in D,$$

trong đó hàm số z và các đạo hàm riêng liên tục trên tập compact D. Theo định lý giá trị trung bình và công thức (3.12), tồn tại $(x_i, y_i) \in D_i$ sao cho

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$
$$= \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\Delta D_i.$$

Theo (3.15), ta có

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\Delta D_i$$

và do đó

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(x, y, z)dS &= \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_n \\ &= \iint\limits_D f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Ví dụ 3.17. *Tính*

$$J = \iint\limits_S (6x + 4y + 3z)dS,$$

trong đó $A(6, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2), S = \triangle ABC.$

Giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Dùng công thức (3.16) với $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), z_x' = -\frac{1}{3}, z_y' = -\frac{2}{3}$. Miền $D = \triangle OAB$ là hình chiếu của $\triangle ABC$ trên mặt phẳng (Oxy). Khi đó

$$\begin{aligned}J =& \iint\limits_D \Big(6x + 4y + 3.\frac{1}{3}(6 - x - 2y)\Big)\sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2}dxdy \\ =& \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_D (5x + 2y + 6)dxdy \\ =& \frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x + 2y + 6)dx \\ =& 54\sqrt{14}.\end{aligned}$$

(ii) Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2,$$

trong đó các hàm số x, y, z và các đạo hàm riêng liên tục trên tập compact D, hàm số $f(x, y, z)$ cũng liên tục trên S. Từ các công thức (3.13) và (3.15), ta cũng có

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)\sqrt{AC - B^2}dudv, \qquad (3.17)$$

trong đó A, B, C xác định bởi (3.13).

Ví dụ 3.18. *Tính tích phân*

$$K = \iint_S z^2 dS,$$

trong đó S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm ở góc phần tám thứ nhất.

Giải.

Sử dụng phép đổi biến sang tọa độ cầu

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Theo công thức (3.17), ta có

$$\sqrt{AC - B^2} = R^2 \sin\theta.$$

Khi đó

$$K = \iint_S z^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{\pi R^4}{6}.$$

3.3.4. Tính chất cơ học của tích phân mặt loại 1.

Cho mặt S có khối lượng riêng tại điểm $M \in S$ là $\rho(M)$. Khi đó

(i) Khối lượng riêng của S là

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

(ii) Tọa độ trọng tâm của mặt S là $G(x_G, y_G, z_G)$ xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x, y, z) dS,$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x, y, z) dS,$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x, y, z) dS.$$

(iii) Mômen quán tính

+ đối với gốc tọa độ là

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Ox là

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Oy là

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dS.$$

+ đối với trục Oz là

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dS.$$

3.4. Tích phân mặt loại 2.

3.4.1. Định nghĩa.

Cho mặt trơn S được định hướng bởi véc tơ $\vec{n}(M)$ (với $M \in S$) biến thiên liên tục. Hàm véc tơ $\vec{F} = \big(P(M), Q(M), R(M)\big)$ liên tục trên mặt S.

+ Phân hoạch P chia mặt S thành n mảnh nhỏ $S_1, S_2, ..., S_n$ có diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ và có đường kính là d_i. Ký hiệu $\Delta_P = \max\{d_1 :\ i = 1, 2, ..., n\}$.

+ Trên mỗi mảnh S_i, chọn một điểm bất kỳ $M_i \in S_i$. Gọi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ là góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị định hướng $\vec{n}(M_i)$ của mặt (S) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tương ứng. Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} \Big(P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i\Big)\Delta S_i$$

được gọi là tổng tích phân mặt loại 2 của hàm véc tơ $\vec{F}$ ứng với phân hoạch P và phép chọn M_i. Nếu tồn tại hữu hạn giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và phép chọn các điểm M_i, thì I được gọi là *thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt S*, còn được gọi là *tích phân mặt loại 2* của $\vec{F}$ trên mặt S và được ký hiệu bởi

$$\iint\limits_S \Big(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\Big)dS$$

hoặc

$$\iint\limits_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy.$$

3.4.2. Cách tính.

(i) Nếu mặt S cho bởi phương trình tổng quát

$$S : z = z(x, y) \ \ (x, y) \in D,$$

trong đó S là mặt trơn và định hướng được bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Các hàm số $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục trên mặt S. Gọi D_i là hình chiếu vuông góc của S_i trên (Oxy). Theo định nghĩa của tích phân mặt loại 2, ta có

+ Nếu góc γ (góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ với tia Oz) là một *góc nhọn* thì

$$\begin{aligned}\iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma dS &= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n R(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i\cos\gamma_i\\ &= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n R(x_i,y_i,z_i)\Delta T_i\cos\gamma_i\\ &= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n R(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i\\ &= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n R\big(x_i,y_i,z(x_i,y_i)\big)\Delta D_i\\ &= \iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.\end{aligned}$$

+ Nếu góc γ (góc tạo bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ với tia Oz) là một *góc tù* thì

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma dS = -\iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.$$

Ví dụ 3.19. *Tính*

$$I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

trong đó S là phần trên của mặt phẳng $x+z=1$, nằm trong góc phần tám thứ nhất và được giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0, y=4$.

Bài giải.

Gọi D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$. Vì S song song với Oy, nên

$$I_3=\iint\limits_{D_3} ydzdx=0.$$

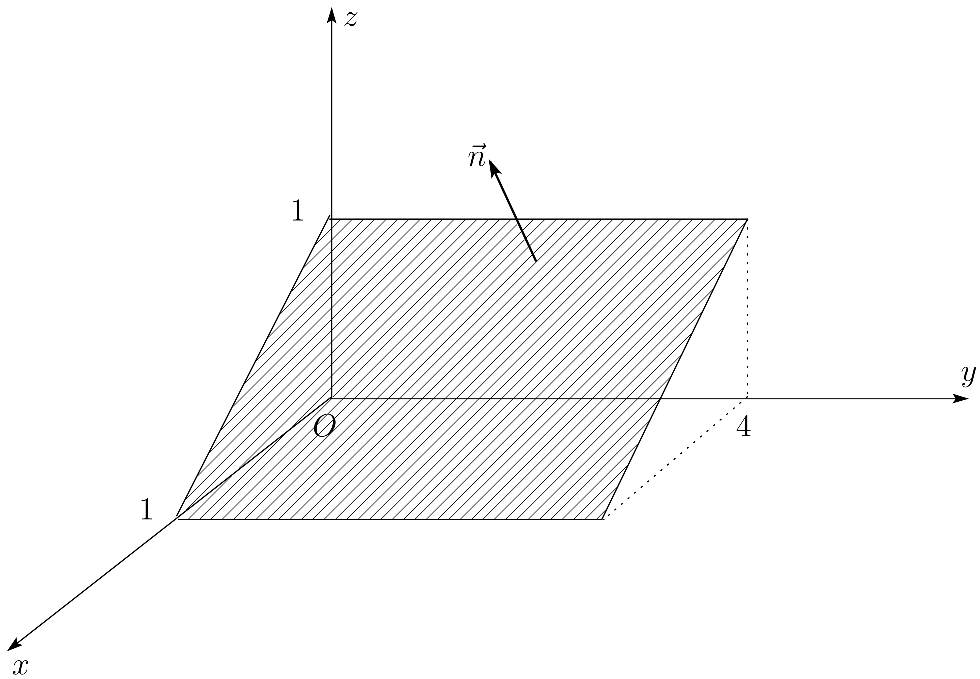
Từ $D_1=\{(x,y)\in(Oxy):\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 4\}$ và góc tạo bởi $\vec{n}$ với Oz là góc nhọn, ta có

$$I_1=\iint\limits_{D_1} zdxdy=\iint\limits_{D_1}(1-x)dxdy=2.$$

Từ $D_2=\{(y,z)\in(Oyz):\ 0\le y\le 4, 0\le z\le 1\}$ và góc tạo bởi $\vec{n}$ với Ox là góc nhọn, ta có

$$I_1=\iint\limits_{D_1} xdydz=\iint\limits_{D_2}(1-z)dydz=2.$$

Vậy $I=I_1+I_2+I_3=4$.



Hình 5: Hình vẽ của *Ví dụ 3.19*.

(ii) Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$S : x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \quad (u,v) \in D,$$

trong đó S là mặt trơn và định hướng được bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Các hàm số $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ liên tục trên mặt S. Với véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và A, B, C được xác định trong công thức (3.11), ta có

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Theo công thức (3.14) và $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$ nên ta có công thức

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_D (PA + QB + RC)dudv, \qquad (3.18)$$

trong đó dấu cộng và trừ được chọn một cách thích hợp với phía của mặt định hướng.

Ví dụ 3.20. *Tính*

$$J = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S *là mặt ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải.

Dùng phép đổi biến trong tọa độ cầu

$$x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta \text{ với } 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} A = R^2\cos\varphi\sin^2\theta, \\ B = R^2\sin\varphi\sin^2\theta, \\ C = R^2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} J &= \iint\limits_D R^3(\cos^2\varphi\sin^3\theta + \sin^2\varphi\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)d\varphi d\theta \\ &= R^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\ &= 4\pi R^3. \end{aligned}$$

3.5. Quan hệ giữa các tích phân.

3.5.1. Công thức Stokes

Cho S là một mặt định hướng trơn từng mảnh, biên ∂S là một đường cong kín trơn từng khúc, các hàm số P, Q, R và các đạo hàm của chúng liên tục trên S. Khi đó

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

trong đó đường lấy tích phân theo *chiều dương* (là chiều đi mà ta nhìn thấy mặt ở bên trái) ứng với mặt S.

Chứng minh.

Giả sử mặt S cho bởi phương trình tham số

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D.$$

Theo công thức Green, ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial S} Pdx &= \int\limits_{\partial D} Px'_u du + Px'_v dv \\ &= \iint\limits_D \Big((Px'_u)'_u - (Px'_v)'_v\Big)dudv. \end{aligned}$$

Để tiện theo dõi, ta xét

$$\begin{aligned}(Px'_u)'_u - (Px'_v)'_v =&(P'_x x'u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + Px''_{vu} - \big((P'_x x'_v + P'_y y'_v + P' zz'_v)x'_v + Px''_{uv}\big)\\ =&- P'_y\,(y'_v x'_u - y'_u x'_v) + P'_x\,(x'_u x'_v - x'_v x'_u) + P'_z\,(z'_u x'_v - z'_v x'_u)\\ =&- P'_y\,(y'_v x'_u - y'_u x'_v) + P'_z\,(z'_u x'_v - z'_v x'_u)\\ =&- P'_y \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + P'_z \frac{D(z,x)}{D(u,v)}.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\int\limits_{\partial S} Pdx = \iint\limits_{D} \left(-P'_y \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + P'_z \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right) dudv. \tag{3.19}$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\int\limits_{\partial S} Qdy = \iint\limits_{D} \left(-Q'_z \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q'_x \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) dudv, \tag{3.20}$$

$$\int\limits_{\partial S} Rdz = \iint\limits_{D} \left(-R'_x \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R'_y \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right) dudv. \tag{3.21}$$

Cộng các đẳng thức (3.19), (3.20) và (3.21), ta có định lý được chứng minh.

Ví dụ 3.21. *Tính tích phân*

$$I = \int\limits_{\partial C} x^2 y^3 dx + dy + zdz,$$

trong đó $C = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le R^2\}$.

Giải.

Đặt $D = \{(x,y) \subset (Oxy) : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Theo công thức Stokes, ta có

$$I = \int\limits_{D} (-3x^2y^2) dxdy.$$

Đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{D} (-3x^2y^2) dxdy\\ &= -3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2 \cos^2\varphi r^2 \sin^2\varphi r dr\\ &= -3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi dr \int\limits_0^R r^5 dr\\ &= -\frac{R^6}{8}.\end{aligned}$$

3.5.2. Công thức Ostrogradski.

Cho $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ là một miền bị chặn có biên là một mặt kín trơn từng mảnh S. Các hàm số P, Q, R và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\Omega \cup S$. Khi đó, ta có công thức

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của mặt S.

Chứng minh.

Giả sử miền Ω có dạng đơn giản

$$\begin{aligned} \Omega =& \{(x, y, z) : (x, y) \in D_1, z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\} \\ =& \{(x, y, z) : (x, z) \in D_2, y_1(x, z) \le y \le y_2(x, z)\} \\ =& \{(x, y, z) : (y, z) \in D_3, x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z)\}, \end{aligned}$$

trong đó $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ liên tục trên các miền D_1, D_2, D_3 tương ứng. Theo công thức Fubini, ta có

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint\limits_{D_1} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \right) dxdy \\ &= \iint\limits_{S_2} R(x, y, z) dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x, y, z) dxdy, \\ &= \iint\limits_{S} Rdxdy, \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó $S_1 : z = z_1(x, y), (x, y) \in D_1$ và $S_2 : z = z_2(x, y), (x, y) \in D_2$. Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz, \tag{3.23}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{S} Pdxdz. \tag{3.24}$$

Cộng các đẳng thức (3.22), (3.23) và (3.24), ta có công thức được chứng minh.

Nếu miền Ω không có dạng đơn giản nói trên, ta hãy chia miền Ω thành một số hữu hạn các miền đơn giản. Khi đó, công thức Ostrogradski vẫn đúng trong trường hợp này vì tại biên tiếp giáp giữa 2 miền đơn giản do phân chia sẽ có 2 tích phân mặt loại 2 cũng biên nhưng ngược phía nhau nên triệt tiêu lẫn nhau.

Ví dụ 3.22. *Tính*

$$K = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải.

Dùng công thức Ostrogradski, ta có

$$K = \iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$

trong đó Ω là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Đổi biến sang hệ tọa độ cầu

$$x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta \text{ với } 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Ta có

$$K = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

3.6. Véc tơ rôta và trường thế.

+ *Trường véc tơ:* Cho $\Omega \subset \mathcal{R}^3$. Nếu mỗi điểm $M \in \Omega$ cho tương ứng một đại lượng véc tơ $\vec{u}(M)$ nào đó thì ta gọi $(\Omega, \vec{u})$ là một trường véc tơ. Ví dụ như trường vận tốc, từ trường, điện trường,...

+ *Gradient:* Cho hàm số $f : \Omega \subset \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$. Với mỗi điểm $M \in \Omega$, gradient của f là một véc tơ được xác định bởi công thức

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$

trong đó $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là các véc tơ trực chuẩn trong $Oxyz$.

+ *Véc tơ rôta:* Cho trường véc tơ $\vec{F}(M) = \big(P(M), Q(M), R(M)\big) \in \mathcal{R}^3$. Khi đó, véc tơ rôta (hay còn gọi là *véc tơ xoáy*) của $\vec{F}$ là một véc tơ ký hiệu bởi $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ và được xác định bởi công thức

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Nhận xét 3.23. *Từ các định nghĩa trên, ta có một vài nhận xé và ý nghĩa sau:*

(i) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = 0.$

(ii) Công thức Stokes được viết dưới dạng

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \overrightarrow{grad}\vec{F}.\vec{n} dS,$$

trong đó $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt định hướng S.

(iii) Nếu $\vec{F} = (P, Q, R)$ là trường lực liên tục trên cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$, thì

$$H = \int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

là công sinh ra khi chất điểm chuyển động trên cung $\widetilde{AB}$ từ điểm A tới điểm B dưới tác động của lực $\vec{F}$. Nếu $\vec{F}$ là trường vận tốc thì H được gọi là lưu thông của trường lực $\vec{F}$ dọc theo cung $\widetilde{AB}$. (iv) Một cái đĩa tròn $S(M_0, r)$ (tâm M_0, bán kính r) với bán kính r khá nhỏ nằm trong một trường véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$ của một dòng chất lỏng. Khi đó

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(M) \approx \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0) \;\; \forall M \in S(M_0, r).$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\int\limits_{\partial S(M_0,r)} Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_{S(M_0,r)} \overrightarrow{rot}\vec{F}.\vec{n}dS \approx \iint\limits_{S(M_0,r)} \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0)dS = \overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0).\pi r^2.$$

Do vậy

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(M_0).\vec{n}(M_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\partial S(M_0,r)} Pdx + Qdy + Rdz$$

biểu thị tác động quay của chất lỏng quanh trục $\vec{n}$. Tác động cực đại, khi $vecn$ cùng phương với $\overrightarrow{rot}\vec{F}$. Khi đó, điểm M được gọi là điểm xoáy nếu $\overrightarrow{rot}\vec{F}(M).\vec{n}(M) \neq 0$, điểm không xoáy nếu $\overrightarrow{rot}\vec{F}(M).\vec{n}(M) = 0$.

+ *Trường thế.*

Trường véc tơ $\vec{F}$ xác định trên Ω được gọi là *trường thế*, nếu tồn tại một hàm số $f : \Omega \to \mathcal{R}$ sao cho

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \vec{F}(M) \;\; \forall M \in \Omega.$$

Hàm số f được gọi là *hàm thế vị* của trường véc tơ $\vec{F}$. Khi đó, ta dễ kiểm tra lại rằng $\vec{F}$ *là một trường thế khi và chỉ khi* $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$.

Ví dụ 3.24. *Chứng minh rằng*

$$\vec{F} = (x^2 - 2yz; y^2 - 2zx; z^2 - 2xy)$$

là trường thế và tìm hàm thế vị của nó.

Giải.

Đặt các hàm số

$$P = x^2 - 2yz, Q = y^2 - 2zx, R = z^2 - 2xy.$$

Dễ dàng tính được rằng $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$. Do đó $\vec{F}$ là một trường thế. Để tìm hàm thế vị, ta áp dụng công thức: Nếu $du = Pdx + Qdy + Rdz$ thì u được xác định bởi công thức

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) =& \int\limits_{x_0}^{x} (x^2 - 2y_0z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} (y^2 - 2xz_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} (z^2 - 2xy)dz \\
=& \frac{1}{3}(x^3 + yz^3 + z^3) - 2xy + C_0,
\end{aligned}$$

trong đó $C_0 = -\frac{1}{3}(x_0^3 + y_0^3 + z_0^3) + 2x_0y_0z_0$.