Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Nhập môn trí tuệ nhân tạo

Suy diễn xác suất

Nguyễn Thị Mai Trang
maitrangnguyen.pt@gmail.com

Nội dung

- Vấn đề suy diễn trong điều kiện không rõ ràng
- Nguyên tắc suy diễn xác suất
- Một số khái niệm về xác suất

Vấn đề suy diễn trong điều kiện không rõ ràng (1/2)

- Logic
  - Cho phép biểu diễn tri thức và suy diễn
  - Đòi hỏi tri thức rõ ràng, đầy đủ, chắc chắn, không mâu thuẫn
- Thế giới thực
  - Luôn có yếu tố không rõ ràng, thiếu thông tin, có mâu thuẫn

Vấn đề suy diễn trong điều kiện không rõ ràng (2/2)

- Các yếu tố ảnh hưởng tới tính rõ ràng, chắc chắn của tri thức, thông tin
  - Thông tin có chứa đựng yếu tố ngẫu nhiên
    - Khi chơi bài, tung đồng xu
  - Lý thuyết không rõ ràng
    - Ví dụ không biết hết cơ chế gây bệnh
  - Thiếu thông tin thực tế
    - Không đủ thông tin xét nghiệm của bệnh nhân
  - Các yếu tố liên quan tới bài toán quá lớn, quá phức tạp
    - Không thể biểu diễn được mọi yếu tố
  - Sai số khi lấy thông tin từ môi trường
    - Các thiết bị đo có sai số

Các cách tiếp cận

- Logic đa trị
  - Cho phép sử dụng nhiều giá trị hơn, ngoài "đúng" và "sai"
- Logic mờ
  - Biểu thức có thể nhận giá trị "đúng" với một giá trị trong khoảng
    [0,1]
- Lý thuyết khả năng
  - Các sự kiện hay công thức được gán một số thể hiện khả năng
    xảy ra sự kiện đó
- Suy diễn xác suất
  - Kết quả suy diễn trả về xác suất một sự kiện hay công thức nào đó là đúng

Nội dung

- Vấn đề suy diễn trong điều kiện không rõ ràng
- Nguyên tắc suy diễn xác suất
- Một số khái niệm về xác suất

Nguyên tắc suy diễn xác suất (1/2)

- Thay vì suy diễn về tính "đúng" hoặc "sai" của mệnh đề (2 giá trị), suy diễn về "niềm tin" mệnh đề đó đúng hay sai (vô số giá trị)
  - Gắn cho mỗi mệnh đề một số đo giá trị niềm tin
  - Biểu diễn mức đo niềm tin như giá trị xác suất, sử dụng lý thuyết xác suất để làm việc với giá trị này
  - Với mệnh đề A
    - Gán xác suất $P(A)$: $0 \leq P(A) \leq 1$;
    - $P(A) = 1$ nếu A đúng, $P(A) = 0$ nếu A sai
  - Ví dụ:
    - $P\ (Cảm = true) = 0.6$: người bệnh bị cảm với xác suất 60%, "Cảm" là biến ngẫu nhiên có thể nhận 1 trong 2 giá trị $\{True, False\}$
    - $P(trời = nắng \wedge gió = mạnh) = 0.8$: ta tin rằng trời nắng và gió mạnh với xác suất 80%, trời là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị $\{nắng, mưa, u\ ám\}$, gió là biến ngẫu nhiên nhận giá trị $\{mạnh, yếu, trung\ bình\}$

Nguyên tắc suy diễn xác suất (2/2)

- Bản chất của xác suất sử dụng trong suy diễn
  - Bản chất thống kê: dựa trên thực nghiệm và quan sát
    - Không phải khi nào cũng xác định được
  - Xác suất dựa trên chủ quan: mức độ tin tưởng, niềm tin là sự kiện đó đúng hoặc sai của chúng chuyên gia, người dùng
    - Được sử dụng khi suy diễn xác suất
- Thu thập thông tin
  - Xác định các tham số liên quan tới bài toán: ví dụ "màu", "đẹp"
  - Mỗi tham số là một biến ngẫu nhiên
  - Mỗi biến ngẫu nhiên có thể nhận một số giá trị rời rạc trong miền giá trị của biến đó
    - Có thể là $\{True, False\}$ hoặc nhiều giá trị hơn: {đỏ, $xanh$, $vàng$}

o VD: $P(màu$ = đỏ) = 0.09; P(¬đẹp) = 0.2

Nội dung

- Vấn đề suy diễn trong điều kiện không rõ ràng
- Nguyên tắc suy diễn xác suất
- Một số khái niệm về xác suất

Các tiên đề xác suất

1. $0 \leq P(A = a) \leq 1$ với mọi a thuộc miền giá trị của A
2. $P(True) = 1$, $P(False) = 0$
3. $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

Một số tính chất

1. $P(\neg A) = 1 - P(A)$
2. $P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B)$
3. $\Sigma_a P(A = a) = 1$: tổng lấy theo các giá trị a thuộc miền giá trị của A

Xác suất đồng thời (1/2)

- Có dạng $P(V_1 = \mathrm{v}_1, V_2 = \mathrm{v}_2, \ldots, V_\mathrm{n} = \mathrm{v}_\mathrm{n})$
- Phân bố xác suất đồng thời đầy đủ: bao gồm xác suất cho tất cả các tổ hợp giá trị của tất cả biến ngẫu nhiên
- Ví dụ: cho 3 biến Bool: Chim, Non, Bay

Chim (C)	Non (N)	Bay (B)	P
T	T	T	0.0
T	T	F	0.2
T	F	T	0.04
T	F	F	0.01
F	T	T	0.01
F	T	F	0.01
F	F	T	0.23
F	F	F	0.5

Xác suất đồng thời (2/2)

- Nếu có tất cả xác suất đồng thời, ta có thể tính xác suất cho mọi mệnh đề liên quan tới bài toán đang xét

Ví dụ:

$P(Chim = T)$

$= P(C)$

$= 0.0 + 0.2 + 0.04 + 0.01$

$= 0.25$

$P(Chim = T, Bay = F)$

$= P(C, \neg B)$

$= P(C, N, \neg B) + P(C, \neg N, \neg B)$

$= 0.2 + 0.01$

$= 0.21$

Xác suất điều kiện (1/2)

- Đóng vai trò quan trọng trong suy diễn
  - Từ bằng chứng suy ra xác suất của kết quả
  - Ví dụ:
    - $P(A|B)$ = 1 tương đương $B \Rightarrow A$ trong logic
    - $P(A|B)$ = 0.9 tương đương $B \Rightarrow A$ với xác suất hay độ chắc chắn là 90%
    - Với nhiều bằng chứng (quan sát) $E1$, ..., En có thể tính $P(Q|E1$, ..., $En)$ tương đương: niềm tin Q đúng là bao nhiêu nếu biết $E1$, ..., En và không biết gì thêm
- Định nghĩa xác suất điều kiện
  - $P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A,B)}{P(B)}$
  - Ví dụ: tính
    - $P(\neg Chim \mid Bay)$

Xác suất điều kiện (2/2)

- Các tính chất của xác suất điều kiện
  - o $P(A, B) = P(A|B)P(B)$
  - o Quy tắc chuỗi: $P(A, B, C, D) = P(A|B, C, D)\ P(B|C, D)\ P(C|D)\ P(D)$
  - o Quy tắc chuỗi có điều kiện: $P(A, B|C) = P(A|B, C)\ P(B|C)$
  - Quy tắc Bayes: $P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}$
  - o Bayes có điều kiện: $P(A|B, C) = \frac{P(B|A,C)}{P(A|C)P(B|C)}$
  - $P(A) = \Sigma_b\{P(A|B=b)\ P(B=b)\}$, tổng lấy theo tất cả giá trị b của B
  - $P(\neg B|A) = 1 - P(B|A)$

Kết hợp nhiều bằng chứng

- Ví dụ:
  - Tính $P(\neg Chim \mid Bay, \neg Non) = \dfrac{P(\neg Chim, Bay, \neg Non)}{P(Bay, \neg Non)}$

- Trường hợp tổng quát: cho bảng xác suất đồng thời, có thể tính
  - $P(V_1 = v_1, \ldots, V_k = v_k \mid V_{k+1} = v_{k+1}, \ldots, V_n = v_n)$
  - Tổng các dòng có $V_1 = v_1, \ldots, V_n = v_n$ chia cho tổng các dòng có $V_{k+1} = v_{k+1}, \ldots, V_n = v_n$

Tính độc lập xác suất

- A độc lập với B nếu $P(A|B) = P(A)$
  - o Ý nghĩa: biết giá trị của B không thêm thông tin về A
  - Từ đây có thể suy ra $P(A, B) = P(A)P(B)$

A độc lập có điều kiện với B khi biết C nếu
- $P(A|B, C) = P(A|C)$ hoặc $P(B|A, C) = P(B|C)$
- Ý nghĩa: nếu đã biết giá trị của C thì việc biết giá trị của B không cho ta thêm thông tin về A
- Suy ra $P(A, B|C) = P(A|C)P(B|C)$

Sử dụng quy tắc Bayes

- Quy tắc Bayes đóng vai trò quan trọng trong suy diễn
- Để suy diễn cần biết $P(A|B)$ nhưng thường $P(B|A)$ dễ tính hơn
  - Ví dụ: xác suất bị cúm khi đau đầu và xác suất đau đầu khi bị cúm

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ví dụ (1/2)

B

D

- Một người có kết quả xét nghiệm dương tính với bệnh B
- Thiết bị xét nghiệm không chính xác hoàn toàn $(D|B)$
  - Thiết bị cho kết quả dương tính đối với 98% người có bệnh
  - Thiết bị cho kết quả dương tính đối với 3% người không có bệnh $P(B)$ $(D|\neg B)$
- 0.8% dân số mắc bệnh này
- Hỏi: Người này có bị bệnh không? $P(B|D)$

Ví dụ (2/2)

- Kí hiệu: sự kiện có bệnh là B
  sự kiện xét nghiệm dương tính là A

→ **Để kết luận người khám có bị bệnh không ta cần so sánh xác suất $P(\neg B|A)$ và $P(B|A)$**

- Theo dữ kiện bài toán ta có
  - $P(B) = 0.008$, $P(\neg B) = 1 - 0.008 = 0.992$
  - $P(A|B) = 0.98$, $P(\neg A|B) = 1 - 0.98 = 0.02$
  - $P(A|\neg B) = 0.03$, $P(\neg A|\neg B) = 1 - 0.03 = 0.97$

- Sử dụng quy tắc Bayes
  - $$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.98 * 0.008}{P(A)} = \frac{0.00784}{P(A)} \quad (1)$$
  - $$P(\neg B|A) = \frac{P(A|\neg B)P(\neg B)}{P(A)} = \frac{0.03 * 0.992}{P(A)} = \frac{0.02976}{P(A)} \quad (2)$$

- $P(\neg B|A) > P(B|A)$, không bị bệnh

Chuẩn tắc hóa (normalization)

- Để so sánh $P(B|A)$ và $P(\neg B|A)$ ta không cần tính cụ thể hai giá trị xác suất này, thay vào đó ta tính $\frac{P(B|A)}{P(\neg B|A)}$

- Hai biểu thức (1),(2) có chung mẫu số $P(A)$
- Kết luận có bệnh hay không phụ thuộc vào giá trị trên lớn hơn hay nhỏ hơn 1

- Khi cần tính cụ thể xác suất này ta làm như sau

$P(B|A) + P(\neg B|A) = 1$ nên $\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} + \frac{P(A|\neg B)P(\neg B)}{P(A)} = 1$

Quy tắc Bayes

- Do đó

$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|\neg B)\,P(\neg B) = 0.00784 + 0.02976 = 0.0376$

Thay giá trị P(A) vào hai biểu thức (1) và (2)

Chuẩn tắc hóa (normalization)

- Để so sánh $P(B|A)$ và $P(\neg B|A)$ ta không cần tính cụ thể hai giá trị xác suất này, thay vào đó ta tính $\frac{P(B|A)}{P(\neg B|A)}$

- Hai biểu thức (1),(2) có chung mẫu số $P(A)$
- Kết luận có bệnh hay không phụ thuộc vào giá trị trên lớn hơn hay nhỏ hơn 1

- Khi cần tính cụ thể xác suất này ta làm như sau

$P(B|A) + P(\neg B|A) = 1$ nên $\boxed{\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} + \frac{P(A|\neg B)P(\neg B)}{P(A)} = 1}$

- Do đó

$P(A) = P(A|B)\ P(B) + P(A|\neg B)\ P(\neg B) = 0.00784+0.02976 = 0.0376$

Thay giá trị P(A) vào hai biểu thức (1) và (2):

$\boldsymbol{P(\neg B|A) = 0.79}$

$\boldsymbol{P(B|A) = 0.21}$

Kết hợp quy tắc Bayes và tính độc lập xác suất

Cần tính $P(A|B,C)$, biết B và C độc lập xác suất khi biết A

=>Biết $P(B|C,A)$

Theo quy tắc Bayes: $P(A|B,C) = \frac{P(B,C|A) * P(A)}{P(B,C)}$

Theo tính độc lập xác suất $P(B,C|A) = P(B|A) * P(C|A)$

Do đó $P(A|B,C) = \frac{P(B|A) * P(C|A) * P(A))}{P(B,C)}$

Ví dụ:

Cho 3 biến nhị phân: gan BG, vàng da VD, thiếu máu TM

Giả sử VD độc lập với TM

Biết $P(BG) = 10^{-7}$

Có người khám bị VD

Biết $P(VD) = 2^{-10}$ và $P(VD|BG) = 2^{-3}$

a) Xác suất người khám bị bệnh là bao nhiêu?

b) Cho biết thêm người đó bị thiếu máu và $P(TM) = 2^{-6}$, $P(TM|BG) = 2^{-1}$. Hãy tính xác suất người khám bị bệnh BG.