

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Trong một kỳ thi, các thí sinh thi trắc nghiệm môn Lý và Hóa, mỗi môn thi có 40 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời và chỉ được lựa chọn tối đa 1 phương án. Mỗi câu trả lời đúng được 0.25 điểm, câu trả lời sai hoặc không trả lời thì không được điểm.

a) Hãy cho biết có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm môn Lý?

b) Cần có ít nhất bao nhiêu thí sinh tham gia để có ít nhất 10 thí sinh có tổng điểm Lý và Hóa bằng nhau? Biết rằng điểm thi không được làm tròn.

Giải

a) Mỗi câu hỏi có 6 cách điền phiếu trắc nghiệm: chọn 1 trong 5 phương án hoặc không chọn phương án nào. Bài thi trắc nghiệm môn Lý có 40 câu hỏi nên số cách điền phiếu trắc nghiệm là 6^{40} .

b) Tổng điểm Lý và Hóa của các thí sinh có thể nhận giá trị khác nhau từ 0 đến 20 và cách nhau 0.25. Do đó số lượng các tổng điểm khác nhau là $k = 20/0.25 + 1 = 81$. Cần tìm số lượng thí sinh n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/81 \rceil \geq 10$.

$$\text{Có } n \geq 81(10 - 1) + 1 = 729 + 1 = 730.$$

Kết luận: Cần có ít nhất 730 thí sinh tham gia để có ít nhất 10 thí sinh có tổng điểm Lý và Hóa bằng nhau.

2. Trong một kỳ thi trắc nghiệm, đề thi gồm có 35 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời và chỉ được lựa chọn tối đa 1 phương án. Thí sinh được 3 điểm cho mỗi câu trả lời đúng, được 0 điểm cho mỗi câu không trả lời và bị trừ 1 điểm cho mỗi câu trả lời sai. Biết rằng, điểm thi thấp nhất là 0. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu thí sinh tham gia kỳ thi để chắc chắn rằng có ít nhất 2 thí sinh có điểm bài thi bằng nhau.

Giải Số câu hỏi ít nhất cần trả lời để nhận được số điểm tương ứng là:

1 điểm = 1 câu đúng + 2 câu sai; 2 điểm = 1 câu đúng + 1 câu sai; 3 điểm = 1 câu đúng.

Do đó, điểm thi của thí sinh nhận giá trị nguyên liên tiếp từ 0 đến 99 và các giá trị 101, 102 và 105. Suy ra, số lượng các giá trị điểm thi khác nhau là $k = 100 + 3 = 103$. Cần tìm số lượng thí sinh n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/103 \rceil \geq 2$.

$$\text{Có } n \geq 103(2 - 1) + 1 = 104. \text{ Suy ra } n_{\min} = 104.$$

Kết luận: Cần có ít nhất 104 thí sinh tham gia để chắc chắn có 2 thí sinh có điểm thi bằng nhau.

Ghi chú

Các bài toán trên cần tìm n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/k \rceil \geq x$, trong đó x là yêu cầu đã cho, k được tính theo các giả thiết của bài toán.

Từ điều kiện $n \geq k(x - 1) + 1$ có $n_{\min} = k(x - 1) + 1$.

3. Một lớp học có 45 học sinh đăng ký dự thi đại học vào khối A hoặc khối B. Xếp ngẫu nhiên 45 học sinh này thành một vòng tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai bạn học sinh đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

Giải

Giả sử 45 học sinh xếp ngẫu nhiên thành một vòng tròn theo thứ tự liên tiếp ngược chiều quay kim đồng hồ là a_1, a_2, \dots, a_{45} .

Nếu có hai học sinh đứng cạnh nhau là a_i và a_{i+1} ($1 \leq i \leq 44$) thi đại học cùng khối thì chính là hai học sinh cần tìm.

Nếu mọi cặp học sinh đứng cạnh nhau là (a_i, a_{i+1}) đều thi khác khối với $1 \leq i \leq 44$ thì a_i và a_{i+2} dự thi đại học cùng khối. Như vậy, tất cả học sinh đứng ở vị trí lẻ thi cùng một khối và tất cả học sinh đứng ở vị trí chẵn thi cùng một khối khác. Do đó học sinh thứ 45 và học sinh thứ 1 đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

Kết luận: Luôn tồn tại hai bạn học sinh đứng cạnh nhau và thi cùng khối.

4. Một hộp đựng bi chứa các viên bi có kích thước thuộc một trong ba loại to, vừa, nhỏ và màu sắc thuộc một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Giả sử rằng số lượng mỗi loại bi là không hạn chế. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu viên bi trong hộp để chắc chắn rằng có ít nhất 4 viên bi giống nhau cả kích thước lẫn màu sắc?

Giải

Các viên bi có 3 kích thước và 3 màu sắc. Do đó số loại viên bi có kích thước khác nhau hoặc màu sắc khác nhau là $k = 3 \times 3 = 9$.

Cần xác định n nhỏ nhất sao cho $\lceil n/9 \rceil \geq 4 \Rightarrow n \geq 9(4-1) + 1 = 28$.

Kết luận: $n_{\min} = 28$.

5. Cho S là tập hợp các cặp số nguyên (x,y) . Hỏi phải lấy ra từ tập S bao nhiêu phần tử để chắc chắn có hai cặp số (a,b) và (c,d) thỏa mãn $(a-c)$ và $(b-d)$ đều là bội của 100.

Giải

$(a - c)$ và $(b-d)$ là bội của 100 $\Leftrightarrow a$ và c , b và d có cùng số dư khi chia cho 100.

Khi chia cho 100 có thể nhận 100 số dư khác nhau từ 0 đến 99.

Số lượng các cặp số (x, y) có số dư khác nhau khi chia cho 100 là $k = 100 \times 100 = 10000$.

Cần tìm số lượng các phần tử n ít nhất sao cho $\lceil n/10000 \rceil \geq 2 \Rightarrow n \geq 10000(2-1) + 1 = 10001$.

Kết luận: $n_{\min} = 10001$.