BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Có bao nhiêu biển số xe bắt đầu bằng 2 hoặc 3 chữ cái in hoa và kết thúc là 3 hoặc 4 chữ số, biết rằng có 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh (ví dụ, RS 0912 là 1 biển số).

Giải

Các biển số xe có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Biển số xe bắt đầu bằng 2 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 3 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^2 \times 10^3 = 676000$.

Trường hợp 2: Biển số xe bắt đầu bằng 2 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 4 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^2 \times 10^4 = 6760000$.

Trường hợp 3: Biển số xe bắt đầu bằng 3 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 3 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^3 \times 10^3 = 17576000$.

Trường hợp 4: Biển số xe bắt đầu bằng 3 chữ cái in hoa trong 26 chữ cái tiếng Anh và kết thúc là 4 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9.

Số lượng biển số xe trong trường hợp này là $26^3 \times 10^4 = 175760000$.

Theo nguyên lý cộng có số lượng biển xe là

$$676000 + 6760000 + 17576000 + 175760000 = 200772000$$

Kết luận: Số lượng biển số xe tạo được theo yêu cầu của bài ra là 200772000.

2. Có bao nhiêu số nguyên trong khoảng từ 1000 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9?

Giải

Trước hết nhận xét rằng, các số nguyên trong khoảng từ 1 đến n chia hết cho m là m, 2m, …, km, trong $km \leq n$. Do đó, số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến n chia hết cho m là [n/m].

Gọi N_1 là số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9. Khi đó, $N_1 = [5000/6] + [5000/9] – [5000/18] = 833 + 555 – 277 = 1111$.

Gọi N_2 là số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 999 chia hết cho 6 hoặc 9. Khi đó, $N_2 = [999/6] + [999/9] – [999/18] = 166 + 111 – 55 = 222$.

Số lượng các số nguyên trong khoảng từ 1000 đến 5000 chia hết cho 6 hoặc 9 là:

$$N = N_1 – N_2 = 889.$$

Kết luận: Số lượng số cần tìm là 889.

3. Lớp học có 55 bạn nam và 35 bạn nữ. Hãy cho biết có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ của lớp sao cho số bạn nam bằng số bạn nữ, biết rằng đội văn nghệ cần ít nhất 6 thành viên và nhiều nhất 10 thành viên.

Giải

Đội văn nghệ có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Đội văn nghệ gồm 3 nam trong số 55 bạn nam và 3 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^3_{55} x C^3_{35} = 171708075.

Trường hợp 2: Đội văn nghệ gồm 4 nam trong số 55 bạn nam và 4 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^4_{55} x C^4_{35} = 1785763980.

Trường hợp 3: Đội văn nghệ gồm 5 nam trong số 55 bạn nam và 5 nữ trong số 35 bạn nữ. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^5_{55} x C^5_{35} = 1129317140952.

Kết luận: Số cách chọn đội văn nghệ thỏa mãn là 1131274613007.

4. Lớp học có 60 bạn nam và 25 bạn nữ. Hãy cho biết có bao nhiêu cách chọn đội văn nghệ của lớp sao cho số bạn nam đúng bằng 2 lần số bạn nữ, biết rằng đội văn nghệ cần ít nhất 3 thành viên và nhiều nhất 9 thành viên.

Giải

Đội văn nghệ có thể tạo được theo các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Đội văn nghệ gồm 1 nữ trong số 25 bạn nữ và 2 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^1_{25} x C^2_{60} = 44250.

Trường hợp 2: Đội văn nghệ gồm 2 nữ trong số 25 bạn nữ và 4 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^2_{25} x C^4_{60} = 146290500.

Trường hợp 3: Đội văn nghệ gồm 3 nữ trong số 25 bạn nữ và 6 nam trong số 60 bạn nam. Số lượng cách chọn đội văn nghệ trong trường hợp này là C^3_{25} x C^6_{60} = 115146878000.

Kết luận: Số cách chọn đội văn nghệ thỏa mãn là 115293212750.

5. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho $1 \leq x_1 \leq 5$ và $x_3 \geq 8$.

Giải

Số lượng nghiệm nguyên không âm của cần tìm bằng N là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \leq 4$.

Số lượng N bằng số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ trừ đi số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \geq 5$.

Gọi N_1 là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$. Từ n = 6, k = 15 có N_1 = C(20, 15).

Gọi N_2 là số lượng nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ thỏa mãn $x_1 \geq 5$.

Từ n = 6, k = 15 – 5 = 10 có N_2 = C(15, 10).

Có N = N_1 – N_2 = C(20, 15) – C(15, 10) = 15504 – 3003 = 12501.

<u>Kết luận</u>: Số lượng nghiệm nguyên cần tìm là 12501.

6. Hãy tìm số lượng các số tự nhiên có 7 chữ số thỏa mãn:

a) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch.

b) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch và có tất cả các chữ số đều khác 0.

c) Số có 7 chữ số có tổng các chữ số là 18.

Giải

a) Số thuận nghịch có 7 chữ số có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$. Trong đó, x_1 nhận giá trị từ 1 đến 9, x_2, x_3, x_4 nhận giá trị từ 0 đến 9. Từ đó, số lượng các số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch là 9x10x10x10 = 9000.

b) Số thuận nghịch có 7 chữ số có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$ với các chữ số khác 0. Trong đó, x_1, x_2, x_3, x_4 nhận giá trị từ 1 đến 9. Từ đó, số lượng các số có 7 chữ số khác 0 tạo thành một số thuận nghịch là 9x9x9x9 = 6561.

c) Số có 7 chữ số thỏa mãn có dạng $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$. Trong đó, x_1 nhận giá trị từ 1 đến 9, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 nhận giá trị từ 0 đến 9 và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$.

Số lượng các số thỏa mãn bằng N là số nghiêm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_1 \leq 8$, $x_{2,3,4,5,6,7} \leq 9$.

Do vế phải k = 17 nên không có hai giá trị x_i và x_j đồng thời ≥ 9.

Gọi N_1 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$. Từ n = 7, k = 17 có N_1 = C(23, 17).

Gọi N_2 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_1 \geq 9$. Từ n = 7, k = 17 – 9 = 8 có N_2 = C(14, 8).

Gọi N_3 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17$ thỏa mãn $x_2 \geq 10$. Từ n = 7, k = 17 – 10 = 7 có N_3 = C(13, 7).

Từ đó $N = N_1 - N_2 - 6N_3$ = 100947 – 3003 – 6x1716 = 97944 – 10296 = 87648.

Kết luận: Số lượng các số cần tìm là 87648.

7. Tìm hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân độ dài n chứa 3 số 1 liên tiếp? Tính số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân độ dài n chứa 3 số 1 liên tiếp.

Với n = 1 có 2 xâu nhị phân độ dài 1 là {0, 1}. Từ đó $a_1 = 0$.

Với n = 2 có 4 xâu nhị phân độ dài 2 là {00, 01, 10, 11}. Từ đó $a_2 = 0$.

Với n = 3 có 8 xâu nhị phân độ dài 3 là {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, **111**}. Từ đó $a_3 = 1$.

Với n > 3, xét xâu nhị phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: với x[n] = 0 có a_{n-1} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: với x[n] = 1 và x[n-1] = 0 có a_{n-2} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 3: với x[n] = 1, x[n-1] = 1, x[n-2] = 0 có a_{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 4: với x[n] = 1, x[n-1] = 1, x[n-2] = 1 có 2^{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Từ đó $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$.

Kết luận: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$; điều kiện đầu $a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$.

Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là a_7.

Có $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 8, a_6 = 20, a_7 = 47$.

Kết luận: Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là 47.

8. Một hệ thống máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Ví dụ 1231407869 là không hợp lệ, 12098704568 là hợp lệ. Giả sử a_n là số các từ mã độ dài n. Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu cho a_n.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu thập phân độ dài n chứa số chẵn chữ số 0.

Với n = 1 có các xâu thập phân độ dài 1 là {0, 1, .., 9}. Từ đó $a_1 = 9$.

Với n > 1, xét xâu thập phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Xâu x nhận được bằng cách thêm chữ số khác 0 vào xâu thập phân độ dài n-1 chứa số chẵn chữ số 0. Có $9a_{n-1}$ xâu thỏa mãn.

Trường hợp 2: Xâu x nhận được bằng cách thêm chữ số 0 vào xâu thập phân độ dài n-1 chứa số lẻ chữ số 0. Có $10^{n-1} - a_{n-1}$ xâu thỏa mãn.

Từ đó $a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} – a_{n-1} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$.

Kết luận: Số xâu thập phân là từ mã hợp lệ thỏa mãn $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ với $a_1 = 9$.

9. Tìm hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân độ dài n, bắt đầu bằng số 1 và có chứa 2 số 0 liên tiếp. Tính số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7.

Giải

Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân độ dài n bắt đầu bằng số 1 và có chứa 2 số 0 liên tiếp.

Với n = 1 có 2 xâu nhị phân độ dài 1 là {0, 1}. Từ đó $a_1 = 0$.

Với n = 2 có 4 xâu nhị phân độ dài 2 là {00, 01, 10, 11}. Từ đó $a_2 = 0$.

Với n = 3 có 8 xâu nhị phân độ dài 3 là {000, 001, 010, 011, **100**, 101, 110, 111}.

Từ đó $a_3 = 1$.

Với n > 3, xét xâu nhị phân x độ dài n thỏa mãn điều kiện. Khi đó x[1] = 1. Có các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Với x[n] = 1 có a_{n-1} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Với x[n] = 0, x[n-1] = 1 có a_{n-2} xâu thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 3: với x[n] = 0, x[n-1] = 0 có 2^{n-3} xâu thỏa mãn điều kiện.

Từ đó $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-3}$.

Kết luận: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-3}$, với $a_1 = a_2 = 0$.

Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là a_7.

Có $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 8$, $a_6 = 19$, $a_7 = 43$.

Kết luận: Số xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện với n = 7 là 43.

10. Giải các hệ thức truy hồi sau:

a) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 8$, $a_1 = 3$.

b) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

c) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 35$.

Giải

a) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Phương trình đặc trưng $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(2)^n$.

Tìm α_1, α_2 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 8 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$

Từ đó, $\alpha_1 = 13/3$, $\alpha_2 = 11/3$

Kết luận: $a_n = (13/3)(-1)^n + (11/3)(2)^n$, $n \geq 0$.

b) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 3$, $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, $c_3 = -6$.

Phương trình đặc trưng $x^3 = 2x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = -2, r_3 = 3$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3(3)^n$.

Tìm α_1, α_2, α_3 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$a_1 = -4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

$a_2 = 8 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$

Từ đó, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -1$

Kết luận: $a_n = 5(1)^n + 3(-2)^n - (3)^n$, $n \geq 0$,

c) Hệ thức truy hồi có bậc $k = 2$, $c_1 = 14$, $c_2 = -49$.

Phương trình đặc trưng $x^2 = 14x - 49 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 7$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \alpha_1(7)^n + \alpha_2 n(7)^n$.

Tìm α_1, α_2 dựa vào điều kiện đầu:

$a_0 = 3 = \alpha_1$

$a_1 = 35 = 7\alpha_1 + 7\alpha_2$

Từ đó, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$

Kết luận: $a_n = 3(7)^n + 2n(7)^n$, $n \geq 0$.