复习　**定义1：** 由 n^2 个数 a_{ij} 组成的 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式。当n=1时，定义 $D=|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geq 2$

时，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ ，而 M_{1j} 是 D 中去掉第1行第j列的元素后，按原来顺序排成的n-1阶行列式（即余子式，见下面定义）。

定义2： 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的 **余子式。** 记为 M_{ij}

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式。**

三个结论：

(1) 对角行列式（非对角线元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式（主对角线上侧元素都为**0**）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 反对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

行列式的性质

性质1： $\boxed{\text{行列式与它的转置行列式相等。}}$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式

性质2:

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这是一条非常重要的性质，它说明行列式的每一行都有相同的地位。它是证明行列式其它性质的基础。

推论： 行列式中某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3：如果行列式有两行（列）相同，则行列式为 0 。

推论：若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于0 。

性质4：行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一数k后再加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

综上，得公式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & （当k=i）\\ 0, & （当k\neq i）\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & （当l=j）\\ 0, & （当l\neq j）\end{cases}$$

计算行列式方法：先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开，变为低一阶的行列式。

例1 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{vmatrix}$，求 $3A_{12}+2A_{22}+A_{32}+8A_{42}$,

$3M_{12}+2M_{22}+M_{32}+8M_{42}$

$$3A_{12}+2A_{22}+A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 8 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$3M_{12}+2M_{22}+M_{32}+8M_{42}=-3A_{12}+2A_{22}-A_{32}+8A_{42}=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 8 & 0 \end{vmatrix}=48$$

四. 利用性质计算行列式

例1：　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\substack{c_1+(-2)c_3 \\ c_4+c_3}}}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 + r_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例2：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二列展开}} 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} \begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第二行展开}]{} 5\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5(77-75) = 10$$

例3：

$$D=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=\!=\!=}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} [x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x-(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

例3 $D_4 = \begin{vmatrix} a & -a & a & x-a \\ a & -a & x+a & -a \\ a & x-a & a & -a \\ x+a & -a & a & -a \end{vmatrix} = x^4$

例4：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{箭形行列式}}$

目标：把第一列化为 $\begin{vmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$ 成三角形行列式

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{3}c_3+\cdots-\frac{1}{n}c_n}\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例5:

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots\\ r_n-r_1}}{=\!=}\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=}$$

箭形行列式

$$=\begin{vmatrix} (a_1+a_2+\cdots a_n)-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}$$

$$=[(a_1+a_2+\cdots a_n)-b](-b)^{n-1}$$

例6： $D=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix}$ $(x_i \neq a, i=1,2,3,4)$

（可以化为箭形行列式）

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=\!=}}\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & a \\ a-x_1 & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\quad}}(x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a} & \frac{a}{x_2-a} & \frac{a}{x_3-a} & \frac{a}{x_4-a} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=\!=} \prod_{i=1}^{4}(x_i-a)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a}+\sum_{i=2}^{4}\frac{a}{x_i-a} & \frac{a}{x_2-a} & \frac{a}{x_3-a} & \frac{a}{x_4-a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[\frac{x_1}{x_1-a}+\sum_{i=2}^{4}\frac{a}{x_i-a}]\prod_{i=1}^{4}(x_i-a)$$

例7：

计

$$=(-1)^{n+1}(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1})\begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)}(-1)^{(n-1)}(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1})$$

$$=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}$$

解: 方法 后一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2+a_1x+a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0x^{n-2}+a_1x^{n-3}+\dots+a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

方法二（递推法）

按最后一行展开，得：

$$D_n = xD_{n-1} + a_{n-1}$$

$$D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-2}$$

$$D_{n-2} = xD_{n-3} + a_{n-3} \qquad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \qquad D_2 = xa_0 + a_1$$

所以 $D_n = xD_{n-1} + a_{n-1} \qquad = x^2D_{n-2} + a_{n-2}x + a_{n-1}$

$$= x^3D_{n-3} + a_{n-3}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-1} = \ldots =$$

$$= x^{n-2}D_2 + a_2x^{n-1} + \ldots + a_{n-3}x^2 + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

$$= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

Example 11 **n 阶行列式** $D=\det(a_{ij})$ **满足 $a_{ij}=-a_{ji}$**

i，$j=1,\ldots,n$ **证明：当 n 为奇数时，$D=0$.**

***Proof*：** **由条件可知：$a_{ii}=-a_{ii}$ $i=1,\ldots,n$， 得 $a_{ii}=0$**

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{Pro.1}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{Pro.3}{=\!=} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

因为 n 为奇数，$D=-D$，所以 $D=0$.

$D=(-1)^nD$

重要结论1：范德蒙 (Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

证明：　用数学归纳法

(1) 当n=2时, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$,

结论成立。

(2) 设n－1阶范德蒙行列式成立，往证n阶也成立。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_{n-1} - x_1 r_{n-2} \\ \vdots \\ r_2 - x_1 r_1}]{r_n - x_1 r_{n-1}}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公因子 (x_i-x_1) 提出,

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

***n*-1阶范德蒙行列式**

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

证毕。

重要结论2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & o & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

思考题： 设n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}.$$

解: 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$