# (一) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅰ)

## 试　　题

### 一、填空、选择题

1. 如果函数 $f(x,y)$满足如下条件中的\_\_\_\_\_\_\_\_，则该函数在点$(x_0,y_0)$处连续.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$ 且$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$.

(B) $f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处沿 $l$ 方向有 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

(C) $f(x,y)$有偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$.

(D) $f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处可微分.

2. 设函数 $f(x,y,z)$可微分且 $f_x(0,0,0)=1$，$f_y(0,0,0)=2$，$f_z(0,0,0)=3$. 如果 $u=f(x,\sin x,\tan x)$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

3. 如果函数 $f(x,y)=x^y$ 在点$(1,1)$处沿某方向 $l$ 取得最大增长率，则$l=$________.

4. 设曲面$\Sigma$由曲线$\begin{cases}3x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$绕 $x$ 轴旋转而成，则$\Sigma$在点$(1,1,1)$处的单位法向量为________.

5. 曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ x+y+z=1\end{cases}$在点$(1,1,-1)$处的切线的对称式方程是________.

6. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，若交换积分次序，则$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=$________.

二、设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}}{x\ln x}$，写出 $f(x,y)$ 的表达式并求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

三、设二元函数 $f$ 有连续的偏导数，又函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=f(xy,z)$ 确定，求全微分 $dz$.

四、设 $\begin{cases} x+y=u+v, \\ x\sin v=y\sin u, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

五、在八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=xyz^3$ 达到最大，并写出该最大值.

六、设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, |y|>|x|, \\ xy, \quad 其他, \end{cases}$ 计算二重积分 $I=\iint_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant 1$.

七、设 $\Omega$ 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$ 的交集，它的密度为 $\mu(x,y,z)=z$（单位省略）. 求 $\Omega$ 的质量 $M$.

八、设曲线 $\Gamma$ 的方程为 $x=t, y=-t^2, z=t^3$.

(1) 写出 $\Gamma$ 的所有与平面 $3y+2z=6$ 平行的切线方程；

(2) 这些切线之间的距离是多少？

# 参 考 答 案

一、1. 由于可微必连续．故选(D).

2. $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=[f_x(x,\sin x,\tan x)+\cos x\, f_y(x,\sin x,\tan x)+\sec^2 x\, f_z(x,\sin x,\tan x)]_{x=0}=6$.

3. $\boldsymbol{l}=\mathbf{grad}\, f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=(1,0)$.

4. 曲面 $\Sigma$ 的方程为 $3x^2-y^2-z^2=1$，因此所求法向量为 $\pm(6x,-2y,-2z)|_{(1,1,1)}=\pm(6,-2,-2)$，其单位法向量为 $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

5. 对 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 两端求微分，并代入点的坐标，得

$$\begin{cases} dx+dy-dz=0, \\ dx+dy+dz=0, \end{cases}$$

故 $dx:dy:dz=1:-1:0$，因此切线的方向向量为 $(1,-1,0)$，所求切线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}.$$

6. $\int_0^2 dx\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy=\int_{-1}^0 dy\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x,y)dx$.

二、记 $x-y=u, \ln x=v$，则 $x=e^v, y=e^v-u$，代入右端，得

$$f(u,v)=\frac{u}{v}e^{u-2v},$$

即

$$f(x,y)=\frac{x}{y}e^{x-2y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+x}{y}e^{x-2y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x(1+2y)}{y^2}e^{x-2y}.$$

三、对 $x^2+y^2+z^2=f(xy,z)$ 两端求微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=f_1'(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+f_2'\mathrm{d}z,$$

即得

$$\mathrm{d}z=\frac{(yf_1'-2x)\mathrm{d}x+(xf_1'-2y)\mathrm{d}y}{2z-f_2'}\ (2z-f_2'\neq 0).$$

四、方程两端对 $x$ 求偏导，得

$$\begin{cases}1=u_x+v_x,\\ \sin v+x(\cos v)v_x=y(\cos u)u_x,\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}.$$

五、设 $F(x,y,z)=xyz^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)$，令

$$\begin{aligned}&F_x=yz^3+2\lambda x=0,\\&F_y=xz^3+2\lambda y=0,\\&F_z=3xyz^2+2\lambda z=0,\\&x^2+y^2+z^2=5r^2,\end{aligned}$$

解得 $x=y=r,z=\sqrt{3}r$. 即在$(r,r,\sqrt{3}r)$ 点处，函数达到最大，其最大值为

$$\max f=f(r,r,\sqrt{3}r)=3\sqrt{3}r^5.$$

六、两直线 $|y|=|x|$ 将 $D$ 划分为有 $y$ 轴穿过的上下四分之一圆盘记为 $D_1$ 与 $D_2$，有 $x$ 轴穿过的左右四分之一圆盘记为 $D_3$ 与 $D_4$，则

$$I=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3+D_4}xy\mathrm{d}\sigma.$$

由对称性，$\displaystyle\iint\limits_{D_3+D_4}xy\mathrm{d}\sigma=0$，故

$$I=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}.$$

七、$\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}a^2$. 因此

$$M=\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\iint_{D}\left[2a\sqrt{a^2-x^2-y^2}-a^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left[2a\sqrt{a^2-\rho^2}-a^2\right]\rho\mathrm{d}\rho=\frac{5}{24}\pi a^4.$$

八、(1) $\boldsymbol{\tau}=(1,-2t,3t^2)$，$\boldsymbol{n}=(0,3,2)$．

令 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0$，得 $t_1=0$，$t_2=1$，即

$$\boldsymbol{\tau}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\tau}_2=(1,-2,3).$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}\text{ 与 }\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

(2) 取 $M_1(0,0,0)$，$M_2=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$．所求距离为

$$d=\frac{|(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_1}|}{|\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2|}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$