线性代数

罗和治

hzluo@zjut.edu.cn

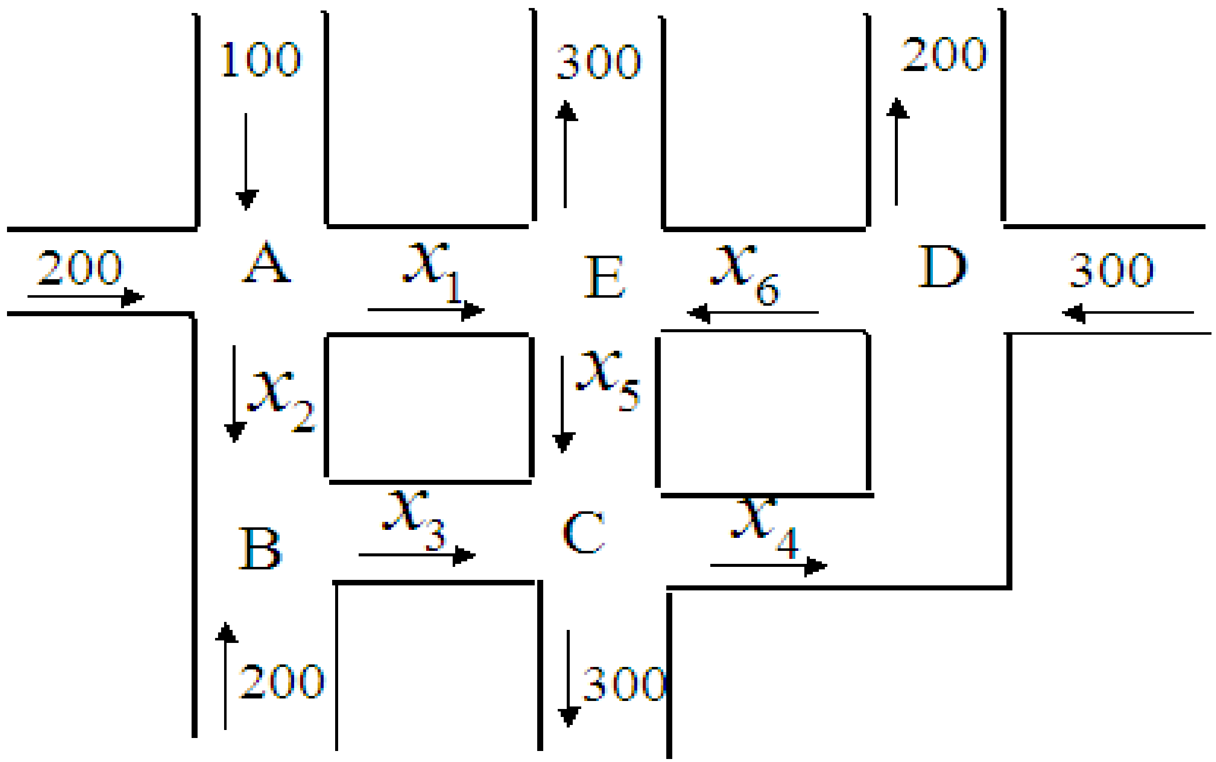
最终考试评定

平时成绩（出勤&作业）20%
+期末考试 80%

引例　交通流量问题

随着城市人口以及交通流量的增加，城市道路交通拥堵问题已成为制约经济发展、降低人民生活质量、削弱经济活力的瓶颈之一.为解决这个世界性难题，各国政府和民间都进行了广泛的研究，提出了提高交通管理水平、增强交通参与者的素质、扩大道路容量、限制车辆增长速度等政策及车牌限行、设置单向行驶道路等措施.以上的政策和措施的一个基础性工作就是各道路的车流量的统计与分流控制.使各道路的交通流量要达到平衡，所谓交通流量平衡是指在每个路口进入的车辆数与离开的车辆数相等．图1是某一城市的道路交通网络图，所有车道都是单行道．箭头给出了车辆

的通行方向，数字是高峰期每小时进入和离开路口的车辆数．在满足交通流量平衡的条件下，试问如何分流车辆．



为了保证交通流量平衡，得线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 & = 300, \\
x_2 - x_3 & = -200, \\
x_3 - x_4 + x_5 & = 300, \\
x_4 - x_6 & = -100, \\
x_1 - x_5 + x_6 & = 300.
\end{cases}
$$

问题归结为讨论上述线性方程组是否有解？若有解，求出方程组的解.

第一章　行列式

一．　二（三）阶行列式

二．　n 阶行列式的定义

行列式概念的形成（定义）

三．　行列式的性质及计算

重点

四．　Cramer 法则

利用行列式求解线性方程组

本章主要讨论以上三个问题。

首先来看行列式概念的形成

问题的提出：　　求解二、三元线性方程组

$\Big\downarrow$ 引出

二阶、三阶行列式

一． 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

二元线性方程组： $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得 $$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases}$$

得 $$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

同理，得 $$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

为便于记忆，引进记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

称记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式

其中，数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为元素

i 为行标，表明元素位于第 i 行

j 为列标，表明元素位于第 j 列

注： (1) 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 算出来是一个数。

(2) 记忆方法：对角线法则

主对角线上两元素之积 － 副对角线上两元素之积

因此，上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

综上，令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则，$x_1=\dfrac{D_1}{D}$

$$x_2=\frac{D_2}{D}$$

称 D 为方程组的系数行列式。

例：　　解方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解：　因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2$ ，　$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$

2. 三阶行列式

类似地，为讨论三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

称之为三阶行列式

其中，数 $a_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ 称为元素

i 为行标， j 为列标。

注： (1) 三阶行列式算出来也是一个数。

(2) 记忆方法：对角线法则

例：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-4)\times 3 + 0\times(-1)\times(-1) + 1\times 1\times 8$$

$$-1\times(-4)\times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8$$

$$= -24 + 8 - 4 + 16 = -4$$

对于三元线性方程组，若其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

可以验证，方程组有唯一解，

$$x_1=\frac{D_1}{D} \quad x_2=\frac{D_2}{D} \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

二. n阶行列式

对于三阶行列式，容易验证：

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而 $$\begin{vmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12}} \\ b_{21} \quad b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}|b_{22}| - b_{12}|b_{21}|$$

这里约定一个数的行列式就是它本身，即 $c = |c|$

可见一个三阶行列式可以转化成三个二阶行列式的计算。下面
将采取这种递归的方法定义n阶行列式。

定义1： 由 $\mathbf{n}^2$ 个数 a_{ij} 组成的 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式。当n=1时，定义 $D=|a_{11}|=a_{11}$；当n≥ 2

时，
$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ ，而 M_{1j} 是 D 中去掉第1行第j列的元素后，按原来顺序排成的n-1阶行列式（即余子式，见下面定义）。

定义2：在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 n－1 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式。记为 M_{ij}

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

三个结论：

(1) 对角行列式（非对角线元素都为0）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式（主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 反对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \mathinner{\kern1mu\raise1pt{.}\kern2mu\raise4pt{.}\kern2mu\raise7pt{.}\kern1mu} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

三. 行列式的性质

性质1： $\boxed{\text{行列式与它的转置行列式相等。}}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式

性质2： 互换行列式的两行（列），行列式的值变号。

性质3： 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

这是一条非常重要的性质，它说明行列式的每一行都有相同的地位。它是证明行列式其它性质的基础。

证明：

$$D \overset{r_1 \leftrightarrow r_i}{=} -\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D^*$$

由定义得，$D^* = a_{i1}A_{11}^* + a_{i2}A_{12}^* + \cdots + a_{in}A_{1n}^*$ ，其中 $A_{11}^*, A_{12}^*, \cdots, A_{1n}^*$ 为 D^* 中第一行元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 的代数余子式。

$$A_{1j}^{*}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+j}\cdot(-1)^{i-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-(-1)^{i+j}M_{ij}=-A_{ij}$$

$$D^* = a_{i1}(-A_{i1}) + a_{i2}(-A_{i2}) + \cdots + a_{in}(-A_{in})$$
$$= -(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

又 $D = -D^*$，故

$$\boldsymbol{D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}}$$

推论： $\boxed{\text{行列式中某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面}}$

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即，如果某一行是两组数的和，则此行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样。

性质4： 如果行列式有两行（列）相同，则行列式为 0 。

证明：用归纳法易得。

推论： 若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于0 。

性质5：$\boxed{\text{行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一数k后再加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。}}$

证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{t1} & ka_{t2} & \cdots & ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

性质 6: 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0,\quad k\neq i.$$

证明： 由性质2，行列式等于某一行的元素分别与它们代数余子式的乘积之和。

在 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，如果令第 i 行的元素等于另外一行，譬如第 k 行的元素

则，

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \text{第i行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

右端的行列式含有两个相同的行，值为 0 。

综上，得公式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & （当k=i）\\ 0, & （当k\neq i）\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & （当l=j）\\ 0, & （当l\neq j）\end{cases}$$

在计算数字行列式时，直接应用行列式展开公式并不一定简化计算，因为把一个n阶行列式换成n个（n－1）阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用展开定理才有意义。但展开定理在理论上是重要的。

利用行列式按行（按列）展开，并结合行列式性质，可简化行列式计算：计算行列式时，可先用行列式的性质将某一行（列）化为仅含1个非零元素，再按此行（列）展开，变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式。

课堂练习:

1. 计算行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

＝4　　　＝1

2. 一个n阶行列式，它的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}\quad i,j=1,2,\cdots,n$

证明：当 n 为奇数时，此行列式为零。