3.3 向量组的秩

3.3.1 向量组的等价

定义3-5：如果向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

中的每一个向量 $\alpha_i (i = 1,2,\cdots m)$

都可以由向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$

线性表示，那么就称向量组A可以由向量组B线性表示。

若同时向量组B 也可以由向量组A线性表示，就称向量组A与向量组B等价。

上页 下页 返回

$$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \cdots + k_{is}\beta_s \quad i = 1,2,\cdots,m \quad (1)$$

$$\beta_i = l_{i1}\alpha_1 + l_{i2}\alpha_2 + \cdots + l_{im}\alpha_m \quad i = 1,2,\cdots,s \quad (2)$$

注意：等价是一种等价关系：即满足自反的，对称的和传递的关系）

定理3-5 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是两个向量组，如果

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示;

(2) $s>t$

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关。

分析:要证向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

只证存在一组不全为零实数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

由 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示;

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}k_{ji}\beta_j \quad (i=1,2,\cdots s)$$

上页 下页 返回

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_{21}+\cdots+x_s\alpha_s$$

$$=x_1\sum_{j=1}^{t}k_{j1}\beta_j+x_2\sum_{j=1}^{t}k_{j2}\beta_j+\cdots x_s\sum_{j=1}^{t}k_{jss}\beta_j$$

$$=\sum_{j=1}^{t}(x_1k_{j1}+x_2k_{j2}+\cdots x_sk_{js})\beta_j$$

$$=\sum_{j=1}^{t}(\sum_{i=1}^{s}k_{ji}x_i)\beta_j$$

现考察齐次线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0\\ \cdots\\ a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{ts}x_s=0\end{cases}$$

上页 下页 返回

由于$s>t$即方程的个数小于未知数的个数，

故齐次线性方程组有非零解

$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关。

推论3-9 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是两个向量组，如果

(1) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示；

(2)且向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

则$s\le t$

例 任意n+1个n维向量一定线性无关；

任意多于n个n维向量一定线性无关；

上页 下页 返回

推论3-10 等价的线性无关的向量组包含相同个数向量.

证明: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是两个等价的向量组,

且都线性无关, 由推论4-9 $s \le t$ 且 $t \le s \Rightarrow s = t$

3.3.2. 极大线性无关组

对向量组A，如果在A中有r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

满足:

（1）$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

（2）任意r＋1个向量都线性相关。（如果有的话）

那么称部分组 A_0 为向量组 A 的一个**极大线性无关组。**

简称**极大无关组。(maximal independent system)**

上页 下页 返回

注:（1）只含零向量的向量组没有极大无关组.

（2）一个线性无关向量组的极大无关组就是其本身。

（3）一个向量组的任一向量都能由它的极大无关组线性表示

定理3-6

一个向量组线性无关的充分必要条件是,它的极大线性无关组就是其本身。

定理3-7 一个向量组的任一向量都能由它的极大无关组线性表示,且表示方法唯一

证明分析（1）由极大无关组的定义知任一向量都能由它的极大无关组线性表示

(2)用反证法证明表示是唯一的.

例如：在向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$中，

首先 α_1,α_2 线性无关， 又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，所以 α_1,α_2 组成的部分组是极大无关组。

还可以验证 α_2,α_3 也是一个极大无关组。

注：一个向量组的极大无关组一般不是唯一的。

上页 下页 返回

向量组的极大 无关组不唯一，但每一个极大无关组都与向量组等价，所以：

定理3-8 向量组的任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

证明: 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任一极大线性无关组.

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以相互表示。

故向量组的任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

向量组的任意两个极大无关组都是等价的。

由等价的线性无关的向量组必包含相同个数的向量，可得

上页 下页 返回

定理：一个向量组的任意两个极大无关组等价，且所含向量的个数相同。

3.4.3 向量组的秩,维数和基

定义2：向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩，记作 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

例如：向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ 的秩为2。

上页 下页 返回

关于向量组的秩的结论：书（定理3-10，定理3-11，定理3-12）

（1）零向量组的秩为0。

（2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

（3）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

（4）等价的向量组必有相同的秩。

注：两个有相同的秩的向量组不一定等价。

上页 下页 返回

定理3-13 两个向量组有相同的秩，并且其中一个可以被另一个线性表示，则这两个向量组等价。

证明：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$这俩个向量组的秩都是$r$,并设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$可用$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$线性表示

下面证明$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{s\,t}$线性表示

显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$线性表示

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$与$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$等价。

故$r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s，\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\}=r\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t\}$
$=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\}=r$

显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$的极大无关组一定是

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$

的极大无关组，所以向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由它线性表示

即$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$线性表示

小结

1．最大线性无关向量组的概念：
最大性、线性无关性.

2． 矩阵的秩与向量组的秩的关系：
矩阵的秩＝矩阵列向量组的秩
＝矩阵行向量组的秩

3． 关于向量组秩的一些结论：

4． 求向量组的秩以及最大无关组的方法：
将向量组中的向量作为列向量构成一个矩阵，然后进行初等行变换.

思考题

总结证明向量组等价的方法

思考题解答

证法一根据**向量组等价的定义**，寻找两向量组相互线性表示的系数矩阵；

证法二利用“**经初等列变换，矩阵的列向量组等价，经初等行变换，矩阵的行向量组等价**”这一特性，验证是否有相同的行最简形矩阵；

证法三直接计算向量组的秩，利用了**向量组的最大线性无关组等价**这一结论.

上页 下页 返回