浙江理工大学 2016－2017 学年第一学期

《高等数学 A1》期中试卷标准答案

一 选择题

1. C　　2. D　　3. A　　4. B　　5. B　　6. C

二 填空题

1. 2

2. $x=\pm\sqrt{2}$，　　$y=0$

3. $\frac{1}{2}$

4. (-1,0)或(-1,0]

5. $2e^{x^2}(2x\cos x-\sin x)dx$

6. $\ln 2$ 或 $\frac{1}{3}\ln 8$

三、计算题

1. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{x}{4})}{2x}=\dfrac{1}{8}$

2. 解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{1}{1-x}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\frac{1+x^2}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

3. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. 解：方程两边对 x 求导得 $y+xy'=(1+y')e^{x+y}$，所以 $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

5. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$，　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

6. 解：由于 $x>0, x<0$ 时 $f(x)$ 是初等函数，故可导，所以只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导即可。

若函数在 $x=0$ 可导，则必在 $x=0$ 连续。又

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0, f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b$$

所以由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续可得 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$，得 $b=0$。

又 $f_+^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1$， $f_-^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax-0}{x-0}=a$

故由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，只需要 $f_+^{'}(0)=f_-^{'}(0)$，即 $a=1$

四、

1. 解： $y'=-\dfrac{1}{x^2}+2x$， $y''=\dfrac{2}{x^3}+2=0$， $x=-1$，拐点 $(-1,0)$， $y'(-1)=-3$，

$\therefore$ 所求切线方程为： $y=-3(x+1)$，即 $3x+y+3=0$。

$\left(f(x)\text{ 的值域为}\left(0,\dfrac{2+a}{1+a}\right]\right)$.

2.46 (1) 无；(2) $x=\pm 1, y=x$；(3) $x=-1, y=1$；(4) $y=-x-2$，提示：$\because 0\leqslant \left|\dfrac{y}{x}+1\right| = \left|\dfrac{6xy}{x^2-xy+y^2}\right|\cdot\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{6}{|x|}\to 0$，$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}(y/x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(y-(1)x)=-2$.

2.47 $D_y=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

令 $y'=\dfrac{x^2-x-6}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow x=-2, x=3$

令 $y''=\dfrac{13x+6}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{6}{13}$，列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{6}{13}\right)$	$-\frac{6}{13}$	$\left(-\frac{6}{13},0\right)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	不∃	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	不∃	+	+	+
y	$\nearrow$ $\cap$	极大值	$\searrow$ $\cap$	拐点	$\searrow$ $\cup$	不∃	$\searrow$ $\cup$	极小值	$\nearrow$ $\cup$

极大值 $y|_{x=-2}=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$，极小值 $y|_{x=3}=9\sqrt[3]{e}$

拐点 $\left(-\dfrac{6}{13},\dfrac{72}{13}e^{-\frac{13}{6}}\right)$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$ 知，$x=0$ 为垂直渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=7$$

$\therefore y=1\cdot x+7$ 为斜渐近线.

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} y=0$，说明 $(0,0)$ 为空心点.

由此可作出 $y=f(x)$ 的草图如图 2.4.

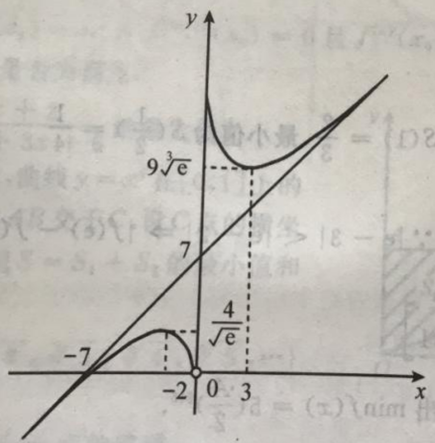

图 2.4

2.

五、

1. 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 当 $x>0$ 时， $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0) \qquad 0<\xi<x$$

即 $f(x)=\dfrac{x}{1+\xi}$，由此 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$，又因为 $0<\xi<x$，所以

$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

或由 $f(x)-x$ 和 $f(x)-\dfrac{x}{1+x}$ 的单调性证明

2. 设 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，且

$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0.$

由零点定理，存在 $x_1\in[\frac{1}{2},1]$，使得 $F(x_1)=0.$ 又由 $F(0)=0.$ 在 $[0,x_1]$ 上对 $F(x)$ 应用罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0,$ 即

$f'(\xi)=1$ 成立。