杭州电子科技大学

第五章　矩阵的相似对角化

第一节　特征值与特征向量

第二节　相似矩阵

第三节　实对称矩阵的对角化

第一节　特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念与求法

定义1　设A是n阶方阵，若存在数λ和n维非零向量X，使关系式

$$AX=\lambda X$$

成立，则称数λ方阵A的特征值，非零向量X 称为方阵A的对应于特征值λ的特征向量.

注：1.对应于一个特征值有无穷多个特征向量；

2. 一个特征向量只能属于一个特征值.

特征值与特征向量的求法

$$AX=\lambda X \Longleftrightarrow (A-\lambda E)X=0 \Longleftrightarrow |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

方阵A的特征多项式，记$f(\lambda)$是关于λ的一元n次多项式.

方阵A的特征方程

方阵A的特征值与特征向量的求法：

(1) 方阵A的特征值：A的特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$ 的根. (有n个)

(2) 方阵A的属于特征值λ的特征向量：

齐次线性方程组$(A-\lambda E)X=0$ 的所有非零解.

例1　求$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$的所有特征值与特征向量

解　（1）求特征值　$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)$

A的所有特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$.

（2）求特征向量

当$\lambda_1=2$时，求$(A-2E)X=0$的所有非零解.

$$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□A的属于特征值λ的所有特征向量：　$k_1\xi_1\ (k_1\neq 0)$

当 $\lambda_1 = 3$时，求$(A - 3E)X = 0$ 的所有非零解.

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令基础解系$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□A的属于特征值3的所有特征向量： $k_2\xi_2 \ (k_2 \neq 0)$

注：基础解系就是A的对应于此特征值的线性无关的特征向量.

例2　求$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$的所有特征值与特征向量

A的所有特征值为 $\lambda_1 = 1$(二重)，$\lambda_2 = 5$.

A的属于特征值1的所有特征向量：$k_1(-2\ -1\ 2)^T \ (k_1 \neq 0)$

A的属于特征值1的所有特征向量：$k_2(0\ \ 0\ \ 1)^T \ (k_2 \neq 0)$

例3 求$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$的所有特征值与特征向量

A的所有特征值为$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=5$.

A的属于特征值1的所有特征向量：

$$k_1(-1\ 1\ 0)^T+k_2(-2\ 0\ 1)^T\ (k_1, k_2\neq \text{不全为}0)$$

A的属于特征值1的所有特征向量：$k_3(1\ 1\ 1)^T(k_3\neq 0)$

属于同一特征值的线性无关的特征向量的个数 ≤ 该特征值的重数.

二、特征值与特征向量的性质

定理1 设A 是n阶矩阵，则 A^T与A有相同的特征值.

定理2 设$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$为$n$阶矩阵 $A=(a_{ij})$的n个特征值，则

（1） $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ； （2） $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$

其中$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$是 A的主对角元素之和，称为方阵 A 的迹，记做 $tr\,(A)$.

例4 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值分别为 -2, 1, b，试求参数a,b.

$a=-1, b=3$

特征值与特征向量的性质

$$A\text{的特征多项式}\ f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \cdots$$

得$f(\lambda)$的最高次（n次）项和$(n-1)$次项只能出现在$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$中，且$f(0)=|A|$，由于

$$f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+|A|$$

$$=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)\quad \cdots\cdots$$

定理3　设λ是n阶矩阵A的特征值.

（1）则 λ^m 是A^m(m为正整数)的特征值，且 A 与 A^m 有相同的特征向量；

（2）设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ 为 m 次多项式，称

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$ **为方阵A 的多项式.**

则 $\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值，且A与$\varphi(A)$ 有相同的特征向量.

定理4 设λ是n阶可逆矩阵A的特征值．则

（1） $\lambda \neq 0$

（2） $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1}的特征值，且A 与 A^{-1} 有相同的特征向量.

（3） $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 为A的伴随矩阵A^* 特征值，且A与A^* 有相同的特征向量.

例5 设3阶方阵A的特征值分别为:-1,1,3，求$B=A^*+A^2-2A+3E$ 的，特征值，并计算行列式$|B|$的值.

$g(-1)=9, g(1)=-1, g(3)=5$

$|B|=9\times(-1)\times5=-45$

定理5　不同的特征值对应的特征向量线性无关.

定理6　若$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$为$n$阶方阵$A$的不同的特征值，而$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i}$
$(i=1,2,\cdots m)$ **是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量,则向量组**

$$\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1r_1}, \xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2r_2}, \cdots, \xi_{m1}, \xi_{m2}, \cdots, \xi_{mr_m}$$ **线性无关.**

例6　设λ_1和 λ_2 是方阵A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为ξ_1和ξ_2，证明：$a\xi_1$和 $b\xi_2$, $ab \neq 0$不是A的特征向量.　**(反证法)**

例．设矩阵A满足等式 $A^2-3A-4E=0$,试证明的特征值只能取值-1或4.

【补】

思 考 题 一

2. 设λ_0方阵A的特征值,齐次线性方程组$(A-\lambda_0E)X=0$的解向量是否是A的特征向量？

非零解向量

3. 不同方阵的特征值一定不同吗？ 可以相同

4. 举例说明实矩阵的特征值不一定是实数.

5. 如果λ是A的r重特征值,那么方阵A的属于不同方阵的λ的线性无关的特征向量是否一定有r个? $\le r$ 个

主对角元就是特征值

6.对角矩阵的特征值与其主对角线上的元素有什么关系？

7. 如果n阶方阵A的每行(列)的元素之和为同一个数a, 则 a 是 A 的特征值,且n维向量$(1, 1,\cdots,1)^T$是对应的特征向量，对吗？ 正确

作业

P139 习题五

1(1,3,5), 3, 4, 6, 7

第二节　相似矩阵

一、相似矩阵的概念与性质

定义2 设A与B都是n 阶矩阵. 若存在n 阶可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$成立，则称B是A的相似矩阵，并称矩阵A与B相似.

性质1　**若n阶矩阵A和B相似，则**

（1）$|A|=|B|$

（2）A和B有相同的秩，即 $R(A)=R(B)$

（3）A和B有相同的特征多项式和特征值，从而 $tr(A)=tr(B)$.

注：相似和等价的区别

$$\begin{cases} A与B相似：存在可逆矩阵P，使P^{-1}AP=B \\ A与B等价：存在可逆矩阵P和Q，使PAQ=B \end{cases}$$

例7　设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，求 a, b.

$a=-1, b=3$

性质2　设n阶矩阵A与B相似，函数$\varphi(x)$是一个多项式，则$\varphi(A)$与$\varphi(B)$相似.

二、矩阵与对角矩阵相似的条件

存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$

矩阵A可相似对角化（简称可对角化）：A跟某个对角阵Λ相似 $\Longleftrightarrow$

矩阵与对角矩阵相似的条件

(1) n阶矩阵A与对角矩阵相似$\longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

(2) 不同的特征值对应的特征向量线性无关.

(3) n阶方阵A可相似对角化 $\longleftrightarrow$ 对应于A的每个特征值的线性无关特征向量的个数=该特征值的重数， 即设λ_i是A的n_i重特征值，

则A与对角矩阵Λ相似 $\longleftrightarrow$ $R(A-\lambda_i E)=n-n_i, i=1,2,\cdots,s$

(4) 若A与对角矩阵Λ相似，取可逆矩阵$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵，其中$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为矩阵$A$的$n$个线性无关的特征向量.

例8 设三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$. （1）矩阵A是否可相似对角化，为什么？

（2）试求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵；

（3）试求A^k，其中k为正整数.

解 （1）先求A的特征值为 $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=2$

属于特征值$\lambda_{1,2}=1$的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 和 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

属于1的线性无关的特征向量个数

＝特征值1的重数， 所以矩阵A是否可相似对角化.

（2）属于特征值$\lambda_3=2$的线性无关的特征向量为$\xi_3=(1,1,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则有$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由（2）得$P^{-1}AP=\Lambda$, 则$A=P\Lambda P^{-1}$，$A^k=P\Lambda^kP^{-1}=\cdots$

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}1^k&0&0\\0&1^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-2^{k+1}&-1+2^k&-2+2^{k+1}\\2-2^{k+1}&2^k&-2+2^{k+1}\\2-2^{k+1}&-1+2^k&-1+2^{k+1}\end{pmatrix}$$

求得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow A^k=P\Lambda^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-2^{k+1}&-1+2^k&-2+2^{k+1}\\2-2^{k+1}&2^k&-2+2^{k+1}\\2-2^{k+1}&-1+2^k&-1+2^{k+1}\end{pmatrix}$$

例9 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&a\\4&0&5\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，矩阵A 可相似对角化.

解： A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=6$.

因为 A 可相似对角化，所以对于特征值 $\lambda_{1,2}=1$，特征方程组 $(A-E)X=$

的基础解系有两个线性无关的解 向量，　即 $R(A-E)=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&a\\4&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&a-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例9 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&a\\4&0&5\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，矩阵A 可相似对角化.

解： A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=6$.

因为 A 可相似对角化，所以对于特征值 $\lambda_{1,2}=1$，特征方程组 $(A-E)X=0$ 的基础解系有两个线性无关的解向量， 即 $R(A-E)=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&a\\4&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&a-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故当 $a=3$ 时，矩阵 A 可相似对角化.

例10 设A 三阶方阵的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为 $\xi_1=(0,1,1)^T,\xi_2=(1,1,1)^T,\xi_3=(1,1,0)^T$ 试求 A .

解: A 有三个不同的特征值，则 A 可相似对角化.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

思 考 题

线性无关

3．如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征向量，则 A 可与对角阵相似吗？不

5．已知 n 阶方阵 A 可相似对角化，如何求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵？ **n个线性无关的特征向量按列排列所得的矩阵**

6．相似矩阵定义中的可逆矩阵 P 是唯一的吗？ 不唯一

作业

P140 习题五

10，11，12，13(1,2)，14

§5.3　实对称矩阵的对角化

上一节已指出，不是任何方阵与对角矩阵相似，然而实对称矩阵一定可对角化.

一、实向量的内积、施密特(Schmidt)正交化方法与正交矩阵

1、向量的内积

定义3　给定 n 元实向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$，称实数 $[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ 为向量 α 与 β 的内积.

由内积定义和矩阵乘法，有 $[\alpha,\beta]=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$，　从而得内积的下列性质：

（1）$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$；　（2）$[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$；

（3）$[\lambda\alpha,\beta]=\lambda[\beta,\alpha]$；　（4）$[\alpha,\alpha]\geqslant 0$ ；当且仅当$\alpha=0$时等号成立.

2、向量的长度与夹角

定义4　给定n元实向量$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$，称

$$\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$

为向量α的长度（范数或模）.

向量的长度具有下述性质（其中λ为实数）：

- 非负性：　$\|\alpha\|\geqslant 0$
- 齐次性：　$\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\cdot\|\alpha\|$ ；
- 三角不等式：　$\|\alpha+\beta\|=\|\alpha\|+\|\beta\|$.

长度为1的向量称为单位向量．对任一非零向量α，向量 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为单位向量，这一过程称为将向量单位化（或规范化，或标准化）．

可以证明，向量的内积满足： $|[\alpha,\beta]| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

等号成立当且仅当α与β线性相关．上式称为施瓦茨（Schwarz）不等式．

由此可得 $\left|\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}\right| \le 1 \quad \alpha \ne 0, \beta \ne 0$

定义5 设α,β为n元实非零向量， 记

$$<\alpha,\beta> = \arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\,\|\beta\|} \qquad 0 \leqslant \langle\alpha,\beta\rangle \leqslant \pi$$

称$\langle\alpha,\beta\rangle$为向量$\alpha$与$\beta$的夹角.

例11 求向量$\alpha=(1, 1, 0, -1)^T$，$\beta=(1, 2, 1, 0)^T$的夹角．π/4

3、正交向量组

定义6 设α与β是两个n元实向量，若$[\alpha,\beta]=0$，则称向量α与β正交（或垂直），记为$\alpha\perp\beta$.

显然，零向量与任何向量都正交．两个非零向量正交当且仅当它们的夹角为π/2.

定义7 若不含零向量的向量组中任意两个向量都正交，则称此向量组为正交向量组．由单位向量构成的正交向量组叫做正交单位向量组.

（规范正交向量组或标准正交向量组）

定理10 设α_1，α_2，…，α_m是正交向量组，则α_1，α_2，…，α_m必线性无关.

例12 已知向量$\alpha_1=(1,\ 1,\ -1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 2)^T$，试求一个单位向量α_3，使α_1，α_2，α_3成为标准正交向量组. **(先求正交的向量，再单位化)**

4、施密特(Schmidt)正交化方法

设向量组α_1，α_2，…，α_m线性无关，下面介绍如何从α_1，α_2，…，α_m构造出与α_1，α_2，…，α_m等价的正交向量组β_1，β_2，…，β_m.

定理11 设向量组α_1，α_2，…，α_m线性无关. 令

$$\beta_1=\alpha_1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1 \qquad \beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \beta_m=\alpha_m-\frac{[\alpha_m,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_m,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_m,\beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$$

则β_1，β_2，…，β_m是正交向量组，且β_1，β_2，…，β_j与α_1，α_2，…，α_j (j =1,2 …m)等价. 上述过程称为施密特(Schmidt)正交化方法.

例13 用施密特正交化方法将向量组

$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 4,\ 9)^T$，

化为规范正交向量组.

$$\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\eta_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

5、正交矩阵

定义8 设A为n阶矩阵，如果$AA^T=E$，则称A为正交矩阵.

显然，若A为正交矩阵，则$A^{-1}=A^T$.

注：α_1，α_2，…，α_m为标准正交向量组

$$\Leftrightarrow [\alpha_i,\alpha_j]=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}, i,j=1,2,\cdots,m$$

正交矩阵性质：

(1) A为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的列(或行)向量组是单位正交向量组.

(2) 设A,B为正交矩阵，则 $|A|=\pm 1$；

$A^{-1}=A^T$、AB也是正交矩阵

二、实对称矩阵特征值与特征向量的性质

性质1 实对称矩阵的特征值为实数.

从而有：实对称阵A的特征向量可取为实向量.

性质2 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理13 设A为n阶实对称矩阵，λ_0是A的r重特征值，则A的属于特征值λ_0的线性无关的特征向量恰有r个，即 $R(A-\lambda_0 E)=n-r$

三、实对称矩阵的对角化

定理14 设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_n为A的特征值.

给出了对于实对称矩阵A，如何求正交矩阵Q， 使$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \Lambda$为对角阵的方法． 具体步骤如下：

（1）求A的n个特征值和每个特征值对应的齐次线性方程组的基础解系；

（2）对每组基础解系分别进行正交化和单位化；

（3）将单位化后的向量按列排列得到的矩阵就是需要的正交矩阵Q.

例14 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$， 求一个正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵.

例15 设3阶实对称矩阵A的特征值为2、4、4，属于特征值2的特征向量为 $\xi_1=(0,1,-1)^T$

（1）求A的属于特征值4的特征向量；

（2）求矩阵A.

利用属于2的特征向量与属于4的特征向量正交

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

思　考　题　三

1．*A*,*B*都是*n*阶实对称阵，且*A*与*B*有相同的特征多项式，则*A*与*B*必相似吗？　　　　**A与B必相似**

2．实对称矩阵一定可以对角化，则和对角矩阵相似的矩阵一定是实对称矩阵吗？　　不是

作业

P141 习题五

19, 20, 21(1,3), 22, 24, 25

P147 17