5.2 向量的内积和正交性

- 一、内积
- 二、标准正交基
- 三、施密特正交化
- 四、正交矩阵与正交变换

一、内积

回忆: R^3

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,\ \theta\text{表示}\vec{a},\vec{b}\text{的夹角}.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

若$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$,

$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

推广到n维实向量空间 R^n：

定义1　设有n维向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

令　$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

称(α,β)为向量α与β的内积．

说明

1 $n(n \geq 4)$ 维向量的内积是3维向量数量积的推广，但是没有3维向量直观的几何意义.

2 内积是向量的一种运算,如果α,β都是列向量,内积可用矩阵记号表示为:

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha.$$

内积的运算性质

$($其中α,β,γ为n维向量,k为实数$)$:

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0,(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$\alpha=0$.

R^n中定义1的内积有时称为**标准内积**.

上页 下页 返回

定义3 令

$$\left|\alpha\right| = \sqrt{(\alpha,\alpha)},$$

称$\left|\alpha\right|$为n维向量α的长度(或范数).

注 向量的长度具有非负性:

即当$\alpha \neq 0$时,$\left|\alpha\right| > 0$;当$\alpha = 0$时,$\left|\alpha\right| = 0$;

称长度是1的向量为单位向量.

对任一非零向量可将其单位化: $\eta = \dfrac{\beta}{\left|\beta\right|}$.

R^n中, 在标准内积下向量的长度为:

$$\left|\alpha\right| = \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

为引入夹角的概念

定理1 Cauchy-Schwarz不等式

设V是欧氏空间,$\forall \alpha, \beta \in V$,有

$$\left|(\alpha, \beta)\right| \leq |\alpha||\beta|$$

其中等号成立的条件是α与β线性相关.

定义4 在欧氏空间中,向量α, β之间的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \quad (|\alpha||\beta| \neq 0)$$

定义5 设V是欧氏空间,对$\alpha, \beta \in V$,若$(\alpha, \beta) = 0$,则称α与β正交,记作$\alpha \perp \beta$.

注: 零向量与任何向量都正交.

上页 下页 返回

定理2　　在n维欧氏空间中，成立

$$1.\ |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|;$$

$$2.\ \text{当}\alpha \perp \beta\text{时}, |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

二、标准正交基

1 正交向量组的概念

若一非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组；若其中每个向量的长度都是1,则称为正交单位向量组(或标准正交向量组).

注意　(1) 这里每个向量均要求非零;
(2) 由单个非零向量组成的向量组也正交向量组.

2 正交向量组的性质

定理1 若n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组两两正交的非零向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

证明 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_r=0$$

以a_1^T左乘上式两端，得 $\lambda_1\alpha_1^T\alpha_1=0$

由$\alpha_1\neq 0\Rightarrow \alpha_1^T\alpha_1=|\alpha_1|^2\neq 0$, 从而有$\lambda_1=0$.

同理可得$\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$. 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

上页 下页 返回

3 向量空间的正交基

推论　n维欧氏空间中，**两两正交的非零向量**的个数不超过n.

定义　在n维欧氏空间中，由n个两两正交的非零向量构成的向量组称为正交基.

例1 已知三维向量空间R^3中两个向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交，试求α_3使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

解 设$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$,且分别与$\alpha_1,\alpha_2$正交.

则有 $(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$

即 $$\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_3)=x_1+x_2+x_3=0\\(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

解之得 $x_1=-x_3,\ x_2=0.$

若令 $x_3=1$,则有 $$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由上可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

4 标准正交基

定义　在n维欧氏空间中，由单位 向量组成的正交基称为标准正交基.

例如

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

由于 $\begin{cases}(e_i,e_j)=0, & i\neq j\text{且}i,j=1,2,3,4.\\(e_i,e_j)=1, & i=j\text{且}i,j=1,2,3,4.\end{cases}$

所以 e_1,e_2,e_3,e_4为R^4的一个标准正交基.

上页 下页 返回

同理可知

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

也为$\boldsymbol{R}^4$的一个标准正交基.

定理2　设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\mathrm{n}}$是n维欧氏空间$V$的一标准正交基,对$\forall\alpha\in V$,设$\alpha$的坐标为$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,则$x_i=(\alpha,\varepsilon_i),i=1,\cdots,n.$

定理3　设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\mathrm{n}}$是n维欧氏空间$V$的一标准正交基,对$\forall\alpha,\beta\in V$,设$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\mathrm{n}})X$,

$$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\mathrm{n}})Y,\text{则}(\alpha,\beta)=X^TY=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

注意　此时的内积为标准内积.

上页　下页　返回

三、施密特正交化

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基,要求$V$的一个标准正交基,就是要找一组两两正交的单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_r$,使$e_1,e_2,\cdots,e_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价,这样一个问题,称为把$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$这个基标准正交化.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量空间$V$的一个基,

（1）正交化，取 $\beta_1=\alpha_1$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

上页 下页 返回

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\beta_1, \alpha_r)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_r)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\beta_{r-1}, \alpha_r)}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

那么$\beta_1, \cdots, \beta_r$两两正交,且$\beta_1, \cdots, \beta_r$与$\alpha_1, \cdots \alpha_r$等价.

（2）**单位化**，取

$$e_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \quad \cdots\cdots, e_r = \frac{\beta_r}{|\beta_r|},$$

那么$e_1, e_2, \cdots, e_r$为V的一个标准正交基 .

上述由线性无关向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$构造出正交向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$的过程,称为**施密特正交化过程**．

例4 用施密特正交化方法，将向量组

$$a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,-1,0,4), a_3 = (3,5,1,-1)$$

标准正交化.

解 先正交化，取

$$b_1 = a_1 = (1,1,1,1)$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1$$

$$= (1,-1,0,4) - \frac{1-1+4}{1+1+1+1}(1,1,1,1) = (0,-2,-1,3)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2$$

$$= (3,5,1,-1) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) - \frac{-14}{14}(0,-2,-1,3) = (1,1,-2,0)$$

再单位化，得标准正交向量组如下

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0,-2,-1,3) = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

例5　设$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$,试用施密特正交化过程把这组向量标准正交化.

解　取$b_1=a_1$;

$$b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{\left|b_1\right|^2}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$b_3=a_3-\frac{(a_3,b_1)}{\left|b_1\right|^2}b_1-\frac{(a_3,b_2)}{\left|b_2\right|^2}b_2$$

上页　下页　返回

$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，取

$$e_1=\frac{b_1}{\left|b_1\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{b_2}{\left|b_2\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{b_3}{\left|b_3\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

e_1,e_2,e_3即合所求.

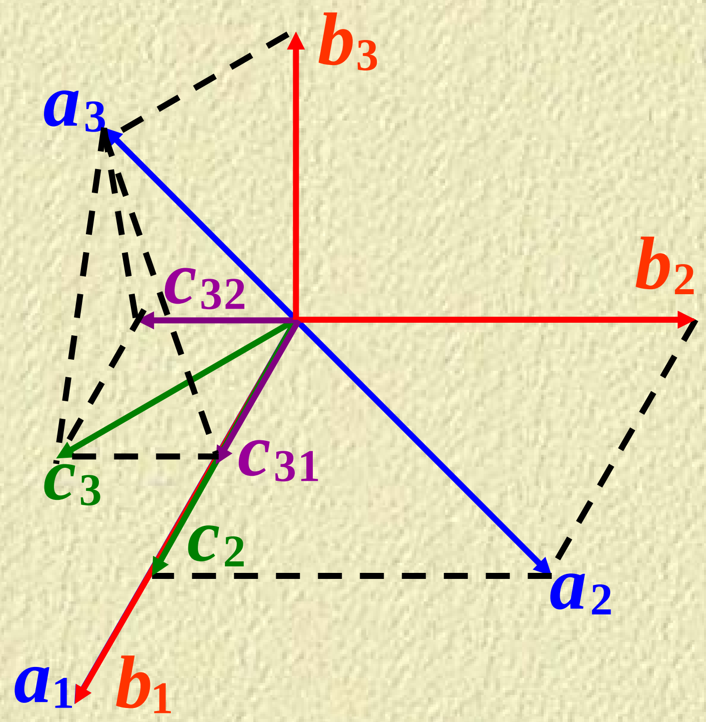
$b_1 = a_1$; 几 何 解 释

c_2为a_2在b_1上的投影向量,即

$$c_2 = \left(a_2, \frac{b_1}{|b_1|}\right)\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(a_2, b_1)}{|b_1|^2} b_1,$$

$b_2 = a_2 - c_2$;

c_3为a_3在平行于b_1, b_2的平面上的投影向量,



由于$b_1 \perp b_2$,故c_3等于a_3分别在b_1, b_2上的投影向量c_{31}及c_{32}之和,即

$$c_3 = c_{31} + c_{32} = \frac{(a_3, b_1)}{|b_1|^2} b_1 + \frac{(a_3, b_2)}{|b_2|^2} b_2, \quad b_3 = a_3 - c_3.$$

上页 下页 返回

例6 已知$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,求一组非零向量$a_2,a_3$,使$a_1,a_2,a_3$两两正交.

解 a_2,a_3应满足方程$a_1^T x=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

它的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

把基础解系正交化，即合所求．亦即取

$$a_2 = \xi_1, \quad a_3 = \xi_2 - \frac{(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1.$$

其中$(\xi_1, \xi_2) = 1, (\xi_1, \xi_1) = 2,$于是得

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

四、正交矩阵与正交变换

定义　若n阶方阵A满足 $A^T A = E$ (即$A^{-1} = A^T$),则称A为正交矩阵.

定理5　设A, B皆是n阶正交矩阵,则

(1) $|A| = 1$或-1　　(2) $A^{-1} = A^T$

(3) A^T (即A^{-1}) 也是正交矩阵.　(4) AB也是正交矩阵.

上页　下页　返回

定理6　A为正交矩阵的充要条件是 A的列(行)向量都是单位向量且两两正交.

证明　$AA^T = E$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = E$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T\right) = E$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^T & \alpha_1 \alpha_2^T & \cdots & \alpha_1 \alpha_n^T \\ \alpha_2 \alpha_1^T & \alpha_2 \alpha_2^T & \cdots & \alpha_2 \alpha_n^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n \alpha_1^T & \alpha_n \alpha_2^T & \cdots & \alpha_n \alpha_n^T \end{pmatrix} = E$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i \alpha_j^T = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当 } i = j; \\ 0, \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad \left(i, j = 1,2,\cdots,n\right)$$

上页 下页 返回

定义　设σ为欧氏空间V的一个线性变换，若σ在一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵，则称σ为正交变换.

性质　正交变换保持向量的内积不变，特别地，保持向量的长度不变.

例7 判别下列矩阵是否为正交阵.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix},\qquad (2)\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解 (1)

考察矩阵的第一列和第二列,

由于 $$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以它不是正交矩阵.

$$(2)\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以它是正交矩阵.

例8　验证矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ 是正交矩阵.

解　P的每个列向量都是单位 向量,且两两正交,所以P是正交矩阵.

上页 下页 返回

例　旋转变换T在基ε_1，ε_2下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

它是正交矩阵，所以旋 转变换正交变换.

思考题

求一单位向量，使它与

$$\alpha_1=(1,1,-1,1),\ \alpha_2=(1,-1,-1,1),\ \alpha_3=(2,1,1,3)$$

正交.

思考题解答

解 设所求向量为$x=(a,b,c,d)$,则由题意可得：

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1,\\ a+b-c+d=0,\\ a-b-c+d=0,\\ 2a+b+c+3d=0.\end{cases}$$

解之可得：$x=(-2\sqrt{\dfrac{2}{13}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{26}},\dfrac{3}{\sqrt{26}})$

或 $x=(2\sqrt{\dfrac{2}{13}},0,\dfrac{1}{\sqrt{26}},-\dfrac{3}{\sqrt{26}})$.