第三章　矩 阵

矩阵是线性代数最基本的概念，也是数学中最有力的工具之一.已在前面的线性方程组的讨论加以运用，本章主要介绍矩阵的线性运算、矩阵的乘法、矩阵的转置、矩阵的初等变换和初等矩阵、可逆矩阵、矩阵的秩、分块矩阵；并利用矩阵的理论给出线性方程组解的理论.

第一节　矩阵的基本运算

一、矩阵概念

1. 矩阵的定义

由$m \times n$个数a_{ij} $(i=1,2,\cdots, m; j=1,2,\cdots, n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m \times n$矩阵，

其中a_{ij}称为矩阵 的第 i 行第 j 列的元素，

复矩阵：　元素是复数的矩阵.

实矩阵：　元素是实数的矩阵.

2. 一些特殊的矩阵

（1）行矩阵（或行向量）：只有一行的矩阵．如 $A=(a_1\ \ a_2\ \cdots\ \ a_n)$

（2）列矩阵（或列向量）：只有一列的矩阵． 如 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

（3）n阶方阵：行数与列数相等的矩阵．如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=(a_{ij})_n$，

元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的直线称为方阵的主对角线．

方阵A的行列式：记为 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

（4）**零矩阵：** 元素全为零的矩阵，$m\times n$零矩阵记为$O_{m\times n}$或O.

（5）**n阶单位矩阵：** 主对角线上的元素全为1，其他元素全为零的n阶方阵, 记为E_n, 简记为E，即

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

（6）**n阶数量矩阵：** 主对角线上的元素相等，其他元素全为零的n阶方阵, 记为kE_n, 简记为kE，即

$$kE_n=\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

（7）**n阶**对角矩阵:不在主对角线上的元素全为零的 n 阶方阵, 记为 Λ_n， $\Lambda_n=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

简记为 Λ 或 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

3. 矩阵的相等

同型矩阵：行数与列数分别相等的矩阵.

定义1 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，如果它们对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，i=1,2,⋯, n； j==1,2,⋯, n,

则称矩阵 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

三、矩阵的数乘运算

定义2 数量乘积：数λ与矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的乘积,记为 λA,规定为:

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}\qquad (-1)A=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}$$

特别地，$\lambda=-1$时称$(-1)A$为A的负矩阵，记为$-A$，即$(-1)A=-A$.

注意:数乘矩阵与数乘行列式的区别.　如设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad 则\quad 2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}\qquad 2|A|=2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-4$$

运算规律:

性质1 $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$，其中$\lambda,\mu$为实数.

性质2 $0A=O$, $\lambda O=O$, 其中λ为实数.

性质3 设A为n阶方阵，λ为实数, 则 $|\lambda A| = \lambda^n|A|$.

四、矩阵加法

定义3 **矩阵$A+B$**:设矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$与矩阵$B = (b_{ij})_{m\times n}$都是 $m\times n$ 矩阵，定义: $A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$, $A-B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$

杭州電子科技大學

如设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

运算规律:

性质1　$A+B = B+A$

性质2　$(A+B) + C = A + (B+C)$

性质3　$A+O = A$, $A + (-A) = O$, 其中O与A是同型矩阵.

性质4　$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, 其中$\lambda$, μ为实数.

例1 设$A=\begin{pmatrix} a_1 & x & u \\ b_1 & y & v \\ c_1 & z & w \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_2 & x & u \\ b_2 & y & v \\ c_2 & z & w \end{pmatrix}$, 且$|A|=4$, $|B|=1$，求$|A+B|$.

$=2\times2\times(4+1)=20$

注意: $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$

矩阵加法与数乘运算合起来, 统称为矩阵的**线性运算**.

五、矩阵乘法

1. 矩阵乘法的定义

定义4 设$A=(a_{ij})_{m\times s}$为$m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{s\times n}$为$s\times n$ 矩阵定义矩阵A与B的乘积 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$

是一个$m\times n$矩阵，其中AB的第 i 行第j 列元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

即

$$\begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ & c_{ij} & \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -8\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$, 求$AB$与$BA$.

AB无意义. $BA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, 求$AB$与$AC$.

$AB=AC=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -6 & 2\end{pmatrix}$.

例4 设 $A=(a_1\ \ a_2\ \cdots\ \ a_n)$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 求AB与BA.

$$AB = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad BA = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

注意：

1. 矩阵乘法不满足交换律，即 $AB \neq BA$
2. 矩阵乘法不满足消去律，即 $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
3. $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$

下面介绍两个特殊矩阵的运算

例5 设$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $B=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, 求$AB$与$BA$.

$$AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\mu_n\end{pmatrix}=BA$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{1. 对角矩阵与对角矩阵乘法可交换;}\\ \text{2. 两个对角矩阵相乘，等于对应的主对角元相乘.}\end{cases}$

如果存在两个矩阵A和B, 使得$AB=BA$, 则称矩阵A和B**乘法可交换**.

例　设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$，求 AE_3 与 E_2A.　【补】　$AE_3=E_2A=A$

注：任何矩阵A，左边或右边乘以单位矩阵，都等于矩阵A本身.

2. 矩阵乘法与线性方程组

将下列线性方程组写成矩阵形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (3.1)$$

记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j=1,2,\cdots,n$$

则（3.1）式可以表示为

$$AX=\beta \tag{3.2}$$

或

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \tag{3.3}$$

向量形式

矩阵形式

3. 矩阵乘法的性质

性质1 $(AB)C = A(BC)$

性质2 $(A+B)C=AC+BC$， $C(A+B)=CA+CB$

性质3 $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$, 其中 λ 为实数.

性质4 $AO=O$, $OA=O$, $AE=A$, $EA=A$.

性质5 设A, B都是n阶方阵, 则$|AB|=|A|\cdot|B|$.

性质6 设$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $B=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, 则

$$AB=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n)=BA$$ 【补】

4. 矩阵的方幂

定义5 设A为n阶方阵，定义

$$A^1=A,\ A^2=A^1A=AA,\ \cdots,\ A^k=A^{k-1}A=\overbrace{AA\cdots A}^{k}$$

称A^k为 n 阶方阵A的k 次方幂，其中k 为正整数.

不难得到： $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$, $|A^k|=|A|^k$

但一般情况下，$(AB)^k \neq A^kB^k$ 问：什么时候等号成立？

答：$AB=BA$ 时等号成立

例7 设$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，求$\Lambda^k$.

由前面的性质的 $\Lambda^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$.

例8 设$A=(a_1\ \ a_2 \cdots\ \ a_n)$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 求$(BA)^k$.

注：BA是n阶矩阵

$AB=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$是数

$$(BA)^k = \underbrace{(BA)(BA)\cdots(BA)(BA)}_{k} = B\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)(AB)}_{k\text{-}1}A$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{k-1} \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

六、矩阵的转置

1. 转置矩阵

定义6 设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$为$m\times n$矩阵，把A的行换成同序号的列所得到的$n\times m$矩阵$(a_{ji})_{n\times m}$称为矩阵A的转置矩阵，记为A^{T}.

如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\quad (a_1\ \ a_2\ \cdots\ \ a_n)^{T}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

运算规律

性质1 $(\lambda A)^{T} = \lambda A^{T}$, 其中 λ为实数.

性质2 $(A \pm B)^{T} = A^{T} \pm B^{T}$

性质3 $(AB)^{T} = B^{T}A^{T} \neq A^{T}B^{T}$

性质4 $|A^{T}| = |A|$.

性质5 $(A^{T})^{T} = A$.

例9 设$X = (x_1 \ x_2 \cdots \ x_n)^{T}$, 且 $H = E - 2XX^{T}$. 证明: $H^{T} = H$

2. 对称矩阵与反对称矩阵

定义7 对称矩阵：满足$A^T=A$ 的n阶方阵 $\Longleftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}$

反对称矩阵：满足$A^T=-A$ 的n阶方阵 $\Longleftrightarrow$ $a_{ij}=-a_{ji}$

$i,\ j=1,2,\cdots,n.$ $\Longrightarrow$ $a_{ii}=0$

例10 设A, B都是n阶对称矩阵，证明：AB为对称矩阵的充分必要条件是$AB=BA$，即A与B乘法可交换.

证明： AB为对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

思　考　题　一

1. 试问$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$与$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$相等吗？　　不相等

2. 不同型的零矩阵相等吗？不同型的单位矩阵相等吗？　都不相等

3. 设A为 n 阶矩阵，试问$|\lambda A| \cancel{=} \lambda|A|$ 吗？　$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$.

4. 设A,B为同阶方阵，试问$|A+B| \cancel{=} |A|+|B|$ 吗？$|AB| = |BA|$吗？

5. 举例说明下列结论**不成立**：

（1）设 A, B 为同阶矩阵，则 $AB = BA$.

（2）若 $AB = O$，则 $A = O$ 或 $B = O$.

（3）若 $AB = AC$，且 $A \neq O$，则 $B = C$.

（4）设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 = O$，则 $A = O$.

（5）设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 = E$，则 $A = \pm E$.

作业　　（第76页）

A　2，4（2, 4, 5），5，6，8

B　3

第二节　逆矩阵 (矩阵乘法的逆运算)

一、伴随矩阵

定义8　设$A=(a_{ij})_n$为n阶方阵，称n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的伴随矩阵，记为A^*，其中A_{ij}为$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式.

例11　设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，　则$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

定理2 则A^*为n阶矩阵A的伴随矩阵, 则

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|\,E} \tag{3.4}$$

二、逆矩阵及其性质

1. 逆矩阵的定义

定义9 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得

$$AB = BA = E \tag{3.5}$$

则称矩阵 A 可逆（或称A是可逆矩阵），B是A的逆矩阵.

若不存在n阶方阵B满足（3.5），则称矩阵A不可逆.

定理3 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的. 记A的逆矩阵为A^{-1}

注：可逆矩阵A的逆矩阵不能记为$\frac{1}{A}$（或$\frac{E}{A}$）.

$A^{-1} \cancel{=} \frac{1}{A}$

$A^{-1} \cancel{=} \frac{E}{A}$

2. 可逆矩阵的条件

问：
- n阶方阵A在什么条件下可逆呢？
- 如果可逆，又怎样求出它的逆矩阵呢？

定理4 n阶方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$, 且 A当可逆时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \qquad (3.6)$$

非奇异矩阵：$|A| \neq 0$ ⟺ 可逆矩阵

奇异矩阵：$|A| = 0$ ⟺ 不可逆矩阵

推论 若n 阶矩阵A与B满足$AB=E$（或$BA=E$），则称A可逆，且$A^{-1}=B$.

例12 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $ad-bc \neq 0$ 时，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

例13 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

注:若A为n 阶可逆矩阵, 为了求A^{-1}, 需要求n^2个n -1阶行列式, 故计算量很大. 事实上，以后求逆矩阵, 我们一般用初等行变换的方法 .

例14　设n 阶矩阵A满足$A^2-3A=O$, 证明$A-E$可逆, 并求其逆.

证　$A^2-3A=O$ $\longrightarrow$ $\boxed{(A-E)(A-2E)=2E}$

$$\longrightarrow (A-E)\left(\frac{1}{2}(A-2E)\right)=E$$

所以$A-E$可逆, 且 $(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-2E)$

3. 逆矩阵的性质

性质1 设矩阵A可逆, λ为非零实数, 则 λA可逆, 且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

性质2 设A,B为n 阶可逆矩阵, 则AB可逆, 且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. $\neq A^{-1}B^{-1}$

性质3 设A为n 阶可逆矩阵, 则

(1) A^{T}可逆, 且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

(2) A^{-1}可逆, 且$(A^{-1})^{-1}=A$.

(3) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

(4) A^{*}可逆, 且$(A^{*})^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$, $|A^{*}|=|A|^{n-1}$.

【补】

(5) 如果$AB=AC$（或$BA=CA$），则$B=C$.

(6) 如果$AB=O$（或$BA=O$），则 $B=O$.

前提条件：
A为可逆矩阵

跟伴随矩阵A^*
有关的重要公式：

设A为n 阶矩阵，则

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(3) A可逆 $\Longleftrightarrow$ A^*可逆，

且$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$， $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

例15 设A为3阶矩阵, 且$|A|=2$, 求$|(3A)^{-1}-2A^*|$. -16/27

已知A, B, C都是n阶方阵, 且$ABC = E$，证明:$BCA = CAB = E$.【补】

例16 设$A, B, A+B$ 都可逆, 证明$A^{-1}+B^{-1}$也可逆，并求其逆.

$$A(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}=E$$

例17 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$$

例18 设矩阵X 满足$X=AX+B$, 且 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&3\end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

下面给出Cramer法则的证明:

方程组（2.18）$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \Leftrightarrow A_{n\times n}X_{n\times 1}=\beta_{n\times 1}$

因为$|A|=D\neq 0$，所以 A^{-1}存在.由逆矩阵的唯一性知，方程组有唯一解，且解为 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

杭州電子科技大学

$$X=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots A_{n1}b_n\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots A_{n2}b_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots A_{n2}b_n\end{pmatrix}$$

考虑

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots b_nA_{n1}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\\ \vdots\\ D_n\end{pmatrix}$$

即 $x_j=D_j/D,\ \ j=1, 2, \cdots, n$.

思　考　题　二

1. 试问矩阵A的伴随矩阵A^*的第 i 行第 j 列元素是什么？　A_{ji}

2. 为什么可逆矩阵A的逆矩阵不能记为$\dfrac{1}{A}$（或$\dfrac{E}{A}$）？

矩阵没有除法运算；　矩阵乘法没有交换律.

3. n阶矩阵A可逆的条件是什么？举例说明当$A\neq O$时，A不一定逆.

$|A|\neq O$ 与 $A\neq O$的区别.

4. 设A,B为同阶可逆矩阵，试问$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$吗?

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

5．设A为可逆矩阵，且$AB=AC$，则$B=C$．此结论成立吗？说明理由.

因为A可逆,等式$AB=AC$两边左乘A^{-1}即可.

6．设三阶对角矩阵$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$全不为零，证明$A^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1})$．由此您能得到$n$阶对角矩阵可逆的条件和其逆矩阵的计算公式吗？

$A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$可逆 $\Longleftrightarrow |A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n\neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全不为零

且 $A^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$

作业 （第77页）

A 10(2, 4), 11(2, 3), 12, 14, 16, 17

B 6

第三节　分块矩阵

前二节的讨论中可以看出，小型矩阵（即行数与列数较小的矩阵）比大型矩阵（即行数与列数较大的矩阵）一般易于计算，特别是乘法运算和求逆运算.本节介绍的分块矩阵法，就是把大型矩阵转化为小型矩阵来处理.

一、分块矩阵的定义

定义10 用若干条贯穿整个矩阵的横线与纵线，将矩阵分成若干小块，每个小块称为矩阵的子块；以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵．如矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{array}\right),\quad A=\left(\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ \hline c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p & q \\ \hline 0 & 0 & r & s \end{array}\right),\quad A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{array}\right),$$

分成四大块　　　按行分块　　　按列分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},\quad A=\left(\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ \hline c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p & q \\ \hline 0 & 0 & r & s \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix},\quad A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{array}\right),$$

令 $A_1=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}$

$$B_1=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_2=\begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & p & q \end{pmatrix}$$
$$B_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & r & s \end{pmatrix}$$

$$C_1=\begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad C_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ r \end{pmatrix},\quad C_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ s \end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与矩阵的运算基本类似. （将子块看成元素）

1. 数乘　设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，λ为实数，则 $\lambda A=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$.

即, 每个子块都乘以数λ .

2. 加法　设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，$B=(B_{ij})_{r\times s}$，则$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$，

即, 对应的子块相加.

3. 乘法　设 $A=(A_{ij})_{r\times t}$，$B=(B_{ij})_{t\times s}$，则$AB=C=(C_{ij})_{r\times s}$

其中 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{it}B_{tj}$　$i=1, 2, \cdots, r$；$j=1, 2, \cdots, s$.

注:两个分块矩阵A与B相乘, 必须满足:前矩阵A对列的分块方式与后矩阵B对行的分块方式相同.

例19 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$, 利用分块矩阵的乘法计算$AB$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵做乘法时，一般希望把零矩阵或单位矩阵作为子块.

在利用分块矩阵乘法讨论**AB**时，下面的分块方式通常被使用.

设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，将右矩阵B按列分块：

$$B=(\beta_1\ \beta_1\cdots\beta_n),$$

则$AB=A(\beta_1\ \beta_1\cdots\ \beta_n)=(A\beta_1\ A\beta_1\cdots\ A\beta_n)$.

特别的, 若$AB=O$, 则$AB=(A\beta_1\ A\beta_1\cdots\ A\beta_n)=(O\ O\cdots\ O)$, 得

$$A\beta_j=O,\ j=1,2,\cdots,n.$$

即 $AB=O \longrightarrow A\beta_j=O,\ j=1,2,\cdots,n.$

$\longrightarrow$ 矩阵B的列β_j是齐次线性方程组$AX=O$的解.

4. 转置　设 $A = (A_{ij})_{r\times s}$，则A的转置矩阵$A^{\mathrm{T}} = (A_{ji}^{\mathrm{T}})_{s\times r}$.

三、分块对角矩阵

定义11　形如$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$的分块矩阵称为分块对角矩阵.

记为$A=\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 其中$A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$为方阵.

分块对角矩阵与对角矩阵有类似的的运算性质.

设$A=\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，则

性质1 $|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$

性质2 $A^k = \mathrm{diag}(A_1^k, A_2^k, \cdots, A_n^k)$

性质3 若$A_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$均可逆，则$A$可逆，

且$A^{-1} = \mathrm{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_n^{-1})$

例20 设矩阵$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$，求 $|A|$，A^{-1}和 A^2.

作业　　（第78页）

A　18, 19(1), 20(2), 22

第四节　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换起源于线性方程组的求解，在求可逆矩阵的逆矩阵、矩阵的秩、解线性方程组及矩阵理论等方面起着非常重要的作用.

一、矩阵的初等变换与矩阵的等价

定义12　以下对矩阵的三类变换称为矩阵的初等列变换：

（1）交换矩阵的两列；　$c_i \longleftrightarrow c_j$

（2）矩阵的某一列乘以不为零的数；　$c_j \times k$（$k \neq 0$）

（3）将矩阵的某一列乘以数k加到另一列上去.　$c_i + kr_j$

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

可证，矩阵的三类初等变换是可逆的，且其逆变换为同类的初等变换.

定义13 若矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，则称矩阵A与B等价，记作 $A \to B$

矩阵的等价具有以下性质：

性质1 反身性：对任意矩阵A有 $A \to A$.

性质2 对称性： 如果 $A \to B$，则 $B \to A$.

性质3 传递性： 如果 $A \to B$, $B \to C$,则 $B \to A$.

定义14 标准形矩阵：形如$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$的矩阵，其中$E_r$是$r$阶单位矩阵.

利用初等变换将一个矩阵化为标准形矩阵的步骤：

1) 首先利用初等行变换，可将任意非零矩阵化为行最简形矩阵；

2) 再用初等列变换，将行最简形矩阵化为标准形矩阵．如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二、初等矩阵

定义15 初等矩阵：由单位矩阵经过一次初等变换所得到的方阵.

三类初等变换，可得到如下三类初等矩阵.

（1）交换矩阵$E(i,j)$：交换单位矩阵的第 i 行(列)与第 j 行(列)所得到的方阵.

$$E(i,j)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \\
 & & \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \\
 & & \vdots & & 1 & \vdots & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow r_i \\ \\ \\ \rightarrow r_j \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$|E(i,j)|=-1$$

所以 $E(i,j)$ 可逆

可证 $E^{-1}(i,j)=E(i,j)$.

（2）**倍乘矩阵**$E(i(k))$：单位矩阵的第 i 行(列)乘不为零的数 k 所得到的方阵.

$$E(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & r_i & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ r_i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\left| E(i(k)) \right| = k \neq 0$$

所以 $E(i(k))$ 可逆

可证 $E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k}))$.

（3）倍加矩阵$E(i, j(k))$：将单位矩阵的第 j 行(或第 i 列)乘数 k 加到第 i 行(或第 j 列)所得到的方阵.

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & k & & \\ & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ r_i \\ \\ \\ \\ r_j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & k & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ r_j \\ \\ \\ \\ r_i \\ \\ \\ \end{array}$$

$\left|E(i,j(k))\right| = 1$，所以 $E(i,j(k))$ 可逆，可证 $E^{-1}(i,j(k)) = E(i,j(-k))$

关于初等矩阵有下列重要性质：

定理6 （1）初等矩阵都可逆，且其逆矩阵为同类的初等矩阵.

（2）设A为$m\times n$矩阵，对A作一次初等行变换，相当于在A的左边乘以一个相应的m阶初等矩阵；对A作一次初等列变换，相当于在A的右边乘以一个相应的n阶初等矩阵.

推论 $A_{m\times n}\to B_{m\times n}$（或$A$与$B$等价）$\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵P和 n 阶可逆矩阵Q，使得$B=PAQ$.

问：可逆矩阵的标准形矩阵是什么？ 答：单位矩阵

三、利用初等行变换求逆矩阵

定理7 n 阶矩阵A可逆的充分必要条件是A可表示成有限个初等矩阵的乘积，即 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ 其中P_i $(i=1,2,\cdots, s)$为初等矩阵.

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$E = P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A$$

推论 n 阶矩阵A可逆

$\Leftrightarrow$ 只用初等行(或列)变换可将A化为单位矩阵.

问：你能说出多少个A_n可逆的充要条件？

设n阶矩阵A可逆，如何利用初等行变换求A^{-1}.

A可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$，使得 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$.

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} A^{-1} &= (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, E \\ E &= (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, A \end{aligned}}$$

说明： 利用初等行变换把A化为单位矩阵E，

用同样的初等行变换可以把单位矩阵E化为A^{-1}.

求A^{-1}方法：

1) 写出$n\times 2n$矩阵 $(A_n\ \ E_n)$，

2) 利用初等行变换将矩阵 $(A_n\ \ E_n)$化为行最简形，则最简形的后n行n列元素构成的矩阵就是A^{-1}.

例22 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 利用初等行变换证明$A$可逆，并求 A^{-1}

$$E = (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, A$$
$$A^{-1} = (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, E$$

$\Rightarrow$

$$E = (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, A$$
$$A^{-1}B = (P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1})\, B$$

求$A^{-1}B$方法：

1) 写出大型矩阵 $(A\ \ B)$，

2) 利用初等行变换将矩阵 $(A\ \ B)$化为行最简形，则最简形中的前n列元素去掉后，剩下的元素构成的矩阵就是$A^{-1}B$.

例18 设矩阵X满足$X=AX+B$, 且 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&3\end{pmatrix}$, 求矩阵$X$.

利用初等行变换求解例18.

$$X=AX+B \longrightarrow (E-A)X=B$$

$$(E-A\quad B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&1\\0&1&0&2&2\\0&0&1&1&1\end{array}\right)$$

所以$E-A$可逆,

且$X=(E-A)^{-1}B$

$$=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}$$

作业　　（第79页）

A　24(2, 3), 25,

第五节　矩阵的秩

矩阵的秩反映了矩阵的内在特性，在线性代数的理论上占有非常重要的地位．它是讨论矩阵的可逆性、向量的线性表示与线性相关、线性方程组解的理论等问题的主要依据．

一、矩阵秩的定义

定义16 在$m \times n$矩阵A中，任意选取k行k列（$k \le \min\{m, n\}$）交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中原来的顺序所构成的k阶行列式称为矩阵A的k阶子式.

问：$m \times n$矩阵A中有多少个k阶子式？　答：$C_m^k C_n^k$ 个.

k阶零子式：　行列式值为零的k阶子式；

k阶非零子式：行列式值不为零的k阶子式.

定义18 矩阵A的秩：矩阵A的最高阶非零子式的阶数，记$R(A)$.

如 3×4矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 它的最高阶子式是三阶，共有四个三阶子式，且四个三阶子式全为零子式.

但有二阶非零子式，所以$R(A)=2$. ⟹ 行阶梯形矩阵的秩 = 其非零行的行数.

规定零矩阵的秩为零，即$R(O)=0$.

由定义不难得到：对于$m\times n$矩阵A，$R(A)\leqslant m$ 且 $R(A)\leqslant n$.

对n阶矩阵A，其最高阶子式是$|A|$．所以$\begin{cases} |A| \neq 0 \Longleftrightarrow R(A) = n; \\ |A| = 0 \Longleftrightarrow R(A) < n. \end{cases}$

满足$R(A_n) = n$的矩阵A称为满秩矩阵，反之称A为降秩矩阵

A_n可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow R(A) = n \Longleftrightarrow A$为满秩矩阵

A_n不可逆 $\Longleftrightarrow |A| = 0 \Longleftrightarrow R(A) < n \Longleftrightarrow A$为降秩矩阵

杭州電子科技大学

二、矩阵秩的计算 （行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数）

定理28 初等变换不改变矩阵的秩.

求矩阵A秩的方法：

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} \text{行阶梯性矩阵}B$$

则$R(A) = R(B) =$ 行阶梯形矩阵B的非零行的行数.

例25 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$的秩$R(A)$.

解 $A \to \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore \quad R(A)=2.$

例26 设矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, 试问λ为何值时，$R(A)=1$，$R(A)=2$，$R(A)=3$.

解 方法一：利用初等行变换将矩阵**A**化成行阶梯形：

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} \lambda-1\neq 0 \\ (2+\lambda)(1-\lambda)\neq 0 \end{cases} \text{时} \quad R(\boldsymbol{A})=3$$

即 $\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时 $\boldsymbol{R(A)=3}$;

$\lambda=1$时 代入行阶梯形矩阵得 $\boldsymbol{R(A)=1}$;

$\lambda=-2$时 代入行阶梯形矩阵得 $\boldsymbol{R(A)=2}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

方法二：利用 $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow R(A) = n$;

$$\because \quad |A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$\therefore \quad |A| \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时 $R(A) = 3$;

$\lambda = 1$时 代入矩阵A，再初等行变换得$R(A) = 1$;

$\lambda = -2$时代入矩阵A，再初等行变换得$R(A) = 2$.

三、矩阵秩的性质

性质1 设A为$m\times n$矩阵，则 $0\le R(A)\le \min\{m,n\}$.

性质2 $R(A^T)=R(A)$

性质3 $R(\lambda A)=\begin{cases}0, & \lambda=0,\\ R(A), & \lambda\ne 0\end{cases}$ 其中λ为常数.

但反之不然.

性质4 若$A\to B$，则$R(A)=R(B)$， 即等价矩阵有相同的秩.

性质5 设A为$m\times n$矩阵，P为m阶可逆矩阵，Q为n阶可逆矩阵，

则

$$R(PAQ)=R(PA)=R(AQ)=R(A)$$

例27 设$R(A_{4\times 3})=3$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，求$R(AB)$.

$\because$ B可逆

$\therefore R(AB)=R(A)=3$

性质6 设A为$m\times s$矩阵，B为$m\times t$矩阵，则

$$\max\{R(A),R(B)\}\le R(A\mid B)\le R(A)+R(B)$$

性质7 设A，B均为$m\times n$矩阵，则 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

性质8 设A为$m\times s$矩阵, B为$m\times t$矩阵, 则 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

性质9 设A为$m\times n$矩阵, B为$n\times t$矩阵, 且$AB=O$, 则 $R(A)+R(B)\le n$

例28　设A为n阶矩阵，满足$A^2-3A-4E=O$，证明：

$$R(A+E)+R(A-4E)=n.$$

性质10　设A为n阶$(n\geq 2)$矩阵，则 $R(A^*)=\begin{cases} n, & 若R(A)=n; \\ 1, & 若R(A)=n-1; \\ 0, & 若R(A)<n-1. \end{cases}$

思 考 题 五

4．由性质6，若将矩阵A增加列 s (或行)得到矩阵B，试问$R(A)$与$R(B)$有何关系？ $R(A) \le R(B)$

5．试问矩阵可逆的等价条件有哪些？请一一列举.

A_n可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow R(A) = n$

$\Leftrightarrow$ A为满秩矩阵

$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow$ A可表示成若干个初等矩阵之积

6．结合解线性方程组的消元法和第一章定理2，请用矩阵的秩给出m个方程n个未知量的线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$有解的条件.

$$R(A)=R(A|\beta)$$

作业　（第79页）

A　26(1, 3), 27, 28, 29, 30, 31

B　11

第六节　线性方程组解的理论

对于m 个方程n个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \quad A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$$

如果 $\beta\neq 0$，则称为非齐次线性方程组.

如果 $\beta=0$，则称为齐次线性方程组. 记为 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$

一、非齐次线性方程组解的理论

非齐次线性方程组可能有解也可能无解，在有解时可能是唯一解或无穷多解.

定理10 对于非齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$，其系数矩阵为$A$，增广矩阵为$B=(A\ \beta)$，则

（1）非齐次线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)=R(B)$；

（2）非齐次线性方程组无解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)\neq R(B)$；

（3）非齐次线性方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)=R(B)=n$；

（4）非齐次线性方程组有无穷多解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)=R(B)<n$.

n是未知量个数

推论 n个方程 n个未知量的非齐次线性方程组$A_{n\times n}X_{n\times 1}=\beta_{n\times 1}$

有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 其系数行列式$|A|\neq 0.$ （克拉默法则）

例30 求解非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0. \end{cases}$$

对增广矩阵进行行变换，先化成行阶梯形，

若有解再化成行最简形.

解：

$$B=(A\quad\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&\vdots&1\\3&-1&-3&4&\vdots&4\\1&5&-9&-8&\vdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&\vdots&1\\0&-4&6&7&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(B)=2<4$，方程组有无穷多解.

$$B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-3/2&3/4&\vdots&5/4\\0&1&-3/2&-7/4&\vdots&-1/4\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4}\end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由变量　　令 $x_3=2k_1$，$x_4=4k_2$，则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3k_1 - 3k_2 + \frac{5}{4} \\ x_2 = 3k_1 + 7k_2 - \frac{1}{4} \\ x_3 = 2k_1 \\ x_4 = 4k_2 \end{cases}$$

其中k_1,k_2为任意常数.

例31　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

解：

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 1 \\ 7 & 3 & 4 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -7 \end{pmatrix}$$

$\because R(A) = 2$

$R(B) = 3$

$\therefore$ 方程组无解.

例32 试问λ取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解.

解 方法一：对增广矩阵进行行变换化成行阶梯形：

注：先讨论何时有唯一解

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & \vdots & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

（1）方程组有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ (1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & \vdots & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

（2）$\lambda=1$时， $B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

$\because R(A)=R(B)=1<3$

$\therefore$ 方程组有无穷多解.

（3）$\lambda=-2$时，$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$

$\because R(A)=2$，$R(B)=3$

$\therefore$ 方程组无解.

方法二：先求方程组的系数行列式 $|A| = (1-\lambda)^2(2+\lambda)$

（1）当 $|A| \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，方程组有唯一解.

（2）当$\lambda=1$时，代入方程组得，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

$\because$ **$R(A)$ =$R(B)$ =1< 3** $\quad\therefore$ 方程组有无穷多解.

（3）当$\lambda=-2$时，代入方程组得，$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$

$\because$ **$R(A)$ =2，$R(B)$ =3** $\quad\therefore$ 方程组无解.

二、齐次线性方程组解的理论

首先齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$至少有一个零解（即$X=0$），因此我们只需讨论它何时只有零解，何时有非零解.

定理9 齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)<n$.

只有零解 $\Longleftrightarrow$ $R(A)=n$.

推论1 当 $m<n$ 时，齐次线性方程组必有非零解.

推论2 当 $m=n$ 时，齐次线性方程组有非零解

$\Longleftrightarrow$ 其系数行列式 $|A|=0$.

例29 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

对系数矩阵进行行变换化成行最简形

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1-2x_3-\frac{5}{3}x_4=0, \\ x_2+2x_3+\frac{4}{3}x_4=0. \end{cases}$$

因为$R(A)=2<4$，所以方程组有非零解，方程组相当于：

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4. \end{cases}$$

取x_3, x_4为自由变量.

令$x_3=k_1$, $x_4=3k_2$,

则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2k_1 + 5k_2, \\ x_2 = -2k_1 - 4k_2, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = 3k_2. \end{cases}$$

其中k_1, k_2为任意常数.

思 考 题 五

2. 对于齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$，下列结论是否正确：

（1）当$m=n$时，方程组只有零解.

（2）当$m<n$时，方程组有非零解.

3. 对于非齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$，下列结论是否正确：

（1）当$m=n$时，方程组有唯一解.

（2）当$m<n$时，方程组有无穷多解.

（3）当$m>n$时，方程组无解.

非齐次线性方程组解的情况，与方程个数和未知量个数无关.

作业 （第80页）

A 32(1, 3, 5), 33(1), 34

B 9

杭州電子科技大学