(二) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅱ)

试　　题

一、填空、选择题

1. 函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在点(1,2)处的全微分是________.

2. 曲面 $\dfrac{x^2+y^2}{2}-z^2=1$ 在点 $M(1,1,0)$处的切平面方程是________.

3. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+x\ln y$，则 $\mathbf{grad}\, f(1,2)=$________.

4. 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，则由积分中值定理，在 D 上至少存在一点(ξ,η)，使________.

5. 将二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分次序，得 $I=$________.

6. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则$\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

7. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 连续、偏导数存在.　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

8. 根据判定极值的充分条件，函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 不取得极值.　　(D) 不能判定是否取得极值.

9. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$________.

(A) $f(2)$.　　(B) $2f(2)$.　　(C) $-f(2)$.　　(D) 0.

二、设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三、设有螺旋线 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=\frac{4}{\pi}t$.

(1) 求出螺旋线上点 $M(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$ 处的指向朝下的单位切向量 e_τ;

(2) 求出螺旋线上点 M 处的切线方程;

(3) 求函数 $u=x+2y+3z$ 在点 M 处沿方向 e_τ 的方向导数.

四、设闭曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$,其中 $F(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数且三个偏导数不同时为零. 点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 为 Σ 外一点. 若点 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 为 Σ 上离开点 P 最近的一点,试用拉格朗日乘子法证明:直线 PQ 为曲面 Σ 在点 Q 处的法线.

五、计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2y^3+e^{x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为由直线 $y=x, y=-x$ 和 $x=1$ 所围成的闭区域.

六、计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 为由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

七、求过点 $M(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

参考答案

一、1. $\mathrm{d}z|_{(1,2)}=\left[\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y\right]\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$

2. 法向量为 $(x,y,-2z)|_{(1,1,0)}=(1,1,0)$,因此所求切平面方程为

$$x+y-2=0.$$

3. $\mathbf{grad}\, f(1,2)=(f_x(1,2),f_y(1,2))=\left(2e^2+\ln 2, e^2+\frac{1}{2}\right)$.

4. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$,其中 σ 为区域 D 的面积.

5. $I=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

6. 因为 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,所以

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{5}{24}\pi R^4.$$

7. 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在. 又

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

故选(C).

8. 因为

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,f_{xx}(0,0)=4,f_{xy}(0,0)=-1,f_{yy}(0,0)=6,$$

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=25>0,$$

故选(B).

9. 当 $t>1$ 时,

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t(x-1)f(x)dx,$$

因此 $F'(2)=(t-1)f(t)|_{t=2}=f(2)$. 故选(A).

二、$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(xf_1'+\frac{1}{x}f_2')$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)+x^2\left(xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''.$$

三、(1) 曲线在其上任意点处的切向量为 $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=(-2\sin t,2\cos t,\frac{4}{\pi})$,因此曲线在 M 点指向朝下的切向量为

$$\tau=-\left(-2\sin t,2\cos t,\frac{4}{\pi}\right)\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\frac{4}{\pi}\right),$$

其单位向量为 $e_\tau=\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}}(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\frac{4}{\pi})$.

(2) 螺旋线上点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{z-1}{-\frac{4}{\pi}}.$$

(3) $\nabla u|_M=(1,2,3)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}\bigg|_M=\nabla u\cdot e_\tau=-\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}}\left(\sqrt{2}+\frac{12}{\pi}\right).$$

四、任意一点 (x,y,z) 到 P 的距离平方为 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$,因此 Σ 上离开点 P 最近的一点,相当于 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$ 在条件 $F(x,y,z)=0$ 下的条件极小值,为此令

$$L=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+\lambda F(x,y,z),$$

该函数的驻点满足

$$\begin{cases}2(x-x_1)+\lambda F_x=0,\\2(y-y_1)+\lambda F_y=0,\\2(z-z_1)+\lambda F_z=0,\\F(x,y,z)=0.\end{cases}$$

由条件知 $Q(x_2,y_2,z_2)$必是该方程组的解,代入$x=x_2,y=y_2,z=z_2$ 后消去λ,得

$$\frac{x_2-x_1}{F_x(x_2,y_2,z_2)}=\frac{y_2-y_1}{F_y(x_2,y_2,z_2)}=\frac{z_2-z_1}{F_z(x_2,y_2,z_2)},$$

即

$$\overrightarrow{PQ}//\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)|_Q$$

因此,直线 PQ 是曲面的法线.

五、由于函数 x^2y^3 是 y 的奇函数,积分区域关于 x 轴对称,因此

$$\iint_D x^2y^3\mathrm{d}\sigma=0,$$

故

$$\iint_D(x^2y^3+\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1.$$

六、$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{z^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_z^{2z}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{15}{2}\pi\int_0^1 z^4\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\pi.$$

七、解法一 过点 M 且平行已知平面的平面方程为

$$3(x+1)-4y+z-4=0;$$

取已知直线上一点 $N(-1,3,0)$,则

$$\overrightarrow{MN}=(0,3,-4),\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{MN}\times\boldsymbol{s}=(10,-4,-3),$$

因此,过 M 与已知直线的平面方程为

$$10(x+1)-4y-3(z-4)=0.$$

故,所求直线的方程为

$$\begin{cases}3x-4y+z-1=0,\\10x-4y-3z+22=0.\end{cases}$$

解法二 取已知直线上一点 $N(t-1,t+3,2t)$,则

$$\overrightarrow{MN}=(t,t+3,2t-4),$$

令$\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$,得 $t=16$,故

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{MN}=(16,19,28),$$

所求直线为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$