

一、矩阵的基本运算

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $A + (-A) = O \quad A - B = A + (-B)$

4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

6. $kA = O \Leftrightarrow k = 0$ 或 $A = O$

7. $(A^T)^T = A \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \quad (kA)^T = k(A^T) \quad (AB)^T = B^T A^T$

转置行列式不变 $|A^T| = |A| \quad$ 逆值变 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad |\lambda A| = \lambda^n |A|$

8. $|\alpha, \beta_1 + \beta_2, \gamma| = |\alpha, \beta_1, \gamma| + |\alpha, \beta_2, \gamma|$

9. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad 3 \text{ 阶矩阵}$

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) \quad |A + B| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$$

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

10. $|E(i, j(c))| = 1$

二、有关矩阵乘法的基本运算

$C = AB$, 即 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

1. 线性性质 $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B \quad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

2. 结合律 $(AB)C = A(BC)$

3. $(AB)^T = B^T A^T$

4. $|AB| = |A| |B|$

5. $A^k A^l = A^{k+l} \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (AB)^k = A^k B^k \text{ 不一定成立!}$

$$6. AE = A, EA = A, A(kE) = kA, (kE)A = kA, AB = E \Leftrightarrow BA = E$$

与数的乘法的不同之处: $(AB)^k = A^k B^k$ 不一定成立!

7. 无交换律

因式分解的障碍是交换性, 一个矩阵 A 的每个多项式可以因式分解, 例如

$$A^2 - 2A - 3E = (A - 3E)(A + E)$$

8. 无消去律 (矩阵和矩阵相乘)

由 $AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$

由 $A \neq O$ 和 $AB = O \Rightarrow B = O$

由 $A \neq O$ 时 $AB = AC \Rightarrow B = C$ (无左消去律)

特别地, 设 A 可逆, 则 A 有消去律.

左消去律: $AB = AC \Rightarrow B = C$

右消去律: $BA = CA \Rightarrow B = C$

如果 A 列满秩, 则 A 有左消去律, 即① $AB = 0 \Rightarrow B = 0$; ② $AB = AC \Rightarrow B = C$

三、可逆矩阵的性质

1. 当 A 可逆时,

$$(1) A^T \text{ 也可逆, 且 } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

$$(2) A^k \text{ 也可逆, 且 } (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k;$$

$$(3) \text{数 } \lambda \neq 0, \lambda A \text{ 也可逆, } (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

2. 若 A, B 是两个 n 阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

推论: 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 则 $AB = E \Leftrightarrow BA = E$

3. 命题: 初等矩阵都可逆, 且 $(E(i, j))^{-1} = E(i, j)$; $(E(i(c)))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)$;

$$(E(i, j(c)))^{-1} = E(i, j(-c)).$$

4. 命题: 准对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{pmatrix}$ 可逆 \Leftrightarrow 每个 A_{ii} 都可逆, 记

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk}^{-1} \end{pmatrix}.$$

5. A 是 n 阶可逆矩阵:

- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ (是非奇异矩阵);
 $\Leftrightarrow R(A) = n$ (是满秩矩阵)
 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性无关;
 \Leftrightarrow 齐次方程组 $Ax = 0$ 没有非零解;
 $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbf{R}^n, Ax = b$ 总有唯一解;
 $\Leftrightarrow A$ 与 E 等价;
 $\Leftrightarrow A$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积;
 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全不为 0;
 $\Leftrightarrow A^T A$ 是正定矩阵;
 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组是 \mathbf{R}^n 的一组基;
 $\Leftrightarrow A$ 是 \mathbf{R}^n 中某两组基的过渡矩阵.

6. 逆矩阵的求法

$$\textcircled{1} A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$\textcircled{2} (A:E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:A^{-1})$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \ddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \ddots & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{5} \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \ddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

四、伴随矩阵的基本性质:

$$1. AA^* = A^*A = |A|E$$

$$2. \text{当 } A \text{ 可逆时, } A \frac{A^*}{|A|} = E, \text{ 得 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \text{ (求逆矩阵的伴随矩阵法)}$$

$$\text{且得: } \boxed{(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = (A^{-1})^*} \quad \left((A^{-1})^* = |A^{-1}| (A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|} \right)$$

3.伴随矩阵的其他性质

$$(1) |A^*| = |A|^{n-1}, \quad A^* = |A| A^{-1}$$

$$(2) (A^T)^* = (A^*)^T,$$

$$(3) (cA)^* = c^{n-1} A^*,$$

$$(4) (AB)^* = B^* A^*,$$

$$(5) (A^k)^* = (A^*)^k,$$

$$(6) (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad n=2 \text{ 时}, (A^*)^* = A, A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$(7) \text{伴随矩阵的特征值: } \frac{|A|}{\lambda} (AX = \lambda X, A^* = |A| A^{-1} \Rightarrow A^* X = \frac{|A|}{\lambda} X).$$

4.关于矩阵右上肩记号: T, k, -1, *

(1)任何两个的次序可交换,

$$\text{如 } (A^T)^* = (A^*)^T, (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

$$(2) (AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (AB)^* = B^* A^*$$

$$\boxed{\text{但 } (AB)^k = B^k A^k \text{ 不一定成立!}}$$

五、线性表示

全课程的理论基础: 线性表示 → 线性相关性 → 极大无关组和秩 → 矩阵的秩

$$1. (1) 0 \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(2) \alpha_i \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$(3) \beta \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \Leftrightarrow x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = \beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) x = \beta \text{ 有解 } \left(x = (x_1, \dots, x_s)^T \right)$$

$Ax = \beta$ 有解, 即 β 可用 A 的列向量组表示

$$(4) AB = C = (r_1, r_2, \dots, r_s), \quad A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \text{ 则 } r_1, r_2, \dots, r_s \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

$$(5) \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \text{ 则存在矩阵 } C, \text{ 使得}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) C$$

2.线性表示关系有传递性

当 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rightarrow r_1, r_2, \dots, r_p$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \rightarrow r_1, r_2, \dots, r_p$.

3. 等价关系: 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 互相可表示

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rightleftarrows \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 记作 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \cong \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$.

4.线性相关

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有向量可以用其它的 $s-1$ 个向量线性表示, 就说 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每个向量都不可以用其它的 $s-1$ 个向量线性表示, 就说 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

(1) $s=1$, 单个向量 $\alpha, x\alpha=0, \alpha$ 相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$

(2) $s=2, \alpha_1, \alpha_2$ 相关 \Leftrightarrow 对应分量成比例

即 α_1, α_2 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\dots=a_n:b_n$

(3) 向量个数 s = 维数 n , 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相(无)关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \dots, \alpha_n| = (\neq) 0$

① $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

② 如果 $s > n$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 一定相关, $Ax=0$ 的方程个数 $n <$ 未知数个数 s

③ 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 无关, 则它的每一个部分组都无关

④ 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 相关, 则 $\beta \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

⑤ 当 $\beta \rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 时, 表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1 \dots \alpha_s$ 无关 (表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1 \dots \alpha_s$ 相关)

⑥ 若 $\beta_1, \dots, \beta_t \rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_s$, 并且 $t > s$, 则 β_1, \dots, β_t 一定线性相关

⑦ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ “线性相关还是无关”就是向量方程 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = 0$ “有非零解”.

5.各性质的逆否形式

(1) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 无关, 则 $s \leq n$

(2) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 有相关的部分组, 则它自己一定也相关

(3)如果 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 无关, 而 $\beta \rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 无关

(4)如果 $\beta_1 \cdots \beta_t \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_s$, $\beta_1 \cdots \beta_t$ 无关, 则 $t \leq s$

推论: 若两个无关向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 等价, 则 $s = t$

6.极大无关组

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维向量组, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是它的一个部分组. 如果

① $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, ② $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 再扩大就线性相关.

批注 [微软用户1]: 比课本通俗, 易懂

就称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**最大无关组**. 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中所包含向量的个

数为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩. 记作 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

(2)① $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 无关 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s$

② $\beta \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$

另一种说法: 取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**最大无关组**(*),

(*)也是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 的**最大无关组** $\Leftrightarrow (*)$, β 相关.

③ β 可用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 唯一表示 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = s$

④ $\beta_1, \cdots, \beta_t \rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_s \Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$

$\Rightarrow R(\beta_1, \cdots, \beta_t) \leq R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$

⑤ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \cong \beta_1, \cdots, \beta_t \Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = R(\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta_1 \cdots \beta_t) = R(\beta_1, \cdots, \beta_t)$

(3)矩阵与向量组的对比

矩阵的秩 如果矩阵 A 存在不为零的 r 阶子式, 且任意 $r+1$ 阶子式均为零, 则称矩阵 A

的秩为 r . 记作 $R(A) = r$

向量组的秩 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的最大无关组所含向量的个数, 称为这个向量组的秩.

记作 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

矩阵等价 A 经过有限次初等变换化为 B . 记作: $A \cong B$

向量组等价 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可以相互线性表示. 记作

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cong (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

7. 矩阵的秩的简单性质

(1) ① A 行满秩: $R(A) = m$, A 列满秩: $R(A) = n$

$$\textcircled{2} 0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}, \quad R(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

③ n 阶矩阵 A 满秩: $R(A) = n$

A 满秩 $\Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组线性无关

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 可逆}$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解, } Ax = \beta \text{ 唯一解}$$

$$(2) R(A^T) = R(A)$$

$$(3) c \neq 0 \text{ 时, } R(cA) = R(A)$$

$$(4) \text{若 } A \cong B, \text{ 则 } R(A) = R(B)$$

$$(5) \text{若 } P、Q \text{ 可逆, 则 } R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) \text{ (可逆矩阵不影响矩阵的秩)}$$

$$(6) \max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$$

$$(7) R(A + B) \leq R(A) + R(B)$$

$$(8) R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}, \quad R(kA) = \begin{cases} R(A) & \text{若 } k \neq 0 \\ 0 & \text{若 } k = 0 \end{cases}$$

(9) 如果 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = 0$, 则:

① B 的列向量全部是齐次方程组 $Ax = 0$ 解 (转置运算后的结论);

$$\textcircled{2} R(A) + R(B) \leq n$$

(10) 若 $A、B$ 均为 n 阶方阵, 则 $R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$;

(11) 若 A 可逆, 则 $R(AB) = R(B)$, 若 B 可逆, 则 $R(AB) = R(A)$

$$(12) R \begin{bmatrix} A & o \\ o & B \end{bmatrix} = R(A) + R(B)$$

六、线性方程组

1. 解的性质

- (1) η_1, η_2 是 $Ax=0$ 的解, $\eta_1 + \eta_2$ 也是它的解
 (2) η 是 $Ax=0$ 的解, 对任意 $k, k\eta$ 也是它的解
 (3) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 是 $Ax=0$ 的解, 对任意 k 个常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k$ 也是它的解
- } 齐次方程组

- (4) γ 是 $Ax = \beta$ 的解, η 是其对应的其次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, $\gamma + \eta$ 是 $Ax = \beta$ 的解
 (5) η_1, η_2 是 $Ax = \beta$ 的两个解, $\eta_1 - \eta_2$ 是其对应的其次线性方程组 $Ax = 0$ 的解
 (6) η_2 是 $Ax = \beta$ 的解, 则 η_1 也是它的解 $\Leftrightarrow \eta_1 - \eta_2$ 是其对应的其次线性方程组 $Ax = 0$ 的解
 (7) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ 是 $Ax = \beta$ 的解, 则
 $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k$ 也是 $Ax = \beta$ 的解 $\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$
 $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k$ 是 $Ax = 0$ 的解 $\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0$

2. 解的情况判别

方程: $Ax = \beta$, 即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$,

$$\boxed{\text{有解}} \Leftrightarrow \beta \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow R(A|\beta) = R(A) \Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\boxed{\text{无解}} \Leftrightarrow R(A|\beta) > R(A)$$

$$\boxed{\text{唯一解}} \Leftrightarrow R(A|\beta) = R(A) = n$$

$$\boxed{\text{无穷多解}} \Leftrightarrow R(A|\beta) = R(A) < n$$

3. 对于方程个数 m 有 $R(A|\beta) \leq m, R(A) \leq m$,

① 当 $R(A) = m$ 时, $R(A|\beta) = m$, 方程组一定有解

② 当 $m < n$ 时, $R(A) < n$, 方程组不会是唯一解

4. 对于齐次线性方程组 $Ax = 0$,

只有零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$ (即 A 列满秩)

有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$

5. 矩阵方程的解法 ($|A| \neq 0$): 设法化成 (I) $AX = B$ 或 (II) $XA = B$,

(I) 的解法: 构造 $(A|\beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|X)$

(II) 的解法: 将等式两边转置化为 $A^T X^T = B^T$, 用 (I) 的方法求出 X^T , 再转置得 X

七、特征值、特征向量

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是 A 的特征多项式 $|xE - A|$ 的根.

1. 两种特殊情形:

(1) A 是上(下)三角矩阵, 对角矩阵时, 特征值即对角线上的元素.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x - \lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x - \lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x - \lambda_3 \end{vmatrix} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

(2) $R(A)=1$ 时: A 的特征值为 $0, 0, \dots, 0, \text{tr}(A)$

2. 特征值的性质

(1) 命题: n 阶矩阵 A 的特征值 λ 的重数 $\geq n - r(\lambda E - A)$

(2) 命题: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$\textcircled{1} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$$

$$\textcircled{2} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr}(A)$$

(3) 命题: 设 η 是 A 的特征向量, 特征值为 λ , 即 $A\eta = \lambda\eta$, 则

① 对于 A 的每个多项式 $f(A)$, $f(A)\eta = f(\lambda)\eta$

② 当 A 可逆时, $A^{-1}\eta = \frac{1}{\lambda}\eta$, $A^*\eta = \frac{|A|}{\lambda}\eta$

(4) 命题: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(x)$ 是多项式则

① $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$

② A 可逆时, A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$

A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \dots, \frac{|A|}{\lambda_n}$

③ A^T 的特征值也是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$(5) \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 则: } \begin{cases} kA & k\lambda \\ aA+bE & a\lambda+b \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases} \text{ 分别有特征值}$$

$$(6) x \text{ 是 } A \text{ 关于 } \lambda \text{ 的特征向量, 则 } x \text{ 也是 } \begin{cases} kA & k\lambda \\ aA+bE & a\lambda+b \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} \end{cases} \text{ 关于 } \begin{matrix} \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^2 \\ \lambda^m \\ \frac{|A|}{\lambda} \end{matrix} \text{ 的特征向量.}$$

3. 计算特征值和特征向量的一般公式

① λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow (A - \lambda E)\eta = 0$, 即 $(A - \lambda E)$ 不可逆.

② η 是属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow \eta$ 是齐次方程组 $(A - \lambda E)x = 0$ 的非零解

规定 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A|$, 则 A 的特征值就是它的特征多项式的根.

4. 计算特征值和特征向量的具体步骤为:

计算 A 的特征多项式.

求出它的根, 即 A 的特征值.

然后对每个特征值 λ_i , 求齐次方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的非零解, 即属于 λ 的特征向量.

说明 n 阶矩阵的特征多项式是一个 n 次多项式, 一般来说求它的根是困难的, 因此上述计算步骤并不总是可行的, 只能用在少数特殊矩阵上. 例如用于对角矩阵和三角矩阵, 得出它们的特征值就是对角线上的元素.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ 则 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & -* & -* \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_3 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

n 阶矩阵 A 的特征值共有 n 个 (其中有的相同, 有的是虚数) 规定特征值 λ 的重数:

即 λ 作为特征多项式的根的重数. A 的全体不同特征值的重数和等于 n .

λ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |A - \lambda E| \neq 0 \Leftrightarrow A - \lambda E$ 可逆. 0 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow A$ 可逆.

5. 特征值的计算

设 A 是 n 阶矩阵, 记 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 则

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

$$\text{令 } \lambda = 0, \text{左} = |-A| = (-1)^n |A|, \text{右} = (-1)^n |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n|.$$

比较两边 λ^{n-1} 的系数.

命题 2 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的特征值, 则它的重数 $\geq n - R(A - \lambda E)$.

应用: 如果 n 阶矩阵 A 的秩 $R(A)=1, (n>1)$ 则 0 是 A 的特征值, 并且重数 $\geq n - R(A) = n - 1$. 于是 A 的特征值为 $0, 0, \dots, 0, t \neq 0$.

6. 特征值的应用

① 求行列式 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

② 判别可逆性

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值} \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow A - \lambda E \text{ 不可逆}$$

$$A - \lambda E \text{ 可逆} \Leftrightarrow \lambda \text{ 不是 } A \text{ 的特征值}$$

$$\text{当 } f(A) = 0 \text{ 时, 如果 } f(c) \neq 0, \text{ 则 } A - cE \text{ 可逆}$$

$$\text{若 } \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 则 } f(\lambda) \text{ 是 } f(A) \text{ 的特征值} \Rightarrow f(\lambda) = 0$$

$$f(c) \neq 0 \Rightarrow c \text{ 不是 } A \text{ 的特征值} \Leftrightarrow A - cE \text{ 可逆.}$$

八、 n 阶矩阵的相似关系

$$\text{当 } AU = UA \text{ 时, } B = A, \text{ 而 } AU \neq UA \text{ 时, } B \neq A.$$

1. 相似关系有 i) **对称性**: $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

ii) **有传递性**: $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$

2. 命题 当 $A \sim B$ 时, A 和 B 有许多相同的性质

$$\textcircled{1} |A| = |B|$$

$$\textcircled{2} R(A) = R(B)$$

③ A, B 的特征多项式相同, 从而特征值完全一致

$$\textcircled{4} A \text{ 与 } B \text{ 的特征向量的关系: } \eta \text{ 是 } A \text{ 的属于 } \lambda \text{ 的特征向量} \Leftrightarrow U^{-1}\eta \text{ 是 } B \text{ 的属于 } \lambda$$

的特征向量.

九、 n 阶矩阵的对角化问题

1. 如果一个 n 阶矩阵相似与一个对角矩阵, 就说它可以**对角化**.

并不是每个矩阵都可以对角化的.

2. 判别法则 1 n 阶矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

实现方法 1 以 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为列向量, 构造矩阵

$P=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 则 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

判别法则 2 A 可对角化 \Leftrightarrow 对于 A 的每个特征值 λ_i , 其重数 $k_i = n - r(A - \lambda_i E)$.

实现方法 2 对 A 的每个特征值 λ_i , 求 $(A - \lambda_i E)X=0$ 的基础解系, 合在一起, 就是 A 的 n 个线性无关的特征向量. 用它们构造矩阵 P .

注意: 当 $k_i=1$ 时, $k_i=n-r(A-\lambda_i E)$ 一定成立!

推论 如果 A 的特征值两两不相同, 则 A 可以对角化.

3. 内积, 正交矩阵和实对称矩阵的对角化

内积的性质:

正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 并且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. $(\alpha, \alpha) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$.

对称性: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.

线性性质: $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$; $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$.

$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$. (c 为任意实数)

正交矩阵

n 阶矩阵 A 称为正交矩阵, 如果它是实矩阵, 并且 $AA^T = E$ (即 $A^{-1} = A^T$).

Q 是正交矩阵 $\Leftrightarrow Q$ 的列向量组是单位正交向量组 $\Leftrightarrow Q$ 的行向量组是单位正交向量组.

正交矩阵的性质: (i) $A^T = A^{-1}$; (ii) $AA^T = A^T A = E$;

(iii) A 是正交阵, 则 A^T (或 A^{-1}) 也是正交阵;

(iv) 两个正交阵之积仍是正交阵; (v) 正交阵的行列式等于 1 或 -1.

施密特正交化

这是把线性无关向量组改造为单位正交向量组的方法.

以 3 个线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为例.

() 令 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$.

此时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交非零向量组.

() 单位化: 作 $\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$, $\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$, $\eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$, 则 η_1, η_2, η_3 是和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等

价的单位正交向量组.

实对称矩阵的对角化

如果 A 是实对称矩阵, A 的特征值和特征向量有以下特点:

- ①特征值都是实数.
- ②对每个特征值 λ ,其重数= $n-r(A-\lambda E)$.即实对称矩阵可对角化,
- ③属于不同特征值的特征向量互相正交.

可以用正交矩阵将实对称矩阵 A 对角化, 构造正交矩阵 Q (使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵)的步骤:

- ①求出 A 的特征值;
- ②对每个特征值 λ , 求 $(A-\lambda E)X=0$ 的单位正交基础解系, 合在一起得到 A 的 n 个单位正交的特征向量;
- ③用它们为列向量构造正交矩阵 Q .

十、正定二次型与正定矩阵性质与判别

1.可逆线性变换替换保持正定性, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变为 $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则它们同时正定或同时不正定.

2. $A \simeq B$, 则 A, B 同时正定, 同时不正定.

3.实对称矩阵 A 正定

\Leftrightarrow 正惯性指数为 n ;

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0 ;

$\Leftrightarrow A$ 的所有顺序主子式全大于 0 ;

$\Leftrightarrow A$ 合同于 E , 即存在可逆矩阵 Q 使 $Q^T A Q = E$;

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 P , 使 $A = P^T P$ (从而 $|A| > 0$);

\Leftrightarrow 存在正交矩阵, 使 $C^T A C = C^{-1} A C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (λ_i 大于 0).

\Rightarrow 成为正定矩阵的必要条件: $a_{ii} > 0$; $|A| > 0$.

4.判断 A 正定的三种方法:

- ①顺序主子式法。
- ②特征值法。
- ③定义法。

5.用正交变换法化二次型为标准形:

- ① 求出 A 的特征值、特征向量;

② 对 n 个特征向量单位化、正交化；

③ 构造 C （正交矩阵）， $C^{-1}AC = \Lambda$ ；

④ 作变换 $X = CY$ ，新的二次型为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n d_i y_i^2$ ， Λ 的主对角上的元

素 d_i 即为 A 的特征值.