五. Cramer 法则

引入行列式概念时，求解二、三元线性方程组，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解， $x_i = \dfrac{D_i}{D} \quad (i = 1,2,3)$

含有n个未知数，n个方程的线性方程组，与二、三元线性方程组类似，它的解也可以用n阶行列式表示。

Cramer法则：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，

即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ 则线性方程组(1)有唯一解，

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 用D中第j列元素的代数余子式$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$依次乘方程组$(1)$的$n$个方程,得

$$\begin{cases} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)A_{1j} = b_1 A_{1j} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)A_{2j} = b_2 A_{2j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)A_{nj} = b_n A_{nj} \end{cases}$$

再把 n 方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj},$$

由代数余子式的性质可知，上式中除了x_j 的系数等于D，其余 $x_i(i \neq j)$ 的系数均等于0，而等式右端为 D_j

于是 $$Dx_j = D_j\left(j = 1,2,\cdots,n\right) \qquad (2)$$

当 $D \neq 0$ 时，方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

由于方程组(2)与方程组(1)等价，所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解。(这个证明目前看来并不严格)。

例1： 用Cramer法则解线性方程组。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{81}{27} = 3,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = 1.$

注:

1. Cramer法则仅适用于方程个数与未知量个数相等的情形。

2. 理论意义：给出了解与系数的明显关系。
但用此法则求解线性方程组计算量大，不可取。

3. 撤开求解公式 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$，Cramer法则可叙述为下面定理：

定理1:

如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$

则(1)一定有解，且解是唯一的 .

推论:

如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，
则它的系数行列式必为零.

非齐次与齐次线性方程组的概念：

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零,

则称此方程组为非齐次线性方程组。

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零,

此时称方程组为齐次线性方程组。

齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

易知， $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是(2)的解，称为零解。

若有一组不全为零的数是(2)的解，称为非零解。

推论：

如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组没有非零解。

推论：

如果齐次线性方程组有非零解，
则它的系数行列式必为0。

实际上还有 $D = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$ 有非零解.

例2： 已知三次曲线 $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

在四个点 $x=\pm1, x=\pm2$ 处的值为

$f(1)=f(-1)=f(2)=6, f(-2)=-6$

试求系数 a_0, a_1, a_2, a_3.

$f(x)=8-x-2x^2+x^3$

解：
$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=6 \\ a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2+a_3(-1)^3=6 \\ a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3=6 \\ a_0+a_1(-2)+a_2(-2)^2+a_3(-2)^3=-6 \end{cases}$$

若用Cramer法则求此方程组的解，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix}$$

（考虑范德蒙行列式）

$$\underline{\underline{D=D^T}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1^2 & (-1)^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1^3 & (-1)^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix}=\prod_{4\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

$$=(-1-1)(2-1)(-2-1)(2+1)(-2+1)(-2-2)$$

$$=72$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ -6 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 576 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -72$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -144 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 72$$

$$\therefore a_0 = \frac{D_1}{D} = \frac{576}{72} = 8 \qquad a_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{-72}{72} = -1$$

$$a_2 = \frac{D_3}{D} = \frac{-144}{72} = -2 \qquad a_3 = \frac{D_4}{D} = \frac{72}{72} = 1$$