杭州電子科技大學

第六章 实二次型

第一节　实二次型及其标准型

第二节　化实二次型为标准型

第三节　正定二次型

第一节　实二次型及其标准型

一、二次型的概念　　二次多项式

定义1　n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (6.2)$$

称为关于变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的n元二次型，若$a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots, n)$为实数，则（6.2）称为实二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}$， 有 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$ 于是(6. 2)可表示成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (6.3)$$

二次型的矩阵

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 则实二次型可表示为

对称矩阵

二次型 f 的矩阵形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=X^{\mathrm{T}}AX \qquad (6.4)$$

一一对应

实二次型 $\longleftrightarrow$ 实对称矩阵

因此，把实对称矩阵A的秩称为**二次型的秩**.

例1 写出二次型 $f = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2$ 的矩阵及矩阵表示式，并求该二次型的秩.

定义2 二次型的标准形： 只含有完全平方项的二次型，如

$$f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$$

规范形： 形如 $f = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2$ 的二次型.

问：标准型的矩阵是什么矩阵？ **对角矩阵**

思 考 题 一

1．对于矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}$，有

$$f=X^TAX=X^TBX=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+6x_2x_3$$

试问二次型的矩阵是A还是矩阵B？为什么？

是A，　因为二次型矩阵是对称矩阵

第二节　化实二次型为标准型

通常将二次型转化为标准型的方法有配方法、正交变换法和初等变换法，本节我们着重讲述前两种方法.

一、线性变换

变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与$y_1, y_2, \cdots, y_n$变量的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1m}y_m, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2m}y_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nm}y_m, \end{cases} \Longleftrightarrow X = CY \qquad (6.6)$$

称为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的线性变换，其中c_{ij}是实数.

其中

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad X=CY$$

若为C可逆矩阵，则(6.6)称为可逆线性变换(或非退化的线性变换).

若为C正交矩阵，则(6.6)称为正交变换.

$$f=X^{\mathrm{T}}\underline{A}X \overset{X=CY}{=\!=\!=} Y^{\mathrm{T}}(\underline{C^{\mathrm{T}}AC})Y$$

其中$C^{\mathrm{T}}AC$为对称矩阵

$\boxed{\text{原二次型的矩阵}}$ $\boxed{\text{新二次型的矩阵}}$

线性变换把二次型化为二次型

二、用配方法化二次型为标准形

1、二次型中含有完全平方项情形

例2 化二次型 $f = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，

解： $f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4(x_2^2 + x_2x_3) + 3x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + 4x_3^2$$

可逆线性变换

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3y_3/2 \\ x_2 = y_2 - y_3/2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 得标准形为：

$$f = y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$$

2、二次型中不含有完全平方项情形

例3 化二次型 $f=x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形，

解： 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$

代入二次型，再配方得

$$f=y_1^2+3y_1y_3-y_2^2-y_2y_3$$

$$=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-y_2^2-y_2y_3-\frac{9}{4}y_3^2$$

$$=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-(y_2+\frac{1}{2}y_3)^2-2y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+3y_3/2 \\ z_2=y_2+y_3/2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

得标准型为：$f=z_1^2-z_2^2-2z_3^2$

所用的可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - 2z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$

注：最后所用的可逆线性变换必须是：
变换前的未知量用变换后的未知量表示

三、用正交变换法化二次型为标准形

对实二次型 $f = X^{T}AX$，作正交变换 $X = QY$， 得

$$f = X^{T}\underbrace{A}_{\text{实对称矩阵}}X \xrightarrow{X = \underbrace{Q}_{\text{为正交矩阵}}Y} (QY)^{T}A(QY) = Y^{T}\underbrace{(Q^{T}AQ)}_{\text{为对角矩阵}}Y$$ 为标准型

对 n 阶实对称矩阵**A** → 找一个正交矩阵**Q** → $Q^{T}AQ$为对角矩阵

这就是前面讲的实对称矩阵对角化的问题， 对应到这儿就是利用正交变换化二次型为标准型.

定理1　对任意n元实二次型 $f = X^{T}AX$，总存在正交变换 $X = QY$，将二次型化为标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **是实二次型** f **的矩阵A的n特征值.**

利用正交变换$X = QY$，化二次型 f为标准型的步骤：

1. 写出二次型 f的矩阵A；（A为实对称矩阵）
2. 对实对称矩阵A，求出正交矩阵Q与对角阵Λ，使得$Q^{-1}AQ = \Lambda$；
3. 二次型 f 通过正交变换 $X = QY$，得标准形为

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

例4 求一个正交变换$X = QY$，把二次型 $f = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 化为标准形.

解: (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda)(6-\lambda)$

$\Rightarrow$ **A的特征值:** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 6$

当 λ_1=0时，解齐次线性方程组 $(A-0E)X = 0$，得基础解系

$\xi_1 = (5, -1, 2)^T$ 单位化得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2)^T$

当 $\lambda_2=5$时，解齐次线性方程组 $(A-5E)X=0$ ，得基础解系

$$\xi_2=(0,2,1)^T \qquad \text{单位化得} \qquad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)^T$$

当 $\lambda_3=6$时，解齐次线性方程组 $(A-6E)X=0$，得基础解系

$$\xi_3=(1,1,-2)^T \qquad \text{单位化得} \qquad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$$

(3)

令正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

二次型经过正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得标准形为 $f=5y_2^2+6y_3^2$

第三节　正定二次型

定理2（惯性定理） 设实二次型 $f = X^{T}AX$ 的秩为 r, 若有可逆变换 $X=CY$ 及 $X=PZ$, 使得二次型的标准型分别为

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad k_i \neq 0, i = 1, \cdots, r$$

和

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad \lambda_i \neq 0, i = 1, \cdots, r$$

则 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 中正数的个数相等，负数个数也相等. 其中正数的个数称为**正惯性指数**,记为 p, 其中负数的个数称为**负惯性指数**，记为 q，且有 $p+q=r$.

定义4 对实二次型 $f = X^TAX$，如果对任何 $X \neq 0$，都有 $f > 0$，则称二次型为正定二次型，正定二次型的矩阵称为正定矩阵.

反之，如果对任何 $X \neq 0$，都有 $f < 0$，则称二次型为负定二次型.

负定二次型的矩阵称为负定矩阵.

定理3 n元实二次型 $f = X^TAX$为正定二次型 $\Longleftrightarrow$ 它的标准形有 n项，且系数全为正. 即它的正惯性指数 $p=n$

推论 实对称矩阵A为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A的特征值全为正.

定理4 n 阶实对称矩阵A为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ 的各阶顺序主子式都为正.

即

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,\ \Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

推论 n 阶实对称矩阵**A**为负定矩阵

⟺ ***A*的负矩阵-*A*为正定矩阵**

⟺ ***A*的奇数阶顺序主子式都为负值，偶数阶顺序主子式都为正值.**

例6　判别下列二次型的正定性.

(1)　$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$　负定二次型

(2)　$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$　正定二次型

【补】　t 取何值时二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2t\,x_1x_2+2\,x_1x_3+4x_2^2+2x_3^2$ 是正定性的？

$$A=\begin{pmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0,$$

$$\Delta_3=|A|=-2t^2+4>0,$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2<t<2\\-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$$

例7 设U为可逆矩阵，$A=U^{T}U$. 证明二次型$f=X^{T}AX$是正定二次型.

方法：利用定义证明，步骤：

1.说明A为实对称矩阵.

2.任给$X\neq 0$，证明$X^{T}AX>0$

思 考 题 三

2. 正定矩阵一定是对称矩阵吗？ 是的

4. 若3元实二次型 $f = X^{T}AX$ 的标准形为 $f = y_1^2 + 2y_2^2$，请问该二次型是否为正定二次型？ 不是

作业

P158 习题六

1(1,2,4), 2, 3(1,4), 4(2,4),

5, 6 , 7