3.2　线性相关性

3.2.1 线性相关，线性无关

定义4：给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，

如果存在不全为零实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

称向量组A线性相关,否则称向量组A线性无关.

注　一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，或者线性相关，或者线性无关.二者必居其一。

几何意义：(1)两向量线性相关：两向量共线.

(2)三向量线性相关：三向量共面.

上页　下页　返回

解释（1）给定两个非零向量α_1,α_2

如果线性相关，则存在不全为零

的实数k_1,k_2,使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$

不放设$k_1\neq 0$，于是$\alpha_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\alpha_2$

这两个向量成比例，几何上α_1，α_2共线。

(2)自己证明：三向量线性相关：三向量共面.

例1：用定义判断线性相关性。

(1) 向量 o,α,β,γ 线性__相__关。

(2) 向量 $\alpha,\alpha,\beta,\gamma$ 线性__相__关。

结论 包含零向量的任何向量组一定线性相关。

至少有两个向量相同的任何向量线性相关。

任何一个非零向量一定线性 无关。

3.2.1 线性相关性的刻画

定理3-2 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 至少有一个向量可由其余 m-1 个向量线性表示

证（必要性）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

存在一组不全为零实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

不放设 $k_i\neq 0$，于是

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}\cdots-\frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}-\cdots\frac{k_m}{k_i}\alpha_m$$

α_i由其余m - 1个向量线性表示。

上页 下页 返回

（充分性）设α_i由其余$m-1$个向量线性表示，

即$\alpha_i = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\alpha_{i-1} + l_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + l_m\alpha_m$

于是$l_1\alpha_1 + \cdots + l_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + l_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + l_m\alpha_m = 0$

于是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关

推论: 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 任一个向量都不能由其余 m-1 个向量线性表示

例2: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 至少有一个向量 $\alpha_i (1 < i \leq m)$可由其前面的向量线性表示

证：充分性显然，只证必要性

假设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

存在一组不全为零实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

从第m个系数一个一个往前看，则

第一个不为零的系数不可能是k_1,

(否则$k_1\alpha_1=0$，与$k_1\neq 0$，$\alpha_1\neq 0$矛盾）

不妨设第一不为零的系数为$k_i\neq 0(1<i\leq m)$，于是

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$$

α_i由其前面向量线性表示。

定理3-3: 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,

而向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关,

则向量 β 必能由向量组A线性表示，且表示式唯一.

证：由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta$ 线性相关

则存在一组不全为零实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l$

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l\beta=0$$

如果 $l=0$,则上式变为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

上页 下页 返回

而且系数$k_1, k_2, \cdots, k_m$不全为零，

这与α_1， $\alpha_2, \cdots$， α_m线性无关矛盾，

故$l \neq 0$.

下面再证惟一性。

设$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$

$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$

两式相减得

$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，

所以系数$k_1 - l_1 = 0, k_2 - l_2 = 0, \cdots, k_m - l_m = 0$,

于是有$k_i = l_i, i = 1,2,\cdots,m.$

故β由α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示的方法是惟一的。

3.2.3 线性相关性的判断.

定理 4－4 设n维向量组

$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_m$,其中

$$\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^T$$

$$\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})^T$$

$\cdots$

$$\alpha_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})$$

上页 下页 返回

则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关的充分必要条件是：

以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$为系数列向量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，且它的一个非零解$(k_1, k_2 \cdots k_m)$就是线性表示的一组不全为零的系数。

上页 下页 返回

线性方程组的向量表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_1}x_1+\boxed{\alpha_2}x_2+\cdots+\boxed{\alpha_n}x_n\boxed{=0}$$

等价的：向量组*A*线性相关充分必要条件是的就是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 有非零解.

证：由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$

存在一组不全为零实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,

使 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$$\Leftrightarrow k_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}+\cdots k_m\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$以α_1，α_2,$\cdots$，α_m为系数列向量的齐次线性方程组(4 – 4)

有非零解，且它的一个非零解$(k_1,k_2\cdots k_m)$就是线性表示的一组不全为零的系数。

上页 下页 返回

注 齐次线性方程组(4－4)中，未知量的个数就是向量组所包含的向量的个数；而方程的个数则是每个向量的分量的个数，亦即向量的维数。

利用此定理判别向量组的线性相关性

等价的说法

(2)

定理: n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow Ax=0$有非零解. 其中$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$

推论: n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\Longleftarrow Ax=0$只有零解. 其中$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$

例3: 证明n维基本向量组

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

线性无关.

解: $E=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$　$Ex=0$只有零解.即

$$\begin{cases}1x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0\\0x_1+1x_2+\cdots+0x_n=0\\\cdots\cdots\\0x_1+0x_2+\cdots+1x_n=0\end{cases}$$只有零解,

所以基本向量组ε_1, $\varepsilon_2,\cdots$, ε_n是线性无关的

上页 下页 返回

例4 判断向量组

$$\alpha_1=(1,a,a^2,a^3),\alpha_2=(1,b,b^2,b^3),$$

$$\alpha_4=(1,c,c^2,c^3),\alpha_4=(1,d,d^2,d^3)$$

线性相关还是线性无关。

（a,b,c,d是各不相同的数）

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3+d^2x_4=0 \\ a^3x_1+b^3x_2+c^3x_3+d^3x_4=0 \end{cases} \qquad (4-5)$$

其系数行列式是范德蒙 德行列式

上页 下页 返回

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \neq 0$$

由克莱姆法则，上述方程（4-5）只有零解

则向量组α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_m线性无关

上页 下页 返回

例5：已知：$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,2,5)^T,\alpha_3=(2,4,7)^T$

试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$及向量组 α_1,α_2 的线性相关性.

解：设数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立。

即 $$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

未知量为 k_1,k_2,k_3

系数行列式 $$\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{vmatrix}=0$$

齐次线性方程组有非零解，所以向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

向量 α_1,α_2 对应分量不成比例，所以线性无关。

例6

已知：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

试证：β_1,β_2,β_3线性无关.

证明:用定义

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3=0$$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

$$\therefore \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

只有零解. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

所以， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

推论3-2 n个n维向量线性无关的充分必要条件是它们构成的方阵的行列式不等于零

推论3-3 任何n+1个n维向量一定线性相关。

一般的 当m>n时，m个n维向量一定线性相关

上页 下页 返回

推论3-4　数域P上的n维向量空间 P^n 中，

任何一组线性无关的向量的个数最多为n个。

推论3-5 如果在数域P上的n维向量空间 P^n 中，

有n个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 P^n 中的

任一向量 α 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

且表法惟一。

小结

2．线性相关与线性无关的概念；线性相关性在线性方程组中有重要的应用；（**重点**）

3．线性相关与线性无关的判定方法：定义，两个定理．（**难点**）

思考题

试证明：

(1) 一个向量 α 线性相关的充要条件是 $\alpha = 0$;

(2) 一个向量 α 线性无关的充要条件是 $\alpha \neq 0$;

(3) 两个向量 α, β 线性相关的充要条件是

$\alpha = k\beta$或者$\beta = k\alpha$,两式不一定同时成立 .

证明 （1）、（2）略.

（3）**充分性**

$\because \alpha, \beta$线性相关,$\therefore$ 存在不全为零的数x, y,使得$\alpha x + \beta y = 0$,不妨设$x \neq 0$,则$\alpha = -\dfrac{y}{x}\beta$,令$k = -\dfrac{y}{x}$即可.

必要性

不妨设$\alpha = k\beta$,则有$1 \cdot \alpha + (-k)\beta = 0$,由定义知$\alpha, \beta$线性相关.