第三章　向量的线性相关性和秩

3.1　n维向量及其运算

3. 2　线性相关性

3. 3　向量组的秩

3. 4　矩阵的秩

3.1 n维向量及其运算

3.1.1 n维向量

定义3-1：数域R上的n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$

所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为数域R上的一个

n 维向量（vector），其中 a_i 称为第i个分量(component)

以后我们用小写希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 来代表向量。

而用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来代表数。

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$也称为$n$维行向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$称为n维列向量

分量全为零的向量 $(0,0,\cdots,0)$ 称为零向量。

注：一个n维行向量就是一个$1\times n$矩阵；

一个n维列行向量就是一个$n\times 1$矩阵,

故

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

例

(1) n个未知量的任一线性方 程组的每一个解都是一个n维向量。

(2) 一个$m\times n$矩阵的每一行都是一个n维向量,而它的每一列都是m维向量;

反之，将m个n维向量按行排列，

就可构成一个$m\times n$矩阵。

将n个m维向量按列排列，

就可构成一个$m\times n$矩阵。

3.1.2　向量的运算及性质

定义3-2 向量相等： 如果

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

是数域P上的两个n 维向量，如果他们的对应分量都相等，即 $a_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

则称向量 α和β相等，记做：$\alpha=\beta$

定义3-3 向量的和： 如果 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是数域P上的两个n 维向量

则α与β的和$\alpha+\beta$为

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

负向量： 向量 $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

称为向量 α 的负向量

向量的差 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

加法运算满足性质

$1^0\ \alpha+\beta=\beta+\alpha$

$2^0\ (\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$

$3^0\ \alpha+0=\alpha$

注： $4^0\ \alpha+(-\alpha)=0$

- 零向量和负向量是唯一的
- 加法的逆运算是减法。

数乘运算：设 k为数域 R 中的数，向量 $\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)$ 称为向量 $\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$ 与数 k的数量乘积。记为 $k\alpha$

数乘运算满足下列四条规则：

$5^0\ 1\cdot\alpha=\alpha$

$6^0\ k(l\alpha)=(kl)\alpha$

$7^0\ \left(k+l\right)\alpha=k\alpha+l\alpha$

$8^0\ k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

α,β是n维向量，$k,l\in P$

线性运算： 上述向量的加法及数乘运算称为向量的线性运算

注：

•满足上述 1^0-8^0 的运算称为线性运算。

$$(1)\ 0\alpha=0 \quad (2)\ (-1)\alpha=-\alpha;$$

$$(3)\lambda 0=0.$$

$$(4)\text{如果}k\alpha=0,\text{则}k=0\text{或}\alpha=0$$

3. 1. 3 线性组合与线性表示

定义3-3：设 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，是数域P上的n维向量组，对P中的任何一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

称为向量组A的一个 线性组合，若记作：β

则称向量 β 是向量组A的线性组合

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为这个线性组合的系数。

一般的：给定向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$， 和向量$\beta$

如果存在一组实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$，

使得$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$

则称向量 β 是向量组A的线性组合，

或称向量 β 能由向量组A线性表示。

例如：
$$\beta=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\0\end{pmatrix},\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

有
$$\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

即$\beta=2\varepsilon_1-5\varepsilon_2+3\varepsilon_3+0\varepsilon_4$

所以，称β是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$的线性组合，
或 β 可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$线性表示。

问题：1 零向量是任何向量的线性组合，为什么？

2 任何向量都可由它本身所在的向量组线性表示么？

答:1 $\quad 0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m$

2 $\quad \alpha_i=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_m$

判断向量 β 可否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的定理。

设 $\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})$

$\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})$

$\vdots$

$\alpha_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})$

$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

β可由$\alpha_1, \quad \alpha_2, \cdots, \quad \alpha_m$线性表示

$\Leftrightarrow$存在一组实数$k_1, k_2, \cdots k_m$,使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots k_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定理3-1

向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是：

以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为系数列向量，以 β 为常数项列向量的线性方程组有解，且一个解就是线性表示的一组系数。

小结

１． 维向量的概念

２．向量的表示方法：行向量与列向量；

思考题

若一个本科学生大学阶段共修36门课程,成绩描述了学生的学业水平，把他的学业水平用一个向量来表示，这个向量是几维的？请大家再多举几例,说明向量的实际应用.

思考题解答

答：　36维的．如果我们还需要考察其它指标，比如平均成绩、总学分等，维数还将增加.