4.1 齐次线性方程组

4.1.1 齐次线性方程组解的情况

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则上述方程组（1）可写成向量方程

$$Ax=0. \qquad (2)$$

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为方程 $Ax=0$ 的

解，则

$$x=\xi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组(1) 的**解向量**，它也就是向量方程(2)的解.

定理4-1：齐次线性方程组 $A_{m\times n}x_{n\times 1}=0_{m\times 1}$有非零解

$$\Leftrightarrow r(A)<n$$

等价的：齐次线性方程组$A_{m\times n}x_{n\times 1}=0_{m\times 1}$ 只有零解

$$\Leftrightarrow r(A)=n$$

推论：齐次线性方程组 $A_{n\times n}x_{n\times 1}=0_{n\times 1}$只有零解

$$\Leftrightarrow r(A)=n$$

即 $|A|\neq 0,$ 即系数矩阵A可逆。

4.1.2 齐次线性方程组的解的结构

定理4-2 若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

也是 $Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\xi_1=0, A\xi_2=0$

$$\therefore A\left(k_1\xi_1+k_2\xi_2\right)=k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=0$$

故 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

定义4–1：基础解系的定义

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为齐次性方程组 $Ax=0$的基础解系,如果

(1)$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是$Ax=0$的一组线性无关 的解;

(2)$Ax=0$的任一解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表出.

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系,那么, $Ax=0$ 的通解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

定理4-3 设A是$m \times n$矩阵，如果$r(A)=r<n$则齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的基础解系存在，且每个基础解系中含$n-r$个解向量.

上页 下页 返回

证：设齐次线性方程组的系数矩阵为A，于是A由初等行变换化为

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

现对$x_{r+1},\cdots,x_n$取下列 $n-r$ 组数：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

分别代入 $$\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

依次得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{12} \\ \vdots \\ -c_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -c_{1,n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,n-r} \end{pmatrix}.$$

从而求得原方程组的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -c_{12} \\ \vdots \\ -c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1,n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组的基础解系.

(1)证明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关.

由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量
$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

线性无关,

所以 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 亦线性无关.

(2)证明方程组的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示.

设$x=\xi=(\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_r \quad \lambda_{r+1} \quad \cdots \quad \lambda_n)^T$为上述方程组的一个解. 再作 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 的线性组合,

$$\eta=\lambda_{r+1}\xi_1+\lambda_{r+2}\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_{n-r}$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是$Ax=0$ 的解,故η也是$Ax=0$的解.

下面来证明$\xi=\eta$.

上页 下页 返回

$$\eta = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r}$$

$$= \lambda_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{r+2}\begin{pmatrix} -c_{12} \\ \vdots \\ -c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} -c_{1,n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

由于ξ与η都是方程$Ax=0$的解,而$Ax=0$又等价于

方程组 $\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n-r}x_n \end{cases}$

所以ξ与η都是此方程组的解，

由 $\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \lambda_{r+1} \\ \lambda_{r+2} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = c_1, \cdots, \lambda_r = c_r.$

故$\xi = \eta$. 即$\xi = \lambda_{r+1}\xi_1 + \lambda_{r+2}\xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_{n-r}$.

所以$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组的一个基础解系.

说明

1．基础解系不是唯一的.

2．若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是 $Ax = 0$的基础解系，则其通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$.

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$是任意常数.

3 当$R(A) = n$时,方程组只有零解,故没有基础解系(此时解空间只含一个零向量,为0维向量空间);

当$R(A)=r<n$时，方程组必有含$n-r$个向量的基础解系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，此时，方程组的解可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$k_1,\cdots,k_{n-r}$为任意实数.

上页 下页 返回

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$，

即得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

上页 下页 返回

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=r=2, n=5, n-r=3$,即方程组有无穷多解，

其基础解系中有三个线性无关的解向量.

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.代入$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-4x_4+3x_5 \\ x_2=x_3-3x_4+x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

例3 证明$R(A^T A) = R(A)$.

证 设A为$m \times n$矩阵, x为n维列向量.

若x满足$Ax = 0$,则有$A^T(Ax) = 0$,即

$(A^T A)x = 0$;

若x满足$(A^T A)x = 0$,则$x^T(A^T A)x = 0$,即

$(Ax)^T(Ax) = 0$,从而推知$Ax = 0$.

综上可知方程组$Ax = 0$与$(A^T A)x = 0$同解,

因此 $R(A^T A) = R(A)$.

上页 下页 返回

小结

1．齐次线性方程组基础解系的求法

2．齐线性方程组解的情况

$Ax=0$有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)\le n$

(此时基础解系中含有$n-R(A)$个解向量)

上页 下页 返回