

第一组：

(1) 计算行列式 $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 10 & -10 \\ 3 & -1 & 15 & -2a \end{vmatrix}$

(2) 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 10 & -10 \\ 3 & -1 & 15 & -2a \end{pmatrix}$ 的秩.

(3) 讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 15x_3 - 2ax_4 = 0 \end{cases}$$

问 a 取何值时方程组只有零解？有非零解？并在有非零解时求出它的通解.

在 \mathbb{R}^4 中，已知 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 3, -5, -1)^T$, $\alpha_3 = (3, 1, 10, 15)^T$, $\alpha_4 = (2, 6, -10, -2a)^T$, (4) 讨论 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

(5) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大线性无关组.

(6) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的一组基和维数.

解:

$$(1) \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 10 & -10 \\ 3 & -1 & 15 & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-a) \end{vmatrix} = 4(1-a)$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 10 & -10 \\ 3 & -1 & 15 & -2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-a) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \therefore a=1 \text{ 时 } R(\mathbf{A})=3 \\ a \neq 1 \text{ 时 } R(\mathbf{A})=4 \end{array}$$

(3) $\therefore a \neq 1$ 时 $R(\mathbf{A}) = 4 =$ 未知量个数, 方程组只有零解;

$a = 1$ 时 $R(\mathbf{A}) = 3 <$ 未知量个数, 方程组有零解; 此时

$$A \xrightarrow{a=1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{通解为: } X = t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \text{ 为任意常数}$$

- ∴ (4) $a=1$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关; $a \neq 1$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.
- (5) $a=1$ 时, 极大线性无关为: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;
 $a \neq 1$ 时, 极大线性无关为: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (6) $a=1$ 时, $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的基可取: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 维数 = 3;
 $a \neq 1$ 时, $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的基可取: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 维数 = 4;

第二组：

(1) 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & b \\ 3 & -1 & 15 & -2a & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

(2) 讨论方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 10x_4 = b \\ 3x_1 - x_2 + 15x_3 - 2ax_4 = 3 \end{cases}$$
 问 a 取何值时方程组有解，无解？有解时何时有一解，何时有无穷多解？无穷多解时求出它的通解。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的如前所设， $\beta = (1, 3, b, 3)^T$,

(3) 问 a, b 取何值时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示？何时不可表示？可表示时何时表示式唯一？何时表示法不唯一？并写出这些表示式。

(4) 讨论 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 极大线性无关组.

(5) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$ 的一组基和维数.

解:

$$(1) \quad \mathbf{B} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b+5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 3+b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \therefore a=1 \text{ 且 } b=-3 \text{ 时 } R(\mathbf{B})=3 \\ a \neq 1 \text{ 或 } b \neq -3 \text{ 时 } R(\mathbf{B})=4 \end{array}$$

$$(2) \quad \text{增广矩阵 } \mathbf{B} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b+5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 3+b \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \therefore a \neq 1 \text{ 时 方程组有 唯一解} \\ a=1 \text{ 且 } b=-3 \text{ 时有 无穷多解} \\ a=1 \text{ 且 } b \neq -3 \text{ 时无解} \end{array}$$

$$\xrightarrow[a=-3]{a=1 \text{ 且}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

通解为:

$$\mathbf{X} = t(0, -2, 0, 1)^T + (-8, 3, 2, 0)^T$$

t 为任意常数.

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 \iff 方程组 $AX = \beta$ 有解, 而且

表示法唯一 \iff 方程组有唯一解,

表示法不唯一 \iff 方程组有无穷多解,

(4) $a=1$ 且 $b=-3$ 时 $R(B)=3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 的极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$a \neq 1$ 时 $R(B)=4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 的极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$b \neq -3$ 时 $R(B)=4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 的极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$

(5) $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta)$ 的 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{基: } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, & \text{维数}=3. \quad a=1 \text{ 且 } b=-3 \text{ 时} \\ \text{基: } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, & \text{维数}=4. \quad a \neq 1 \text{ 时} \\ \text{基: } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, & \text{维数}=4. \quad b \neq -3 \text{ 时} \end{array} \right.$