第五章　特征值、特征向量、矩阵对角化

一. 方阵的特征值与特征向量

二. 相似矩阵及其性质

三. 矩阵可对角化的条件

四. 实对称矩阵的对角化

1.定义
2.求法
3.性质

一. 方阵的特征值与特征向量

1. 特征值与特征向量的定义

定义1: 设 A 是 n 阶方阵,

若数 λ 和 n 维非零列向量 x, 使得

$Ax = \lambda x$ 成立, 则称

λ 是方阵 A 的一个特征值,

x 为方阵 A 的对应于特征值 λ 的一个特征向量。

注: (1) A 是方阵

(2) 特征向量 x 是非零列向量

(3) 方阵 A 的与特征值 λ 对应的特征向量不唯一

(4) 一个特征向量只能属于一个特征值

2. 特征值与特征向量的求法

$$Ax=\lambda x$$

$$\Rightarrow (A-\lambda E)x=0 \text{ 或 } (\lambda E-A)x=0$$

已知 $x\neq 0$，所以齐次线性方程组有非零解

$$\Leftrightarrow |A-\lambda E|=0 \text{ 或 } |\lambda E-A|=0$$

定义2: $A_{n\times n}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$， 数 λ

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

是关于 λ 的一个多项式，称为矩阵 A 的特征多项式。

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

称为矩阵 A 的特征方程。

求特征值、特征向量：

(1) $|A-\lambda E|=0$ 求出 λ 即为特征值;

(2) $Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda E)x=0$

把得到的特征值 λ 代入上 式,

求齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的非零解 x

即为所求特征向量。

例1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和全部特征向量.

解：第一步：写出矩阵A的特征方程，求出特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$$

特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$

第二步：对每个特征值 λ 代入齐次线性方程组

$(A-\lambda E)x=0,$ 求非零解。

当$\lambda_1 = 2$时，齐次线性方程组为$\left(A - 2E\right)x = 0$

系数矩阵

$$\left(A - 2E\right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由未知量：　x_3

$x_1 = x_2 = 0$　令$x_3 = 1$得基础解系：$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore k_1 p_1 (k_1 \neq 0$ 常数$)$是对应于$\lambda_1 = 2$的全部特征向量。

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，齐次线性方程组为 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$$ 得基础解系 $$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

$\therefore k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0$ 常数)是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量。

3. 特征值和特征向量的性质

性质1： 若 A 的特征值是 λ， x 是 A 的对应于 λ 的特征向量，则

(1) $k\lambda$ 是 kA 的特征值 (k 是任意常数)

(2) λ^m 是 A^m 的特征值 (m 是任意正整数)

(3) 若 A 可逆，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值

$$\lambda^{-1}|A| \text{ 是 } A^* \text{ 的特征值}$$

且 x 仍然是矩阵 kA, A^m, A^{-1}, A^*

分别对应于 $k\lambda,\ \lambda^m, \lambda^{-1}, \frac{1}{\lambda}|A|$ 的特征向量。

(4) $f(x)$ 为 x 的多项式，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值。

性质2： 矩阵 A 和 A^T 的特征值相同。

定理2： 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则 1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$$

称为矩阵A的迹。（主对角元素之和）

2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

例：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

求：（1）$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量。

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角阵。

解：（1）$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$$-\lambda^2(2+\lambda)=0 \qquad 得 \quad \lambda_1=\lambda_2=0, \quad \lambda_3=-2$$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时, $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1=x_2-x_3$$

自由未知量: x_2, x_3 得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2$ $(k_1, k_2$不同时为 0的常数)是对应于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量

当$\lambda_3=-2$时　$(A+2E)x=0$

$$\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$$

自由未知量:　x_3　　得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$k_3p_3(k_3\neq0,$ 常数)是对应于λ_3＝0的全部特征向量

$$(2)\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\lambda_3\boldsymbol{p}_3.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \lambda_3\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -2\end{pmatrix}$$

$\therefore AP = P\Lambda \quad \because |P| = -2 \neq 0 \quad \therefore P^{-1}$ 存在

$\therefore P^{-1}AP = P^{-1}P\Lambda = \Lambda$

问题：矩阵P是否唯一？矩阵Λ是否唯一？

本题启示：1. 通过求A的特征值,特征向量,有可能把A写成

$$\Lambda = P^{-1}AP$$ 其中 Λ 为对角阵。

2. 提供了一种求 A^k 的方法.

定理3： 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，

$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 依次是与之对应的特征向量。

如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，

则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关。

即，方阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关。

证明：设常数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0.$$

则
$$A(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m)=0,$$

$$\lambda_1x_1p_1+\lambda_2x_2p_2+\cdots+\lambda_mx_mp_m=0,$$

类推之，有 $\lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m p_m = 0.$

$$(k = 1,2,\cdots,m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0,0,\cdots,0)$$

等号左边第二个矩阵的行列式为**Vandermonde**行列式，

当λ_i各不相同时，该行列式的值不等于零，所以存在逆矩阵。

等号两边同时右乘它的逆矩阵，有

$$\left(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m\right) = (0,0,\cdots,0),$$

即 $x_j p_j = 0 \left(j = 1,2,\cdots,m \right).$

又因为 p_j 为特征向量，$p_j \neq 0,$

所以 $x_j = 0\left(j = 1,2,\cdots,m \right).$

$\therefore p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关。