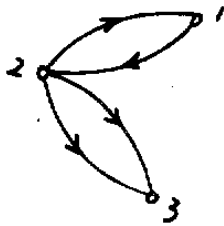


一、单项选择题(本大题共 15 小题, 每小题 1 分, 共 15 分)在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的, 请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

- 一个连通的无向图  $G$ , 如果它的所有结点的度数都是偶数, 那么它具有( )  
 A. 汉密尔顿回路 B. 欧拉回路  
 C. 汉密尔顿通路 D. 初级回路
- 设  $G$  是连通简单平面图,  $G$  中有 11 个顶点 5 个面, 则  $G$  中的边是( )  
 A. 10 B. 12 C. 16 D. 14
- 在布尔代数  $L$  中, 表达式  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$  的等价式是( )  
 A.  $b \wedge (a \vee c)$   
 B.  $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$   
 C.  $(a \vee b) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c)$   
 D.  $(b \vee c) \wedge (a \vee c)$
- 设  $i$  是虚数,  $\cdot$  是复数乘法运算, 则  $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \cdot \rangle$  是群, 下列是  $G$  的子群是( )  
 A.  $\langle \{1\}, \cdot \rangle$  B.  $\langle \{-1\}, \cdot \rangle$   
 C.  $\langle \{i\}, \cdot \rangle$  D.  $\langle \{-i\}, \cdot \rangle$
- 设  $Z$  为整数集,  $A$  为集合,  $A$  的幂集为  $P(A)$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $/$  为数的加、减、除运算,  $\cap$  为集合的交运算, 下列系统中是代数系统的有( )  
 A.  $\langle Z, +, / \rangle$  B.  $\langle Z, / \rangle$   
 C.  $\langle Z, -, / \rangle$  D.  $\langle P(A), \cap \rangle$
- 下列各代数系统中不含有零元素的是( )  
 A.  $\langle Q, * \rangle$   $Q$  是全体有理数集,  $*$  是数的乘法运算  
 B.  $\langle Mn(R), * \rangle$ ,  $Mn(R)$  是全体  $n$  阶实矩阵集合,  $*$  是矩阵乘法运算  
 C.  $\langle Z, \circ \rangle$ ,  $Z$  是整数集,  $\circ$  定义为  $x \circ xy = xy$ ,  $\forall x, y \in Z$   
 D.  $\langle Z, + \rangle$ ,  $Z$  是整数集,  $+$  是数的加法运算
- 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $A$  上二元关系  $R$  的关系图如下:  
  
 $R$  具有的性质是  
 A. 自反性  
 B. 对称性  
 C. 传递性  
 D. 反自反性
- 设  $A = \{a, b, c\}$ ,  $A$  上二元关系  $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$ , 则关系  $R$  的对称闭包  $S(R)$  是( )  
 A.  $R \cup I_A$  B.  $R$  C.  $R \cup \{ \langle c, a \rangle \}$  D.  $R \cap I_A$
- 设  $X = \{a, b, c\}$ ,  $I_x$  是  $X$  上恒等关系, 要使  $I_x \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \} \cup R$  为  $X$  上的等价关系,  $R$  应取( )  
 A.  $\{ \langle c, a \rangle, \langle a, c \rangle \}$  B.  $\{ \langle c, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$   
 C.  $\{ \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \}$  D.  $\{ \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$
- 下列式子正确的是( )  
 A.  $\emptyset \in \emptyset$  B.  $\emptyset \subseteq \emptyset$  C.  $\{ \emptyset \} \subseteq \emptyset$  D.  $\{ \emptyset \} \in \emptyset$
- 设解释  $R$  如下: 论域  $D$  为实数集,  $a=0, f(x, y)=x-y, A(x, y): x < y$ . 下列公式在  $R$  下为真的是( )  
 A.  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \rightarrow A(f(x, z), f(y, z)))$   
 B.  $(\forall x)A(f(a, x), a)$   
 C.  $(\forall x)(\forall y) (A(f(x, y), x))$

D.  $(\forall x)(\forall y)(A(x,y) \rightarrow A(f(x,a),a))$

12. 设  $B$  是不含变元  $x$  的公式, 谓词公式  $(\forall x)(A(x) \rightarrow B)$  等价于( )

A.  $(\exists x)A(x) \rightarrow B$

B.  $(\forall x)A(x) \rightarrow B$

C.  $A(x) \rightarrow B$

D.  $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B$

13. 谓词公式  $(\forall x)(P(x,y)) \rightarrow (\exists z)Q(x,z) \wedge (\forall y)R(x,y)$  中变元  $x$ ( )

A. 是自由变元但不是约束变元

B. 既不是自由变元又不是约束变元

C. 既是自由变元又是约束变元

D. 是约束变元但不是自由变元

14. 若  $P$ : 他聪明;  $Q$ : 他用功; 则“他虽聪明, 但不用功”, 可符号化为( )

A.  $P \vee Q$

B.  $P \wedge \neg Q$

C.  $P \rightarrow \neg Q$

D.  $P \vee \neg Q$

15. 以下命题公式中, 为永假式的是( )

A.  $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$

B.  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

C.  $\neg (q \rightarrow q) \wedge p$

D.  $\neg (q \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$

## 二、填空题(每空 1 分, 共 20 分)

16. 在一棵根树中, 仅有一个结点的入度为\_\_\_\_\_, 称为树根, 其余结点的入度均为\_\_\_\_\_。

17.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  上二元关系  $R = \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ ,  $R$  的关系矩阵  $M_R$  中  $m_{24} =$ \_\_\_\_\_,  $m_{34} =$ \_\_\_\_\_。

18. 设  $\langle s, * \rangle$  是群, 则那么  $s$  中除\_\_\_\_\_外, 不可能有别的幂等元; 若  $\langle s, * \rangle$  有零元, 则  $|s| =$ \_\_\_\_\_。

19. 设  $A$  为集合,  $P(A)$  为  $A$  的幂集, 则  $\langle P(A), \subseteq \rangle$  是格。若  $x, y \in P(A)$ , 则  $x, y$  最大下界是\_\_\_\_\_, 最小上界是\_\_\_\_\_。

20. 设函数  $f: X \rightarrow Y$ , 如果对  $X$  中的任意两个不同的  $x_1$  和  $x_2$ , 它们的象  $y_1$  和  $y_2$  也不同, 我们说  $f$  是\_\_\_\_\_函数, 如果  $\text{ran} f = Y$ , 则称  $f$  是\_\_\_\_\_函数。

21. 设  $R$  为非空集合  $A$  上的等价关系, 其等价类记为  $[x]_R$ 。  $\forall x, y \in A$ , 若  $\langle x, y \rangle \in R$ , 则  $[x]_R$  与  $[y]_R$  的关系是\_\_\_\_\_, 而若  $\langle x, y \rangle \notin R$ , 则  $[x]_R \cap [y]_R =$ \_\_\_\_\_。

22. 使公式  $(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$  成立的条件是\_\_\_\_\_不含有  $y$ , \_\_\_\_\_不含有  $x$ 。

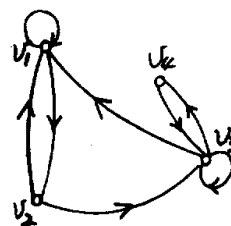
23. 设  $M(x): x$  是人,  $D(s): x$  是要死的, 则命题“所有的人都是要死的”可符号化为  $(\forall x)$ \_\_\_\_\_, 其中量词  $(\forall x)$  的辖域是\_\_\_\_\_。

24. 若  $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$  是\_\_\_\_\_, 则称  $H_1, H_2, \cdots, H_n$  是相容的, 若  $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$  是\_\_\_\_\_, 则称  $H_1, H_2, \cdots, H_n$  是不相容的。

25. 判断一个语句是否为命题, 首先要看它是否为\_\_\_\_\_, 然后再看它是否具有唯一的\_\_\_\_\_。

## 三、计算题 (共 30 分)

26. (4 分) 设有向图  $G = (V, E)$  如下图所示, 试用邻接矩阵方法求长度为 2 的路的总数和回路总数。



27. (5) 设  $A = \{a, b\}$ ,  $P(A)$  是  $A$  的幂集,  $\oplus$  是对称差运算, 可以验证  $\langle P(A), \oplus \rangle$  是群。设  $n$  是正整数, 求  $(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^n \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^n\{a\}^n$

28. (6 分) 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A$  上偏序关系

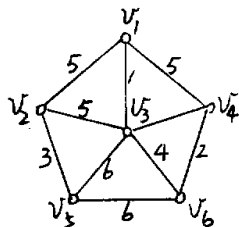
$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \cup I_A$ ;

(1)作出偏序关系  $R$  的哈斯图

(2)令  $B=\{1,2,3,5\}$ , 求  $B$  的最大, 最小元, 极大、极小元, 上界, 下确界, 下界, 下确界。

29.(6分)求  $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$  的主合取范式并给出所有使命题为真的赋值。

30.(5分)设带权无向图  $G$  如下, 求  $G$  的最小生成树  $T$  及  $T$  的权总和, 要求写出解的过程。



31.(4分)求公式  $\neg((\forall x)F(x,y) \rightarrow (\exists y)G(x,y)) \vee (\exists x)H(x)$  的前束范式。

四、证明题 (共 20 分)

32.(6分)设  $T$  是非平凡的无向树,  $T$  中度数最大的顶点有 2 个, 它们的度数为  $k(k \geq 2)$ , 证明  $T$  中至少有  $2k-2$  片树叶。

33.(8分)设  $A$  是非空集合,  $F$  是所有从  $A$  到  $A$  的双射函数的集合,  $\circ$  是函数复合运算。

证明:  $\langle F, \circ \rangle$  是群。

34.(6分)在个体域  $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  中证明等价式:

$$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$$

五、应用题(共 15 分)

35.(9分)如果他是计算机系本科生或者是计算机系研究生, 那么他一定学过 DELPHI 语言而且学过 C++ 语言。只要他学过 DELPHI 语言或者 C++ 语言, 那么他就会编程序。因此如果他是计算机系本科生, 那么他就会编程序。请用命题逻辑推理方法, 证明该推理的有效结论。

36.(6分)一次学术会议的理事会共有 20 个人参加, 他们之间有的相互认识但有的相互不认识。但对任意两个人, 他们各自认识的人的数目之和不小于 20。问能否把这 20 个人排在圆桌旁, 使得任意一个人认识其旁边的两个人? 根据是什么?

## 参考答案

一、单项选择题(本大题共 15 小题, 每小题 1 分, 共 15 分)

- |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1.B  | 2.D  | 3.A  | 4.A  | 5.D  |
| 6.D  | 7.D  | 8.C  | 9.D  | 10.B |
| 11.A | 12.A | 13.C | 14.B | 15.C |

二、填空题

16.0 1

17.1 0

18.单位元 1

19. $x \cap y$   $x \cup y$

20.入射 满射

21.  $[x]_R = [y]_R$

22. $A(x)$   $B(y)$

23. $(M(x) \rightarrow D(x))$   $M(x) \rightarrow D(x)$

24.可满足式                  永假式(或矛盾式)

25.陈述句                  真值

### 三、计算题

$$26. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ij}^2 = 18, \quad \sum_{i=1}^4 M_{ii}^2 = 6$$

G 中长度为 2 的路总数为 18, 长度为 2 的回路总数为 6。

27. 当 n 是偶数时,  $\forall x \in P(A), x^n = \emptyset$

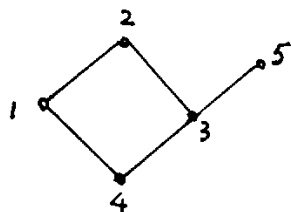
当 n 是奇数时,  $\forall x \in P(A), x^n = x$

于是: 当 n 是偶数,  $(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$   
 $= \emptyset \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n = \emptyset \oplus \emptyset = \emptyset$

当 n 是奇数时,

$(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$   
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n$   
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} = \emptyset$

28.(1) 偏序关系 R 的哈斯图为



(2) B 的最大元: 无, 最小元: 无;

极大元: 2, 5, 极小元: 1, 3

下界: 4, 下确界 4;

上界: 无, 上确界: 无

$$\begin{aligned}
 29. \text{原式} &\Leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)) \wedge ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)) \wedge (\neg(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &(\neg P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &(\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
 &P \wedge (Q \vee \neg Q) \\
 &P \vee (Q \wedge \neg Q) \\
 &(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)
 \end{aligned}$$

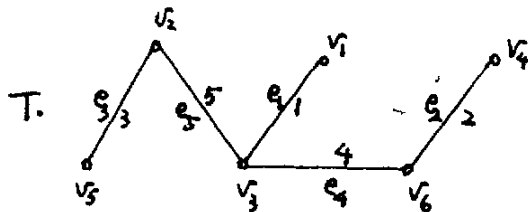
命题为真的赋值是  $P=1, Q=0$  和  $P=1, Q=1$

30. 令  $e_1=(v_1, v_3)$ ,  $e_2=(v_4, v_6)$   
 $e_3=(v_2, v_5)$ ,  $e_4=(v_3, v_6)$   
 $e_5=(v_2, v_3)$ ,  $e_6=(v_1, v_2)$   
 $e_7=(v_1, v_4)$ ,  $e_8=(v_4, v_3)$   
 $e_9=(v_3, v_5)$ ,  $e_{10}=(v_5, v_6)$

令  $a_i$  为  $e_i$  上的权, 则

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = a_6 = a_7 = a_8 < a_9 = a_{10}$$

取  $a_1$  的  $e_1 \in T$ ,  $a_2$  的  $e_2 \in T$ ,  $a_3$  的  $e_3 \in T$ ,  $a_4$  的  $e_4 \in T$ ,  $a_5$  的  $e_5 \in T$ , 即,



$T$  的总权和  $= 1+2+3+4+5=15$

31. 原式  $\Leftrightarrow \neg (\forall x_1 F(x_1, y) \rightarrow \exists y_1 G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2)$  (换名)  
 $\Leftrightarrow \neg \exists x_1 \exists y_1 (F(x_1, y) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2)$   
 $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2)$   
 $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (\neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee H(x_2))$

#### 四、证明题

32. 设  $T$  中有  $x$  片树叶,  $y$  个分支点。于是  $T$  中有  $x+y$  个顶点, 有  $x+y-1$  条边, 由握手定理知  $T$  中所有顶点的度数之和

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) = 2(x+y-1).$$

又树叶的度为 1, 任一分支点的度大于等于 2

且度最大的顶点必是分支点, 于是

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) \geq x \cdot 1 + 2(y-1) + k = x + 2y + 2k - 4$$

从而  $2(x+y-1) \geq x + 2y + 2k - 4$

$$x \geq 2k - 2$$

33. 从定义出发证明: 由于集合  $A$  是非空的, 故显然从  $A$  到  $A$  的双射函数总是存在的, 如  $A$  上恒等函数, 因此  $F$  非空

(1)  $\forall f, g \in F$ , 因为  $f$  和  $g$  都是  $A$  到  $A$  的双射函数, 故  $f \circ g$  也是  $A$  到  $A$  的双射函数, 从而集合  $F$  关于运算  $\circ$  是封闭的。

(2)  $\forall f, g, h \in F$ , 由函数复合运算的结合律有  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  故运算  $\circ$  是可结合的。

(3)  $A$  上的恒等函数  $I_A$  也是  $A$  到  $A$  的双射函数即  $I_A \in F$ , 且  $\forall f \in F$  有  $I_A \circ f = f \circ I_A = f$ , 故  $I_A$  是  $\langle F, \circ \rangle$  中的幺元

(4)  $\forall f \in F$ , 因为  $f$  是双射函数, 故其逆函数是存在的, 也是  $A$  到  $A$  的双射函数, 且有  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$ , 因此  $f^{-1}$  是  $f$  的逆元

由此上知  $\langle F, \circ \rangle$  是群

34. 证明  $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee B(a_1)) \vee (\neg A(a_2) \vee B(a_2)) \vee \cdots \vee (\neg A(a_n) \vee B(a_n)) \\
&\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n)) \vee (B(a_1) \vee B(a_2) \vee \cdots \vee B(a_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)) \vee (\neg B(a_1) \vee B(a_2) \vee \cdots \vee B(a_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg (\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)
\end{aligned}$$

## 五、应用题

35. 令 p: 他是计算机系本科生

q: 他是计算机系研究生

r: 他学过 DELPHI 语言

s: 他学过 C++ 语言

t: 他会编程序

前提:  $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), (r \vee s) \rightarrow t$

结论:  $p \rightarrow t$

证①p P(附加前提)

② $p \vee q$  T①I

③ $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$  P(前提引入)

④ $r \wedge s$  T②③I

⑤r T④I

⑥ $r \vee s$  T⑤I

⑦ $(r \vee s) \rightarrow t$  P(前提引入)

⑧t T⑤⑥I

36. 可以把这 20 个人排在圆桌旁, 使得任一人认识其旁边的两个人。

根据: 构造无向简单图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{20}\}$  是以 20 个人为顶点的集合, E 中的边是若任两个人  $v_i$  和  $v_j$  相互认识则在  $v_i$  与  $v_j$  之间连一条边。

$\forall v_i \in V, d(v_i)$  是与  $v_i$  相互认识的人的数目, 由题意知  $\forall v_i, v_j \in V$  有  $d(v_i) + d(v_j) \geq 20$ , 于是 G 中存在汉密尔顿回路。

设  $C = v_{i1} v_{i2} \cdots v_{i20} v_{i1}$  是 G 中一条汉密尔顿回路, 按这条回路的顺序按其排座位即符合要求。