4.2 非齐次线性方程组

4.2.1非齐次线性方程组有解的条件

1．非齐次线性方程组解的性质

(1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是$Ax=b$的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次方程 $Ax=0$的解.

证明 $\because A\eta_1=b,\quad A\eta_2=b$

$$\therefore A(\eta_1-\eta_2)=b-b=0.$$

即$x=\eta_1-\eta_2$满足方程$Ax=0$.

(2) 设$x=\eta$是方程 $Ax=b$的解, $x=\xi$是方程 $Ax=0$的解,则$x=\xi+\eta$仍是方程 $Ax=b$的解.

证明 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b,$

所以$x=\xi+\eta$是方程 $Ax=b$的解.

证毕.

非齐次线性方程组的通解

定理4-5 如果非齐次线性方程组Ax=b有解,则其通解为

$$\eta = \xi + \eta^*.$$

即$x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$

其中 $k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的通解，η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解. $k_1, k_2, \cdots, k_n$为任意常数，$\xi_1, \cdots$，ξ_{n-r}是$Ax = 0$的一个基础解析。

上页 下页 返回

注意:(1)解非齐次方程组的关键是:
求对应的齐次方程组的基础解析。

(2)若$Ax=0$只有零解，则$Ax=b$只有唯一解

(3)若$Ax=b$对应的$Ax=0$有无穷多组解，
则$Ax=b$有无穷多组解。

与方程组 $Ax=b$ 有解等价的命题

线性方程组 $Ax=b$ 有解

$\Leftrightarrow$

向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示;

$\Leftrightarrow$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价;

$\Leftrightarrow$

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 与矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$ 的秩相等.

例1 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$,故方程组有解,并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$,则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$,即得方程组的一个解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$中,取

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 则 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例2　求下述方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

解　$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

上页　下页　返回

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$R(A)=R(B)$,知方程组有解.又$R(A)=2, n-r=3$,

所以方程组有无穷多解. 且原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5+7 \\ 2x_2=-x_3-2x_4-6x_5+23 \end{cases}$$

上页 下页 返回

求基础解系

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

代入 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 2x_2 = -x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

故得基础解系

代入 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ 2x_2 = -x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23 \end{cases}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求特解

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,得$x_1 = -\dfrac{9}{2}, x_2 = \dfrac{23}{2}$.

所以方程组的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9/2\\23/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

另一种解法

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&1&2&1&-3&-2\\0&2&1&2&6&23\\8&3&4&3&-1&12\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + 2x_5 - \dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3/2 + 2x_5 - 9/2 \\ x_2 = -x_3/2 - x_4 - 3x_5 + 23/2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

上页 下页 返回

$$x = k_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

例3　解三元一次方程组

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + (a+3)y - 3z = 3 \\ -2x + (a-1)y + bz = a-1 \end{cases}$$
并给出几何解释

解对增广矩阵B作初等变换

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+3 & -3 & 3 \\ -2 & a-1 & b & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & b-2 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & a \end{bmatrix}$$

(1)若$a \neq -1, b \neq 1$,方程组由惟一解

$$\left[\frac{a(a+b-1)}{(a+1)(b-1)}, \frac{(a+b-1)}{(a+1)(b-1)}, \frac{a}{(b-1)}\right]$$

几何意义是三个平面由 惟一交点。

（2）若$a = -1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

此时若$b=2$, 则方程组有无穷多解

$$(0,\ 0,\ -1)^T+k(-1,\ 1,\ 0)^T$$

其几何意义是三个平面交于一条直线，

且第一、第三两个平面重合。

此时若$b\neq 2, r(A)=2, r([A,b])=3$,则方程组无解

若$b\neq 3$,系数矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & b \end{bmatrix}$中任

两个向量不平行，故三个平面不平行，

三个平面两两相交于三条平行直线。

若$b=3$,则第二，三平面平行，第一个平面与他们相交。

(3)若$b=1$,当$a=0$时,方程组有无穷多组解,

$(0,\ 1,\ 0)^T+k(0,\ 1,\ 1)^T$

其几何意义是三个平面互不相同，但相交于一条直线，

若$a\neq 0$,则方程组无解,三个平面互不平行，但两两相交

上页 下页 返回

小结

非齐次线性方程组解的情况

$R(A)=R(B)=n \Leftrightarrow Ax=b$有唯一解.

$R(A)=R(B)<n \Leftrightarrow Ax=b$有无穷多解.

$R(A)\neq R(B) \Leftrightarrow Ax=b$无解.

思考题

设A是$m\times 3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

思考题解答

解 $\because A$是$m\times 3$矩阵, $R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

令$\eta_1+\eta_2=a, \eta_2+\eta_3=b, \eta_3+\eta_1=c$,则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 - \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

为$Ax = 0$的基础解系中的解向量.

故$Ax = b$的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

其中k_1, k_2为任意实数.