第四章

向量空间和线性变换

一、向量空间、基、维数

1. 向量空间

设V为n维向量的非空集合，若V满足：

加法封闭：若 α， $\beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$;

数乘封闭：若 $\alpha \in V$, 则 $k\alpha \in V$;

则称V为一向量空间.

例 $$V = \{\alpha = (0, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 2, \cdots, n\}$$

$$V = \{\alpha = (1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 2, \cdots, n\}$$

由一个零向量构成的向量空间称为零空间;

由全体 **n**维实向量构成的向量空间记为 R^n

2. 基与维数

设**V**为向量空间，若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V$,且

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) **V** 中任何向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为**V**的一组基；**r**为**V**的维数,

记为***dimV=r***.

3. 子空间

设 U为向量空间**V**的非空子集，且U 也构成

向量空间，则称 U 为**V** 的一个子空间.

4. 生成的子空间

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in R^n$，则称

$$V=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_i\in R, i=1,2,\cdots,m\}$$

为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间． 记作

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

二、坐标与坐标变换

1. 坐标

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量空间 V 的一组基，α是V中的一个向量，α 可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一线性表示成 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为向量 α 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，记作

$$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T.$$

注意：向量的坐标不要与向量混为一谈，n维向量只有在自然基(即$e_1,e_2,\cdots,e_n$)下的坐标才是它的本身.

2. 过渡矩阵

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间**V**的两组基，且

$$\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n$$

$$\beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n$$

或写为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

其中 $P = (p_{ij})_n$

称 P 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的**过渡矩阵**.

3.坐标变换

设**V**中的某个向量α 在两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ ，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称之为坐标变换公式.

例　在R^n中，求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵及由基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵．其中

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$$

$$\eta_1=(1,1,\cdots,1),\eta_2=(0,1,\cdots,1),\cdots,\eta_n=(0,\cdots,0,1)$$

并求向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标.

解：$\because$
$$\begin{cases}\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ \eta_2=\qquad\ \ \varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_n=\qquad\qquad\qquad\ \ \varepsilon_n\end{cases}$$

$$\therefore(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

而， $$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\0&-1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

故，由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标就是

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

设α在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2-a_1 \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

所以α在基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的坐标为

$$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})$$

三. 内积、正交化、正交矩阵.

1. 向量的内积、长度、夹角

定义1：n维实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

称 $(\alpha,\beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$$= (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha^T\beta$$

为向量 α 与 β 的内积。

若α,β为行向量，则 $(\alpha,\beta) = \alpha\beta^T$

向量内积的性质：

$(1)(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ 对称性

$(2)(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(3)(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

（(2)(3)）线性性

$(4)(\alpha,\alpha)\geq 0$ 正定性

等号成立当且仅当 $\alpha=0$

定义2：实数 $\left|\alpha\right|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

称为向量的长度（或模，或范数）

若 $\left|\alpha\right|=1,$ 称 α 为单位向量。

把向量单位化： 若 $\alpha \neq 0$, 则 $|\alpha| \neq 0$

考虑 $(\frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\alpha}{|\alpha|}) = \frac{1}{|\alpha|^2}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2}|\alpha|^2 = 1$

即 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 的模为1，为单位向量，称为把 α 单位化。

向量长度的性质：

（1）非负性： 当 $\alpha \neq 0$ 时, $|\alpha| > 0$

当 $\alpha = 0$ 时, $|\alpha| = 0$

（2）齐次性： $|k\alpha| = |k||\alpha|$

（3）柯西—施瓦兹不等式：$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$

（4）三角不等式：$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

非零向量 α 和 β 的夹角余弦：$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

定义3：非零向量 α,β 的夹角是

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$$

定义4：当向量α,β 的内积为零时，即 $(\alpha,\beta)=0$ 时，

即 $\alpha\perp\beta$ 时，称向量 α,β 正交。

注：（1）零向量与任何向量都正交。

（2）定义了内积的实向量空间称为欧氏空间。

2. Schmidt正交化、单位化法。

定义5：

正交向量组：非零实向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交。

正交单位向量组：（标准正交向量组）非零实向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交，且每个向量长度全为1。

即 $$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

定理：正交向量组是线性无关的。

定理：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则可以找到一个与之等价的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_s$ ，例如

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

……

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

3. 正交矩阵

定义6：**A是一个n阶实矩阵，若** $A^T A = E$，

则称A为正交矩阵。

定理：设A、B都是n阶正交矩阵，则

(1) $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$

(2) $A^{-1} = A^T$

(3) A^T (即A^{-1}) 也是正交矩阵。

(4) AB 也是正交矩阵。

定理：**n阶实矩阵A是正交矩阵**

$\Leftrightarrow$ **A的列（行）向量组为单位正交向量组。**

证明：设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

将A按列分块，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

A是正交矩阵$\Leftrightarrow$ $A^T A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

即 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i\neq j) \end{cases}$ 即A的列向量组是单位正交向量组。

注：n个n维向量，若长度为1，且两两正交，则以它们为列（行）向量构成的矩阵一定是正交矩阵。