习 题 解 答

习 题 一

（A）

1．用消元法解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+5x_2+7x_3=9, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=5. \end{cases}$

解 由原方程组得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ \qquad\quad x_2+2x_3=3, \end{cases}$$

得方程组的解为$\begin{cases} x_1=\quad\ x_3-2, \\ x_2=-2x_3+3. \end{cases}$令 $x_3=c$，得方程组的通解为

$$x_1=c-2, x_2=-2c+3, x_3=c \text{，其中} c \text{为任意常数}.$$

（2）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=\ \ 1, \\ x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=\ \ 5. \end{cases}$

解 由原方程组得同解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=\ \ 1, \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 4x_4=\ \ 4, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=-2, \end{cases}$$

所以方程组无解.

（3）$\begin{cases} x_1-\ \ x_2+2x_3=1, \\ x_1-2x_2-\ \ x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=3, \\ x_1\qquad\ \ +5x_3=0. \end{cases}$

解 由原方程组得同解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1, \\ \qquad x_2-\ \ x_3=0, \\ \qquad\quad -4x_3=1, \end{cases}$$

得方程组的解为 $x_1=\dfrac{5}{4}, x_2=-\dfrac{1}{4}, x_3=-\dfrac{1}{4}$.

（4）$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad + \quad x_4=-3, \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=-6, \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=\ \ 0, \\ \ \ x_1+3x_2+x_3-\ \ x_4=\ \ 2. \end{cases}$

解 由原方程组得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4=\ \ 2, \\ \qquad 3x_2+x_3+x_4=10, \\ \qquad\qquad 3x_3-x_4=\ \ 9, \\ \qquad\qquad\qquad x_4=\ \ 3, \end{cases}$$

得方程组的解为 $x_1=-2, x_2=1, x_3=4, x_4=3$.

2．用初等行变换将下列矩阵化成行阶梯形矩阵和行最简形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，得

行阶梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（不唯一）；行最简形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

行阶梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（不唯一）；行最简形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

行阶梯形：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（不唯一）；行最简形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（4）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

行阶梯形：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（不唯一）；行最简形：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3．用初等行变换解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11, \\ \quad - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

解 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 4 & \vdots & 11 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$,

得方程组的解为

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{7}{9},x_3=\frac{20}{9}.$$

（2）$\begin{cases} x_1-\ \ x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+\ \ x_2+6x_3+5x_4=2, \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2. \end{cases}$

解 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$,

得方程组无解.

（3）$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=\ \ 4, \\ x_1+3x_2\qquad\ -3x_4=\ \ 1, \\ \qquad x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=\ \ 4, \\ \quad 7x_2-3x_3-\ \ x_4=-18. \end{cases}$

解 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & \vdots & -18 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{47}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$,

得方程组的解为$\begin{cases} x_1=\frac{47}{2}, \\ x_2=x_4-\frac{15}{2}, \\ x_3=2x_4-\frac{23}{2}. \end{cases}$令 $x_4=c$，得方程组的通解为

$$x_1=\frac{47}{2},x_2=c-\frac{15}{2},x_3=2c-\frac{23}{2},x_4=c\text{，其中 } c \text{ 为任意常数}.$$

（4）$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+2x_5=1. \end{cases}$

解 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & \vdots & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & \vdots & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$,

得方程组的解为$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_5-\dfrac{1}{2}, \\ x_3= \qquad\quad -4x_5+3, \\ x_4=0. \end{cases}$令 $x_2=c_1, x_5=c_2$，得方程组的通解为

$$x_1=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}-\frac{1}{2}, x_2=c_1, x_3=-4c_2+3, x_4=0, x_5=c_2，\text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数}.$$

（B）

1．当 λ 为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=\lambda, \\ x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$有无穷多解，并求解.

解 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \vdots & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$.

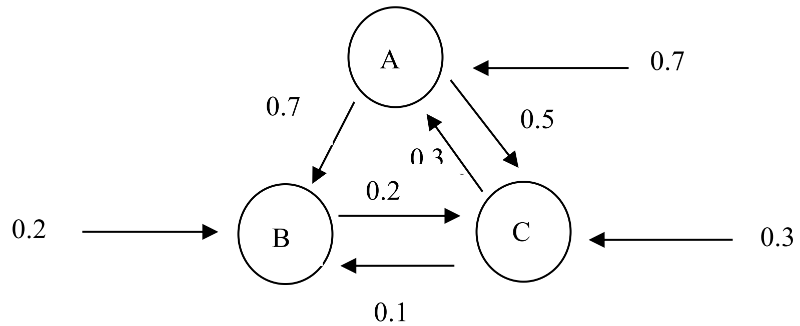
当 $\lambda=1$ 时，$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$，方程组有无穷多解，且解为

$$x_1=-x_2-x_3+1.$$

令 $x_2=c_1, x_3=c_2$，得方程组的通解为

$$x_1=-c_1-c_2+1, x_2=c_1, x_3=c_2，\text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数}.$$

3．（**联合收入问题**）已知三家公司 A、B、C 具有如下图所示的股份关系，即 A 公司掌握 C 公司 50%的股份，C 公司掌握 A 公司 30%的股份，而 A 公司 70%的股份不受另外两家公司控制等等.



现设 A、B 和 C 公司各自的营业净收入分别是 12 万元、10 万元、8 万元，每家公司的联合收入是其净收入加上其它公司的股份按比例的提成收入. 试确定各公司的联合收入及实际收入.

解 A 公司的联合收入为 309390.86 元，实际收入为 216573.60 元；

B 公司的联合收入为 137309.64 元，实际收入为 27461.93 元；

C 公司的联合收入为 186548.22 元，实际收入为 55964.47 元.

习　题　二

（A）

1．利用对角线法则计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

解　原式$=1$.

（2）$\begin{vmatrix} x & y \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}$.

解　原式$=xy(y-x)$.

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

解　原式$=18$.

（4）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

解　原式$=a^3$.

（5）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

解　原式$=-a^3$.

2．按定义计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & e \end{vmatrix}$.

解　原式$=a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ f & 0 & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix}=ab(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & c \\ d & e \end{vmatrix}=-abcd$.

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 原式$=n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$.

3．利用行列式的性质，计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} ab & ac & -ae \\ bd & -cd & de \\ -bf & cf & ef \end{vmatrix}$.

解 原式$=abcdef\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4abcdef$.

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 & 4 \end{vmatrix}$.

解 原式$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=192$.

（3）$\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}$.

解 原式$=(4a+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}=(4a+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & x & 0 \\ a & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=(4a+x)x^3$.

（4）$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$.

解　原式$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 35 & 12 \\ 15 & -1 \end{vmatrix}=-215.$$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

解　原式$\overset{\substack{r_1-\frac{1}{a_i}r_i \\ 2\le i\le n}}{=}\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\prod_{i=1}^{n}a_i$.

4．利用行列式展开定理，计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

解　原式$=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-7$.

（2）$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

解 原式$=\begin{vmatrix}0&0&3&0\\-3&2&2&3\\1&4&-3&4\\3&4&-4&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3&2&3\\1&4&4\\3&4&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&14&15\\1&4&4\\0&6&6\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}14&15\\6&6\end{vmatrix}=18$.

（3）$\begin{vmatrix}a_1&0&0&\cdots&0&1\\0&a_2&0&\cdots&0&0\\0&0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\1&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$.

解 原式$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\a_2&0&\cdots&0&0\\0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&0\end{vmatrix}+a_n\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix}a_2&0&\cdots&0\\0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{vmatrix}+a_1a_2\cdots a_n$$

$$=-a_2a_3\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_n=a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1a_n-1).$$

（4）$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$.

解 将行列式按第一行展开，得$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$，则

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-2=1,$$

所以$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+(n-1)=n+1$.

5．利用行列式展开定理证明：当$\alpha\neq\beta$时，有

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

证 将行列式按第一行展开，得 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，则

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})$$

$$=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\beta(\alpha+\beta)]=\alpha^n,$$

所以 $D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n$. （1）

由 D_n 关于 α 与 β 对称，得 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n$. （2）

由（1）与（2）解得 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

6．利用范德蒙德行列式计算行列式 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}$.

解 原式 $=(a+b+c)\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

7．设 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 3 & 3\\ 5 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$，试求 $\mathrm{A}_{14}+\mathrm{A}_{24}+\mathrm{A}_{34}+\mathrm{A}_{44}$ 和 $\mathrm{M}_{11}+\mathrm{M}_{12}+\mathrm{M}_{13}+\mathrm{M}_{14}$.

解 $\mathrm{A}_{14}+\mathrm{A}_{24}+\mathrm{A}_{34}+\mathrm{A}_{44}=0$；

$$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 3 & 3\\ 5 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=-84 .$$

8．利用克拉默法则解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$

解　经计算，得 $D=-142, D_1=-142, D_2=-284, D_3=-426, D_4=142$，所以方程组的解为 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=-1$.

（2）$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=11, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_4=0, \\ -7x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases}$

解　经计算，得 $D=16, D_1=16, D_2=0, D_3=32, D_4=-16$，所以方程组的解为

$$x_1=1, x_2=0, x_3=2, x_4=-1 .$$

9．试问 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-4x_2+7x_3=0, \\ -x_1+2x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

解　方程组有非零解，则 $D=0$．又

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=-5(3+\lambda),$$

所以 $\lambda=-3$.

10．试问 λ、μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

解　方程组有非零解，则 $D=0$．又

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix}=\mu(1-\lambda),$$

所以 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$.

（B）

1．选择题：

（1）设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则$\begin{vmatrix} 2a_{11} & \frac{1}{3}a_{13}-5a_{12} & -3a_{12} \\ 2a_{21} & \frac{1}{3}a_{23}-5a_{22} & -3a_{22} \\ 2a_{31} & \frac{1}{3}a_{33}-5a_{32} & -3a_{32} \end{vmatrix} =$（　　）.

（A）$2a$　　（B）$-2a$　　（C）$-3a$　　（D）$3a$

解　原式 $\underset{\substack{c_1\div 2 \\ c_3\div(-3)}}{=} 2\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{3}a_{13}-5a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{1}{3}a_{23}-5a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & \frac{1}{3}a_{33}-5a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2+5c_3 \\ c_2\times 3 \\ c_2\leftrightarrow c_3}}{=} -6\times\frac{1}{3}\times(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}) = 2a$.

选（A）.

（2）四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（　　）.

（A）$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　（B）$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

（C）$\left(a_1a_2 - b_1b_2\right)\left(a_3a_4 - b_3b_4\right)$　　（D）$\left(a_2a_3 - b_2b_3\right)\left(a_1a_4 - b_1b_4\right)$

解　将行列式的第 4 行依次与第 3 行、第 2 行交换，再将行列式的第 4 列依次与第 3 列、第 2 列交换，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \left(a_2a_3 - b_2b_3\right)\left(a_1a_4 - b_1b_4\right).$$

选（D）.

（3）设线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0. \end{cases}$若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则方程组的解为（　　）.

（A）$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$　　（B）$x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

（C）$x_1=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ （D）$x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

解 将方程组写成标准形式：$\begin{cases} a_{11}x_1-a_{12}x_2=-b_1, \\ a_{21}x_1-a_{22}x_2=-b_2. \end{cases}$有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}=-1, D_1=\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, x_2=\frac{D_2}{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

选（C）.

（4）方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解 方法一：将 $f(x)$ 按第 1 列展开，知 $f(x)$ 为 3 次多项式，因此有 3 个根．选（C）.

方法二：$f(x)=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)$ 有 3 个根

$$x_1=a, x_2=b, x_3=c.$$

选（C）.

2．计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

解 $D_4=-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}=(a_1c_2-a_2c_1)(b_1d_2-b_2d_1).$$

3．计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$．

解 $D_4=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot(-1)^{\frac{4\times 3}{2}}x\cdot x\cdot x=x^4.$$

4．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$．

解 $D_n\overset{\substack{r_n-r_{n-1}\\ r_{n-1}-r_{n-2}\\ \cdots\cdots\\ r_2-r_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}\underset{2\le j\le n}{\overset{}{\underset{c_j+c_1}{=}}}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(n+1)(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{1+n}(n+1)2^{n-2}.$$

5．计算五阶行列式$D_5=\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$·

解 方法一：一般地，对于此类n阶行列式，将其按第一行展开，得

$D_n=2\alpha D_{n-1}-\alpha^2 D_{n-2}$，

则$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})$

$$=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\alpha^{n-2}[(2\alpha)^2-\alpha^2-\alpha\cdot 2\alpha]=\alpha^n,$$

有

$$D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\alpha^{n-1})+\alpha^n=\alpha^2 D_{n-2}+2\alpha^n$$

$$=\cdots=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)\alpha^n=\alpha^{n-1}\cdot 2\alpha+(n-1)\alpha^n=(n+1)\alpha^n,$$

所以 $D_5=6a^5$.

方法二：由习题二（A）的第 5 题，得当 $\alpha=\beta$ 时，有

$$D_n=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=(n+1)\lim_{\beta\to\alpha}\beta^n=(n+1)\alpha^n,$$

所以 $D_5=6a^5$.

6．计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第一行展开，得 $D_n=xD_{n-1}+a_0$，则

$$D_n=x(xD_{n-2}+a_1)+a_0=x^2D_{n-2}+a_1x+a_0$$

$$=\cdots=x^{n-1}D_1+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$=x^{n-1}(x+a_{n-1})+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \quad =x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

7．已知 1326、2743、5005、3874 都能被 13 整除，不计算行列式的值，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 能被 13 整除.

证 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{c_4+1000c_1 \\ c_4+100c_2 \\ c_4+10c_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1326 \\ 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 5 & 0 & 0 & 5005 \\ 3 & 8 & 7 & 3874 \end{vmatrix}$.

由已知，得后行列式的第 4 列具有公因子 13，所以原行列式能被 13 整除.

8．证明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$．

证　构造5阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix},$$

则 $D_5 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$．　　（1）

将 D_5 按第5列展开，得

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} x^4 + \left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}\right) x^3 + \cdots . \qquad (2)$$

比较（1）与（2）右边 x^3 的系数，知结论成立．

9．证明：当 $(a-1)^2 = 4b$ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + a x_3 + (a+b)x_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解．

证　方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+b \end{vmatrix} = (a-1)^2 - 4b,$$

当 $D = 0$，即 $(a-1)^2 = 4b$ 时，方程组有非零解．

10．应用题：

（1）1；（2）$x - y + 1 = 0$．

习　题　三

（A）

1．下列矩阵中，哪些是对角矩阵、三角矩阵、数量矩阵、单位矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}，B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}，C=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\0&5&3\end{pmatrix}，D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

解 D 是数量矩阵，也是对角矩阵；A、C 是三角矩阵；B 都不是.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&2\\0&3&-1\end{pmatrix}$.

（1）计算 $2A+B$；　　（2）若 X 满足 $3A+X=2B$，求 X.

解 （1）$2A+B=\begin{pmatrix}3&4&7\\1&0&0\\4&1&1\end{pmatrix}$；

（2）$X=2B-3A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-5&-7&7\\-6&9&-5\end{pmatrix}$.

3．设有 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}$，且 $|A|=1$，$|B|=2$，求 $|A+2B|$.

解 $|A+2B|=\begin{vmatrix}a_1+2b_1&3c_1&3d_1\\a_2+2b_2&3c_2&3d_2\\a_3+2b_3&3c_3&3d_3\end{vmatrix}$

$$=9(\begin{vmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1&-c_1&-d_1\\b_2&-c_2&-d_2\\b_3&-c_3&-d_3\end{vmatrix})=9(|A|+2|B|)=45.$$

4．计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-6\\6&-1\end{pmatrix}$.

解 原式$=\begin{pmatrix}0&-9\\0&-18\end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&4&2\\7&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

解 原式$=\begin{pmatrix}8\\6\\6\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

解 原式$=10$.

（4）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

解 原式$=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\6 & 4 & 2\\9 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

（5）$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

解 原式$=E_3$.

（6）$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

解 原式$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$.

5．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$．求：

（1）AB与BA；　　　　（2）$(A+B)(A-B)$与A^2-B^2.

解 （1）$AB=\begin{pmatrix}10 & 0 & 3\\3 & 4 & 3\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 4 & 3\\3 & 0 & 10\end{pmatrix}$；

（2）$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 6\\ -6 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}$，$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ -3 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

6．求与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}(a\neq 0)$ 可交换的所有矩阵.

解　设与 A 可交换的矩阵 $B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$．由 $AB=BA$，得

$$\begin{cases}x_1+ax_3=x_1,\\ x_2+ax_4=ax_1+x_2,\\ x_3=x_3,\\ x_4=ax_3+x_4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4,\\ x_2=x_2,\\ x_3=0,\\ x_4=x_4.\end{cases}$$

令 $x_2=c,x_4=b$，得 $B=\begin{pmatrix}b & c\\ 0 & b\end{pmatrix}$，其中 b,c 为任意常数.

7．利用归纳法，计算下列矩阵的 k 次幂，其中 k 为正整数：

（1）$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

解　令 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，有

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}\cos 3\theta & -\sin 3\theta\\ \sin 3\theta & \cos 3\theta\end{pmatrix},\cdots$$

则 $A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

解　令 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，有 $A^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix},A^4=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix},\cdots$，则

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解 令 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，有

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},A^4=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix},A^5=\begin{pmatrix}1&5&10\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix},\cdots$$

则 $A^k=\begin{pmatrix}1&k&C_k^2\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$.

8．已知矩阵 $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，令 $A=\alpha^T\beta$，求 A^n，其中 n 为正整数.

解 $A^n=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta=(\beta\alpha^T)^{n-1}(\alpha^T\beta)=3^{n-1}(\alpha^T\beta)$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n-1}&\frac{3^{n-1}}{2}&3^{n-2}\\2\cdot3^{n-1}&3^{n-1}&2\cdot3^{n-1}\\3^n&\frac{3^n}{2}&3^{n-1}\end{pmatrix}.$$

9．若 A 为 n 阶对称矩阵，P 为 n 阶矩阵，证明 P^TAP 为对称矩阵.

证 因为 $(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T\overset{A^T=A}{=}P^TAP$，所以 P^TAP 为对称矩阵.

10．利用公式法求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$A=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}$.

解 $|A|=-5\neq0$，又 $A^*=\begin{pmatrix}1&-4\\-2&3\end{pmatrix}$，所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}$.

解 $|A|=1\neq0$，又 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-3&1\end{pmatrix}$，所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-3&1\end{pmatrix}$.

（3）$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

解 $|A|=-27\neq 0$，又 $A^*=-3A$，所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{9}A$.

（4）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

解 $|A|=-16\neq 0$，又 $A^*=-4A$，所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{4}A$.

11．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$.

解 $X=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-8&3\\-2&5&-1\end{pmatrix}$.

（2）设 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

解 由 $X=AX+B$，得 $(E-A)X=B$．又

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix},|E-A|=3\neq 0,$$

则 $E-A$ 可逆，且 $X=(E-A)^{-1}B$．经计算，得

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(E-A)^*=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\9&8&7\\6&5&4\end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&1\\9&8&7\\6&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

12．设 $A=diag(1,-2,1)$，且矩阵 B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，求矩阵 B.

解 等式 $A^*BA=2BA-8E$ 两边左乘以 A，得

$$|A|BA=2ABA-8A.$$

又 $|A|=-2\neq 0$，上式两边右乘以 A^{-1}，得 $-2B=2AB-8E$，即 $(E+A)B=4E$，所以

$$B=4(E+A)^{-1}=4diag(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})=2A.$$

13．设 A,B,C 都是 n 阶矩阵，证明：ABC 可逆的充分必要条件是 A,B,C 都可逆.

证 ABC 可逆 $\Leftrightarrow |ABC|\neq 0\Leftrightarrow |A|\cdot|B|\cdot|C|\neq 0\Leftrightarrow |A|\neq 0,|B|\neq 0,|C|\neq 0\Leftrightarrow$ A,B,C 都可逆.

14．设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A=O$，证明 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$.

证 由 $A^2-3A=O$，得 $(A-2E)(A-E)=2E$，即

$$(A-2E)\frac{A-E}{2}=E,$$

所以 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$.

15．设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^3=O$，证明 $E-A$ 及 $E+A$ 都是可逆矩阵.

证 由 $A^2=O$，得 $(E-A)(E+A+A^2)=E$ 及 $(E+A)(E-A+A^2)=E$，所以 $E-A$ 及 $E+A$ 都是可逆矩阵.

16．已知 A 为三阶方阵，且 $|A|=-2$，求：

（1）$\left|(2A)^{-1}\right|$；　（2）$|A^*|$；　（3）$\left|A^*-\frac{1}{2}A^{-1}\right|$.

解 （1）原式$=\left|\dfrac{1}{2}A^{-1}\right|=(\dfrac{1}{2})^3\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{16}$.

（2）原式$=|A|^2=4$.

（3）$A^*-\dfrac{1}{2}A^{-1}=|A|A^{-1}-\dfrac{1}{2}A^{-1}=-\dfrac{5}{2}A^{-1}$，有

$$原式=\left|-\frac{5}{2}A^{-1}\right|=(-\frac{5}{2})^3\frac{1}{|A|}=\frac{125}{16}.$$

17．设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$，求$\left(A^*\right)^{-1}$.

解 $|A|=-18$，则$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=-\dfrac{A}{18}$.

18．（1）设$P^{-1}AP=B$，证明$B^k=P^{-1}A^kP$.

（2）设$AP=PB$，且$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求$A$与$A^{2011}$.

证 （1）$B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP=P^{-1}A^kP$.

（2）由$AP=PB$，得$A=PBP^{-1}$，且$A^{2011}=PB^{2011}P^{-1}$. 又

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix},B^{2011}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B,$$

所以$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix},A^{2011}=PBP^{-1}=A$.

19．利用分块矩阵计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

解 将矩阵进行如下分块：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & E \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix},$$

则原式$=\begin{pmatrix} A_1 & E \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1B_1+B_2 \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix}$. 又

$$A_1B_1+B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_2B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

所以原式$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \\ d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

解 将矩阵进行如下分块：

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & a & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & b & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE & E \\ E & bE \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \\ \cdots & \cdots \\ d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ dE \end{pmatrix},$$

则原式$=\begin{pmatrix} aE & E \\ E & bE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ dE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aC+dE \\ C+bdE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & ac \\ ac & d \\ bd & c \\ c & bd \end{pmatrix}$.

20．利用分块矩阵求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

解 将矩阵进行如下分块：

$$A=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$. 又 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}, A_2^{-1}=(5)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$，所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

（2）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

解 将矩阵进行如下分块：

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}$. 又 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}, A_2^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

解 将矩阵进行如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 2 & 5 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix},$$

则 $A^{-1}=diag(A_1^{-1},A_2^{-1},A_3^{-1})$．又

$$A_1^{-1}=(2)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

21．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，利用分块矩阵计算 A^4.

解 将矩阵进行如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 \end{pmatrix}=diag(A_1,A_2),$$

则 $A^4 = diag(A_1^4, A_2^4)$．又 $A_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$，所以

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 40 \\ 0 & 0 & 40 & 41 \end{pmatrix}.$$

22．设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}$，利用分块矩阵计算 $\left|A^{2012}\right|$.

解　将矩阵进行如下分块：

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 12 & 2 \end{array}\right) = diag(A_1, A_2),$$

则 $|A| = |A_1| \cdot |A_2| = 1 \times (-8) = -8$，所以 $\left|A^{2012}\right| = |A|^{2012} = 8^{2012}$.

23.（1）设 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，且 m 阶矩阵 B 和 n 阶矩阵 C 均可逆，试证明 $A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$.

（2）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非零常数，求 A^{-1}.

证　（1）因为 $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & O \\ O & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} = E$，所以 A 可逆，

且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

（2）将矩阵进行如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \vdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix},$$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$. 又 $B^{-1}=diag(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_{n-1}^{-1}),C^{-1}=(a_n^{-1})$，所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

24．利用矩阵的初等行变换判断下列矩阵是否可逆；如可逆，求其逆矩阵．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \vdots & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

因为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq E$，所以 A 不可逆.

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $(A\quad E)=\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&0&0\\2&1&-2&\vdots&0&1&0\\2&-2&1&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\vdots&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\vdots&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$,

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解 $(A\quad E)=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1&\vdots&1&0&0&0\\0&2&2&1&\vdots&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&\vdots&0&0&1&0\\0&1&2&1&\vdots&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&\vdots&0&1&0&-1\\0&0&1&0&\vdots&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&\vdots&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$,

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$.

（4）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

解 $(A\quad E)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&\vdots&0&1&0&0\\1&-1&-1&-1&\vdots&0&0&1&0\\1&-1&-1&-1&\vdots&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&\vdots&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&\vdots&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&\vdots&0&0&-1&1\end{pmatrix},$$

所以A不可逆.

25．利用矩阵的初等行变换解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix}1&2&-3&\vdots&1&-3&0\\3&2&-4&\vdots&10&2&7\\2&-1&0&\vdots&10&7&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&6&4&5\\0&1&0&\vdots&2&1&2\\0&0&1&\vdots&3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&X\end{pmatrix}$,

所以$X=\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}$.

（2）$X\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$.

解 将方程两边转置，得$\begin{pmatrix}5&1&-5\\3&-3&2\\1&-2&1\end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix}-8&-5&-2\\3&9&15\\0&0&0\end{pmatrix}$．由

$$\begin{pmatrix}5&1&-5&\vdots&1&0&0\\3&-3&2&\vdots&0&1&0\\1&-2&1&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&4&7\\0&1&0&\vdots&2&5&8\\0&0&1&\vdots&3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&X^T\end{pmatrix},$$

得$X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

26．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix}1&-5&6&-2\\2&-1&3&-2\\-1&-4&3&0\end{pmatrix}$.

解 $A=\begin{pmatrix}1&-5&6&-2\\2&-1&3&-2\\-1&-4&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-5&6&-2\\0&9&-9&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $R(A)=2$.

（2）$\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$.

解 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$.

（3）$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}$.

解 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$.

（4）$\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$.

解 $A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-3&-5&0&-7\\0&4&9&1&13\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$.

27．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，求 λ 的值.

解 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-6&10\\0&1&5&\lambda-10\\0&0&\lambda-3&-3(\lambda-3)\end{pmatrix}$.

由 $R(A)=3$，得 $\lambda\neq3$.

28．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$，问 k 取何值时，使得

（1）$R(A)=1$；（2）$R(A)=2$；（3）$R(A)=3$.

解 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$，有

当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时，$R(A)=3$；当 $k=1$ 时，$R(A)=1$；当 $k=-2$ 时，$R(A)=2$.

29．设 A 是 4×3 矩阵，且 A 的秩为 2，而 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$，求 $R(AB)$.

解 $|B|=2\neq 0$，则 $R(AB)=R(A)=2$.

30．设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2+5A+6E=O$，证明：$R(A+2E)+R(A+3E)=n$.

证 由 $A^2+5A+6E=O$，得 $(A+2E)(A+3E)=O$，所以

$$R(A+2E)+R(A+3E)\leq n.$$

又

$$R(A+2E)+R(A+3E)=R(-A-2E)+R(A+3E)\geq R(E)=n,$$

所以 $R(A+2E)+R(A+3E)=n$.

31．设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$，试求 $R(A)$ 与 $R(A^*)$.

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$.

因为 $R(A)=2=3-1\Rightarrow R(A^*)=1$.

32．求解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-4x_3=0,\\ 2x_1+9x_2+6x_3=0,\\ 3x_1+5x_2+2x_3=0.\end{cases}$

解 方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-4\\2&9&6\\3&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=3$，所以方程组只有零解.

（2）$\begin{cases}x_1+2x_2-\ \ x_3=1,\\2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=3,\\-x_1+2x_2+3x_3=7.\end{cases}$

解 方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1&\vdots&1\\2&-1&1&\vdots&3\\-1&2&3&\vdots&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&1\\0&0&1&\vdots&2\end{pmatrix},$$

所以方程组的解为$x_1=1,x_2=1,x_3=2$.

（3）$\begin{cases}2x_1+3x_2-\ \ x_3-7x_4=0,\\3x_1+\ \ x_2+2x_3-7x_4=0,\\4x_1+\ \ x_2-3x_3+6x_4=0,\\\ \ x_1-2x_2+5x_3-5x_4=0.\end{cases}$

解 方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&-7\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{7}{2}\\0&0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_4,\\x_2=\dfrac{7}{2}x_4,\\x_3=\dfrac{5}{2}x_4.\end{cases}$$

令$x_4=2c$，得方程组的通解

$X=c(-1,7,5,2)^T$，其中c为任意常数.

（4）$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A) = 3 \neq R(B) = 4$，所以方程组无解.

（5）$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & \vdots & 15 \\ 1 & 3 & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & -4 & 6 & \vdots & 11 \\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 7, \\ x_2 = \ \ \ \ \ x_3 - 1. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$，得方程组的通解

$$X = c(-2,1,1)^T + (7,-1,0)^T\text{，其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

（6）$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & \vdots & -2 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 8 & 10 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 7x_4 + 4, \\ x_3 = \quad -3x_4 - 1. \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$，得方程组的通解为

$$X = c_1(1,1,0,0)^T + c_2(7,0,-3,1)^T + (4,0,-1,0)^T$$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

33．试问 λ 取何值时，下列非齐次线性方程组无解、有唯一解、有无穷多解.

（1）$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = -\lambda - 1. \end{cases}$

解　方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2 .$$

当 $|A| \neq 0$，即 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda = 0$ 时，

$$B = \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A) = 1 \neq R(B) = 2$，所以方程组无解.

当 $\lambda = -3$ 时，

$$B = \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & -3 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A) = R(B) = 2 < 3$，所以方程组有无穷多解.

（2）$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1. \end{cases}$

解　方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\kappa & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(10-\lambda)(1-\lambda)^2 .$$

当 $|A| \neq 0$，即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=10$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=2\neq R(B)=3$，所以方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

因为 $R(A)=R(B)=1<3$，所以方程组有无穷多解.

34．试问 λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1 \quad + x_3=\lambda,\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解，并求解.

解 方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & \lambda\\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2\\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -2 & 2-3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{array}\right).$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

有 $R(A)=R(B)=2<3$，则方程组有无穷多解，且解为

$$\begin{cases}x_1=-x_3+1,\\ x_2=2x_3-1.\end{cases}$$

令 $x_3=c$，得方程组的通解为

$$X=c(-1,2,1)^T+(1,-1,0)^T\text{，其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

35．求平面上三点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 共线的充分必要条件.

解 设直线方程为 $ax+by+c=0$．则

平面上三点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 共线 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1a+y_2b+c=0, \\ x_2a+y_2b+c=0, \\ x_3a+y_3b+c=0 \end{cases}$ 有非零解

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$，即 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=0$.

（B）

1．选择题：

（1）设 A,B 为 n 阶矩阵，以下结论正确的是（　　）.

(A)若 A 、 B 是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵.

(B) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

(C)若 $AB=O$，且 A 可逆，则 $B=O$.

(D)若 A 与 B 等价，则 A 与 B 相等.

解　选（C）.

（2）设 A 和 B 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有（　　）.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$.

(B) $AB=BA$.

(C) $|AB|=|BA|$.

(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

解　选（C）.

（3）设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵， A^* 是 A 的伴随矩阵， k 为常数，则 $(kA)^*=$（　　）.

(A) A^*.　　(B) kA^*.　　(C) $k^{n-1}A^*$.　　(D) k^nA^*.

解　由伴随矩阵的定义，知选（C）.

（4）设 A 和 B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩（　　）.

(A)必有一个等于零.

(B)一个等于 n，一个小于 n.

(C)都等于 n.

(D)都小于 n.

解　由 $AB=O$，得 $R(A)+R(B)\leq n$．又 $A\neq O,B\neq O$，知 $R(A)\geq 1,R(B)\geq 1$．所以 $R(A)<n,R(B)<n$，故选（D）.

（5）对于非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$，若 $R(A)=r$，则（　　）.

(A)当 $r=m$ 时， $A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$ 有解.

(B)当 $r=n$ 时， $A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$ 有唯一解.

(C)当 $m=n$ 时， $A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$ 有唯一解.

(D)当 $r<n$ 时， $A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}$ 有无穷多解.

解　当$r=m$时，$m\ge R(B)\ge R(A)=r=m\Rightarrow R(A)=R(B)=r$，故选（A）.

2．设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&2&6\\0&3&3&4\\0&0&4&5\\0&0&0&5\end{pmatrix}$，试求$\left|(E-A^{-1}B)^T A^T\right|$.

解　$(E-A^{-1}B)^T A^T=(A(E-A^{-1}B))^T=(A-B)^T$，则

$$\left|(E-A^{-1}B)^T A^T\right|=\left|(A-B)^T\right|=|A-B|=0.$$

3．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&1\end{pmatrix}$，且$A^2B-A-B=E$，试求$|B|$.

解　由$A^2B-A-B=E$，得$(A+E)(A-E)B=A+E$．又$|A+E|=3\ne 0$，有

$$(A-E)B=E,$$

两边取行列式，得$|A-E|\cdot|B|=1$，所以$|B|=\dfrac{1}{|A-E|}=-\dfrac{1}{3}$.

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&4&5\end{pmatrix}$，且$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，试求$(E+B)^{-1}$.

解　$E+B=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)=2(E+A)^{-1}$，则

$$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&2&3\end{pmatrix}.$$

5．设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},B=P^{-1}AP$，试求$B^{2012}-A^2$.

解　$A^2=diag(-1,-1,1)\Rightarrow A^4=E$，所以

$$B^{2012}-A^2=(B^4)^{503}-A^2=E-A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

6．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，试求矩阵 X．

解 由 $A^*X=A^{-1}+2X$，得 $|A|X=E+2AX$．又 $|A|=4$，有 $X=\dfrac{1}{2}(2E-A)^{-1}$．

经计算可得 $(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，所以 $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

7．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AX=2X+\beta$，试求矩阵 X．

解 由 $AX=2X+\beta$，得 $(A-2E)X=\beta$．（注意 $|A-2E|=0$）又

$$\begin{pmatrix}A-2E & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0 & \vdots & 0\\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & \vdots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

得方程组的解为 $\begin{cases}x_1=x_3+\frac{1}{2},\\ x_2=2x_3+1.\end{cases}$ 令 $x_3=c$，得 $X=\begin{pmatrix}c+\frac{1}{2}\\ 2c+1\\ c\end{pmatrix}$, c 为任意常数.

8．设 $n(n\ge 3)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$，试求 A 的秩 $R(A)$.

解 $|A|=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$.

当 $a\ne 1$ 且 $a\ne -\dfrac{1}{n-1}$ 时，A 为非奇异矩阵，所以 $R(A)=n$；

当 $a=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，则 $R(A)=1$；

当 $a=-\dfrac{1}{n-1}$ 时，A 的 $n-1$ 阶子式

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{vmatrix}_{n-1}=[1+(n-2)a](1-a)^{n-2}\neq 0$$

而 $|A|=0$，所以 $R(A)=n-1$.

9．试求 p,q 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+\ \ x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+\ \ x_2-6x_3+4x_4=0,\\3x_1+2x_2+px_3+qx_4=0,\\2x_1+\ \ x_2\qquad\ \ +\ \ x_4=0\end{cases}$ 有非零解，并求通解.

解　方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&p&q\\2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\0&1&2&2\\0&0&2&-1\\0&0&0&p+2q-6\end{pmatrix}.$$

当 $p+2q=6$ 时，$R(A)=3<4$，方程组有非零解，且

$$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&-\dfrac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=x_4,\\x_2=-3x_4,\\x_3=\dfrac{1}{2}x_4.\end{cases}$$

令 $x_4=2c$，得方程组的通解为

$X=c(2,-6,1,2)^T$，其中 c 为任意常数.

10．试求a取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+ax_2-\ x_3=1,\\ ax_1-\ x_2+\ x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$无解、有唯一解或无穷多解，并在有无穷多解时求方程组的通解.

解　方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & a & -1\\ a & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}=(a-1)(5a+4).$$

当$a\neq 1$且$a\neq -\dfrac{4}{5}$时，方程组有唯一解.

当$a=1$时，

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 1 & -1 & 1 & \vdots & -1\\ 4 & 5 & -5 & \vdots & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=R(B)=2<3$，所以方程组有无穷多解，且通解为

$$X=c(0,1,1)^T+(1,-1,0)^T\text{，其中}c\text{为任意常数.}$$

当$a=-\dfrac{4}{5}$时，方程组无解.

11．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零矩阵．试求常数$t$，使得$AB=O$.

解　$AB=O,B\neq O\Leftrightarrow AX=0$有非零解$\Leftrightarrow |A|=0$．又$|A|=7(t+3)$，所以$t=-3$.

12．证明：（1）设A,B为矩阵，则$AB-BA$有意义的充分必要条件是A,B为同阶矩阵.

（2）对任意n阶矩阵A,B，都有$AB-BA\neq E$，其中E为单位矩阵.

证　（1）设A为$m\times n$矩阵，B为$s\times t$矩阵，则

$$AB-BA\text{有意义}\Leftrightarrow\begin{cases}n=s,\\ t=m,\\ m=s,\\ t=n.\end{cases}\Leftrightarrow m=n=s=t,$$

即A,B为同阶矩阵.

（2）设$A=(a_{ij})_{n\times n},B=(b_{ij})_{n\times n}$，则$AB-BA$的主对角线上元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}b_{st}a_{ts}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ts}b_{st}=0,$$

而 E 的主对角线上元素之和为 n，所以 $AB-BA\neq E$．

13．证明：任意 n 阶矩阵都可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和．

证 设 A 为任意 n 阶矩阵，则

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2},$$

其中为 $\frac{A+A^T}{2}$ 对称矩阵，$\frac{A-A^T}{2}$ 为反对称矩阵．（你是否能联系到函数可以表示为奇函数与偶函数之和）

14．已知 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=A+B$，试证 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$．

证 由 $AB=A+B$，得

$$(A-E)(B-E)=E,$$

所以 $A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=B-E$．

15．设 A 为元素全为 1 的 $n(n>1)$ 阶方阵，证明：$(E-A)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A$．

证 $(E-A)(E-\frac{1}{n-1}A)=E-\frac{n}{n-1}A+\frac{1}{n-1}A^2$．又 $A^2=nA$，故

$$(E-A)(E-\frac{1}{n-1}A)=E,$$

所以 $(E-A)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A$．

16．设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，且 $|A|\neq 0$，证明 $|B|\neq 0$．

证 A 与 B 等价，则存在 n 阶可逆矩阵 P 与 Q，使得 $B=PAQ$，有

$$|B|=|PAQ|=|P|\cdot|A|\cdot|Q|\neq 0.$$

注：此结论告诉我们初等变换不改变矩阵的可逆性．

17．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明 $R(A)+R(A-E)=n$．

证 因为 $A(A-E)=A^2-A=O$，所以 $R(A)+R(A-E)\leq n$．又

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(-A+E)\geq R(E)=n,$$

所以 $R(A)+R(A-E)=n$．

18．设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$．若 $AB=E$，其中 E 为 n 阶单位矩

阵．证明方程组$BX=O$只有零解．

证　由$AB=E$，得$R(AB)=n$．又$n\ge R(B)\ge R(AB)=n$，得$R(B)=n$，所以方程组$BX=O$只有零解．

习　题　四

（A）

1．设$v_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},v_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},v_3=(3,4,0)^{\mathrm{T}}$，求$v_1-v_2$和$3v_1+2v_2-v_3$．

解　$v_1-v_2=(1,0,-1)^T$，$3v_1+2v_2-v_3=(0,1,2)^T$．

2．求解下列向量方程：

（1）$3X+\alpha=\beta$，其中$\alpha=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\beta=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$．

解　$X=\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{3}(0,1,-2)^T$．

（2）$2X+3\alpha=3X+\beta$，其中$\alpha=(2,0,1)^T$，$\beta=(3,1,-1)^T$．

解　$X=3\alpha-\beta=(3,-1,4)^T$．

3．试问向量β可否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示？若能，求出$\beta$由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示的表达式．

（1）$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix};\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解　设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$．由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&-1&-1&\vdots&2\\1&-1&1&-1&\vdots&1\\1&-1&-1&1&\vdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\vdots&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\vdots&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\vdots&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

得$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=4$，所以$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，

且 $x_1=\frac{5}{4}, x_2=\frac{1}{4}, x_3=-\frac{1}{4}, x_4=-\frac{1}{4}$，得表达式 $\beta=\frac{1}{4}(5\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$.

（2）$\beta=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix};\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$．由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&0\\1&1&1&0&\vdots&2\\1&1&0&0&\vdots&0\\1&0&0&0&\vdots&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&-1\\0&1&0&0&\vdots&1\\0&0&1&0&\vdots&2\\0&0&0&1&\vdots&-2\end{pmatrix},$$

得 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=4$，所以 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，

且 $x_1=-1, x_2=1, x_3=2, x_4=-2$，得表达式 $\beta=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$.

4．讨论下列向量组的线性相关性：

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\1\\-7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

解 向量组所含向量个数大于向量的维数，所以该向量组线性相关.

（2）$\alpha_1=\begin{pmatrix}ax\\bx\\cx\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}ay\\by\\cy\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}az\\bz\\cz\end{pmatrix}$，其中 a,b,c,x,y,z 全不为零.

解 α_1,α_2 对应的分量成比例，则 α_1,α_2 线性相关，所以该向量组线性相关.

（3）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$.

解 $$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\-1&2&1\\2&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=3$，所以该向量组线性无关.

（4）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&-2&-2&0\\3&0&-1&1\\0&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&3&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

因为$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3<4$，所以该向量组线性相关.

5.（1）设$\alpha\in R^n$，证明：α线性相关当且仅当$\alpha=0$.

（2）设$\alpha_1,\alpha_2\in R^n$，证明：α_1,α_2线性相关当且仅当它们对应的分量成比例.

证 （1）α线性相关$\Leftrightarrow k\alpha=0,k\neq0\Leftrightarrow\alpha=0$.

（2）α_1,α_2线性相关$\Leftrightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，其中$k_1,k_2$不全为零．不妨设$k_1\neq0$，则

$$\alpha_1,\alpha_2\text{线性相关}\Leftrightarrow\alpha_1=(-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2=l\alpha_2\text{，即}\alpha_1,\alpha_2\text{对应的分量成比例.}$$

6．任取$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R^n$，又记$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$必线性相关.

证 显然$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta_2+\beta_4$，即

$$\beta_1+(-1)\beta_2+\beta_3+(-1)\beta_4=0,$$

所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$必线性相关.

7．若向量组β_1,β_2,β_3由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示为

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\\\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\\\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.\end{cases}$$

试将向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$表示.

解 由 $\begin{cases} \beta_1 = \ \ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ \beta_2 = \ \ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \\ \beta_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2}\beta_1 + \dfrac{1}{2}\beta_2, \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2}\beta_2 + \dfrac{1}{2}\beta_3, \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2}\beta_1 + \dfrac{1}{2}\beta_3. \end{cases}$

8．设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in R^n$ 为一组非零向量，按所给的顺序，每一 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都不能由它前面的 $i-1$ 个向量线性表示，证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关．

证 用数学归纳法证明． $s=1$ 时， $\alpha_1 \neq 0$ ，则 α_1 线性无关．设 $s=m$ 时成立，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关．当 $s=m+1$ 时，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性相关，则 α_{m+1} 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，矛盾，所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关．

9．设非零向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，证明：表示法唯一当且仅当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关．

证 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \mid \beta).$$

则

表示法唯一 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有唯一解

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \mid \beta) = s$$

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \text{ 线性无关}.$$

10．设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in R^n$ ，证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当任一 n 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示．

证 必要性： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，任取 $\beta \in R^n$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示．

充分性：任一 n 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，则单位坐标向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，有

$$n = R(e_1, e_2, \cdots, e_n) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \le n,$$

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = n$，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

11．求下列各向量组的秩及其一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

（1）$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解 $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$，本身为一个极大无关组；

（2）$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

解 $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$，$\alpha_1, \alpha_2$ 为一个极大无关组，且

$$\alpha_3 = -\frac{11}{9}\alpha_1 + \frac{5}{9}\alpha_2，\ \alpha_4 = -\frac{2}{9}\alpha_1 - \frac{4}{9}\alpha_2.$$

（3）$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解 $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组，且

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2，\ \alpha_5 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4.$$

12．设 A：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 B：$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 为两个同维向量组，秩分别为 r_1 和 r_2；向量组 $C=A\bigcup B$ 的秩为 r_3．证明：$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$．

证 先证 $\max\{r_1,r_2\}\le r_3$．显然 A 组与 B 组分别可由 C 组线性表示，则 $r_1\le r_3$，且 $r_2\le r_3$，所以 $\max\{r_1,r_2\}\le r_3$．

次证 $r_3\le r_1+r_2$．设 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1}$ 为 A 组的一个极大无关组，$\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 为 B 组的一个极大无关组，则 C 组可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 线性表示，有

$$r_3\le R(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2})\le r_1+r_2.$$

13．设 B 为 n 阶可逆阵，A 与 C 均为 $m\times n$ 矩阵，且 $AB=C$．试证明 $R(A)=R(C)$．

证 由 $AB=C$，知 C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示，则 $R(C)\le R(A)$．

因为 B 可逆，则 $A=CB^{-1}$，知 A 的列向量组可由 C 的列向量组线性表示，则 $R(A)\le R(C)$．所以 $R(A)=R(C)$．

14．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：$A=O$ 当且仅当 $R(A)=0$．

证 必要性显然，下证充分性：$R(A)=0\Rightarrow A=O$．

设 α 为 A 的任一列向量，则 $R(\alpha)\le R(A)=0$，所以 $R(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=0$．由 α 的任意性知 $A=O$．

15．设 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,2,5)^T$，$\alpha_3=(1,3,6)^T$；$\beta=(1,5,11)^T$．

（1）求由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的一组基与维数；

（2）求向量 β 在此组基下的坐标．

解 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta)=\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&1\\1&2&3&\vdots&5\\1&5&6&\vdots&11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&2\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$，得

（1）α_1,α_2 为由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的一组基，且维数为 2；

（2）向量 β 在此组基下的坐标为 $(1,2)$．

16．设 $\alpha_1=(-2,1,3)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T,\alpha_3=(-2,-5,-1)^T$．证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一

组基，并求向量$\beta=(2,6,3)^T$在这组基下的坐标.

证 由$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2 & \vdots & 2\\ 1 & 0 & -5 & \vdots & 6\\ 3 & 1 & -1 & \vdots & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -8\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基，且$\beta$在这组基下的坐标为$(\frac{7}{2},-8,-\frac{1}{2})$.

17．在R^3中取两组基：$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(3,7,1)^T$；

$$\beta_1=(3,1,4)^T,\beta_2=(5,2,1)^T,\beta_3=(1,1,-6)^T.$$

（1）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

（2）若向量γ在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(1,1,1)$，求向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标.

解 设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$．由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 7 & \vdots & 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 4 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & -27 & -71 & -41\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 9 & 20 & 9\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 & 12 & 8\end{pmatrix}=(E\,|\,P),$$

得（1）由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$P=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}$.

（2）γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

$$X=PY=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-139\\ 38\\ 24\end{pmatrix}.$$

18．在R^4中求一向量γ，使其在下面两组基：

$$\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,1,0)^T,\alpha_4=(0,0,0,1)^T;$$

$$\beta_1=(2,1,-1,1)^T,\beta_2=(0,3,1,0)^T,\beta_3=(5,3,2,1)^T,\beta_4=(6,6,1,3)^T$$

下有相同的坐标.

解 由$\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)X=X,\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)X$，得$\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\gamma$，即

$$((\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)-E)\gamma=0.$$

令$\gamma=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$．由

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)-E=\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=-x_4,\\x_3=-x_4.\end{cases}$取$x_4=1$，得$\gamma=(-1,-1,-1,1)^T$.

19．求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

（1）$\begin{cases}x_1+\ x_2+\ x_3=0,\\ \qquad x_2+\ x_3=0,\\x_1+2x_2+2x_3=0.\end{cases}$

解 由$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-x_3.\end{cases}$

令$x_3=1$，得方程组的一个基础解系$\xi=(0,-1,1)^T$，通解为$X=c\xi$，其中c为任意常数.

（2）$\begin{cases}x_1+x_2-\ x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\3x_1+x_2+\qquad x_4=0.\end{cases}$

解 由$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&2&-1\\3&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3,\\x_2=\ \frac{3}{2}x_3-x_4.\end{cases}$

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系$\xi_1=(-1,3,2,0)^T$，$\xi_2=(0,-1,0,1)^T$，通解为$X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中$c_1,c_2$为任意常数.

（3）$\begin{cases} x_1-2x_2-\ \ x_3-\ \ x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+\ 5x_3+\ 3x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

解 由 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4, \\ x_3=\qquad -\frac{5}{7}x_4. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系 $\xi_1=(2,1,0,0)^T$， $\xi_2=(2,0,-5,7)^T$，通解为 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

（4）$\begin{cases} 2x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4+\ x_5=0, \\ x_1-\ x_2+\ x_3+\ x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0. \end{cases}$

解 由 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

$$\begin{cases} x_1=\qquad\qquad \frac{1}{3}x_5, \\ x_2=x_3+x_4-\frac{5}{3}x_5. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系

$$\xi_1=(0,1,1,0,0)^T，\ \xi_2=(0,1,0,1,0)^T，\ \xi_3=(1,-5,0,0,3)^T，$$

通解为 $X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

20．判断下列非齐次线性方程组是否有解，若有解，并求其解（在有无穷多解的情况下，用基础解系表示全部解）.

（1）$\begin{cases}2x_1-4x_2-x_3 \qquad =4,\\ -x_1-2x_2 \qquad - \quad x_4=4,\\ \qquad 3x_2+x_3+2x_4=1,\\ 3x_1+\quad x_2 \qquad +2x_4=-3.\end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1 & 0 & \vdots & 4\\ -1 & -2 & 0 & -1 & \vdots & 4\\ 0 & 3 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2 & \vdots & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{14}{5}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{13}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=R(B)=4$，所以方程组有唯一解，且解为$X=(-\frac{14}{5},-\frac{13}{5},\frac{4}{5},4)^T$.

（2）$\begin{cases}x_1+\quad x_2+\quad x_3+\quad x_4+\quad x_5=-1,\\ 3x_1+2x_2+\quad x_3+\quad x_4-3x_5=-5,\\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\quad x_5=-7.\end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & -5\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 2\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

因为$R(A)=R(B)=2<5$，所以方程组有无穷多解，且

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3+\quad x_4+5x_5-3,\\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+2.\end{cases}$$

令$x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，得通解为

$$X=(-3,2,0,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0,0)^T+c_2(1,-2,0,1,0)^T+c_3(5,-6,0,0,1)^T$$

其中c_1,c_2,c_3为任意常数.

（3）$\begin{cases}2x_1+3x_2-\quad x_3-5x_4=-2,\\ x_1+2x_2-\quad x_3+\quad x_4=-2,\\ x_1+\quad x_2+\quad x_3+\quad x_4=5,\\ 3x_1+\quad x_2+2x_3+3x_4=4.\end{cases}$

解　方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & -5 & \vdots & -2\\ 1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 5\\ 3 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=R(B)=4$，所以方程组有唯一解，且解为$X=(-3,3,5,0)^T$.

21．设三元非齐次线性方程组$AX=\beta$，矩阵A的秩为2，且$\eta_1=(1,2,2)^T$，$\eta_2=(3,2,1)^T$是方程组的两个特解，试求此方程组的全部解.

解　由已知得导出组的基础解系含$n-R(A)=3-2=1$个解向量，设为ξ，则可取

$$\xi=\eta_2-\eta_1=(2,0,-1)^T.$$

所以方程组的通解为$X=c\xi+\eta^*=c(2,0,-1)^T+(1,2,2)^T$，其中$c$ 为任意常数.

22．设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，求证$\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$也是$AX=0$的基础解系.

证　显然$\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$是$AX=0$的解，只需证明它们线性无关.

$$(\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)K_{m\times m}.$$

由$|K|=1\neq 0$，得$R(\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m)=R(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=m$，所以$\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$线性无关.

23．设A是n阶方阵．证明：存在一个n阶非零矩阵B，使$AB=O$的充要条件是$|A|=0$.

证　存在$B\neq O$，使得$AB=O\Leftrightarrow AX=0$有非零解$\Leftrightarrow |A|=0$.

24．设A是n阶方阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times s$矩阵，且$R(B)=n$．证明：

（1）若$AB=O$，则$A=O$；

（2）若$AB=B$，则$A=E_n$.

证　（1）$AB=O$，则$R(A)+R(B)\le n$．又$R(B)=n\Rightarrow R(A)=0\Rightarrow A=O$.

（2）$AB=B\Rightarrow(A-E)B=O$．由（1）得$A-E=O\Rightarrow A=E$.

（B）

1．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，问：

（1）α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示？为什么？

（2）α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？为什么？

解　（1）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则$\alpha_2,\alpha_3$线性无关；又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示；所以$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.

（2）若α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，又$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\alpha_4$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，有$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，矛盾，所以$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

2．若向量组$\alpha_i=(a,\cdots,b,\cdots,a)^{\mathrm{T}}$，$i=1,\cdots,n$，其中$\alpha_i$的第$i$个分量为$b$，余皆为$a$．试讨论该向量组的线性相关性.

解　$$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

当$b\neq a$且$b\neq -\dfrac{1}{n-1}a$时，$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\neq 0$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；

当$b=a$或$b=-\dfrac{1}{n-1}a$时，$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关.

3．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，试讨论$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的线性相关性．若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关呢？

解　$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K_{s\times s}，且$$

$$|K|=1+(-1)^{s-1}.$$

（1）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则

当s为偶数时，$|K|=0$，有$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le R(K)<s$，此时$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关；

当s为奇数时，$|K|\neq 0$，有$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$，此时$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

线性无关.

（2）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，此时 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

4．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维非零向量，A 为 n 阶方阵，若

$$A\alpha_1=\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_3,\cdots,\ \cdots,A\alpha_{s-1}=\alpha_s,\ A\alpha_s=0,$$

试证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{s-1}\alpha_{s-1}+x_s\alpha_s=0$. 该式两边左乘以 A，得

$$x_1\alpha_2+x_2\alpha_3+\cdots+x_{s-1}\alpha_s=0$$

依此类推，得 $x_1\alpha_s=0$．由 $\alpha_s\ne 0$，得 $x_1=0$.

同理可证 $x_2=0,\cdots,x_s=0$．所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

5．设 $A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，其中 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量，且 $\alpha_1\ne 0$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$. （1）

（1）式两边左乘以 A，得 $(x_1+x_2)\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$. （2）

（2）减去（1），得 $x_2\alpha_1+x_3\alpha_2=0$. （3）

（3）式两边左乘以 A，得 $(x_2+x_3)\alpha_1+x_3\alpha_2=0$. （4）

（4）减去（3），得 $x_3\alpha_1=0$．因为 $\alpha_1\ne 0$，所以 $x_3=0$.

代入（3），得 $x_2\alpha_1=0$，所以 $x_2=0$．代入（1），得 $x_1\alpha_1=0$，所以 $x_1=0$.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

6．设 A 为 n 阶方阵，α 为 n 维列向量．证明：若存在正整数 m，使 $A^m\alpha=0$，而 $A^{m-1}\alpha\ne 0$，则 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

证 设 $x_0\alpha+x_1A\alpha+\cdots+x_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$，该式两边左乘以 A^{m-1}，得

$$x_0A^{m-1}\alpha=0.$$

因为 $A^{m-1}\alpha \neq 0$，所以 $x_0 = 0$．

同理可证 $x_1 = \cdots = x_{m-1} = 0$．所以 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关．

7．设向量组 A 的秩与向量组 B 相同，且 A 组可由 B 组线性表示，证明 A 组与 B 组等价．

证 设 $R(A) = R(B) = r$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 A 组的一个极大无关组，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 为 B 组的一个极大无关组．由 A 组可由 B 组线性表示，得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) K_{r\times r}.$$

又 $r \geq R(K) \geq R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$，则 $R(K) = r$，即 K 为可逆矩阵，有

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) K^{-1},$$

即 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，所以 B 组可由 A 组线性表示.故 A 组与 B 组等价．

8．设向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，向量组 B：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 能由 A 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) K_{s\times r},$$

其中 $r \leq s$，证明：向量组 B 线性无关当且仅当 K 的秩 $R(K) = r$．

证 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) X_{r\times 1} = 0$ 只有零解

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)(K_{s\times r} X_{r\times 1}) = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\overset{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\text{线性无关}}{\Longleftrightarrow} K_{s\times r} X_{r\times 1} = 0 \text{ 只有零解} \Leftrightarrow R(K) = r.$$

9．设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵，试证明：$R(A+B) \leq R(A\,|\,B) \leq R(A) + R(B)$．

证 先证 $R(A+B) \leq R(A\,|\,B)$．显然 $A+B$ 的列向量组可由 A 的列向量组和 B 的列向量组线性表示，则 $R(A+B) \leq R(A\,|\,B)$．

此证 $R(A\,|\,B) \leq R(A) + R(B)$．设 $R(A) = r, R(B) = s$，$\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 分别为 A 与 B 的列向量组的一个极大无关组，则 $(A\,|\,B)$ 的列向量组可由 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 线性表示，有

$$R(A\,|\,B) \leq r + s = R(A) + R(B),$$

即 $R(A\,|\,B) \leq R(A) + R(B)$．

10．设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一组基，$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$．

（1）证明 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的一组基；

（2）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

（3）若向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,0,0)$，求向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

证 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

（1）由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，得 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 β_1,β_2,β_3 线性无关，所以 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的一组基.

（2）由（1）式，得由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

（3）γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

$$Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T.$$

11．当 p,q 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+\ \ qx_2+x_3=0,\\ x_1+2qx_2+x_3=0,\\ px_1+\ \ \ x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解？有非零解？在方程组有非零解时，求其全部解.

解 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&q&1\\1&2q&1\\p&1&1\end{vmatrix}=q(1-p).$$

当 $|A|\neq 0$，即 $q(1-p)\neq 0$ 时只有零解.

当 $|A|=0$，即 $q(1-p)=0$ 时有非零解，且通解为

$$X=c(-1,p-1,1)^T，其中 c 为任意常数.$$

12．设 X_1,X_2,X_3 是 $AX=\beta$ 的三个特解，则（　　）也是 $AX=\beta$ 的解.

（A）$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$；（B）$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$，$k_1+k_2+k_3=1$；

（C）$k(X_1+X_2)+X_3$；（D）$k_1(X_1-X_2)+k_2X_3$.

解 B．实质上，一般地有：若 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 为 $AX=\beta$ 的解，则

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s \text{ 也是 } AX=\beta \text{ 的解} \Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=1.$$

13．考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-3x_5=a, \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ \ x_5=b. \end{cases}$ 问 a,b 取什么值时有解？当有解时，求它的通解.

解 方程组的增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+3 \end{pmatrix},$$

则当 $a=b=-3$ 时方程组有解，且

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以方程组的通解为

$$X=(-3,3,0,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0,0)^T+c_2(1,-2,0,1,0)^T+c_3(5,-6,0,0,1)^T,$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数

14．设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$．向量

$$\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4.$$

试求方程组 $AX=\beta$ 的通解.

解 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，得 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，即 $R(A)=3$，从而 $AX=0$ 的基础解系含

$$n-R(A)=4-4=1$$

个线性无关的解向量，设为 ξ．由 $\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，得

$$-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0,$$

则 $(-1,1,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的解，故可取 $\xi=(-1,1,-1,1)^T$．

由 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$，得 $(1,2,3,4)^T$ 是 $AX=\beta$ 的一个特解．所以 $AX=\beta$ 的通解为 $X=c(-1,1,-1,1)^T+(1,2,3,4)^T$，其中 c 为任意常数．

15．设 A 为 $m\times r$ 矩阵，B 为 $r\times n$ 矩阵，且 $AB=O$．求证：

（1）B 的各列向量是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解；

（2）若 $R(A)=r$，则 $B=O$；

（3）若 $B\neq O$，则 A 的各列向量线性相关．

证 （1）令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$．由 $AB=O$，得

$$(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0),$$

即 $A\beta_j=0, j=1,2,\cdots,n$，所以 B 的各列向量是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解．

（2）若 $R(A)=r$，则 $AX=0$ 只有零解，所以 $B=O$．

（3）若 $B\neq O$，则 $AX=0$ 有非零解，所以 A 的各列向量线性相关．

16．设 A 为 n 阶方阵（$n\geq 2$），证明：

（1）当 $R(A)=n$ 时，$R(A^*)=n$；

（2）当 $R(A)=n-1$ 时，$R(A^*)=1$；

（3）当 $R(A)<n-1$ 时，$R(A^*)=0$．

证 （1）当 $R(A)=n$ 时，$|A|\neq 0\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以 $R(A^*)=n$．

（2）当 $R(A)=n-1$ 时，由 $AA^*=|A|E=O$，得 $R(A)+R(A^*)\leq n$ 有 $R(A^*)\leq 1$．又 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，则 $A^*\neq O\Rightarrow R(A^*)\geq 1$，所以 $R(A^*)=1$．

（3）当 $R(A)<n-1$ 时，则 A 中所有一个 $n-1$ 阶子式全为零，有 $A^*=O\Rightarrow R(A^*)=0$．

习　题　五

(A)

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解特征方程组 $(A-E)X = 0$. 由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $x_1 = -x_2$，令 $x_2 = 1$，得属于 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量 $\xi_1 = (-1,1)^T$，全部特征向量为 $k_1\xi_1, k_1 \neq 0$.

当 $\lambda_2 = 6$ 时，解特征方程组 $(A-6E)X = 0$.

$$A-6E = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $x_1 = \frac{1}{4}x_2$，令 $x_2 = 4$，得属于 $\lambda_2 = 6$ 的线性无关的特征向量是 $\xi_2 = (1,4)^T$，全部特征向量为 $k_2\xi_2, k_2 \neq 0$.

（2）$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_{1,2} = 1$ 时，解特征方程组 $(A-E)X = 0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}2&-4&0\\1&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-\ \ x_3,\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_3.\end{cases}$令$x_3=2$，得属于$\lambda_{1,2}=1$的线性无关的特征向量是$\xi_1=(-2,-1,2)^T$，全部特征向量为$k_1\xi_1,k_1\neq 0$.

当$\lambda_3=2$时，解特征方程组$(A-2E)X=0$.

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&-4&0\\1&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0.\end{cases}$令$x_3=1$，得属于$\lambda_3=2$的线性无关的特征向量是$\xi_2=(0,0,1)^T$，全部特征向量为$k_2\xi_2,k_2\neq 0$.

（3）$\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$.

解　A的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&3\\3&-5-\lambda&3\\6&-6&4-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{=}\begin{vmatrix}-2-\lambda&2+\lambda&0\\3&-5-\lambda&3\\6&-6&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2+\lambda)\begin{vmatrix}-1&1&0\\3&-5-\lambda&3\\6&-6&4-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)^2(4-\lambda),$$

所以A的特征值为$\lambda_{1,2}=-2,\lambda_3=4$.

当$\lambda_{1,2}=-2$时，解特征方程组$(A+2E)X=0$. 由

$$A+2E=\begin{pmatrix}3&-3&3\\3&-3&3\\6&-6&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $x_1 = x_2 - x_3$，令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得属于特征值 $\lambda_{1,2} = -2$ 的线性无关的特征向量为

$\xi_1 = (1,1,0)^T, \xi_2 = (-1,0,1)^T$，全部特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (k_1, k_2 不全为零).

当 $\lambda_3 = 4$ 时，解特征方程组 $(A-4E)X = 0$．由

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$ 令 $x_3 = 2$，得属于 $\lambda_3 = 4$ 的线性无关的特征向量是 $\xi_3 = (1,1,2)^T$，全部特征向量为 $k_3\xi_3, k_3 \neq 0$.

（4）$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+r_3 \\ r_1-r_2}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 3-\lambda \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(3-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 3$.

当 $\lambda_{1,2} = -1$ 时，解特征方程组 $(A+E)X = 0$．由

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases} x_1 = \ \ x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$ 令 $x_3 = 1$，得属于特征值 $\lambda_{1,2} = -1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1 = (1,2,1)^T$，全部特征向量为 $k_1\xi_1, k_1 \neq 0$.

当 $\lambda_3=3$ 时，解特征方程组 $(A-3E)X=0$. 由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 4 & -10 & 8\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3,\\ x_2=\ \ x_3.\end{cases}$ 令 $x_3=2$，得属于特征值 $\lambda_3=3$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(1,2,2)^T$，全部特征向量为 $k_2\xi_2,k_2\neq 0$.

（5）$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，解特征方程组 $(A+2E)X=0$. 由

$$A+2E=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3,\\ x_2=\ \ x_3.\end{cases}$ 令 $x_3=2$，得属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=(1,2,2)^T$，全部特征向量为 $k_1\xi_1,k_1\neq 0$.

当 $\lambda_2=1$ 时，解特征方程组 $(A-E)X=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases} x_1 = -\ \ x_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$令$x_3 = 2$，得属于特征值$\lambda_2 = 1$的线性无关的特征向量为$\xi_2 = (-2, -1, 2)^T$，

全部特征向量为$k_2\xi_2, k_2 \neq 0$.

当$\lambda_3 = 4$时，解特征方程组$(A-4E)X = 0$. 由

$$A-4E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得$\begin{cases} x_1 = \ \ 2x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$令$x_3 = 1$，得属于特征值$\lambda_3 = 4$的线性无关的特征向量为$\xi_3 = (2, -2, 1)^T$，

全部特征向量为$k_3\xi_3, k_3 \neq 0$.

（6）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解　A的特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)^2,$$

所以A的特征值为$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 2$.

当$\lambda_{1,2} = -1$时，解特征方程组$(A+E)X = 0$. 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $x_1 = x_3$. 令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得属于特征值$\lambda_{1,2} = -1$的线性无关的特征向量为

$\xi_1 = (0,1,0)^T, \xi_2 = (1,0,1)^T$，全部特征向量为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2$不全为0.

当$\lambda_3 = 2$时，解特征方程组$(A-2E)X = 0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&-1\\-3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-\dfrac{1}{3}x_3.\end{cases}$令$x_3=3$，得属于特征值$\lambda_3=2$的线性无关的特征向量为$\xi_3=(0,-1,3)^T$，

全部特征向量为$k_3\xi_3,k_3\neq0$.

2．已知矩阵$\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&a\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_{1,2}=-2,\lambda_3=4$，求$a$的值.

解 由$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，得$1+(-5)+a=-2+(-2)+4$，则$a=4$.

3．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}7&4&x\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=12$，求$x$的值.

解 $|A|=\begin{vmatrix}7&4&x\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{vmatrix}=12(x+10)$．由$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，得$12(x+10)=3\times3\times12$，

解得$x=-1$.

4．已知三阶方阵A的三个特征值分别为$1,-1,2$，矩阵$B=A^3-5A^2$．求矩阵B的特征值及B的行列式$|B|$.

解 令$\varphi(x)=x^3-5x^2$，则B的特征值分别为$\varphi(1)=-4,\varphi(-1)=-6,\varphi(2)=-12$，且

$$|B|=\varphi(1)\varphi(-1)\varphi(2)=-288.$$

5．已知 3 阶矩阵A的特征值为$1,2,3$，求A^3-5A^2+7A及A的伴随矩阵A^*的特征值.

解 令$\varphi(x)=x^3-5x^2+7x$，则A^3-5A^2+7A的特征值为

$$\varphi(1)=3,\varphi(2)=2,\varphi(3)=3.$$

又$|A|=1\times2\times3=6$，则A^*特征值为$\dfrac{6}{1}=6,\dfrac{6}{2}=3,\dfrac{6}{3}=2$.

6．设$A=\begin{pmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&6&1\end{pmatrix}$，求：

（1）A 的特征值与特征向量；（2）A^* 的特征值；（3）$2E-3A^{-1}$ 的特征值．

解（1）A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -10 & 0\\ 1 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 6 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(1-\lambda)^2,$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-2$；属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 全部特征向量为

$$k_1(-2,1,0)^T+k_2(0,0,1)^T，k_1、k_2 \text{ 不全为 } 0；$$

属于特征值 $\lambda_3=-2$ 全部特征向量为 $k_3(-5,1,3)^T$，$k_3\neq 0$．

（2）$|A|=-2$，则 A^* 的特征值为 $-2,-2,1$．

（3）令 $\varphi(x)=2-3x^{-1}$，则 $2E-3A^{-1}$ 的特征值为

$$\varphi(1)=-1,\varphi(1)=-1，\varphi(-2)=\frac{7}{2}.$$

7．设矩阵 A 满足等式 $A^2-3A-4E=0$，试证明 A 的特征值只能取值 -1 或 4．

解 设 λ 为 A 的特征值．由 $A^2-3A-4E=0$，得 λ 满足 $\lambda^2-3\lambda-4=0$，解得

$$\lambda=-1 \text{ 或 } \lambda=4.$$

8．设方阵 A 满足 $A^TA=E$，其中 A^T 是 A 的转置矩阵，E 为单位阵．试证明 A 的实特征向量所对应的特征值的模等于 1．

解 设 X 为 A 的实特征向量，对应的特征值为 λ，则 $AX=\lambda X$．由 $A^TA=E$，得

$$X^TA^TAX=X^TEX=X^TX,$$

即 $(AX)^T(AX)=X^TX$，有 $\lambda^2X^TX=X^TX$．又 $X^TX>0$，则 $\lambda^2=1$，所以 $|\lambda|=1$．

9．已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且 A 与 B 相似，求常数 λ．

解 显然 B 的特征值为 $\lambda,2,2$．A 与 B 相似，则 A 的特征值为 $\lambda,2,2$．由

$$1+4+5=\lambda+2+2,$$

解得 $\lambda=6$．

10．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求常数 x 与 y .

解 A 与 B 相似，则 $2+0+x=2+y+(-1)\Rightarrow x=y-1$. （1）

又 $|A|=-2$，由 $|A|=|B|$，得 $-2=2\cdot y\cdot(-1)\Rightarrow y=1$，代入（1）式，得 $x=0$.

所以 $x=0, y=1$.

11．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\-2&a&1\end{pmatrix}$． 问 a 为何值时，矩阵 A 可相似对角化.

解 显然 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-1$. 对 $\lambda_{1,2}=1$，

$$A\text{可相似对角化}\Leftrightarrow R(A-E)=3-2=1 .$$

由 $A-E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&0&0\\-2&a&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $a=0$.

12．已知 $p=(1,1,-1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的特征向量.

（1）求参数 a,b 及特征向量 p 所对应的特征值；

（2）问 A 能否相似对角化？并说明理由.

解 （1）设特征向量 p 所对应的特征值为 λ . 由 $AP=\lambda P$，得

$$\lambda=-1,a=-3,b=0 .$$

（2）A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}\underset{\substack{c_1-c_3\\c_1+c_2}}{=}\begin{vmatrix}-1-\lambda&-1&2\\-1-\lambda&-3-\lambda&3\\1+\lambda&0&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1&-1&2\\-1&-3-\lambda&3\\1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3,$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2,3}=-1$. 所以 A 能相似对角化 $\Leftrightarrow R(A+E)=3-3=0$，即 $A+E=O$.

显然 $A+E\neq O$，所以 A 不能相似对角化.

13．判断下列矩阵是否与对角矩阵相似；若与对角矩阵相似，求一个可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2, \lambda_3=4$.

当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解方程组 $(A-2E)X=0$．由

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $R(A-2E)=2\neq 1$，所以 A 不能与对角矩阵相似.

（2）$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} \underset{c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -12 & 6 \\ 0 & -19-\lambda & 10 \\ \lambda-1 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=-1$.

当 $\lambda_{1,2}=1$ 时，解方程组 $(A-E)X=0$．由

$$A-E = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $R(A-E)=1$，所以 A 与对角矩阵相似，且 $x_1=2x_2-x_3$．令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $p_1=(2,1,0)^T, p_2=(-1,0,1)^T$.

当 $\lambda_3=-1$ 时，解方程组 $(A+E)X=0$．由

$$A+E=\begin{pmatrix}8&-12&6\\10&-18&10\\12&-24&14\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{5}{6}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3,\\x_2=\frac{5}{6}x_3.\end{cases}$ 令 $x_3=6$，得属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量为 $p_3=(3,5,6)^T$．

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&0&5\\0&1&6\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(2+\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-2$．

当 $\lambda_{1,2}=1$ 时，解方程组 $(A-E)X=0$．由

$$A-E=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $R(A-E)=1$，所以 A 与对角矩阵相似，且 $x_1=-2x_2$．令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $p_1=(-2,1,0)^T,p_2=(0,0,1)^T$．

当 $\lambda_3=-2$ 时，解方程组 $(A+2E)X=0$．由

$$A+2E=\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=\ \ x_3.\end{cases}$令 $x_3=1$，得属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量为 $p_3=(-1,1,1)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

14．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$．求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并计算 A^m，其中 m 为正整数.

解　A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=-(1+\lambda)^2(5-\lambda)$，则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=5$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=-1$ 的线性无关的特征向量为 $p_1=(-1,1,0)^T,p_2=(-1,0,1)^T$.

属于特征值 $\lambda_3=5$ 的线性无关的特征向量为 $p_3=(1,1,1)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$．且

$$A^m=(P\Lambda P^{-1})^m=P\Lambda^m P^{-1}.$$

又 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda^m==\begin{pmatrix}(-1)^m&0&0\\0&(-1)^m&0\\0&0&5^m\end{pmatrix}$，所以

$$A^m=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^m+(-1)^m2&5^m+(-1)^{m+1}&5^m+(-1)^{m+1}\\5^m+(-1)^{m+1}&5^m+(-1)^m2&5^m+(-1)^{m+1}\\5^m+(-1)^{m+1}&5^m+(-1)^{m+1}&5^m+(-1)^m2\end{pmatrix}.$$

15．设 3 阶方阵 A 有特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9$，对应特征向量依次为

$$\xi_1=(-1,-1,1)^T,\ \xi_2=(-1,1,0)^T,\ \xi_3=(1,1,2)^T,$$

求 A.

解　A有3个不同的特征值，则A能相似对角化．令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$，

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&9\end{pmatrix},$$

有$A=P\Lambda P^{-1}$．又$P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-3&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，所以$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$.

16．设矩阵A与B相似，试证：

（1）A^T与B^T相似；　　　（2）当A可逆时，A^{-1}与B^{-1}相似.

证　A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得$B=P^{-1}AP$.

（1）$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$.

因为P^T也可逆，所以A^T与B^T相似.

（2）$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，所以$A^{-1}$与$B^{-1}$相似.

17．设向量$\alpha=(1,2,-1,1)^T,\beta=(2,3,1,-1)^T$，求$\alpha,\beta$的长度及它们的夹角.

解　$\|\alpha\|=\sqrt{7},\|\beta\|=\sqrt{15}$，$<\alpha,\beta>=\arccos\dfrac{6}{\sqrt{105}}$.

18．已知三元向量$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-2.1)^T$，试求一个非零向量$\alpha_3$，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为正交向量组.

解　显然α_1,α_2正交．令$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，要使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为正交向量组，只需

$$\begin{cases}[\alpha_1,\alpha_3]=0,\\ [\alpha_2,\alpha_3]=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\ \ x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$$

由$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，得$\begin{cases}x_1=-x_3,\\ x_2=0.\end{cases}$取$x_3=1$，得$\alpha_3=(-1,0,1)^T$.

19．已知向量$\alpha_1=(1,2,-1,1)^T,\alpha_2=(2,3,1,-1)^T,\alpha_3=(-1,-1,-2,2)^T$，试求与向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都正交的向量.

解 设$\beta=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T$，依题意，得

$$\begin{cases}\left[\alpha_1,\beta\right]=0,\\ \left[\alpha_2,\beta\right]=0,\\ \left[\alpha_3,\beta\right]=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0,\\ -x_1-x_2-2x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

由$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&3&1&-1\\-1&-1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&5&-5\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得

$$\begin{cases}x_1=-5x_3+5x_4,\\ x_2=\ \ 3x_3-3x_4.\end{cases}$$

令$x_3=k_1,x_4=k_2$，所以

$$\beta=k_1(-5,3,1,0)^T+k_2(5,-3,0,1)^T，\text{其中}k_1、k_2\text{为任意常数}.$$

20. 用施密特正交化方法将下列向量组化为标准正交向量组：

（1）$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\ \alpha_3=(1,-1,1)^T$.

解 正交化，得$\beta_1=(1,-1,0)^T$，$\beta_2=\dfrac{1}{2}(1,1,2)^T$，$\beta_3=\dfrac{1}{3}(-1,-1,1)^T$.

单位化，得$\eta_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt2},-\dfrac{1}{\sqrt2},0\right)^T$，$\eta_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right)^T$，$\eta_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^T$.

（2）$\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(3,3,-1,-1)^T,\ \alpha_3=(-2,0,6,8)^T$.

解 正交化，得$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\beta_2=(2,2,-2,-2)^T$，$\beta_3=(-1,1,-1,1)^T$.

单位化，得$\eta_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T,\eta_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T,\eta_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$.

21．试求一个正交矩阵Q，使$Q^{-1}AQ$为对角阵：

（1）$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

解 A的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=-(2+\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)，$$

则A的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,2,2)^T$；单位化，得

$$\beta_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

属于特征值 $\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=(2,1,-2)^T$；单位化，得

$$\beta_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=4$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(2,-2,1)^T$；单位化，得

$$\beta_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

解 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=(1-\lambda)^2(3-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=3$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$；显然 α_1,α_2 正交，单位化，得

$$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=3$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(0,1,1)^T$；单位化，得

$$\beta_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

（3）$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=(1-\lambda)^2(10-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=10$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$；正交化，得 $\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$；单位化，得

$$\gamma_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\gamma_2=(\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=10$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(-1,-2,2)^T$；单位化，得

$$\gamma_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

（4）$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}$.

解 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\lambda^2(9-\lambda),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=9$.

属于特征值 $\lambda_{1,2}=0$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T$；正交化，得 $\beta_1=(2,1,0)^T,\beta_2=\dfrac{1}{5}(-2,4,5)^T$；单位化，得

$$\gamma_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\gamma_2=(-\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T.$$

属于特征值 $\lambda_3=9$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,2)^T$；单位化，得

$$\gamma_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

22．设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 6、3、3，与特征值 6 对应的特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^T$，求与特征值 3 对应的特征向量.

解 设 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为属于特征值 3 的特向量，有 $[\xi_1,X]=0$，即

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

其基础解系为 $\xi_2=(-1,1,0)^T\quad\xi_3=(-1,0,1)^T$. 所以属于特征值 3 的特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3，\ k_2、k_3 \text{不全为} 0.$$

23．设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=1$，对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为

$\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A．

解　设对应 $\lambda_{2,3}=1$ 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，有 $x_2+x_3=0$．所以属于特征值 $\lambda_{2,3}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$．

令 $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$．所以

$$A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

24．设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_{1,2}=6$ 是 A 的二重特征值．若

$$\alpha_1=(1,1,0)^T,\quad \alpha_2=(2,1,1)^T,\ \alpha_3=(-1,2,-3)^T$$

都是 A 的属于特征值 6 的特征向量．

（1）求 A 的另一特征值和对应的特征向量；

（2）求矩阵 A．

解　（1）因为 $\lambda_{1,2}=6$ 是 A 的二重特征值，故 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有 2 个．由题设知 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$ 为 A 的属于特征值 6 的线性无关特征向量．

又 A 的秩为 2，于是 $|A|=0$，所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$．设 $\lambda_3=0$ 所对应的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有 $\alpha_1{}^T\alpha=0$ ，$\alpha_2{}^T\alpha=0$ ，即

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad\ =0,\\2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

得基础解系为 $\alpha=(-1,1,1)^T$，故 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 全部特征向量为

$$k\alpha=k(-1,1,1)^T,\quad k\neq 0.$$

（2）令矩阵 $P=(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\ \frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$

25．设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，证明 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

证 必要性：A 与 B 相似，则存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$．有

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|P|=|A-\lambda E|,$$

所以 A 与 B 有相同的特征多项式，即有相同的特征值.

充分性：若实对称矩阵 A 与 B 有相同的特征值，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 为它们的特征值．令

$$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

则 A 与 Λ 相似，B 与 Λ 相似，所以 A 与 B 相似.

（B）

一、选择题：

1．设 $A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$，则以下向量中是 A 的特征向量的是（　　）.

（A）$(1,1,1)^T$　　（B）$(1,1,3)^T$　　（C）$(1,1,0)^T$　　（D）$(1,0,-3)^T$

解 当 $X=(1,1,1)^T$ 时，有 $AX=X$．选（A）.

2．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^k=0$（k 为某一正整数），则（　　）.

(A) $A=0$　　(B) A 有一个不为零的特征值

(C) A 的特征值全为零　　(D) A 有 n 个线性无关的特征向量

解 设 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^k=0$，有 $\lambda=0$．选（C）.

3．设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，则（　　）.

（A）$\lambda E-A=\lambda E-B$　　　　　　（B）A 与 B 有相同的特征值与特征向量

（C）A 与 B 都相似于对角矩阵　　　　（D）对于任意常数 t，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似

解　由 A 与 B 相似，知存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，由此 $P^{-1}(tE-A)P=tE-B$，故 $tE-A$ 与 $tE-B$ 相似．选（D）．

4．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&x&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 $1,2,3$，则 $x=$（　　）．

(A) -2　　(B)3　　(C)4　　(D) -1

解　由 $1+x+1=1+2+3$，得 $x=4$．选（C）．

5．设 A 为 n 阶可逆阵，λ 为 A 的一个特征值，则 A 的伴随阵 A^* 的一个特征值是（　　）．

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$　　(B) $\lambda^{-1}|A|$　　(C) $\lambda|A|$　　(D) $\lambda^{-1}|A|^{n-1}$

解　选（B）．

6．设 A 为 n 阶方阵，以下结论中成立的是（　　）．

（A）若 A 可逆，则矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量．

（B）A 的特征向量为方程 $(A-\lambda E)X=0$ 的全部解．

（C）A 的特征向量的线性组合仍为特征向量．

（D）A 与 A^T 有相同的特征向量．

解　选（A）．

7．当 x,y 满足(　　)时，方阵 $A=\begin{pmatrix}1&x&1\\x&1&y\\1&y&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似．

(A) $x=0$ 且 $y=0$　　(B) $x=0$ 或 $y=0$　　(C) $x=y$　　(D) $x\neq y$

解　选（A）．

8．设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵．已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值

λ的特征向量，则矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是（　　）.

（A）$P^{-1}\alpha$　　（B）$P^T\alpha$　　（C）$P\alpha$　　（D）$(P^{-1})^T\alpha$

解　由于$(P^{-1}AP)^T P^T\alpha = P^T A(P^T)^{-1}P^T\alpha = P^T A\alpha = P^T\lambda\alpha = \lambda(P^T\alpha)$，即矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值$\lambda$的特征向量为$P^T\alpha$．选（B）.

9. 设$\lambda = 2$是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有一个特征值等于（　　）.

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

解　$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有特征值$(\frac{1}{3}\times 2^2)^{-1} = \frac{3}{4}$．选（B）.

10．设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的特征值为$1,2,3$，则有（　　）.

(A) $x=2, y=4, z=8$　　(B) $x=-1, y=4, z\in R$

(C) $x=-2, y=2, z\in R$　　(D) $x=-1, y=4, z=3$

解　选（B）.

11．如果n阶矩阵A任意一行的元素之和都是a，那么A有一个特征值（　　）.

（A）a　　（B）$-a$　　（C）0　　（D）a^{-1}

解　取$X=(1,1,\cdots,1)^T$，有$AX = aX$．选（A）.

12．若n阶矩阵A的特征值全为零，则**不正确**的结论是（　　）.

（A）$|A| = 0$　　（B）$tr(A) = 0$　　（C）$R(A) = 0$　　（D）$|\lambda E - A| = \lambda^n$

解　取$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$，但$A$的特征值全为零，而$R(A)=1$．选（C）.

13．已知$AX_0 = \lambda_0 X_0$（X_0为非零向量），P为可逆矩阵，则（　　）.

（A）$P^{-1}AP$的特征值为$\frac{1}{\lambda_0}$，其对应的特征向量为PX_0

（B）$P^{-1}AP$ 的特征值为 λ_0，其对应的特征向量为 PX_0

（C）$P^{-1}AP$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_0}$，其对应的特征向量为 $P^{-1}X_0$

（D）$P^{-1}AP$ 的特征值为 λ_0，其对应的特征向量为 $P^{-1}X_0$

解 由 $AX_0=\lambda_0X_0$，得 $(P^{-1}AP)P^{-1}X_0=P^{-1}(AX_0)=\lambda_0P^{-1}X_0$，故 λ_0 是 $P^{-1}AP$ 的特征值，其对应的特征向量为 $P^{-1}X_0$．选（D）．

14．设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & a\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_{2,3}=2$，则 a 的值为（　　　）．

（A）2　　　（B）-2　　　（C）4　　　（D）-4

解 $|A|=6(a+6)=6\times2\times2$，得 $a=-2$．选（B）．

15．已知矩阵 $\begin{pmatrix}22 & 30\\ -12 & a\end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}$，则 a 等于（　　　）．

(A) -18　　　(B) -16　　　(C) -14　　　(D) -12

解 由 $\begin{pmatrix}22 & 30\\ -12 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}$，得 $\lambda=4$，$a=-16$．选（B）．

16．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似，则（　　　）．

（A）$a=5,b=0$　　（B）$a=5,b=6$　　（C）$a=6,b=5$　　（D）$a=0,b=5$

解 选（B）．

17．设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是（　　　）．

(A) $\lambda_1\neq0$　　　(B) $\lambda_2\neq0$　　　(C) $\lambda_1=0$　　　(D) $\lambda_2=0$

解 由于 $(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，则

$$\alpha_1,\ A(\alpha_1+\alpha_2)\text{线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0\text{，即 } \lambda_2 \neq 0 .$$

选(B).

18．设 A 为 3 阶矩阵，A 的特征值为 $0,1,2$，那么齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含解向量的个数为（　　　）.

(A)0　　　(B)1　　　(C)2　　　(D)3

解　注意 $AX=0=0X$，则 $AX=0$ 的基础解系所含解向量的个数等于 A 的属于特征值 0 的线性无关的特征向量的个数．选(B).

19．设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，若行列式 $|A|=0$，则 A 的秩为（　　　）.

（A）0　　　（B）1　　　（C）2　　　（D）3

解　注意：若 A 与对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则

$$R(A)=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{中不为零的个数}.$$

由 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，且行列式 $|A|=0$，知 A 只有一个特征值等于零，则 $R(A)=2$．选（C）.

20．设 A 是4阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$。若 $R(A)=3$，则 A 相似于（　　　）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解　设 λ 为 A 的特征值，由 $A^2+A=0$，得 $\lambda^2+\lambda=0$，所以 A 的特征值只能是 0 或 -1．A 是4阶实对称矩阵，知 A 能相似对角化；$R(A)=3$，知 A 有3个不为零的特征值；所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$．选（D）.

二、计算题：

1．设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$， $B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵，求 $B^{2004}-2A^2$．

解 $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A^4=E$．又

$$B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P=P^{-1}(A^4)^{501}P=P^{-1}EP=E,$$

所以 $B^{2004}-2A^2=E-2A^2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征根.

（1）求 x,y；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 （1）因为 A 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 A 的二重特征根，所以

$$R(A-2E)=3-2=1.$$

由 $A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ x & 2 & y\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2-x & x+y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $x=2, y=-2$.

（2）$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，其特征多项式 $|A-\lambda E|=(2-\lambda)^2(6-\lambda)$，得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2, \lambda_3=6$.

属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=(1,-1,0)^T, \xi_2=(1,0,1)^T$.

属于 $\lambda_3=6$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_3=(1,-2,3)^T$.

令 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

（1）求 A 的特征值；

（2）利用(1)中结果求 $E+A^{-1}$ 的特征值，其中 E 为三阶单位矩阵.

解 （1）A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=-(1-\lambda)^2(5+\lambda)$，得 A 的特征值为

$$\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-5.$$

（2）令 $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$，得 $E+A^{-1}$ 的特征值为

$$\mu_{1,2}=g(1)=2,\mu_3=g(-5)=\frac{4}{5}.$$

4．设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件.

解 A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=(\lambda-1)(\lambda^2-x)$.

（1）当 $x\neq 1$ 时，A 有 3 个不同的特征值，从而必有 3 个线性无关特征向量.

（2）当 $x=1$ 时，A 有特征值 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_{1,2}=1$ 要有二个线性无关的特征向量，则有 $R(A-E)=1$．由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & y\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & y+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $y=-1$.

综上，当 $x=1,y=-1$ 时或 $x\neq 1$ 时，A 有三个线性无关的特征向量.

5．设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；　　（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

证 （1）设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，　　（1）

（1）式两边左乘以 A，得 $-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$.　　（2）

（1）-（2），得 $2x_1\alpha_1 - x_3\alpha_2 = 0$．显然 α_1, α_2 线性无关，则 $x_1 = 0, x_3 = 0$．代入（1），得 $x_2\alpha_2 = 0$，有 $x_2 = 0$，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

（2）$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即 $AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．由第一部分知 P 可逆，所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6．设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3，向量 $\alpha_1 = (0, -1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -1)^T$ 都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解.

（1）求 A 的特征值和特征向量;

（2）求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^T AQ = \Lambda$.

解　（1）A 的各行元素之和都为 3，则 A 有特征值 3，且 $\alpha_3 = (1,1,1)^T$ 是其对应的特征向量．又

$$A\alpha_1 = 0 = 0 \cdot \alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0 \cdot \alpha_2,$$

且 α_1, α_2 线性无关，知 A 有特征值 0，且 α_1, α_2 是其对应的线性无关的特征向量．因此，有

A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 3$．属于 $\lambda_{1,2} = 0$ 的线性无关的特征向量为 α_1, α_2；属于 $\lambda_3 = 3$ 的线性无关的特征向量为 α_3.

（2）将 α_1, α_2 正交单位化，得 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$；

将 α_3 单位化，得 $\eta_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

令正交矩阵 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，有 $Q^T AQ = \Lambda = diag(0,0,3)$.

7．已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 a，b 之值;

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵；

（3）求 A^{100}.

解　（1）A 与 Λ 相似，则 $|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|$，即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-b).$$

将 $\lambda=-1$ 代入有 $a=0$，将 $\lambda=-2$ 代入有 $b=-2$.

（2）显然 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

属于 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $p_1=(-1,0,1)^T$；

属于 $\lambda_2=-1$ 的线性无关的特征向量为 $p_2=(0,-2,1)^T$；

属于 $\lambda_3=2$ 的线性无关的特征向量为 $p_3=(0,1,1)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，有 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(-2,-1,2)$.

（3）$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$. 又

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix},\Lambda^{100}=\begin{pmatrix}2^{100}&&\\&1&\\&&2^{100}\end{pmatrix},$$

所以 $A^{100}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\cdot 2^{100}&0&0\\2^{101}-2&2^{100}+2&2^{101}-2\\1-2^{100}&2^{100}-1&2^{101}+1\end{pmatrix}$.

8．设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$. 求 A 的特征值.

解　$A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$. α_1,α_2 线性无关，则 (α_1,α_2) 可逆，有

$$(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=B,$$

即 A 与 B 相似. 而 B 的特征多项式

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda),$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$，故 A 的特征值为 $\mu_1=0,\mu_2=1$.

9．设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量．记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵．

（1）验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

（2）求矩阵 B.

解 （1）设 α 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha$，则

$$B\alpha=(A^5-4A^3+E)\alpha=(\lambda^5-4\lambda^3+1)\alpha,$$

即 $\lambda^5-4\lambda^3+1$ 为 B 的特征值，α 为相应的特征向量．所以 α_1 是矩阵 B 的特征向量.

令 $\varphi(x)=x^5-4x^3+1$，则 B 的特征值为

$$\mu_1=\varphi(1)=-2,\mu_2=\varphi(2)=1,\mu_3=\varphi(-2)=1.$$

B 的属于 $\mu_1=-2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$，全部特征向量为 $k_1\alpha_1,k_1\neq 0$.

设 B 的属于 $\mu_{2,3}=1$ 的特征向量为 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$． A 为对称矩阵，显然 B 也是对称矩阵，则

$$[\alpha_1,X]=x_1-x_2+x_3=0,$$

方程组的基础解系为 $\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$，就是 B 的属于 $\mu_{2,3}=1$ 的线性无关的特征向量，全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_1,k_2$ 不全为零.

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，有 $P^{-1}BP=\Lambda=diag(-2,1,1)$，所以 $B=P\Lambda P^{-1}$．又

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix},$$

则 $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

10．设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$．记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$，求：

（1）A^2；　　（2）矩阵 A 的特征值和特征向量.

解　（1）$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=(\alpha^T\beta)\alpha\beta^T=O$.

（2）设 λ 为 A 的任一特征值．由 $A^2=O$，得 $\lambda^2=0$，有 $\lambda=0$，即 A 的特征值全为零.

不妨设向量 α,β 中分量 $a_1\neq 0$，$b_1\neq 0$，考虑齐次线性方程组 $AX=0$．由

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b_2}{b_1} & \cdots & \dfrac{b_n}{b_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\alpha_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^T,\alpha_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\alpha_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^T,$$

即属于特征值 0 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为零的任意常数.

11．设 4 阶方阵 A 满足条件 $|3E+A|=0, AA^T=2E, |A|<0$．试求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

解　由 $|3E+A|=\left|A-(-3)E\right|=0$，得 $\lambda=-3$ 为 A 的特征值.

由 $AA^T=2E$，得 $\left|A\right|^2=\left|AA^T\right|=\left|2E\right|=2^4\left|E\right|=16$．又 $|A|<0$，则 $|A|=-4$．所以 A^* 有特征值 $\dfrac{\left|A\right|}{\lambda}=\dfrac{4}{3}$.

12．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$．已知线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解，试求：

（1）a 的值；　　（2）正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵.

解　（1）对线性方程组 $AX=\beta$ 的增广矩阵施行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1\\ 1 & a & 1 & \vdots & 1\\ a & 1 & 1 & \vdots & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & \vdots & a+2\end{pmatrix},$$

方程组有无穷多解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)<3\Rightarrow a=-2$.

（2）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$A$的特征多项式$|A-\lambda E|=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，得矩阵$A$的特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$.

对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,-2,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$.

将a_1,a_2,a_3单位化，得

$$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T,\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

令$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则有$Q^TAQ=diag(3,-3,0)$.

13．设三阶矩阵A的三个特征值分别为$\lambda_i=i(i=1,2,3)$，对应特征向量依次为

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,4)^T,\alpha_3=(1,3,9)^T.$$

（1）将$\beta=(1,1,3)^T$用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；　　（2）求$A^n\beta$.

解　（1）设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$．由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 1 & 4 & 9 & \vdots & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1\end{pmatrix},$$

得$x_1=2,x_2=-2,x_3=1$，所以$\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$.

（2）$A^n\beta=A^n(2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=2A^n\alpha_1-2A^n\alpha_2+A^n\alpha_3=2\alpha_1-2^{n+1}\alpha_2+3^n\alpha_3$

$$=(2-2^{n+1}+3^n,2-2^{n+2}+3^{n+1},2-2^{n+3}+3^{n+2})^T.$$

14．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$的特征多项式有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

解　A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=-(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$．

（1）若 $\lambda=2$ 是特征多项式的二重根，则 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$．此时 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=6$．对 $\lambda_{1,2}=2$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $R(A-2E)=1$，所以 A 可相似对角化．

（2）若 $\lambda=2$ 不是特征多项式的二重根，则

$$\Delta=(-8)^2-4(18+3a)=-4(2+3a)=0,$$

解得 $a=-\dfrac{2}{3}$．此时 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=4,\lambda_3=2$．对 $\lambda_{1,2}=4$，由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\-1&0&-3\\1&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $R(A-4E)=2$，所以 A 不能相似对角化．

15．某生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\dfrac{1}{6}$ 熟练工支援其它生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐．新、老非熟练工经过培养及实践至年终考核有 $\dfrac{2}{3}$ 成为熟练工．设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$．

（1）求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式，并写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$；

（2）验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3）当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$时，求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

解　（1）由题设，得$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n), \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n). \end{cases}$ 即$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n. \end{cases}$所以

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

其中$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

（2）由$A\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta_1$，$A\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\eta_2$，得$\eta_1$是$A$的属于特征值$\lambda_1 = 1$的特征向量，$\eta_2$是$A$的属于特征值$\lambda_2 = \frac{1}{2}$的特征向量；又$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$\eta_1, \eta_2$线性无关.

（3）由（1）式，可得$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

由（2）知A可相似对角化．令$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，有$P^{-1}AP = \Lambda = diag(1, \frac{1}{2})$．所以

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}.$$

又$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，有

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{2^n} & 4 - \frac{1}{2^{n-2}} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-2}} \end{pmatrix},$$

从而$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 - \frac{3}{2^n} \\ 2 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix}$.

16．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

（1）k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵？

（2）求出 P 和相应的对角矩阵.

解　A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -2\\ -k & -1-\lambda & k\\ 4 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}\underset{c_1+c_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 0 & -1-\lambda & k\\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2(1-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=1$.

（1）对 $\lambda_{1,2}=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -k & 0 & k\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & k & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $k=0$ 时，$R(A+E)=1$，此时 A 可相似对角化.

（2）A 的属于 $\lambda_{1,2}=-1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_1=(-1,2,0)^T,\xi_2=(1,0,2)^T$；

A 的属于 $\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_3=(1,0,1)^T$.

令 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

17．已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ 是 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的特征向量.

（1）确定常数 a,b；

（2）确定特征向量 ξ 对应的特征值；

（3）A 能否相似对角化？并说明理由.

解　（1）设 λ 是 A 的特征向量 ξ 对应的特征值．由 $A\xi=\lambda\xi$，解得

$$\lambda=-1,a=-3,b=0.$$

（2）$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，其特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}\underset{\substack{c_1+c_2\\ c_1-c_3}}{=}\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 2\\ -1-\lambda & -3-\lambda & 3\\ -1-\lambda & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)^3,$$

所以 ξ 对应的特征值为 $\lambda_{1,2,3}=-1$.

（3）对 $\lambda_{1,2,3}=-1$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

的 $R(A+E)=2$，所以 A 不能相似对角化.

18．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$．求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

解　$|A|=7\neq 0$．设 A 的特征值 λ 对应的特征向量为 η，则有 $A^{*}\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta$．于是有.

$$(B+2E)(P^{-1}\eta)=(\frac{|A|}{\lambda}+2)(P^{-1}\eta),$$

即 $\dfrac{|A|}{\lambda}+2$ 为 $B+2E$ 的特征值，对应的特征向量为 $P^{-1}\eta$.

A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)^2(7-\lambda)$，所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=7$.

A 的属于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

A 的属于特征值 $\lambda_3=7$ 的线性无关的特征向量为 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

由 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，得

$$\gamma_1=P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\quad \gamma_2=P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad \gamma_3=P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

令 $g(x)=\dfrac{|A|}{x}+2=\dfrac{7}{x}+2$，则 $B+2E$ 的特征值分别为

$$\mu_{1,2}=g(1)=9,\mu_3=g(7)=3,$$

且对应于特征值 $\mu_{1,2}=9$ 的全部特征向量为 $k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$，其中 k_1,k_2 是不全为零的常数；对应于特征值 $\mu_3=3$ 的全部特征向量为 $k_3\gamma_3$，$k_3\neq 0$.

19．设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda$ 为对角矩阵．若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求常数 a、正交矩阵 Q 及对角矩阵 Λ．

解 由题意，得 Q 的第一列是 A 的特征向量，即存在数 λ，使得

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

解得 $a=-1$．

$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$，其特征多项式 $|A-\lambda E|=-(4+\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2,\lambda_3=5$．

属于 $\lambda_1=-4$ 的正交单位化的特征向量为 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；属于 $\lambda_2=2$ 的正交单位化的特征向量为 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；属于 $\lambda_3=5$ 的正交单位化的特征向量为 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$．

令正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$．

三、证明题：

1．设 A,B 均为 n 阶方阵，且 $R(A)+R(B)<n$．试证：A,B 有公共的特征向量．

证 考虑方程组 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X_{n\times 1}=0$，其系数矩阵的秩

$$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le R(A)+R(B)<n,$$

则方程组有非零解 ξ，即 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xi=0$，故

$$A\xi = 0, B\xi = 0,$$

即 $\lambda = 0$ 是 A, B 的公共特征值，ξ 是 A, B 属于特征值 $\lambda = 0$ 的公共的特征向量.

2．设 A 是 n 阶方阵，且满足 $R(E+A)+R(E-A)=n$．试证: $A^2 = E$．

证 设 $R(E+A)=r$．

（1） 若 $r=0$，则 $E+A=0$，即 $A=-E$，有 $A^2=E$．

（2）若 $r=n$，则 $R(E-A)=0$，即 $A=E$，有 $A^2=E$．

（3）若 $0<r<n$，则 $(A+E)X=0$ 的基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 就是 A 的属于特征值 -1 的线性无关特征向量；又 $R(E-A)=n-r$，则 $(A-E)X=0$ 的基础解系 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 就是 A 的属于特征值 1 的线性无关特征向量；从而 A 有 n 个线性无关特征向量：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，所以 A 能相似对角化.

令 $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\right)$，有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-E_{n-r} & O\\ O & E_r\end{pmatrix},$$

则 $A=P\begin{pmatrix}-E_{n-r} & O\\ O & E_{n-r}\end{pmatrix}P^{-1}$，所以 $A^2=E$．

3．n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=A+B$，证明 $\lambda=1$ 不是 A 的特征值.

证 由 $AB=A+B$，得 $(A-E)(B-E)=E$，所以 $A-E$ 可逆，有 $\left|A-E\right|\neq 0$，所以 $\lambda=1$ 不是 A 的特征值.

习 题 六

（A）

1．写出下列二次型的矩阵.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+5x_1x_3-4x_2x_3$．

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{5}{2}\\ 2 & 2 & -2\\ \frac{5}{2} & -2 & 2\end{pmatrix}$.

（2）$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1x_2-5x_1x_3-2x_2x_3+x_4^2$.

解 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -\frac{5}{2} & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ -\frac{5}{2} & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

（3）$f(x_1,x_2,\cdots,x_5)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2+2\sum_{i=1}^{4}x_ix_{i+1}$.

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

（4）$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -4\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

解 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & 2 & -1\\ \frac{5}{2} & -1 & -3\end{pmatrix}$.

2．已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2，求$a$.

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & a-3\end{pmatrix}.$$

由$R(A)=2$，得$a-3=0$，所以$a=3$.

3．用配方法将下列二次型化成标准形，并写出所用的可逆线性变换.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-10x_2x_3$.

解 $f=(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3)-3x_2^2+4x_3^2-10x_2x_3$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2+3x_3^2-8x_2x_3$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-4(x_2^2+2x_2x_3)+3x_3^2=(x_1-x_2+x_3)^2-4(x_2+x_3)^2+7x_3^2$,

令$\begin{cases} w_1=x_1-x_2+x_3, \\ w_2= \quad\quad x_2+x_3, \\ w_3= \quad\quad\quad\quad x_3, \end{cases}$即$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，得可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

二次型的标准形为$f=w_1^2-4w_2^2+7w_3^2$.

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解 令$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3= \quad\quad\quad y_3, \end{cases}$ 即$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，代入二次型，再配方得

$$f=y_1^2+2y_1y_3-y_2^2=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1 \quad +y_3 \\ z_2= \quad y_2 \\ z_3= \quad\quad\quad y_3 \end{cases}$，即$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，得二次型的标准形为

$$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2 \ .$$

所用的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

（3）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

解 $f=(x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3)+5x_2^2-4x_3^2=(x_1+x_2-2x_3)^2+4(x_2^2+x_2x_3)-8x_3^2$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2+4(x_2+\frac{1}{2}x_3)^2-9x_3^2$.

令$\begin{cases} w_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ w_2 = \qquad x_2 + \dfrac{1}{2}x_3, \\ w_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，得可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

二次型的标准形为 $f = w_1^2 + 4w_2^2 - 9w_3^2$.

（4）$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

解 $f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 + 6x_2x_3) + 4x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 3x_3)^2 - 5x_3^2.$$

令$\begin{cases} w_1 = x_1 + x_2 + \ x_3, \\ w_2 = \qquad x_2 + 3x_3, \\ w_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，得可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

二次型的标准形为 $f = w_1^2 + w_2^2 - 5w_3^2$.

4．用正交变换法化二次型为标准形，并写出所用的正交变换.

（1）$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.

解 二次型 $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$，其矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式 $|A - \lambda E| = -\lambda(3 - \lambda)^2$，得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 3$.

属于 $\lambda_1 = 0$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1 = (1,1,1)^T$；单位化，得 $\gamma_1 = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})^T$.

属于 $\lambda_{2,3}=3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_2=(-1,1,0)^T,\beta_3=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$.

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为 $f=3y_2^2+3y_3^2$.

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$. A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=-(1+\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

属于 $\lambda_1=-1$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(2,2,1)^T$；单位化，得 $\gamma_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$.

属于 $\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_2=(-2,1,2)^T$；单位化，得 $\gamma_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$.

属于 $\lambda_3=5$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(1,-2,2)^T$；单位化，得 $\gamma_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$.

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$$f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$$

（3）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$. A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=-(3+\lambda)(3-\lambda)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=-3$.

属于 $\lambda_{1,2}=3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$.

属于 $\lambda_3=-3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(1,1,1)^T$；单位化，得 $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$.

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$$f=3y_1^2+3y_2^2-3y_2^2.$$

（4）$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

解　二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. A 的特征多项式

$$\left|A-\lambda E\right|=-(2+\lambda)(1-\lambda)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-2$.

属于 $\lambda_{1,2}=1$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(1,1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$.

属于 $\lambda_3=-2$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(-1,-1,1)^T$；单位化，得

$$\gamma_3=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$

5．判断下列二次型的正定性.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

解　二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，其各阶主子式

$$\Delta_1=|2|=2>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6>0,\Delta_3=|A|=10>0,$$

所以该二次型为正定二次型.

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$.

解　二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$，其各阶主子式

$$\Delta_1=|-2|=-2<0,\Delta_2=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0,\Delta_3=|A|=-38<0,$$

所以该二次型为负定二次型.

6．求a的取值范围，使二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型.

解　二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$，则$A$正定，有

$$\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}=1-a^2>0,\Delta_3=|A|=-a(5a+4)>0,$$

解得$-\dfrac{4}{5}<a<0$.

7．判断下列矩阵的正定性.

（1）$\begin{pmatrix}6&2&4\\2&1&2\\4&2&5\end{pmatrix}$.

解　矩阵的各阶主子式

$$\Delta_1=|6|=6>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}6&2\\2&1\end{vmatrix}=2>0,\Delta_3=\begin{vmatrix}6&2&4\\2&1&2\\4&2&5\end{vmatrix}=2>0,$$

所以该矩阵正定.

（2）$\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-5&-1\\2&-1&-14\end{pmatrix}$.

解　矩阵的各阶主子式

$$\Delta_1 = |-1| = -1 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -14 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

所以该矩阵负定.

（B）

1．证明：若矩阵 A 正定，则矩阵 A 的主对角线元素全大于零.

证 设实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，则二次型 $f = X^T AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ 正定．取

$$x_1 = 0, \cdots, x_{i-1} = 0, x_i = 1, x_{i+1} = 0, \cdots, x_n = 0,$$

则 $f = a_{ii} > 0$．由 i 的任意性，所以 A 的主对角线元素全大于零.

2．已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2，求参数 a 的值，并问方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}.$$

由 $R(A) = 2$，得 $a - 3 = 0$，所以 $a = 3$.

A 的特征多项式 $|A - \lambda E| = -\lambda(4-\lambda)(9-\lambda)$，得 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9.$$

则存在正交变换 $X = QY$，将二次型化为标准形 $f = 4y_2^2 + 9y_3^2$．而方程

$$4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$$

在空间直角坐标系下代表一椭圆柱面，所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 是一椭圆柱面.

3．判断二次方程 $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 48$ 表示何种曲线.

解 考虑二次型 $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2$，其矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式$|A-\lambda E|=(3-\lambda)(7-\lambda)$，得 A 的特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=7$．则存在正交变换$X=QY$，将二次型化为标准形$f=3y_1^2+7y_2^2$．而方程

$$3y_1^2+7y_2^2=48$$

在平面直角坐标系下代表椭圆曲线，所以方程$5x^2-4xy+5y^2=48$表示椭圆曲线.

4．求在条件$\|X\|=1$下，二次型 f 的最大值和达到最值的一个单位向量.

（1）$f(x_1,x_2)=5x_1+5x_2-4x_1x_2$.

解　二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&5\end{pmatrix}$．$A$ 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=(3-\lambda)(7-\lambda),$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=7$.

属于$\lambda_1=3$的线性无关的特征向量$\alpha_1=(1,1)^T$；单位化，得$\gamma_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

属于$\lambda_2=7$的线性无关的特征向量$\alpha_2=(-1,1)^T$；单位化，得$\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

令正交矩阵$Q=(\gamma_1,\gamma_2)$，得正交变换$X=QY$，二次型的标准形为

$$f=3y_1^2+7y_2^2. \tag{1}$$

当$\|X\|=1$时，$\|Y\|=1$．显然（1）式在$Y=(0,\pm1)^T$，即

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

处取到最大值为 7.

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

解　二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$．$A$ 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=(2-\lambda)^2(4-\lambda),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=4$.

属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(0,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$；显然 α_1,α_2 正交，单位化，得 $\gamma_1=(0,1,0)^T,\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

属于 $\lambda_3=4$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(1,0,1)^T$；单位化，得 $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2. \tag{1}$$

当 $\|X\|=1$ 时，$\|Y\|=1$．显然（1）式在 $Y=(0,0,\pm1)^T$，即

$$X=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

处取到最大值为 4.