

四. 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵是一类特殊的矩阵，它们一定可以对角化。

即存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$

更可找到正交矩阵 T ，使得 $T^{-1}AT = \Lambda$

定理1：实对称矩阵的特征值为实数。

证：设 λ 是 A 的任一特征值，（往证 $\bar{\lambda} = \lambda$ ）

α 是对应于 λ 的特征向量，
则 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，（ $\alpha \neq 0$ ） 设 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

用 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数， $\bar{\alpha}$ 表示 α 的共轭复向量。

$$\text{则 } \overline{A\alpha} = \overline{\lambda\alpha} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\alpha} \quad (1)$$

又 $\because A$ 是实对称矩阵, $\therefore \overline{A} = A$ 且 $A^T = A$.

$$\therefore \overline{A\alpha} = \overline{A} \cdot \overline{\alpha} = A \cdot \overline{\alpha} \quad (2)$$

由(1)(2)有 $\overline{\lambda} \cdot \overline{\alpha} = A \cdot \overline{\alpha}$, 等号两边同时左乘 α^T

$$\text{左边} = \alpha^T \cdot (\overline{\lambda} \cdot \overline{\alpha}) = \overline{\lambda} \cdot \alpha^T \cdot \overline{\alpha}$$

$$\text{右边} = \alpha^T \cdot (A \cdot \overline{\alpha}) = \alpha^T \cdot A^T \cdot \overline{\alpha} = (A\alpha)^T \cdot \overline{\alpha}$$

$$= (\lambda\alpha)^T \cdot \overline{\alpha} = \lambda \cdot \alpha^T \cdot \overline{\alpha}$$

$$\therefore \overline{\lambda} \cdot \alpha^T \cdot \overline{\alpha} = \lambda \cdot \alpha^T \cdot \overline{\alpha}$$

$$\text{即 } (\overline{\lambda} - \lambda) \cdot \alpha^T \cdot \overline{\alpha} = 0$$

考虑

$$\alpha^T \bar{\alpha} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = x_1 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_2} + \dots + x_n \cdot \overline{x_n} \\ = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

$$\therefore \bar{\lambda} - \lambda = 0 \quad \therefore \bar{\lambda} = \lambda \quad \text{即 } \lambda \text{ 为实数。} \quad (\because \alpha \neq 0)$$

定理1的意义:

因为对称矩阵 A 的特征值 λ_i 为实数, 所以齐次线性方程组

$(A - \lambda_i E)x = 0$ 是实系数方程组。

又因为 $|A - \lambda_i E| = 0$, 可知该齐次线性方程组一定有实的基础解系, 从而对应的特征向量可以取实向量。

定理2: 实对称矩阵 A 的对应于不同特征值的特征向量正交。

证: 设 λ_1, λ_2 是对称矩阵 A 的两个特征值, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

p_1, p_2 是依次与之对应的特征向量。

则 $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$\because A$ 为实对称矩阵, $\therefore A^T = A$

考虑 $\lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (Ap_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A,$

于是 $\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A \cdot p_2 = p_1^T \cdot (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 \cdot p_1^T p_2,$

$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot p_1^T p_2 = 0.$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2, \therefore p_1^T p_2 = 0. \therefore (p_1, p_2) = p_1^T p_2 = 0$

即 p_1, p_2 正交。

定理3: A 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 A 的 k 重特征值,

知道结论即可

则对应于 λ_0 的特征向量中, 线性无关的向量的个数为 k ,
即 $(A - \lambda_0 E)X = 0$ 的基础解系所含向量个数为 k .

一般情况下(非实对称):

k 重特征值 对应的线性无关的特征向量的个数少于 k .

定理4: (实对称矩阵必可对角化)

对于任一 n 阶实对称矩阵 A ,

一定存在 n 阶正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = \Lambda$.

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵。

证：设实对称阵 A 的互不相等的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$

它们的重数依次为 r_1, r_2, \dots, r_s

则 $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$

由定理，特征值 λ_i （重数为 r_i ）对应的线性无关的特征向量为 r_i 个。

把它们正交化，再单位化，即得 r_i 个单位正交的特征向量。

$$\because r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$$

所以，可得这样的单位正交向量 n 个。

又 $\because A$ 是实对称阵,

\therefore 不同特征值对应的特征向量正交,

\therefore 上面得到的 n 个单位特征向量两两正交。

以它们为列向量构成正交矩阵 T , 有

$$T^{-1} \cdot AT = T^{-1} \cdot T\Lambda = \Lambda$$

其中 Λ 的对角元素含有 r_1 个 λ_1

r_2 个 λ_2

$\cdots r_s$ 个 λ_s 恰是 A 的 n 个特征值。

求正交矩阵 T ，把实对称矩阵 A 化为对角阵的方法：

1. 解特征方程 $|A - \lambda E| = 0$,

求出对称阵 A 的全部不同的特征值。

2. 对每个特征值 λ_i ，求出对应的特征向量，

即求齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的基础解系。

3. 将属于每个 λ_i 的特征向量先正交化，再单位化。

这样共可得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

4. 以 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为列向量构成正交矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

有 $T^{-1}AT = \Lambda$

$$\text{即 } \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

必须注意：对角阵中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的顺序
要与特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的排列顺序一致。

例： 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ， 求正交矩阵 T ，
使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

$$\begin{aligned} \text{解： } |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 齐次线性方程组为 $(A + E)X = \mathbf{0}$

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_2 = -2x_1 - 2x_3 \quad \text{令} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{得基础解系 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

先正交化：令 $\beta_1 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\beta_2 = p_2 - \frac{(p_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

再单位化：令

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 8$ 时, 齐次线性方程组为 $(A - 8E)X = 0$

$$(A - 8E) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \quad \text{令 } x_3 = 1 \text{ 得基础解系 } p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化得 } \eta_3 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

得正交矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{有 } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ，求正交矩阵 T ，
使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

$$\begin{aligned} \text{解： } |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$$

当 $\lambda_1 = 4$ 时, 由 $(A - 4E)x = 0$,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \quad \text{得基础解系 } p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

只需把 p_1 单位化, 得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$,
(考虑为什么?)

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由 $(A - E)x = 0$,

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$ 得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

只需把 p_2 单位化, 得 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 由 $(A + 2E)x = 0$,

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$ 得基础解系 $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

只需把 p_3 单位化, 得 $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

得正交矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$

有 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$