四. 矩阵的初等变换与初等矩阵

1.矩阵的初等变换
2.初等矩阵
3.用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

1. 矩阵的初等变换

什么是初等变换?

线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

用矩阵形式表示此线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则，线性方程组可表示为 $Ax = b$

如何解线性方程组？　可以用消元法求解。

始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换：

（**1**）交换方程次序；

（**2**）以不等于 0 的数乘某个方程；

（**3**）一个方程加上另一个方程的k倍.

因为在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量并未参与运算.

若记

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

则对方程组的变换完全可以转换为

对矩阵$\boldsymbol{B}$（方程组的增广矩阵）的变换.

即，求解线性方程组实质上是对增广矩阵施行
3种初等运算：

统称为矩阵的
初等行变换

(1) 对调矩阵的两行。

(2) 用非零常数**k**乘矩阵的某一行的所有元素。

(3) 将矩阵的某一行所有元素乘以非零常数**k**后加到另一行对应元素上。

定义1：下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对调两行（对调i, j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素 ；

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作$r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的初等列变换 (把“r”换成“c”).

矩阵的初等变换 $\begin{cases} \text{初等行变换} \\ \text{初等列变换} \end{cases}$

通常称 (1) 对换变换 (2) 倍乘变换 (3) 倍加变换

初等变换的逆变换(还原变换)仍为初等变换，且变换类型相同.

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \text{逆变换} \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \text{逆变换} \quad r_i \times (\frac{1}{k}) \text{ 或 } r_i \div k;$$

$$r_i + kr_j \quad \text{逆变换} \quad r_i + (-k)r_j \text{ 或 } r_i - kr_j.$$

2. 初等矩阵

矩阵初等变换是矩阵的一种基本运算，应用广泛.

定义3：由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} \text{1. 对调两行或两列；} \\ \text{2. 以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行或某列；} \\ \text{3. 以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.} \end{cases}$$

(1) 对调两行或两列，得初等对换矩阵。

对调 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列，得初等倍乘矩阵。

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$E(i(k))$.

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) 以数 $k \neq 0$ 乘某行（列）加到另一行（列）上，

得初等倍加矩阵。

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$]

$$E(ij(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵是可逆的，逆矩阵仍为初等矩阵。

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，

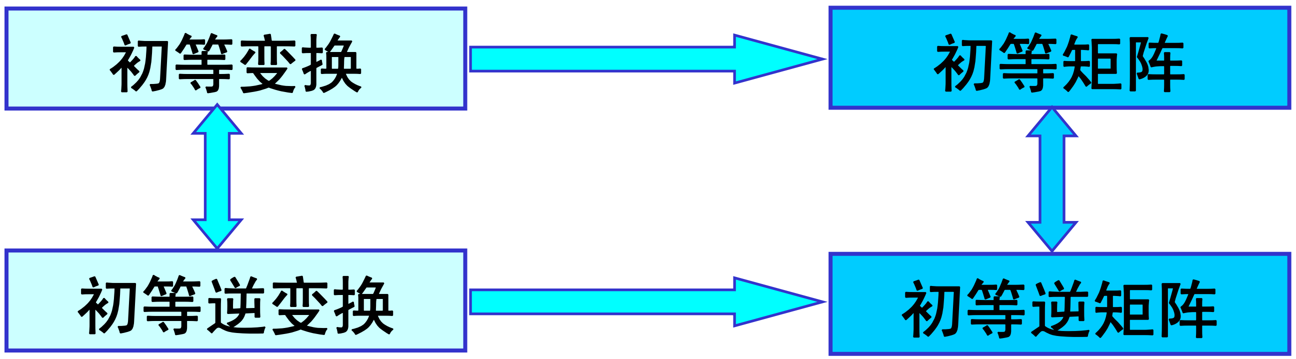
则 $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$ ；

变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$，

则 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$;

变换 r_i+kr_j 得逆变换为 r_i-kr_j

则 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.



例1：计算

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

定理:

设A是$m \times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘一个相应的 m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换， 相当于在A的右边乘一个相应的 n阶初等矩阵。

证明: 具体验证即可

一般记法：

$E(i,j)A$表示A的第i行与第j行对换，

$AE(i,j)$表示A的第i列与第j列对换.

$E(i(k))A$表示A的第i行乘k，

$AE(i(k))$表示A的第i列乘k.

$E(ij(k))A$表示A的第j行乘k加到第i行上，

$AE(ij(k))$表示A的第i列乘k加到第j列上.

例2： (1) 设初等矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} P_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$P_1P_2P_3$及$(P_1P_2P_3)^{-1}$

解：(1)$P_1P_2P_3$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\c&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ c & & & 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1 & \\ -c & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1/k & & \\ 1 & & & \\ & & -c & 1 \end{pmatrix}$$

(2)已知：$A = P_1 B P_2$，求A

其中$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 用初等变换法求可逆矩阵的逆矩阵

命题: 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

推论1: 可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积

证明: 由定理知道存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$

使得 $\left(P_s \cdots P_2 P_1\right) A = E$,

又因为初等矩阵可逆，所以等号两边左乘$\left(P_s \cdots P_2 P_1\right)^{-1}$

$$A = \left(P_s \cdots P_2 P_1\right)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$$

初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，定理得证。

推论2: 如果对可逆矩阵 A 和同阶单位矩阵 E 作同样的初等行变换，那么当 A 变成单位矩阵 E 时，E 就变成 A^{-1}。

$$\left(P_s\cdots P_2P_1\right)A=E,\quad \text{等号两边右乘 } A^{-1},$$

$$(P_s\cdots P_2P_1)E=A^{-1}$$

即，$$\left(A,E\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E,\ A^{-1}\right)$$

又 $AA^{-1}=E,\quad A\left(P_s\cdots P_2P_1\right)=E,$

$$E\left(P_s\cdots P_2P_1\right)=A^{-1},$$

即，$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例3：　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

练习：用初等行变换求可逆矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

注： 1. 求逆时,若用初等行变换必须坚持始 终,不能夹杂任何列变换.

2. 若作初等行变换时,出现全行为0，则矩阵的行列式等于0。结论：矩阵不可逆!

另：利用初等行变换求逆矩阵的方法，还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \vdots B) = (E \vdots A^{-1}B)$$

即

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots \boxed{A^{-1}B})$$

例4：求矩阵 X,使 $AX = B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 1\\3 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}.$$

解：　若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

方法1：先求出 A^{-1}，再计算 $A^{-1}B$。

方法2：直接求 $A^{-1}B$　。

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$$

$$(A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \qquad \therefore X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CA}^{-1}$$

如果要求$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CA}^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boxed{\boldsymbol{CA}^{-1}}\end{pmatrix},\qquad \text{即可得 } \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CA}^{-1}.$$

例5:已知 n 方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

求 A 中所有元素的代数余子 式之和 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

解: $\because$ $|A| = 2 \neq 0$, $\therefore$ A 可逆.

且 $A^* = |A| A^{-1}$.

$$
(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\because \quad A^* = 2A^{-1}$$

故 $$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 2[\frac{1}{2} + (n-1) - (n-1)] = 1.$$

例6：将矩阵A表示成三个初等矩阵的乘积。$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$\therefore\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}A=E$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

小结：

1. 单位矩阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵.

2. 利用初等变换求逆阵的步骤是:

(1) 构造矩阵 $(A \vdots E)$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$;

(2) 对 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换, 将 A 化为单位矩阵 E 后, 右边 E 对应部分即为 A^{-1} (或对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 将 A 划为单位阵 E 后, E 对应部分即为 A^{-1}.

要求掌握内容:

(1)掌握三种初等变换及与之对应的三种初等矩阵. 做到给出变换会写相应的初等矩阵,反之亦然.

(2)明确初等矩阵与其他矩阵做乘积的含义.

(3)会用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵.

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,\ A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

思考题: 将矩阵表示成有限个初等矩阵的乘积

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解：A可逆，所以存在初等矩阵 $p_1 p_2 \cdots p_s$，

使得 $P_S \cdots P_2 P_1 A = E$

$$\therefore A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_S^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\&&1\end{pmatrix}A=E$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$