第四章　向量组的线性相关性

本章首先介绍向量组的线性组合、线性相关性和秩等概念，给出向量组线性相（无）关的判断条件；

其次介绍向量空间及其基与维数等概念；

最后利用向量理论圆满地解决线性方程组解的结构等问题.

第一节　向量及线性表示

一、n维向量的概念

定义1　n维(元)向量：由 n 个数$x_1, x_2, \cdots, x_n$组成的n元有序数组

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

x_i：称为向量的第i个分量.　n：称为向量的维数.

实向量：分量都是实数的向量.

如：

$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$　与　$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

n元行向量　　n元列向量

本书没特殊强调，都指的是列向量，并用 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示.

二、向量的线性运算

向量就是特殊的矩阵，所以向量的线性运算与矩阵的线性运算一样，包括加法与数乘运算.（略）

三、向量的线性组合与线性表示

定义3　设向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$为一组$n$元向量，

向量组A的一个线性组合：$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots c_m\alpha_m$, 其中$c_1,c_2,\cdots,c_m$为任意常数.

若存在向量β，使得$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots c_m\alpha_m$，则称$\beta$是向量组$A$的线性组合，或说$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\ \alpha_m$线性表示.

设n个n元向量 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

则对任一n元向量 $\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,有$\alpha = x_1 e_1+x_2 e_2+\cdots+x_n e_n$,

即：任一 n元向量都可表示成 $e_1, e_2, \cdots, e_n$的线性组合.

定理1 n元向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ (或$A_{n\times m}X_{m\times 1}=\beta$)有解

$\Longleftrightarrow$ $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m \mid \beta)$

且该线性方程组$AX=\beta$的解，就是β由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示的系数.

作业　P110
2, 3

第二节　向量组的线性相关性

一、向量组的线性相关与线性无关

定义4　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m \in \mathbf{R}^n$，如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关；否则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性无关.

即

$$\boxed{\text{要使 } k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0}$$

⇨ 如果$k_1, k_2, \cdots, k_m$可取不全为零，则 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关

⇨ 如果$k_1, k_2, \cdots, k_m$只能取全为零，则 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性无关

如对向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\because$ $\alpha_1+2\alpha_2=\alpha_3$, 即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$, $\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

对 α_1,α_2, 要使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$, 只有$k_1=k_2=0$, $\therefore$ α_1,α_2 线性无关

由定义不难得到:

1.含零向量的向量组必线性相关;

2.只含一个向量α的向量组，$\alpha=0$是线性相关，$\alpha\neq 0$是线性无关;

3.只含两个向量的向量组α、β,

α与β有倍数关系 $\Longleftrightarrow$ 线性相关; α与β无倍数关系 $\Longleftrightarrow$ 线性无关

4. 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$（$m\geq 2$）线性相关

$\Longleftrightarrow$ 向量组A中至少有一个向量可由其余的m-1个向量线性表示.

定理2 n元向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性相关

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$ (或$AX=0$)有非零解.

$\Longleftrightarrow$ $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)<m$

推论1（$m=n$时）n 个n元向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性相关 （线性无关）

$\Longleftrightarrow$ $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m|=0$ （$\neq 0$）

推论2（$m>n$时）向量个数大于每个向量的分量个数时, 必线性相关.

例3 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\3\\-5\end{pmatrix}$,判断该向量组的线性相关性.

解

方法一：通过求矩阵的秩判断

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3 \Longrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

方法二：通过求矩阵的行列式判断

$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0 \Longrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

例4 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，试判断向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的线性相关性.

解　方法一（根据定义判断）：令 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，即

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以 $\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 \quad = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$ 只有 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

所以β_1,β_2,β_3线性无关.

方法二（通过求秩判断）：因为 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

所以 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3 \Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.　　秩=3　　矩阵可逆

二、向量组线性相关的性质

定理3 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，且表示法唯一.

定理4 (1)若向量组A的某一部分组线性相关，则向量组A也线性相关．反之，若向量组A线性无关，则任一部分组都线性无关.

(2)若向量组$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{tj})^T\ (j=1,2,\cdots,s)$，线性无关，则向量组

$$\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{tj},a_{t+1,j})^T,\quad j=1,2,\cdots,s,$$

也线性无关.

例5 设$x_1, x_2, \cdots, x_m$为m个互不相同的数，试讨论向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的线性相关性，其中 $\alpha_j = (1, x_j, x_j^2, \cdots, x_j^{n-1})^T, j=1, 2, \cdots, m.$

解 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$组成的矩阵

$$A = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) $n = m$时$|A| \neq 0$

$\Longrightarrow$ 线性无关

(2) $n < m$时 $R(A) \leq n < m$ (向量个数)

$\Longrightarrow$ 线性相关

(3) $n > m$时 矩阵A的前m行构成的矩阵B可逆，

$R(A) \geq R(B) = m$ 又$\because R(A) \leq m$ $\Longrightarrow$ 线性无关.

作业

P110　4(1,3,4),6

P114　6

第三节　向量组的秩

一、向量组的极大线性无关组

定义5　给定n维向量组 (Ⅰ): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$和 (Ⅱ): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 如果(Ⅱ)中的每一个向量都可以由(Ⅰ)中的向量线性表示，则称(Ⅱ)可以由(Ⅰ)线性表示,同时如果(Ⅰ)也可以由(Ⅱ)线性表示，则称(Ⅰ)与(Ⅱ)等价

如果向量组(Ⅱ)可以由(Ⅰ)线性表示，则有下列表示式：

$$\begin{cases} \beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{s1}\alpha_s, \\ \beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{s2}\alpha_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_t = k_{1t}\alpha_1 + k_{2t}\alpha_2 + \cdots + k_{st}\alpha_s, \end{cases}$$

或 $$B_{n\times t} = A_{n\times s}K_{s\times t} \qquad (4.4)$$

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$,

$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$

定理5 设n维向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性无关，则$t \le s$.

推论 等价的线性无关的向量组所含的向量个数必相同.

定义6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是$\mathbf{R}^n$中向量组$A$的一个部分组,如果满足

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关;

(2) 向量组A中的任意$r+1$个向量都线性相关(如果存在$r+1$个向量),

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是向量组$A$的一个极大线性无关组.

如，求向量组的极大线性无关组： $\alpha_1=(1, 0, 2, 1)^T$, $\alpha_2=(1, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_3=(2, 1, 3, 2)^T$, $\alpha_4=(2, 5, -1, 4)^T$ $\Longrightarrow$ 向量组的极大线性无关组不唯一.

二、向量组的秩

1.由分析可知：(1).向量组的极大线性无关组不唯一.

(2).向量组与它的极大线性无关组等价.

(3).向量组的每个极大线性无关组所含向量个数相同.

定义7 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$的极大线性无关组所含向量个数，记为$R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

2.极大线性无关组性质

定理6 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = m$.

定理7 向量组 A 可以由向量组 B 线性表示 $\Longrightarrow$ $R(A) \leq R(B)$

推论 等价向量组有相同的秩.

2. 向量组秩的计算

定理8 矩阵A的秩 =A的列向量组的秩 = A的行向量组的秩.

矩阵A的列秩　　矩阵A的行秩

⟹ 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩 = 矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的秩

注：

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \xrightarrow{\text{行变换}} (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = B$$

则 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$有相同的秩，而且有相同的线性相关性.

例6 给定向量组$\alpha_1=(1, 4, 1, 0)^T$, $\alpha_2=(2, 1, -1, -3)^T$, $\alpha_3=(1, 0, -3, -1)^T$, $\alpha_4=(0, 2, -6, 3)^T$, 求向量组的秩和它的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

解

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

∴ 向量组的秩=3,

它的一个极大无关组可取$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，且 $\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$.

思 考 题 三

1．n阶矩阵A可逆当且仅当（全部成立）

（1）存在n阶矩阵B，使$AB=BA=E$成立；

（2）对任意的$\beta\in\mathbf{R}^n$，$AX=\beta$有唯一解；

（3）对任意的$X\in\mathbf{R}^n$，$X\neq 0$，恒有$AX\neq 0$成立；

（4）$|A|\neq 0$；

（5）$R(A)=n$；

（6）A的列（行）秩为n；

（7）A的n列（行）线性无关；

（8）A的最高阶非零子式为$|A|$；

（9）$AX=0$只有零解；

（10）A等价于任一n阶可逆阵；

（11）A等价于n阶单位阵；

（12）A可表为若干初等矩阵之积；

（13）对任意的n阶矩阵B、C，且$AB=AC$，有$B=C$.

作业　P112

11

第四节　向量空间

一、向量空间及其有关概念

定义8 设V是$\mathbf{R}^n$的一个子集，如果V满足：

（1）V对加法运算封闭，即 $\forall\alpha,\beta\in V$，都有$\alpha+\beta\in V$

（2）V对数乘运算封闭，即 $\forall\alpha\in V$，$\forall k\in R$，有 $k\alpha\in V$.

则称V关于向量的线性运算构成(实数域上的)一个向量空间.

所以：V构成一个向量空间$\Longleftrightarrow$ 即 $\forall\alpha,\beta\in V$，$\forall k,l\in R$，都有$k\alpha+l\beta\in V$

$\Longleftrightarrow$ V中的向量关于线性组合封闭

例7 设$V=\{\alpha=(x_1, x_2,\cdots, x_n)^T|x_i\in \mathbf{R}, x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$,问$V$是向量空间吗？ 不是向量空间，因为加法不封闭.

例8 设$\alpha, \beta\in \mathbf{R}^n$，向量$\alpha, \beta$的所有实系数线性组合构成的集合$U=\{\gamma=x_1\alpha+x_2\beta \mid x_1,x_2\in \mathbf{R}\}$. 证明：$U$是向量空间.

向量空间U称为由α, β所生成的的子空间（或称为 α, β的生成子空间），记为$U=span(\alpha, \beta)$,其中α, β为生成元.

例 齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0$的解集$X_A=\{X \mid AX=0\}$是一个向量空间（称为齐次线性方程组的解空间）.

只含零向量的集合也是一个向量空间，称为零空间.

定义9 设V是向量空间U的一个子集，如果V也是向量空间，则称V是U的子空间.

二、向量空间的基和维数，向量的坐标

定义10 设V是一个向量空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$V$中的一组向量，如果满足：（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；

（2）V中的任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$V$的一组基，数$r$称为$V$的维数，记作$\dim(V) = r$，并称$V$是$r$维向量空间. 零空间没有基，规定零空间的维数是零.

注：向量空间的基就是向量组的极大线性无关组.

如 $\mathbf{R}^1$是一维向量空间，1是它的一组基；

$\mathbf{R}^2$是二维向量空间，$(1, 0)^T, (0, 1)^T$是它的一组基；

$\mathbf{R}^3$是三维向量空间，$(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$是它的一组基；

……

$\mathbf{R}^n$是 n 维向量空间，$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)^T, \boldsymbol{e}_2=(0, 1, \cdots, 0)^T, \ldots,$

$\boldsymbol{e}_n=(0, \cdots, 0, 1)^T$是它的一组基；

由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$生成的向量空间

$U = span(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \mid x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,m\}$

基：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的极大线性无关组；

维数：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩.

例 9　试求由向量组 $\alpha_1=(1,0,2,1)^T, \alpha_2=(1,2,0,1)^T, \alpha_3=(2,1,3,2)^T, \alpha_4=(2,5,-1,4)^T$ 所生成的向量空间$span(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基与维数.

基：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大线性无关组，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

维数　向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩 $=3$.

定义11 设V是向量空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$V$中的一组基，则$\alpha \in V$，存在唯一的一组数$x_1, x_2, \cdots, x_r$，使得

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

则称$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$为$\alpha$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$下的坐标.

例10 设向量空间$V=\{\alpha=(x_1, x_2,\cdots, x_n)^T | x_i \in \mathbf{R}, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$,

证明：向量组

$\alpha_1=(1,-1,0,0,\cdots,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,-1,0,\cdots,0)^T$，$\cdots$，$\alpha_{n-1}=(0,\cdots,0,1,-1)^T$

为V的一组基，并求向量$\alpha=(1,1,\cdots,1,1-n)^T$在这组基下的坐标.

α在这组基下的坐标为$(1,2,\cdots,n-1)^T$.

问： α在基$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_1$下的坐标又是什么？ $(2,\cdots,n-1,1)^T$.

注： 对于同一组基向量，向量组的排序不同，表示不同的基.

三、基变换与坐标变换

定义12 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$是向量空间$V$的基，并且有

$$\boxed{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P_{r\times r}} \tag{4.5}$$

称矩阵$P_{r\times r}$是由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$的过渡矩阵.

基变换公式

注： 1. 过渡矩阵是可逆矩阵；

2. 如果基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$的过渡矩阵是$P$，则基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的过渡矩阵是$P^{-1}$.

定理 9 设V是向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$是$V$的基，且

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T \text{ 和 } Y=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T$$

分别是向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$下的坐标，则有

$$\boxed{X=PY} \quad \text{或} \quad \boxed{Y=P^{-1}X} \longrightarrow \text{坐标变换公式}$$

1. α在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的坐标为 X $\Leftrightarrow$ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)X$
2. 基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$的过渡矩阵是$P$

$$\Leftrightarrow \quad (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P$$

3. $X=PY$ 或 $Y=P^{-1}X$

例11 在R^3中，求由基 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,2)^T$到基 $\beta_1=(1,0,0)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,1,1)^T$的过渡矩阵.

过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

例12 在R^4中有一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4$.　（1）证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$R^4$的一组基；

（2）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$P$；

（3）设α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$X=(1,1,1,1)^T$,求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标$Y$.

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$=P$ 过渡矩阵

$Y=P^{-1}X=(1,0,1,0)^T$

思 考 题 四

2.齐次线性方程组$AX=0$解的全体构成向量空间，那么非齐次线性方程组$AX=\beta$解的全体是否构成向量空间？

不够构成向量空间，因为加法不封闭.

作业　P112

A 15,16,17,18

B 10

第五节　线性方程组解的结构

本节利用向量理论讨论关于线性方程组解的结构问题，从而圆满解决了线性方程组的问题.

一、齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组$AX=0$的解的性质：

性质1　如果 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组的解, 则 $\xi_1+\xi_2$也是该方程组的解.

性质2　如果 ξ 是齐次线性方程组的解, 则 $c\xi$ 也是该方程组的解, c为任意常数.

性质3　如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是齐次线性方程组的解, 则

$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_s\xi_s$ 也是该方程组的解, 其中$c_1, c_2, \cdots, c_s$为任意常数.

即：齐次线性方程组解的线性组合仍是它的解.

定义13　如果$\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_s$是齐次线性方程组$AX=0$的解向量组的一个极大线性无关组 ,则称$\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_s$是齐次线性方程组$AX=0$ 的一个基础解系.

定理10（基础解系的存在定理）　如果齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0$的有非零解, 则$AX= 0$ 必存在基础解系, 且基础解系均由n-r 个解组成，其中 r =R(A).

定理11 对于齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0$ 有

(1) $R(A)=n$ 时，方程组只有零解，没有基础解系；

(2) $R(A)=r<n$ 时,方程组 $AX=0$ 有非零解, 其基础解系含有$n-r$ 个解向量组成，设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$， 则方程组的通解为

$$X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数.

问： 齐次线性方程组$AX=0$ 的解空间的基与维数是什么？

答：

基：$AX=0$ 的基础解系

维数：$AX=0$ 的基础解系所含的向量个数 $=n-R(A)$

例13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系及通解.

解 对方程组的系数矩阵施行变换为行最简形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

取 x_2, x_4为自由未知量,

令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$,

则通解为 $\begin{cases} x_1 = c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\xi_2}$$

通解为：$X = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$　　c_1, c_2为任意常数.

其中 ξ_1, ξ_2 为基础解系.

例14 设A, B分别是$m\times n$和$n\times s$矩阵，满足$AB=0$

证明： $R(A)+R(B)\leq n$

证明： $AB=0$ $\Rightarrow$

B的列向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是齐次线性方程组$AX=0$的解向量

而$AX=0$的基础解系含有$n-R(A)$个解向量

$R(B)=R(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\leq$ 基础解系的秩 $=n-R(A)$

$R(A)+R(B)\leq n$

二、非齐次线性方程组$AX=\beta$ 解的结构

给定非齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta$ （4.8）

令$\beta=0$，得齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0$ （4.9）

称（4.9）为（4.8）的导出齐次线性方程组，简称导出组.

（4.9）与（4.8）的解的关系

性质1 如果η为（4.8）的解，ξ为（4.9）的解，则 $\xi+\eta$为（4.8）的解.

性质2 如果η_1, η_2为（4.8）的解， 则$\eta_1-\eta_2$为（4.9）的解.

定理12 如果方程组（4.8）满足 $R(A)=R(B)=r\le n$， η^*为（4.8）的特解， 则（4.8）的通解为

$X=\eta^*+Y$ 其中Y为导出组（4.9）的通解

例　求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

若有无穷多解，则将通解用导出组的基础解系表示.

解:

$$B = (A \quad \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & \vdots & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/4 & \vdots & 5/4 \\ 0 & 1 & -3/2 & -7/4 & \vdots & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{R(A) = R(B) = 2 < 4}$,

方程组有无穷多解.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/2\, x_3 - 3/4\, x_4 + 5/4 \\ x_2 = 3/2\, x_3 + 7/4\, x_4 - 1/4 \end{cases}$$

取x_3, x_4为自由变量. 令$x_3=2k_1$，$x_4=4k_2$，则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 3k_1 - 3k_2 + 5/4 \\ x_2 = 3k_1 + 7k_2 - 1/4 \\ x_3 = 2k_1 \\ x_4 = 4k_2 \end{cases} \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\xi_1} + k_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\xi_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} -5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\eta^*}$$

方程组的通解为: $X = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ k_1, k_2为任意常数.

其中 η^*为方程组的特解，

ξ_1, ξ_2为导出组的基础解系.

作业 P112

A 19(3,4),20(1,3),21,22,

23,24,

B 10,15