样卷 1

一、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）

1．设 $X \sim N(1.5,4)$，且 $\Phi(1.25)=0.8944$，$\Phi(1.75)=0.9599$，则 P{-2<x<4}=（　　）。

(A)0.8543　　(B)0.1457　　(C)0.3541　　(D)0.2543

2．对于任意随机变量 X,Y，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则（　　）。

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　（B） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) X,Y 一定独立　　（D） X,Y 不独立

3．设随机变量的概率密度 $f(x)=\begin{cases} qx^{-2} & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases}$，则 q=（　　）。

(A)1/2　　(B)1　　(C)-1　　(D)3/2

4．事件 A，B 为对立事件，则（　　）不成立。

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$　　(B) $P(B|A)=\phi$　　(C) $P(\overline{A}|B)=1$　　(D) $P(A+B)=1$

5．掷一枚质地均匀的骰子，则在出现奇数点的条件下出现 3 点的概率为（　　　）

(A)1/3　　(B)2/3　　(C)1/6　　(D)3/6

二、填空题（在每个小题填入一个正确答案，填在题末的括号中）

1．设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$　则 $P\{X>0.4\}=$（　　）

2．设有 7 件产品，其中有 1 件次品，今从中任取出 1 件为次品的概率为（　　）

3．设 $AB=\phi$，$P(A)=0.3, P(B)=0.4,$ 则 $P(A\cup B)=$（　　）。

4．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim$（　　　）

5．设 D(X)=4, D(Y)=9, $\rho_{xy}=0.4$，则 D(x+y)=（　　　）

三、计算题

1．某电子设备厂所用的晶体管由甲乙丙三家元件制造厂提供。已知甲乙丙三厂的次品率分别为 0.02，0.01，0.03，又知三个厂提供晶体管的份额分别为 0.15，0.80，0.05，设三个厂的产品是同规格的（无区别标志），且均匀的混合在一起。求在混合的晶体管中随机的取一支是次品的概率。

2．设二维随机变量 X与Y 的联合分布密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$，分别求关于 X 与关于 Y 的边缘密度函数。

3．设连续型随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases} Ke^{-5x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

(1)确定常数 K　　(2)求 $P\{X>0.2\}$　　(3)求分布函数 F(x).

4．设连续型随即变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & c<x<d \\ 0, & 其它 \end{cases}$，求 E(X),D(X)

四．证明题

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立随机变量序列，对它成立中心极限定理，试证对它成立大数定理的充要条件为 $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=o(n^2)$。

参考答案

一、选择题（1）A　　（2）B　　（3）B　　（4）B　　（5）A

二、填空题（1）0.6　（2）1/7　（3）0.7　（4）N(0,1)　（5）8.2

三、计算题

（1）全概率公式 $P(A)=0.15\times0.02+0.80\times0.01+0.05\times0.03=0.0125$

（2）$f_X(x)=\int_x^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（3）①$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^{+\infty}Ke^{-5x}dx=\frac{1}{5}K=1$，故 $K=5$ 。

② $P(\xi>0.2)=\int_{0.2}^{+\infty}5e^{-5x}dx=e^{-1}\approx 0.3679.$

③当 x<0 时, F(x)=0;

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}dx+\int_0^{x}5e^{-5x}dx=1-e^{-5x}$

故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

（4）X 的数学期望为　$E(X)=\int_c^d x\frac{1}{d-c}dx=\frac{c+d}{2}$

$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\int_c^d x^2\frac{1}{d-c}dx-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2=\frac{(d-c)^2}{12}$

四．证明题

充分性：设 $D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=o(n^2)$.则由切比雪夫不等式得

$P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)\right|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(\sum_{i=1}^{N}\xi_i)}{\varepsilon^2 n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 所以大数定理成立。

必要性：由于对 $\{X_n\}$ 成立中心极限定理, 对任意 a>0, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E(\xi_i))\right|\le a\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad ①$$

又成立大数定理, 即 $\forall\varepsilon>0$, 有 $\lim_{n\to\infty}P\{\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E(\xi_i))\right|\le\varepsilon\}=1$ ②

而 $P\{\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E(\xi_i))\right| < \varepsilon\} = P\left\{\frac{B_n}{n}\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E(\xi_i))\right| < \varepsilon\right\}$

$= P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E(\xi_i))\right| < \varepsilon\frac{n}{B_n}\right\}$, 由此式利用①或②可得，当 $n \to \infty$ 时，应有 $\frac{\varepsilon n}{B_n} \to \infty$, 即

$\frac{B_n}{n} \to 0$, 从而 $B_n^2 = D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = o(n^2)$.