**第二节  定积分计算公式和性质**

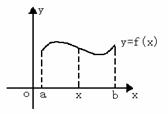
**一、变上限函数**

设函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif在区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上连续，并且设x为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上的任一点，于是，http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif在区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上的定积分为

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image006.gif

这里x既是积分上限，又是积分变量，由于定积分与积分变量无关，故可将此改为

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image008.gif

如果上限x在区http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif间上任意变动，则对于每一个取定的x值，定积分有一个确定值与之对应，所以定积分在http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上定义了一个以x为自变量的函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image012.gif，我们把http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image012.gif称为函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif在区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上变上限函数

记为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image014.gif

|  |
| --- |
| 图  5-10 |

从几何上看，也很显然。因为X是http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上一个动点，从而以线段http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image016.gif为底的曲边梯形的面积，必然随着底数端点的变化而变化，所以阴影部分的面积是端点x的函数（见图5-10）

**定积分计算公式**

利用定义计算定积分的值是十分麻烦的，有时甚至无法计算。因此，必须寻求计算定积分的简便方法。

我们知道：如果物体以速度http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image018.gif作直线运动，那么在时间区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上所经过的路程s为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image020.gif

|  |
| --- |
| 图 5-11 |

|  |
| --- |
|  |
|  | http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image022.jpg |

另一方面，如果物体经过的路程s是时间t的函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image024.gif，那么物体从t=a到t=b所经过的路程应该是（见图5-11）

即

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image026.gif

由导数的物理意义可知：http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image028.gif即http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image024.gif是http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image031.gif一个原函数，因此，为了求出定积分http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image033.gif，应先求出被积函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image031.gif的原函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image024.gif，再求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image024.gif在区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上的增量http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image035.gif即可。

如果抛开上面物理意义，便可得出计算定积分http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image037.gif的一般方法：

设函数http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif在闭区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif上连续，http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image040.gif是http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif的一个原函数，即http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image043.gif，则

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image045.gif

这个公式叫做牛顿-莱布尼兹公式。

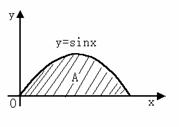
为了使用方便，将公式写成

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image047.gif

牛顿-莱布尼兹公式通常也叫做微积分基本公式。它表示一个函数定积分等于这个函数的原函数在积分上、下限处函数值之差。它揭示了定积分和不定积分的内在联系，提供了计算定积分有效而简便的方法，从而使定积分得到了广泛的应用。

**例1**计算http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image049.gif

因为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image051.gif是http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image053.gif的一个原函数所以http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image055.gif

**例****2** 求曲线http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image059.gif 和直线x=0、x=http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image061.gif 及y=0所围成图形面积A(5-12)

**解**  这个图形的面积为

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image063.gif

|  |
| --- |
| 图 5-12 |

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image065.gif

**二、定积分的性质**

设http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image002.gif、http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image067.gif在相应区间上连续，利用前面学过的知识，可以得到定积分以下几个简单性质：

**性质1**被积函数的常数因子可以提到定积分符号前面，即http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image069.gifhttp://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image071.gif(A为常数)

**性质2**  函数的代数和的定积分等于它们的定积分的代数和，即

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image073.gif

这个性质对有限个函数代数和也成立。

**性质3**  积分的上、下限对换则定积分变号，即

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image075.gif

以上性质用定积分的定义及牛顿-莱布尼兹公式均可证明，此处证明从略。

**性质4**  如果将区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif分成两个子区间http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image078.gif及http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image080.gif那么有http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image082.gif

这个于区间分成有限个的情形也成立。

下面用定积分的几何意义，对性质4加以说明。

当a<c<b时，从图5-13a可知，由y=fhttp://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image084.gif与和x=a x=b及x轴围成的曲边梯形面积http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image086.gif:

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image088.gif

|  |
| --- |
| 图 5-13a |
| 图 5-13b |

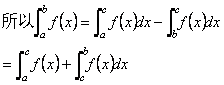
|  |
| --- |
|  |
|  | http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image091.gif |

因为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image093.gif所以http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image095.gif

即性质4成立。

当a<b<c时，即点c在http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif外，由图5-13b可知，

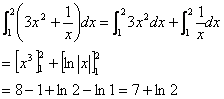
http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image097.gif



显然，性质4也成立。

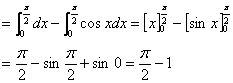
总之，不论c点在http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif内还是http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image004.gif外，性质4总是成立的。

**例3** 求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image101.gif



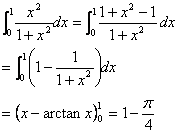
**例 4**  求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image105.gif

**解**   http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image069.gifhttp://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image107.gif=http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image109.gif

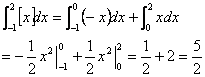


**例  5**  求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image113.gif

**解**



所以



**例 6**  求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image119.gifhttp://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image069.gif

解  http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image121.gif

于是， http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image123.gif

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image125.gif

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image127.gif

**例 7** 设  http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image129.gif          求http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image131.gif

**解** 因为 http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image133.gif

所以http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image135.gif

=http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image137.gif

=http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image139.gifhttp://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image069.gif=http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image141.gif

**例8** 火车以v=72km/h的速度在平直的轨道上行驶，到某处需要减速停车。设火车以加速度a=-5m/http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image143.gif刹车。问从开始刹车到停车，火车走了多少距离？

**解**  首先要算出从开始刹车到停车经过时间。当 时火车速度

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image145.gif刹车后火车减速行驶。其速度为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image147.gif当火车停住时，速度http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image149.gif，故从http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image151.gif

解得     http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image153.gif

于是在这段时间内，火车走过的距离为

http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image155.gif

  =http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image157.gif

即在刹车后，火车需走过40m才能停住。

**习题 5-2**

1 求下列定积分：

（1）http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image159.gif   (2) http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image161.gif

(3)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image163.gif       (4) http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image165.gif

(5)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image167.gif         （6）http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image169.gif

(7)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image171.gif

 (8)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image173.gif       (9)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image175.gif          (10)http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image177.gif

(11)设http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image179.gif

2.求由http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image181.gif与直线x=1,x=2及x轴所成的图形的面积。

3.一物体由静止出发沿直线运动，速度为http://www.shuxuecheng.com/gaosuzk/content/lljx/wzja/5/5-2.files/image183.gif，其中,v以m/s单位，求物体在1s到2s之间走过的路程。