# Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

# Relación de Ejercicios 5

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

### Lista de Problemas

# Problema 1

Sea $X$ una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X = i) = ki; \quad i = 1, \ldots, 20$.

*a*) Determinar el valor de $k$, la función de distribución y las siguientes probabilidades:

$$P(X = 4),\ P(X < 4),\ P(3 \leq X \leq 10),\ P(3 < X \leq 10),\ P(3 < X < 10).$$

*b*) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

**Apartado 1**

Nótese que la variable aleatoria X es discreta.

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función masa de probabilidad:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X = i) = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X = i) = \sum_{i=1}^{20} ki = k \sum_{i=1}^{20} i = k \cdot \frac{20(20+1)}{2} = 210k \Rightarrow k = \frac{1}{210}$$

Luego, la función de distribución de la variable aleatoria X sería la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210} & si \quad 1 \leq x \leq 19 \\ 1 & si \quad x \geq 20 \end{cases}$$

Ahora calculamos las probabilidades que nos piden con la función de distribución calculada:

$$P(X = 4) = F(4) - F(4^-) = F(4) - F(3) = \frac{10}{210} - \frac{6}{210} = \frac{4}{210}$$
$$P(X < 4) = P(X \leq 4) - p(X = 4) = F(4^-) = f(3) = \frac{6}{210}$$
$$P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X < 3) = F(10) - F(3^-) = F(10) - F(2) =$$
$$= \frac{55}{210} - \frac{3}{210} = \frac{52}{210}$$
$$P(3 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = F(10) - F(3) = \frac{55}{210} - \frac{6}{210} = \frac{49}{210}$$
$$P(3 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 3) = F(10^-) - F(3) =$$
$$= F(9) - F(3) = \frac{45}{210} - \frac{6}{210} = \frac{39}{210}$$

**Apartado 2**

La ganancia viene dada de la siguiente forma:

$$Ganancia = \begin{cases} 20 & si \quad x < 4 \\ 24 & si \quad x = 4 \\ -1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Calculemos las probabilidades de cada situación:

$$P(x < 4) = \frac{6}{210}$$
$$P(X = 4) = \frac{4}{210}$$
$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{10}{210} = \frac{20}{21}$$

Para ver si este juego le es favorable al jugador calculemos la esperanza matemática (media) de una nueva variable $Y$ que tome estos valores. Si la esperanza matemática es positiva, el juego será favorable, si es negativa, no.Definimos la variable Y con sus valores y probabilidades:

$$P(Y = 20) = P(x < 4) = \frac{6}{210} P(Y = 24) = P(X = 4) = \frac{4}{210} P(Y = -1) = P(X > 4) = \frac{20}{21}$$

Ahora calculamos su esperanza matemática:

$$E[Y] = \sum_i y_i \cdot P(Y = y_i) = \frac{120}{210} + \frac{96}{210} - \frac{20}{21} = \frac{8}{105} \approx 0{,}076$$

Al ser $E[Y] > 0$ vemos que el juego es favorable, aunque la ganancia esperada será muy pequeña.

## Problema 2

Sea $X$ el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:

a) Función masa de probabilidad y función de distribución.

b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.

c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

### Apartado 1

Tenemos que la variable X puede tomar 3 valores: 0, 1, 2 (No sale ninguna bola blanca, sale una o salen dos). Por tanto:

$$P[X = 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \quad P[X = 1] = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45} \quad P[X = 2] = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

Ahora podemos definir la función de distribución:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{45} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{17}{45} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**Apartado 2**

- Media: Es la esperanza matemática, es decir, el centro de gravedad de la distribución de probabilidad y se calcula como
$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P[X = x_i] = \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{8}{5} \approx 2$$
De esta medida obtenemos que es esperable sacar 2 bolas blancas de la urna.
- Mediana: Es el valor de la variable que deja por debajo al 50 % de la probabilidad. En nuestro caso, mirando a la función de distribución tenemos que
$$\text{Me} = 2$$
Como no hay ninguna probabilidad que deje debajo exactamente al 50 % de las probabilidades, únicamente se ha podido adoptar el valor 2, que es el máximo valor que puede tomar la variable estadística.

  De esta medida podemos interpretar que la distribución de probabilidad no es uniforme, concentrando casi todas las probabilidades a la derecha $X = 2$.
- Moda: Es el valor de $x_i$ con mayor probabilidad, por lo que se calculará como el máximo de los $P[X = x_i]$. Por tanto
$$\text{Mo} = 2$$
De esta medida podemos concluir que, después de realizar el experimento aleatorio, lo más común es que ambas bolas extraídas sean blancas.

**Apartado 3**

Para el recorrido intercuartílico calculemos los percentiles 75 y 25:

$$Q_3 = P_{75} = \min\{\ x_i\ /\ P[X < x_i] = F[x_i] > 0{,}75\} = x_2 = 2$$
$$Q_1 = P_{25} = \min\{\ x_i\ /\ P[X < x_i] = F[x_i] > 0{,}25\} = x_1 = 1$$

Por tanto el recorrido intercuartílico será $Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$, que indica la longitud del intervalo en el que se encuentra el 50 % de los datos.

# Problema 3

El número de lanzamientos de una moneda hasta salir cara es una variable aleatoria con distribución $P(X = x) = 2^{-x};\quad x = 1, 2, \ldots$

*a)* Probar que la función masa de probabilidad está bien definida.

*b)* Calcular la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para salir cara esté entre 4 y 10.

*c)* Calcular los cuartiles y la moda de la distribución, interpretando los valores.

*d)* Calcular la función generatriz de momentos y, a partir de ella, el número medio de lanzamientos necesarios para salir cara y la desviación típica.

Sabemos que se trata de una variable aleatoria discreta.
Para probar que la función masa de probabilidad está bien definida, comprobamos que cumple:

**Apartado 1**

1. $P(X = x_i) \geq 0 \; \forall i \in N \Rightarrow P[X = x] = \frac{1}{2^x}$ que siempre va a ser positiva pues nunca se anula; y $2^x$ está siempre en el intervalo $(0, +\infty)$, por lo que la fracción nunca va a ser negativa.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + ...$ Esta es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge. Su suma viene dada por $\sum_i^n 2^{-n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

**Apartado 2**

$P(4 \leq x \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} p_i = \sum_{i=4}^{10} 2^{-x_i} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{127}{1024} \simeq 0'124$

**Apartado 3**

$Q_1 : P(X \leq x_i) = \frac{25}{100} = 0'25 \Rightarrow \sum_{i=1}^{x_i} 2^{-x_i} = 0'25 < 0'5 = 2^{-1} \Rightarrow Q_1 = 1$
$Q_2 : P(X \leq x_i) = \frac{50}{100} = 0'5 \Rightarrow 2^{-1} = 0'5 \Rightarrow Q_2 = \frac{1+2}{2} = 1'5$
$Q_3 : P(X \leq x_i) = \frac{75}{100=0'75} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} 2^{-x_i} = 0'5 + 0'25 = 0'75 \Rightarrow Q_3 = \frac{2+3}{2} = 2'5$
$M_o$: valor máximo. Cuanto mayor es $x_i$, menor es $\frac{1}{2^x_i}$. Por lo tanto, el valor máximo va a ser el primero, cuando $x_i = 1 \Rightarrow Mo = 1$

**Apartado 4**

Función generatriz de momentos: $M_x(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} * P[X = x_i] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} * \frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{e^t}{2})^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}}$.
Esto es una serie geométrica que converge si $\frac{e^t}{2} < 1 \Rightarrow e^t < 2 \Rightarrow t < log(2)$. Por lo tanto, converge en un entorno de cero.
Esperanza: $E[X] = M_x'(t) = \frac{(\frac{e^t}{2})'(1-\frac{e^t}{2})-(\frac{e^t}{2})(1-\frac{e^t}{2})'}{(1-\frac{e^t}{2})^2} = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-e^t+\frac{e^t}{4}}$. Sustituimos t=0: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 = E[X]$
Desviación típica: $E[X^2] = M_x''(t) = \frac{\frac{e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{8}}{1-2e^t+\frac{3e^{2t}}{2} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{e^{4t}}{16}}$. Sustituimos t=0: $\frac{\frac{6}{16}}{\frac{1}{16}} = 6$
Varianza: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 6 - 2^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2} \simeq 1'414$

# Problema 4

Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar $k_1,\ k_2$, y deducir su función de distribución.

Nótese que la variable aleatoria es continua y toma valores entre 0 y 6. En el desarrollo de este ejercicio, se presupondrá que la función de masa dada es correcta.

En primer lugar, calculemos la función de distribución de la variable aleatoria. Aplicamos la siguiente expresión: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Si $0 \leq x \leq 4$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} k_1(t+1)dt = k_1(\frac{x^2}{2} + x)$$

Si $4 < x \leq 6$, tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} k_1(t+1)dt + \int_{4}^{x} k_2 t^2 dt \\ &= k_1(\frac{4^2}{2} + 4) + k_2(\frac{x^3}{3} - \frac{4^3}{3}) \end{aligned}$$

Sabemos que $P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-)$. Como la variable es continua, tenemos que $F(0^-) = F(0)$. Deducimos entonces que:

$$P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-) = F(4) - F(0) = k_1(\frac{4^2}{2} + 4) = 2/3 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{18}$$

Por otra parte, para que se verifique que se trate, en efecto, de una función de distribución, se ha de verificar que:

$$F(+\infty) = k_2(\frac{6^3}{3} - \frac{4^3}{3}) + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{152}$$

Por tanto, la función de distribución viene dado por la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18}(\frac{x^2}{2} + x) & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x^3}{456} + \frac{10}{19} & 4 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

# Problema 5

La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria, $X$, con función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

*a*) Determinar el valor de $k$, y obtener la función de distribución.

*b*) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

*c*) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.

d) Si $Y$ denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que $X$, dar un intervalo en el que tome valores la variable $Y$ con una probabilidad mínima de 0.99.

## Apartado 1

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{10} \frac{k}{x^2}\,dx = \frac{k}{-x}\Big|_1^{10} = \frac{-k}{10} + k = \frac{9k}{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{10}{9}$$

Y finalmente tenemos que $k = \dfrac{10}{9}$. Para calcular la función de distribución debemos calcular la integral de la función de densidad, como ya la habíamos calculado antes, ahora solo tenemos que definirla. La definimos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \dfrac{10/9}{-x} + \dfrac{10}{9} & si \quad 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & si \quad x > 10 \end{cases}$$

## Apartado 2

Para calcular esta probabilidad usaremos la función de distribución:

$$P(2 \leq x \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{10/9}{-5} + \frac{10}{9} - \frac{10/9}{-2} - \frac{10}{9} = -\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

## Apartado 3

En este apartado nos piden que calculemos el percentil 50 y el percentil 95, para calcularlos debemos resolver la ecuación $P(X \leq x_i) = \dfrac{r}{100}$ donde $r$ es el percentil que queremos calcular. Resolvemos estas ecuaciones:

-$P_{50}$:

$$P(X \leq x_i) = 0{,}5; \quad F(x_i) = 0{,}5; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}5;$$
$$10 - 10x_i = -4{,}5x_i; \quad x_i = \frac{20}{11} = 1{,}88$$

-$P_{95}$:

$$P(X \leq x_i) = 0{,}95; \quad F(x_i) = 0{,}95; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}95;$$
$$10 - 10x_i = -8{,}55x_i; \quad x_i = \frac{200}{29} \approx 6{,}897$$

## Apartado 4

Para este apartado usaremos la desigualdad de Chebychev de la siguiente forma:

$$P(E[Y] - \sigma_Y k \leq Y \leq E[Y] + \sigma_Y k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Primero calculamos k. Para ello usamos que la probabilidad debe ser como mínimo 0.99:

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0{,}99 \iff k^2 = 1/0{,}01 \iff k = \pm\sqrt{100} \iff k = \pm 10$$

Para que el intervalo $[E[Y] - \sigma_Y k, E[Y] + \sigma_Y k]$ sea correcto debemos tomar $k = 10$. Ahora calcularemos la esperanza y la desviación típica de $Y$:

$$E[Y] = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{10}{9}\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx = \frac{10}{9} \cdot \ln x \Big|_1^{10} = \frac{10 \ln 10}{9} \approx 2{,}558$$

$$\sigma_Y = \sigma_X = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - E[X]^2} = \sqrt{\frac{10}{9}\int_1^{10} 1\, dx - E[X]^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{10}{9} \cdot x\Big|_1^{10} - E[X]^2} = \sqrt{10 - \frac{100 \ln 10^2}{81}} \approx 1{,}859$$

Sustituimos los valores calculados en la desigualdad:

$$P(E[Y] - \sigma_Y k \leq Y \leq E[Y] + \sigma_Y k) = P(-16{,}032 \leq Y \leq 21{,}148) \geq 0{,}99$$

El intervalo sería $[-16{,}032, 21{,}148]$ pero como $Y$ es una variable positiva el intervalo quedaría de la siguiente forma: $[0, 21{,}148]$.

## Problema 6

Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{10} & 1 < x \leq 2 \\ 0.4 & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

*a*) Calcular $P(1.5 < X \leq 2)$, $P(2.5 < X \leq 3.5)$, $P(4.5 \leq X < 5.5)$, $P(1.2 < X \leq 5.2)$.

*b*) Dar la expresión general de los momentos no centrados y deducir el valor medio de $X$.

*c*) Calcular la función generatriz de momentos de $X$.

### Apartado 1

$$P(1'5 < x \leq 2) = \int_{1'5}^{2} f(x)\, dx = \int_{1'5}^{2} \frac{2x-1}{10}\, dx = \frac{1}{10}[\int 2x\, dx - \int dx] = \frac{2}{10} - 0'075 = 0'125$$

$$P(2'5 < x \leq 3'5) = 0$$

$$P(4'5 < x \leq 5'5) = \int_{4'5}^{5'5} 0'4\, dx = 2'2 - 1'8 = 0'4$$

$$P(1'2 < x \leq 5'2) = \int_{1'2}^{2} \frac{2x-1}{10}\, dx + \int_4^{5'2} 0'4\, dx = 0'2 - 0'024 + 2'08 - 1'6 = 0'656$$

**Apartado 2**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * x\,dx + \int_{4}^{6} 0'4x\,dx = \frac{259}{60} \simeq 4'317$$

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * x^k\,dx + \int_{4}^{6} 0'4 * x^k\,dx$$

**Apartado 3**

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * e^{xt}\,dx + \int_{4}^{6} 0'4 * e^{xt}\,dx =$$

$$\frac{e^t((3t-2)e^t - t + 2)}{10t^2} + \frac{2(e^{2t}-1)e^{4t}}{5t}$$

## Problema 7

Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

*a*) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?

*b*) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

**Apartado 1**

Se nos pide calcular el percentil 50, es decir, la mediana de la distribución de probabilidad. Por tanto, tenemos que calcular la función de distribución haciendo la integral de la función de densidad.

$$\int \frac{3}{4}(2x - x^2) = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4}$$

$$F(x) = 0{,}5; \quad \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} = 0{,}5$$

$$3x^2 - x^3 - 2 = 0$$

1 es solución de la ecuación y se encuentra entre 0 y 2, las cotas de los datos, por tanto, se necesitarán preparar 1000 unidades del producto.

**Apartado 2**

Para calcular las varianzas tendremos que hacer los siguientes cálculos:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{4}\int_{0}^{2} 2x^2 - x^3dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \frac{3 \cdot 2x^3}{4 \cdot 3}\bigg|_0^2 - \frac{3x^4}{4 \cdot 4}\bigg|_0^2 = 1$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \frac{3}{4}\int_{1}^{3} 4y^2 - y^3 - 3y\ dy + \int_{3}^{\infty} 0dy =$$
$$= \frac{3 \cdot 4y^3}{4 \cdot 3}\bigg|_1^3 - \frac{3y^4}{4 \cdot 4}\bigg|_1^3 - \frac{3 \cdot 3y^2}{4 \cdot 2}\bigg|_1^3 = 2$$

$$m_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{4}\int_{0}^{2} 2x^3 - x^4dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \frac{3 \cdot 2x^3}{4 \cdot 4}\bigg|_0^2 - \frac{3x^4}{4 \cdot 5}\bigg|_0^2 = 1{,}2$$

$$m_2[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \frac{3}{4}\int_{1}^{3} 4y^3 - y^4 - 3y^2\ dy + \int_{3}^{\infty} 0dy =$$
$$= \frac{3y^4}{4}\bigg|_1^3 - \frac{3y^5}{4 \cdot 5}\bigg|_1^3 - \frac{3y^3}{4}\bigg|_1^3 = \frac{21}{5}$$

$$\mathrm{Var}[X] = m_2[X] - E[X]^2 = 0{,}2 \implies \sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\mathrm{Var}[Y] = m_2[Y] - E[Y]^2 = 0{,}2 \implies \sigma_y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Efectivamente no ha afectado a la dispersión de la demanda.

## Problema 8

Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$ y $Z = X^2$, siendo $X$ una variable aleatoria con distribución:

$$P(X=-2) = \frac{1}{5}, \quad P(X=-1) = \frac{1}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{5}, \quad P(X=1) = \frac{2}{5}, \quad P(X=2) = \frac{1}{10}.$$

¿Cómo afecta el cambio de $X$ a $Y$ en el coeficiente de variación?

En primer lugar, notemos que la variable aleatoria X es discreta. Basta aplicar el teorema de cambio de variable:

$$P(y_i) = \begin{cases} 1/5 & y_i = 0 \\ 1/10 & y_i = 1 \\ 1/5 & y_i = 2 \\ 2/5 & y_i = 3 \\ 1/10 & y_i = 4 \end{cases}$$

$$P(z_i) = \begin{cases} 1/5 & z_i = 0 \\ 1/2 & z_i = 1 \\ 3/10 & z_i = 4 \end{cases}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} EY &= \sum_i P(Y = y_i)y_i = \sum_i P(Y = y_i)(x_i - a) = \sum_i P(X = x_i)(x_i - a) \\ &= \sum_i P(X = x_i)x_i - a\sum_i P(X = x_i) = \sum_i P(X = x_i)x_i - a \\ &= EX - a \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que:

$$\begin{aligned} E[(Y - EY)^2] &= \sum_i P(Y = y_i)(y_i - EY)^2 = \sum_i P(X = x_i)(x_i - a - EX + a)^2 \\ &= \sum_i P(X = x_i)(x_i - EX)^2 = E[(X - EX)^2] \end{aligned}$$

Deducimos que el coeficiente de variación no ha de variar.

Por otra parte, sabemos que $C.V.(X) = \frac{E[(X-EX)^2]}{EX}$ y $C.V.(Y) = \frac{E[(Y-EY)^2]}{EY}$. Dividiendo ambas expresiones, tenemos que $C.V.(X) = \frac{EY}{EX}C.V.(Y)$. Operamos:

| | $p(x_i)$ | $p(x_i)x_i$ | $(x_i - EX)^2$ | $p(x_i)(x_i - EX)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| -2 | 0,2 | -0,4 | 4,41 | 0,882 |
| -1 | 0,1 | -0,1 | 1,21 | 0,121 |
| 0 | 0,2 | 0 | 0,01 | 0,002 |
| 1 | 0,4 | 0,4 | 0,81 | 0,324 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 3,61 | 0,361 |
| | | EX = 0,1 | | $E[(X - EX)^2]$=1,69 |

| | $p(y_i)$ | $p(y_i)y_i$ | $(y_i - EY)^2$ | $p(y_i)(y_i - EY)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,2 | 0 | 4,41 | 0,882 |
| 1 | 0,1 | 0,1 | 1,21 | 0,121 |
| 2 | 0,2 | 0,4 | 0,01 | 0,002 |
| 3 | 0,4 | 1,2 | 0,81 | 0,324 |
| 4 | 0,1 | 0,4 | 3,61 | 0,361 |
| | | $EY = 2,1$ | | $E[(Y - EY)^2] = 1,69$ |

Deducimos que $C.V.(X) = 21C.V.(Y)$.

## Problema 9

Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo $X$ una variable continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2.$$

Sea X, una variable aleatoria continua, con f(x) su función de densidad y E=(-2,2).

Como Y=h(X), entonces $h^{-1}(y) = X = \frac{Y-3}{2}$ Calculamos la imagen de h(x) en los extremos del intervalo E=(-2,2): $h(-2) = -1$ $h(2) = 7$

Por lo tanto $E^{'} = (-1, 7)$
Sea:
$g(y) = f(h^{-1}(y)).|(h^{-1})^{'}(y)|$, si $y \in (-1, 7)$
$g(y) = 0$ en otro caso.
Calculamos g(y):
$g(y) = f(\frac{Y-3}{2}).|\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , si $y \in (-1, 7)$
Veamos ahora la variable Z. Como Z=h(X), entonces $h^{-1}(z) = X$

Z=$|X|$=$\begin{cases} -x \ si \ x \ <= \ 0 \\ x \ si \ x \ > \ 0 \end{cases}$

**Apartado 1**

Calculamos la imagen de h(E) en los extremos del intervalo E=(0,2):

$g(y) = f(h^{-1}(y)).|(h^{-1})^{'}(y)| + f(h^{-1}(y)).|(h^{-1})^{'}(y)| = \frac{1}{4}$,1 $+ \frac{1}{4}$,1 $= \frac{1}{2}$, si $z \in (0, 2)$

g(y)=$\begin{cases} \frac{1}{2} \ \ si \ 0 \ < \ x \ < \ 2 \\ 0 \ \ en \ otro \ caso \end{cases}$

# Problema 10

Si $X$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

*a*) $\{|X| \leq 2\}$.

*b*) $\{|X| \leq 2 \quad \text{ó} \quad X \geq 0\}$.

*c*) $\{|X| \leq 2 \quad \text{y} \quad X \leq -1\}$.

*d*) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.

*e*) $\{X \text{ es irracional}\}$.

En el desarrollo de este ejercicio se presupondrá que la función de masa de probabilidad proporcionada es correcta y está bien definida (nótese que X es una variable aleatoria continua). Calculamos a partir de ella la función de distribución.

Si $x < 0$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{2}dt = \frac{e^x}{2}$$

Si $0 \leq x$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{2}dt + \int_{0}^{x} \frac{e^{-t}}{2}dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{-e^-t}{2}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{2e^x}$$

De esta forma, tenemos que la función de distribución viene dado por la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2e^x} & x \geq 0 \end{cases}$$

De esta forma, obtenemos las siguientes probabilidades (considerando en todo momento que la variable aleatoria es continua):

1. $P(|X| \leq 2) = P(2) - P(-2^-) = P(2) - P(-2) = 1 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,8647$
2. $P(|X| \leq 2) \cup X \geq 0) = P(X \geq -2) = 1 - \frac{1}{2e^2} \approx 0,9323$
3. $P(|X| \leq 2 \cap X \leq -1) = P(-2 \leq X \leq -1) = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2} \approx 0,1163$
4. $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P(X \leq 2)$ (donde para aplicar esta igualdad hemos factorizado mediante el método de Ruffini, dando como resultado que $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$, siendo este segundo término siempre positivo y $x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0 \iff x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2$). Por tanto, $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P(X \leq 2) = 1 - \frac{1}{2e^2} \approx 0,9323$.
5. $P(X \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 1 - P(X \in \mathbb{Q}) = 1$ (pues el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable, por lo que la suma de la probabilidad de un conjunto infinito numerable de puntos es 0).

## Problema 11

Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

*a*) $Y = \dfrac{X}{1+X}$.

*b*) $Z = \begin{cases} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4. \end{cases}$

### Apartado 1

Tenemos que $Y(1+X) = X \Rightarrow X = \frac{Y}{1-Y}$

$$\begin{cases} \text{y=0} \quad si\ x\ =\ 0 \\ \text{y=1}_{\overline{2}} \quad \text{si x = 1} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$f_y(y) = f(\frac{y}{1-y}).|\frac{1-y-y(-1)}{(1-y)^2}| = \frac{1}{(1-y)^2}$

$$\text{f}_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)^2} & si\ 0\ <=\ y\ <=\ 0{,}5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

**Apartado 2**

$$P(Z=-1)=P(X<\frac{3}{4})=\int_0^{\frac{3}{4}}\cdot dx=\frac{3}{4} \tag{1}$$

$P(Z=0)=0$

$$P(Z=1)=P(X>\frac{3}{4})=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\cdot dx=\frac{1}{4} \tag{2}$$

# Problema 12

Sea $X$ una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:

- $P(-8<X<12)$
- $P(-6<X<10)$.

Antes de empezar, tomaremos los datos que nos dan para deducir la desviación típica y la esperanza matemática. Para empezar nos dicen que el coeficiente de variación es 1, lo que implica que:

$$C.V_X=1\Rightarrow\frac{\sigma_X}{E[X]}=1\Rightarrow\sigma_X=E[X]$$

Además, nos dicen que la variable aleatoria es simétrica con respecto al punto 2. Esto implica que el punto que deja a la misma cantidad de valores a su derecha que a su izquierda es dos, por lo que $E[X]=2$ y además:

$$E[X]=2\Rightarrow\sigma_X=E[X]=2$$

Ahora, para abordar el ejercicio, usaremos la desigualdad de Chebychev de la siguiente forma:

$$P(|X-E[X]|\geq k\sigma_X)=P(E[X]-k\sigma_X<k<E[X]+k\sigma_X)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

**Apartado 1**

Vamos a calcular $k$ para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X]+2k=12\Rightarrow k=\frac{12-2}{2}=5$$

Finalmente sustituimos $k=5$ en la expresión anterior:

$$P(E[X]-k\sigma_X<k<E[X]+k\sigma_X)=P(-8<x<12)\geq 1-\frac{1}{5^2}=0{,}96$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-8<x<12)\geq 0{,}96$.

**Apartado 2**

Vamos a calcular $k$ para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X] + 2k = 10 \Rightarrow k = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

Finalmente sustituimos $k = 4$ en la expresión anterior:

$$P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) = P(-6 < x < 10) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = 0{,}9375$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-6 < x < 10) \geq 0{,}9375$.