Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 3

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

1. que una persona viaje en metro y no en autobús;
2. que una persona tome al menos dos medios de transporte;
3. que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;
4. que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;
5. que una persona vaya a pie.

Apartado 1

En este apartado debemos calcular la probabilidad de la intersección entre M y $\overline{A}$:

$$P(M \cap \overline{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$$

Apartado 2

Aquí debemos considerar todas las formas posibles de tomar dos medios de transporte. Calculamos:

$$P((A \cap M) \cup (A \cap C) \cup (M \cup C) \cup (A \cup M \cup C)) =$$
$$P(A \cap M) + P(A \cap C) + P(M \cup C) - 2P(A \cup M \cup C) = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}06 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}19$$

Apartado 3

Ahora debemos calcular la probabilidad de la unión entre las intersecciones de $\overline{A}$ con M y C:

$$P((M \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})) = P(M \cap \overline{A}) + P(C \cap \overline{A}) - P(C \cap M \cap \overline{A}) =$$
$$P(M \cap \overline{A}) + P(C) - P(C \cap A) - P(M \cap C) + P(C \cap M \cap A) = 0{,}2 + 0{,}15 - 0{,}06 - 0{,}05 + 0{,}01 = 0{,}25$$

Apartado 4

En este apartado debemos calcular la unión entre M y la intersección de A y C:

$$P(M \cup (A \cap C)) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0{,}3 + 0{,}06 - 0{,}01 = 0{,}35$$

Apartado 5

En este último apartado, para calcular lo que nos piden debemos considerar que no hay otro transporte además de los dados en el ejercicio. Si hubiera otro medio, como barco o patinete, no tendríamos los datos suficientes para hacer los cálculos. Hecha esta suposición, calculamos la probabilidad que nos piden:

$$P(\overline{A} \cap \overline{M} \cap \overline{C}) = \overline{P(A \cup M \cup C)} = 1 - P(A \cup M \cup C) =$$
$$P(A) + P(M) + P(C) - P(A \cap M) - P(A \cap C) - P(M \cap C) + P(A \cap M \cap C) =$$
$$1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}06 - 0{,}05 + 0{,}01) = 0{,}55$$

Problema 2

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$, $P(C) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. sólo ocurre A,
2. ocurren los tres sucesos,
3. ocurren A y B pero no C,
4. por lo menos dos ocurren,
5. ocurren dos y no más,
6. no ocurren más de dos,
7. ocurre por lo menos uno,
8. ocurre sólo uno,
9. no ocurre ninguno.

Apartado 1

Debemos calcular la probabilidad de que ocurra A y no ocurra ni B ni C. Para hacer los cálculos tenemos en cuenta que $B \cap C = \emptyset$:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A - B - C) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$$

Apartado 2

Como nos dicen que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ es claro que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

Apartado 3

Como en el apartado anterior, tenemos en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y entonces:

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) = 0{,}1$$

Apartado 4

Ahora debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o más, teniendo de nuevo en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$:

$$P((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0{,}1$$

Apartado 5

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 sucesos:

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) = 0{,}1$$

Apartado 6

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o menos sucesos:

$$P(A \cup B \cup C \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

Apartado 7

En este apartado solo tenemos que calcular la unión entre A, B y C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8$$

Apartado 8

Ahora debemos considerar los casos en los que solo ocurre A o B o C:

$$P((A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)) = P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(B)-P(A\cap B)+P(C) = 0{,}3+0{,}2-0{,}1+0{,}3 = 0{,}7$$

Apartado 9

Para este apartado podemos tomar la probabilidad complementaria del suceso calculado en el apartado g:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \overline{P(A \cup B \cup C)} = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Problema 3

Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

Apartado 1

Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.
ω =(R1,R2), (R1,R3), (R1,B1), (R1,B2), (R2,R1), (R2,R3), (R2,B1), (R2,B2), (R3,R1), (R3,R2), (R3,B1), (R3,B2), (B1,R1), (B1,R2), (B1,R3), (B1,B2), (B2,R1), (B2,R2), (B2,R3), (B2,B1)

Apartado 2

Descomponer en sucesos elementales los sucesos: ”la primera bola es roja”, ”la segunda bola es blancaz calcular la probabilidad de cada uno de ellos.
A = La primera bola es roja: (R1,R2), (R1,R3), (R1,B1), (R1,B2), (R2,R1), (R2,R3), (R2,B1), (R2,B2),

(R3,R1), (R3,R2), (R3,B1), (R3,B2)
$P(A) = \frac{12}{20} = 0'6$
B = La segunda bola es blanca: (R1,B1), (R1,B2), (R2,B1), (R2,B2), (R3,B1), (R3,B2), (B1,B2), (B2,B1)
$P(B) = \frac{8}{20} = 0,4$

Apartado 3

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'3 = 0'7$

Problema 4

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

Apartado 1

a) dos bolas rojas
A1 = primera roja, A2 = segunda roja
$P(A1 \cap A2) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = 0'375 * 0'286 = 0'107$

Apartado 2

b) dos bolas blancas
B1 = primera blanca, B2 = segunda roja
$P(B1 \cap B2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = 0'625 * 0'571 = 0'357$

Apartado 3

c) una blanca y otra roja
$P((A1 \cap B2) \cup (A2 \cap B1)) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = 0'536$

Problema 5

Apartado 1

Sea A el suceso de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes. Para determinarlo, procedemos primero a calcular $P(\bar{A})$ mediante la regla de Laplace en cada boleto de lotería comprado:

$$P(\bar{A}) = \frac{98}{100}\frac{97}{99}\frac{96}{98}...\frac{98-12+1}{100-12+1} = 0,77333$$

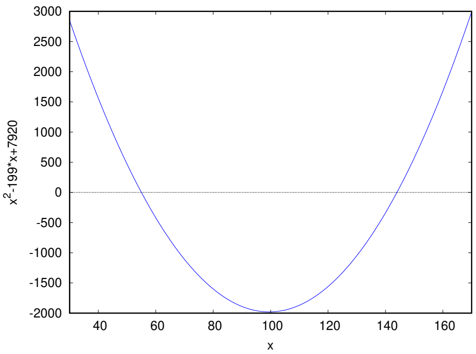
Por tanto, deducimos que:

$$P(A) = 0,22667$$

Apartado 2

Para calcular el número de boletos de lotería que se ha de adquirir para que se alcance dicha probabilidad, sea A_n el suceso de ganar al menos un premio tras adquirir n billetes de lotería. Queremos hallar $n \in \mathbb{N}$ de forma que se verifique $P(A_n) = \frac{4}{5} > 0,8$, por lo que se ha de cumplir $P(\bar{A}_n) < 0,2$. Razonamos nuevamente como el apartado anterior:

$$P(\bar{A}_n) = \frac{98}{100}\frac{97}{99}\frac{96}{98}...\frac{98-n+1}{100-n+1} = \frac{(99-n+1)(98-n+1)}{10099} < 0,2$$



De la desigualdad de la derecha obtenemos que se ha de cumplir $n^2 - 199n + 7920 < 0$. Dado que la función $f(x) = x^2 - 199x + 7920$ corta al eje OX en los puntos $x = 55$ y $x = 144$ y es cóncava hacia arriba, deducimos que la mínima cantidad de boletos que ha de adquirir una persona para tener una probabilidad estrictamente mayor que 0,8 son **56 boletos**.

Problema 6

A := 1º es cuadrado perfecto

B := 2º es cuadrado perfecto

C := 3º es cuadrado perfecto

D := Ninguno es perfecto

Apartado 1

Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

Buscamos $P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$

Hay 10 cuadrados perfectos entre los 100 primeros números naturales, luego

$$P(D) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{117480}{161700} = 0{,}7265$$

Luego la probabilidad de que entre 3 números que escojamos entre los 100 primeros naturales no haya ningún cuadrado perfecto es de:

$$P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = \frac{117480}{161700} = 0{,}7265$$

Apartado 2

Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.
Se nos pide $P(\overline{D})$, que es simplemente

$$1 - P(D) = 0{,}2735$$

Apartado 3

Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

- P(1 perfecto) =
  P(1º perfecto $\cap$ 2º no perfecto $\cap$ 3º no perfecto) +
  P(1º no perfecto $\cap$ 2º perfecto $\cap$ 3º no perfecto) +
  P(1º no perfecto $\cap$ 2º no perfecto $\cap$ 3º perfecto);
  $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$
  $P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$
  $\frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = 0{,}2477$

- P(3 perfectos) = P(1º perfecto $\cap$ 2º perfecto $\cap$ 3º perfecto) =
  $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{2}{2695} = 0{,}0007421$

- P(2 perfectos); Se podría hacer de forma similar que para 1 perfecto pero como sabemos que los conjuntos son disjuntos (no se pueden dar a la vez dos a dos) y que la probabilidad de que se haya al menos un cuadrado es $P(\overline{D}) =$
  $P(A \cup B \cup C) = 0{,}2735$, entonces tenemos que $P(\overline{D}) = P(A) + P(B) + P(C)$
  $P(B) = P(\overline{D}) - P(A) - P(C) = 0{,}02505$

Problema 7

Sean A_n el suceso de localizar exactamente n productos defectuosos en el control de calidad y A el suceso de pasar dicho control de calidad. Se verifica que $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$ (por ser A la unión de los A_n y ser cada suceso independientes dos a dos).

Aplicando la regla de Laplace, tenemos que:

$$P(A_0) = \frac{\binom{290}{60}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 0,2684$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 0,3071$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{10}{2}\binom{290}{58}}{\binom{300}{60}} = 0,2039$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{10}{3}\binom{290}{57}}{\binom{300}{60}} = 0,0869$$

$$P(A_5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{290}{56}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

Deducimos que:

$$P(A) = 0,9944$$

Problema 8

Pongamos que tenemos K sobres, y pongamos que el suceso A_i ocurre si el sobre i está en su sitio correspondiente.

Usaré el principio de inclusión-exclusión, para ello, calcularé $P(A_i), P(A_i \cap A_j)\dots$

Primero, tenemos que el número de casos posibles son permutaciones sin repetición de k elementos: **k!**

Para A_i los casos favorables serían las permutaciones de k-1 elementos porque hemos fijado el elemento i: **(k-1)!**

Por tanto $P(A_i) = \dfrac{(k-1)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i de k formas.

Para $A_i \cap A_j$, los casos favorables son las permutaciones de k-2 elementos ya que hemos fijado i y j: **(k-2)!**

Por tanto $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{(k-2)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i y A_j de $\binom{k}{2}$ formas, es decir $\dfrac{k!}{2!(k-2)!}$

Y así sucesivamente.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k-1} P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \\
&= \binom{k}{1}\frac{(k-1)!}{k!} - \binom{k}{2}\frac{(k-2)!}{k!} + \dots (-1)^{k-1}\binom{k}{k}\frac{(k-1)!}{k!} \\
&= \frac{k!(k-1)!}{(k-1)!k!} - \frac{k!(k-2)!}{2!(k-2)!k!} + \frac{k!(k-3)!}{3!(k-3)!k!} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots - \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned} \tag{1}$$

Si evaluamos el polinomio de Taylor de grado k de la función exponencial en -1 obtenemos:

$$P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1$$

Por tanto,

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 1 - P_{k,0}^{e^x}(-1)$$

Y aproximando, o a medida que k se acerca a infinito:

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Para el caso de 3 cartas que es lo que realmente nos pide el ejercicio tenemos que

$$P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = 1 - P_{3,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$