

Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 4

Autores, por orden alfabético:

Shao Jie Hu Chen

Adrián Jaén Fuentes

Aarón Jerónimo Fernández

Noura Lachhab Bouhmadi

Laura Lázaro Soraluze

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1	2
Problema 2	2
Problema 3	2
Problema 4	3
Problema 5	3
Problema 6	4
Problema 7	4
Problema 8	5



Problema 1

En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0'6, la de que lo acierte el segundo es 0'3 y la de que lo acierte el tercero es 0'1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

$$P(R_1) = 0'6, P(R_2) = 0'3, P(R_3) = 0'1$$

$$P(R_1 \cup R_2 \cup R_3) = P(R_1) + P(R_2) + P(R_3) - P(R_1 \cap R_2) - P(R_1 \cap R_3) - P(R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0'6 + 0'3 + 0'1 - (0'6 * 0'1) - (0'6 * 0'3) - (0'1 * 0'3) + (0'6 * 0'3 * 0'1) = 0'748$$

Problema 2

En una ciudad, el 40 % de las personas tienen el pelo rubio, el 25 % tienen ojos azules y el 5 % el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

Apartado 1

tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules

$$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{0'05}{0'25} = 0'2$$

Apartado 2

tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio

$$P(A|R) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0'05}{0'4} = 0'125$$

Apartado 3

no tener pelo rubio ni ojos azules

$$P(A \cup R) = 1 - (P(A) + P(R) - P(A \cap R)) = 1 - (0'4 + 0'25 - 0'05) = 0'4$$

Apartado 4

tener exactamente una de estas características

$$P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = 0'4 - 0'05 + 0'25 - 0'05 = 0'55$$

Problema 3

O := Mutación en los ojos

A := Mutación en las alas

Datos que nos dan: $P(O) = 0,25$ $P(A) = 0,50$ $P_r(A/O) = 0,40$

Apartado 1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?

Se nos pide calcular $P(O \cup A)$, que como no son conjuntos disjuntos tenemos que calcularlos de esta manera:
Dado que $O \cup A = O + A - O \cap A$

$$P(O \cup A) = P(O) + P(A) - P(O \cap A)$$

$$P_r(A/O) = \frac{P(O \cap A)}{P(O)}$$

$$P(O \cap A) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$$

$$P(O \cup A) = 0,25 + 0,5 - 0,1 = 0,65$$

Apartado 2

b) ¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?

Se nos pide calcular $P(O \cap \bar{A})$. Ya que $O \cap \bar{A} = O - O \cap A$ tenemos que:

$$P(O \cap \bar{A}) = P(O) - P(O \cap A) = 0,25 - 0,1 = 0,15$$

Problema 4

Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de ésta, calcular la probabilidad de que sea blanca.

Para abordar este problema, antes de hacer nada, le daremos nombre a los sucesos que queremos estudiar:

B_i = Sacar bola blanca en la caja i.

N_i = Sacar bola negra en la caja i.

Lo que queremos calcular es la probabilidad de B_1 teniendo en cuenta que añadimos una bola a la urna 1 de la urna 2. Procedemos con los cálculos:

$$P(B_1) = P(B_2) \cdot P(B_1/B_2) + (N_2) \cdot P(B_1/N_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9$$

Problema 5

La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es $2/3$. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a $0'25$. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

$$P(\bar{S}) = \frac{2}{3}, P(M|S) = 0'5, P(\bar{M}|S) = 0'5, P(M|\bar{S}) = 0'25$$

$$P(\bar{S}|\bar{M}) = \frac{P(\bar{S}) \cdot P(\bar{M}|\bar{S})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0'75}{0'5 \cdot \frac{1}{3} + 0'75 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0'75$$

Problema 6

Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?

Antes de abordar este ejercicio vamos a nombrar los sucesos que vamos a estudiar y a determinar qué datos nos están dando:

C_1 = elegir una caja con 4 tornillos defectuosos

C_2 = elegir una caja con 6 tornillos defectuosos

C_3 = elegir una caja con 8 tornillos defectuosos

B = sacar un tornillo bueno

D = sacar un tornillo defectuoso

A = sacar 2 tornillos buenos y 1 defectuoso (sin reemplazamiento)

¿Qué datos nos dan?

$$P(C_1) = \frac{1}{6} \quad P(C_2) = \frac{2}{6} \quad P(C_3) = \frac{3}{6}$$

Ahora procedemos a realizar el ejercicio. Para calcular la probabilidad que nos piden usaremos la regla de Bayes de la siguiente forma:

$$P(C_2/A) = \frac{P(A/C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{n=1}^3 P(A/C_n) \cdot P(C_n)}$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$$P(A/C_1) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{9}$$

$$P(A/C_2) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{3}{8}$$

$$P(A/C_3) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$$

Multiplicamos las probabilidades por 3 porque el orden no es importante ya que hay reemplazamiento. Finalmente, aplicamos la regla de bayes:

$$P(C_2/A) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{27}{67} \approx 0,403$$

Problema 7

Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?

Sean A el suceso de sumar las caras de los dados lanzados (supuesto no trucado), obteniéndose una suma igual a 4 y D_n el suceso de lanzar n dados. Se nos pide encontrar $P(D_4|A)$. Basta darse cuenta de que $n \leq 4$ (pues, en caso contrario, ninguna combinación suma exactamente 4) y aplicar la regla de Bayes:

$$P(D_4|A) = \frac{P(A|D_4)P(D_4)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3) + P(A|D_4)P(D_4)}$$

Para hallar cada uno de los sumandos de la expresión anterior, aplicamos la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles):

$$P(A|D_1) = \frac{1}{VR_{6,1}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|D_2) = \frac{3}{VR_{6,2}} = \frac{3}{36}$$

$$P(A|D_3) = \frac{3}{VR_{6,3}} = \frac{3}{216}$$

$$P(A|D_4) = \frac{1}{VR_{6,4}} = \frac{1}{1296}$$

$$P(D_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$P(D_4|A) = 0,00046$$

Esto quiere decir que es muy poco probable que se hayan lanzado 4 dados en el experimento descrito.

Problema 8

Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen $2k$ bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y $2h$ si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Aclaraciones a añadir al enunciado: La urna se considera en un principio vacía y se supone que la moneda está trucada.

Sean N el suceso de sacar una bola negra de la urna resultante del ejercicio y A_x el suceso de obtener tras el lanzamiento de la moneda cara si $x = C$ o cruz si $x = X$. Dado que la moneda está trucada, podemos suponer que $P(A_C) = p$ y $P(A_X) = 1 - p$. Se nos pide determinar $P(N)$. Para ello, aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N|A_C \cap A_C)P(A_C \cap A_C) + P(N|A_C \cap A_X)P(A_C \cap A_X) \\ &\quad + P(N|A_X \cap A_C)P(A_X \cap A_C) + P(N|A_X \cap A_X)P(A_X \cap A_X) \end{aligned} \quad (1)$$

Para hallar cada probabilidad condicionada, aplicamos la regla de Bayes (casos favorables entre casos posibles):

$$\begin{aligned}P(N|A_C \cap A_C) &= \frac{h}{k+h} \\P(N|A_C \cap A_X) &= \frac{2h}{k+2h} \\P(N|A_X \cap A_C) &= \frac{h}{2k+h} \\P(N|A_X \cap A_X) &= \frac{2h}{2k+2h} = \frac{h}{k+h}\end{aligned}$$

Como cada lanzamiento de moneda es independiente, deducimos que $P(A_x \cap A_y) = P(A_x)P(A_y)$. Basta ahora sustituir en la expresión 1 y operar, dando como resultado:

$$P(N) = p^2 \frac{h}{k+h} + p(1-p) \left(\frac{2h}{k+2h} + \frac{h}{2k+h} \right) + (1-p)^2 \frac{h}{k+h}$$