

Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 3

Autores, por orden alfabético:

Shao Jie Hu Chen

Adrián Jaén Fuentes

Aarón Jerónimo Fernández

Noura Lachhab Bouhmadi

Laura Lázaro Soraluze

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1	2
Problema 2	3
Problema 3	5
Problema 4	6



Problema 1

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado uno u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

1. que una persona viaje en metro y no en autobús;
2. que una persona tome al menos dos medios de transporte;
3. que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;
4. que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;
5. que una persona vaya a pie.

Apartado 1

En este apartado debemos calcular la probabilidad de la intersección entre M y \bar{A} :

$$P(M \cap \bar{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

Apartado 2

Aquí debemos considerar todas las formas posibles de tomar dos medios de transporte. Calculamos:

$$\begin{aligned} P((A \cap M) \cup (A \cap C) \cup (M \cup C) \cup (A \cup M \cup C)) = \\ P(A \cap M) + P(A \cap C) + P(M \cup C) - 2P(A \cup M \cup C) = 0,2 + 0,05 + 0,06 - 2 \cdot 0,01 = 0,19 \end{aligned}$$

Apartado 3

Ahora debemos calcular la probabilidad de la unión entre las intersecciones de \bar{A} con M y C:

$$\begin{aligned} P((M \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A})) = P(M \cap \bar{A}) + P(C \cap \bar{A}) - P(C \cap M \cap \bar{A}) = \\ P(M \cap \bar{A}) + P(C) - P(C \cap A) - P(M \cap C) + P(C \cap M \cap A) = 0,2 + 0,15 - 0,06 - 0,05 + 0,01 = 0,25 \end{aligned}$$

Apartado 4

En este apartado debemos calcular la unión entre M y la intersección de A y C:

$$P(M \cup (A \cap C)) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0,3 + 0,06 - 0,01 = 0,35$$

Apartado 5

En este último apartado, para calcular lo que nos piden debemos considerar que no hay otro transporte además de los dados en el ejercicio. Si hubiera otro medio, como barco o patinete, no tendríamos los datos suficientes para hacer los cálculos. Hecha esta suposición, calculamos la probabilidad que nos piden:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{M} \cap \overline{C}) &= \overline{P(A \cup M \cup C)} = 1 - P(A \cup M \cup C) = \\ P(A) + P(M) + P(C) - P(A \cap M) - P(A \cap C) - P(M \cap C) + P(A \cap M \cap C) &= \\ 1 - (0,2 + 0,3 + 0,15 - 0,1 - 0,06 - 0,05 + 0,01) &= 0,55 \end{aligned}$$

Problema 2

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) , tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. sólo ocurre A ,
2. ocurren los tres sucesos,
3. ocurren A y B pero no C ,
4. por lo menos dos ocurren,
5. ocurren dos y no más,
6. no ocurren más de dos,
7. ocurre por lo menos uno,
8. ocurre sólo uno,
9. no ocurre ninguno.

Apartado 1

Debemos calcular la probabilidad de que ocurra A y no ocurra ni B ni C . Para hacer los cálculos tenemos en cuenta que $B \cap C = \emptyset$:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A - B - C) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

Apartado 2

Como nos dicen que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ es claro que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

Apartado 3

Como en el apartado anterior, tenemos en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y entonces:

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) = 0,1$$

Apartado 4

Ahora debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o más, teniendo de nuevo en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$:

$$P((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0,1$$

Apartado 5

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 sucesos:

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) = 0,1$$

Apartado 6

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o menos sucesos:

$$P(A \cup B \cup C \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

Apartado 7

En este apartado solo tenemos que calcular la unión entre A, B y C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,8$$

Apartado 8

Ahora debemos considerar los casos en los que solo ocurre A o B o C:

$$P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = 0,3 + 0,2 - 0,1 + 0,3 = 0,7$$

Apartado 9

Para este apartado podemos tomar la probabilidad complementaria del suceso calculado en el apartado g:

$$P(\overline{A \cap B \cap C}) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Ejercicio 3. Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.

$\omega = (R1, R2), (R1, R3), (R1, B1), (R1, B2), (R2, R1), (R2, R3), (R2, B1), (R2, B2), (R3, R1), (R3, R2), (R3, B1), (R3, B2), (B1, R1), (B1, R2), (B1, R3), (B1, B2), (B2, R1), (B2, R2), (B2, R3), (B2, B1)$

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: "la primera bola es roja", "la segunda bola es blanca" calcular la probabilidad de cada uno de ellos.

A = La primera bola es roja: $(R1, R2), (R1, R3), (R1, B1), (R1, B2), (R2, R1), (R2, R3), (R2, B1), (R2, B2), (R3, R1), (R3, R2), (R3, B1), (R3, B2)$

$$P(A) = \frac{12}{20} = 0,6$$

B = La segunda bola es blanca: $(R1, B1), (R1, B2), (R2, B1), (R2, B2), (R3, B1), (R3, B2), (B1, B2), (B2, B1)$

$$P(B) = \frac{8}{20} = 0,4$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,4 - 0,3 = 0,7$$

Ejercicio 5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) dos bolas rojas

$A1$ = primera roja, $A2$ = segunda roja

$$P(A1 \cap A2) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = 0'375 * 0'286 = 0'107$$

b) dos bolas blancas

$B1$ = primera blanca, $B2$ = segunda blanca

$$P(B1 \cap B2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = 0'625 * 0'571 = 0'357$$

c) una blanca y otra roja

$$P((A1 \cap B2) \cup (A2 \cap B1)) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = 0'536$$

Problema 3

Apartado 1

Sea A el suceso de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes. Para determinarlo, procedemos primero a calcular $P(\bar{A})$ mediante la regla de Laplace en cada boleto de lotería comprado:

$$P(\bar{A}) = \frac{98}{100} \frac{97}{99} \frac{96}{98} \dots \frac{98-12+1}{100-12+1} = 0,77333$$

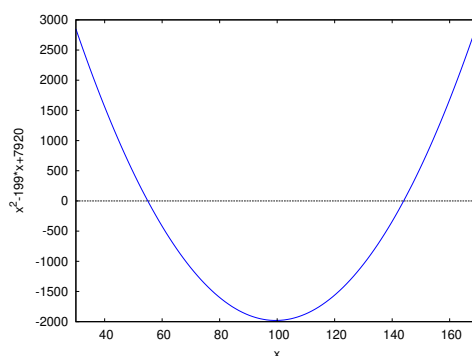
Por tanto, deducimos que:

$$P(A) = 0,22667$$

Apartado 2

Para calcular el número de boletos de lotería que se ha de adquirir para que se alcance dicha probabilidad, sea A_n el suceso de ganar al menos un premio tras adquirir n billetes de lotería. Queremos hallar $n \in \mathbb{N}$ de forma que se verifique $P(A_n) = \frac{4}{5} > 0,8$, por lo que se ha de cumplir $P(\bar{A}_n) < 0,2$. Razonamos nuevamente como el apartado anterior:

$$P(\bar{A}_n) = \frac{98}{100} \frac{97}{99} \frac{96}{98} \dots \frac{98-n+1}{100-n+1} = \frac{(99-n+1)(98-n+1)}{10099} < 0,2$$



De la desigualdad de la derecha obtenemos que se ha de cumplir $n^2 - 199n + 7920 < 0$. Dado que la función $f(x) = x^2 - 199x + 7920$ corta al eje OX en los puntos $x = 55$ y $x = 144$ y es cóncava hacia arriba, deducimos

que la mínima cantidad de boletos que ha de adquirir una persona para tener una probabilidad estrictamente mayor que 0,8 son **56 boletos**.

Problema 4

A := 1º es cuadrado perfecto

B := 2º es cuadrado perfecto

C := 3º es cuadrado perfecto

D := Ninguno es perfecto

Apartado 1

Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

Buscamos $P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$

Hay 10 cuadrados perfectos entre los 100 primeros números naturales, luego

$$P(D) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{117480}{161700} = 0,7265$$

Luego la probabilidad de que entre 3 números que escojamos entre los 100 primeros naturales no haya ningún cuadrado perfecto es de:

$$P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = \frac{117480}{161700} = 0,7265$$

Apartado 2

Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.

Se nos pide $P(\overline{D})$, que es simplemente

$$1 - P(D) = 0,2735$$

Apartado 3

Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

■ $P(1 \text{ perfecto}) =$

$P(1^\circ \text{ perfecto} \cap 2^\circ \text{ no perfecto} \cap 3^\circ \text{ no perfecto}) +$

$P(1^\circ \text{ no perfecto} \cap 2^\circ \text{ perfecto} \cap 3^\circ \text{ no perfecto}) +$

$P(1^\circ \text{ no perfecto} \cap 2^\circ \text{ no perfecto} \cap 3^\circ \text{ perfecto});$

$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$

$P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$

$$\frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = 0,2477$$

■ $P(3 \text{ perfectos}) = P(1^\circ \text{ perfecto} \cap 2^\circ \text{ perfecto} \cap 3^\circ \text{ perfecto}) =$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{2}{2695} = 0,0007421$$

■ $P(2 \text{ perfectos});$ Se podría hacer de forma similar que para 1 perfecto pero como sabemos que los conjuntos son disjuntos (no se pueden dar a la vez dos a dos) y que la probabilidad de que se haya al

menos un cuadrado es $P(\overline{D}) =$

$P(A \cup B \cup C) = 0,2735$, entonces tenemos que $P(\overline{D}) = P(A) + P(B) + P(C)$

$P(B) = P(\overline{D}) - P(A) - P(C) = 0,02505$

Pongamos que tenemos K sobres, y pongamos que el suceso A_i ocurre si el sobre i está en su sitio correspondiente.

Usaré el principio de inclusión-exclusión, para ello, calcularé $P(A_i), P(A_i \cap A_j) \dots$

Primero, tenemos que el número de casos posibles son permutaciones sin repetición de k elementos: $k!$

Para A_i los casos favorables serían las permutaciones de $k-1$ elementos porque hemos fijado el elemento i : $(k-1)!$

Por tanto $P(A_i) = \frac{(k-1)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i de k formas.

Para $A_i \cap A_j$, los casos favorables son las permutaciones de $k-2$ elementos ya que hemos fijado i y j : $(k-2)!$

Por tanto $P(A_i \cap A_j) = \frac{(k-2)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i y A_j de $\binom{k}{2}$ formas, es decir $\frac{k!}{2!(k-2)!}$

Y así sucesivamente.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \\ &= \binom{k}{1} \frac{(k-1)!}{k!} - \binom{k}{2} \frac{(k-2)!}{k!} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \frac{(k-1)!}{k!} \\ &= \frac{k!(k-1)!}{(k-1)!k!} - \frac{k!(k-2)!}{2!(k-2)!k!} + \frac{k!(k-3)!}{3!(k-3)!k!} - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned} \quad (1)$$

Si evaluamos el polinomio de Taylor de grado k de la función exponencial en -1 obtenemos:

$$P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1$$

Por tanto,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - P_{k,0}^{e^x}(-1)$$

Y aproximando, o a medida que k se acerca a infinito:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Para el caso de 3 cartas que es lo que realmente nos pide el ejercicio tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = 1 - P_{3,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0,6667$$