Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 4

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1

Ejercicio 1. En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0'6, la de que lo acierte el segundo es 0'3 y la de que lo acierte el tercero es 0'1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

Ri: acierta el disparo el destructor i.
P(R1) = 0'6, P(R2) = 0'3, P(R3) = 0'1
$P(R1 \cup R2 \cup R3) = P(R1) + P(R2) + P(R3) - P(R1 \cap R2) - P(R1 \cap R3) - P(R2 \cap R3) + P(R1 \cap R2 \cap R3) =$
$0'6 + 0'3 + 0'1 - (0'6 * 0'1) - (0'6 * 0'3) - (0'1 * 0'3) + (0'6 * 0'3 * 0'1) = 0'748$

Problema 2

item Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i - ' e sima, habiendo pasado las anteriores es $1/(7-i)$. Determinar la probabilidad de que el alumno apruebe el curso.

De los datos del enunciado sabemos que la probabilidad de aprobar la prueba i-esima es: $P(A_i) = \frac{1}{7-i}$

Los sucesos son independientes ya que el hecho de aprobar una prueba o no aprobarla no influye en la probabilidad de aprobar el resto de las pruebas, entonces la probabilidad de aprobar el curso es:

$P(\cap_{i=1}^{5} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{720} = 0,001389$

Problema 3

Ejercicio 3. En una ciudad, el 40 % de las personas tienen el pelo rubio, el 25 % tienen ojos azules y el 5 % el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

R: tener el pelo rubio
A: tener los ojos azules
Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada para el apartado a y b: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)}$.

a) tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules
$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{0'05}{0'25} = 0'2$

b) tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio
$P(A|R) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0'05}{0'4} = 0'125$

c) no tener pelo rubio ni ojos azules
$P(A \cup R) = 1 - (P(A) + P(R) - P(A \cap R)) = 1 - (0'4 + 0'25 - 0'05) = 0'4$

d) tener exactamente una de estas características
$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = 0'4 - 0'05 + 0'25 - 0'05 = 0'55$

Problema 4

O := Mutación en los ojos

A := Mutación en las alas

Datos que nos dan: $P(O) = 0{,}25 \quad P(A) = 0{,}50 \quad P_r(A/O) = 0{,}40$

Apartado 1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?

Se nos pide calcular $P(O \cup A)$, que como no son conjuntos disjuntos tenemos que calcularlos de esta manera: Dado que $O \cup A = O + A - O \cap A$

$$P(O \cup A) = P(O) + P(A) - P(O \cap A)$$

$$P_r(A/O) = \frac{P(O \cap A)}{P(O)}$$

$$P(O \cap A) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$$

$$P(O \cup A) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}65$$

Apartado 2

b) ¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?

Se nos pide calcular $P(O \cap \overline{A})$. Ya que $O \cap \overline{A} = O - O \cap A$ tenemos que:

$$P(O \cap \overline{A}) = P(O) - P(O \cap A) = 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}15$$

Problema 5

Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20 % de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es $2/3$ si éste se fabricó por el sistema A y $2/5$ si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender el producto.

De los datos del enunciado sabemos que la probabilidad de usar el sistema de producción A es 20 % luego la probabilidad de usar el sistema de producción B es 80 %

A = Üsar el sistema de producción A ”
B = Üsar el sistema de producción B”
C = Çomprar un producto fabricado por el sistema de producción A”
D = Çomprar un producto fabricado por el sistema de producción B”

Entonces la probabilidad de vender un producto es:
$P = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(D|B) = 0,2 \cdot \frac{2}{3} + 0,8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{34}{75} = 0,4533$

Problema 6

Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de ésta, calcular la probabilidad de que sea blanca.

Para abordar este problema, antes de hacer nada, le daremos nombre a los sucesos que queremos estudiar:

B_i = Sacar bola blanca en la caja i.
N_i = Sacar bola negra en la caja i.

Lo que queremos calcular es la probabilidad de B_1 teniendo en cuenta que añadimos una bola a la urna 1 de la urna 2. Procedemos con los cálculos:

$$P(B_1) = P(B_2) \cdot P(B_1/B_2) + (N_2) \cdot P(B_1/N_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9$$

Apartado 1

A = Sacar blanca en la primera urna

B = Sacar blanca en la segunda urna

C = Sacar blanca en la tercera urna

$P(Sacar\ 4\ blancas) = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(C|U_3) =$
$\frac{1}{3}(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}) + \frac{1}{3}(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}) + \frac{1}{3}(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}) = 0{,}0873$

Apartado 2

A_i = Coger una urna i

B = Sacar 4 y que solo una sea negra

$P(A_i) = \frac{1}{3}$

$P(B|A_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84} = 0{,}0595$

$P(B|A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{21} = 0{,}0952$

$P(B|A_3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Para calcular $P(A_2|B)$ usamos la regla de Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_2)} = \frac{\frac{2}{21 \cdot 3}}{\frac{1}{3}(\frac{5}{84} + \frac{2}{21} + \frac{1}{8})} = \frac{16}{47}$$

Problema 7

Ejercicio 8. La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es 2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0'25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

M: enfermo ha mejorado
S: se le ha inyectado suero
Utilizamos la regla de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)*P(A)}{\sum P(B|A)*P(A)}$

$P(\overline{S}) = \frac{2}{3}$, $P(M|S) = 0'5$, $P(\overline{M}|S) = 0'5$, $P(M|\overline{S}) = 0'25$
$P(\overline{S}|\overline{M}) = \frac{P(\overline{S}) * P(\overline{M}|\overline{S})}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{2}{3} * 0'75}{0'5 * \frac{1}{3} + 0'75 * \frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0'75$

Problema 8

N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 blancas y 5 negras. De las $N + 1$ urnas se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin reemplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es 1/7, encontrar N .

A = .[El]egir la urna N+1”
B = .[Ex]traer 2 bolas negras sucesivamente sin remplazamiento”
Luego tenemos que calcular la probabilidad de A condicionada a B:

$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$

Remplazamos las probabilidades con los datos que tenemos y obtenemos que:

$P(A|B) = \frac{0{,}5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{N+1}}{N \cdot 0{,}6 \cdot \frac{5}{9} \frac{1}{N+1} + 0{,}5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{N+1}}$

Despejando N obtenemos que $N = 4$

Problema 9

Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?

Antes de abordar este ejercicio vamos a nombrar los sucesos que vamos a estudiar y a determinar qué datos nos están dando:

C_1 = elegir una caja con 4 tornillos defectuosos
C_2 = elegir una caja con 6 tornillos defectuosos
C_3 = elegir una caja con 8 tornillos defectuosos
B = sacar un tornillo bueno
D = sacar un tornillo defectuoso
A = sacar 2 tornillos buenos y 1 defectuoso (sin reemplazamiento)

¿Qué datos nos dan?

$$P(C_1) = \frac{1}{6} \quad P(C_2) = \frac{2}{6} \quad P(C_3) = \frac{3}{6}$$

Ahora procedemos a realizar el ejercicio. Para calcular la probabilidad que nos piden usaremos la regla de Bayes de la siguiente forma:

$$P(C_2/A) = \frac{P(A/C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{n=1}^{3} P(A/C_n) \cdot P(C_n)}$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$$P(A/C_1) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{9}$$

$$P(A/C_2) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{3}{8}$$

$$P(A/C_3) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$$

Multiplicamos las probabilidades por 3 porque el orden no es importante ya que hay reemplazamiento. Finalmente, aplicamos la regla de Bayes:

$$P(C_2/A) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{27}{67} \approx 0{,}403$$

Problema 10

Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^n,\ n \in \mathbb{N}$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?

Sean A el suceso de sumar las caras de los dados lanzados (supuesto no trucado), obteniéndose una suma igual a 4 y D_n el suceso de lanzar n dados. Se nos pide encontrar $P(D_4|A)$. Basta darse cuenta de que $n \leq 4$ (pues, en caso contrario, ninguna combinación suma exactamente 4) y aplicar la regla de Bayes:

$$P(D_4|A) = \frac{P(A|D_4)P(D_4)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3) + P(A|D_4)P(D_4)}$$

Para hallar cada uno de los sumandos de la expresión anterior, aplicamos la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles):

$$P(A|D_1) = \frac{1}{VR_{6,1}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|D_2) = \frac{3}{VR_{6,2}} = \frac{3}{36}$$

$$P(A|D_3) = \frac{3}{VR_{6,3}} = \frac{3}{216}$$

$$P(A|D_4) = \frac{1}{VR_{6,4}} = \frac{1}{1296}$$

$$P(D_n) = (\frac{1}{2})^n$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$P(D_4|A) = 0,00046$$

Esto quiere decir que es muy poco probable que se hayan lanzado 4 dados en el experimento descrito.

Problema 11

Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen $2k$ bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y $2h$ si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Aclaraciones a añadir al enunciado: La urna se considera en un principio vacía y se supone que la moneda está trucada.

Sean N el suceso de sacar una bola negra de la urna resultante del ejercicio y A_x el suceso de obtener tras el lanzamiento de la moneda cara si $x = C$ o cruz si $x = X$. Dado que la moneda está trucada, podemos suponer que $P(A_C) = p$ y $P(A_X) = 1 - p$. Se nos pide determinar $P(N)$. Para ello, aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(N) = {} & P(N|A_C \cap A_C)P(A_C \cap A_C) + P(N|A_C \cap A_X)P(A_C \cap A_X) \\ & + P(N|A_X \cap A_C)P(A_X \cap A_C) + P(N|A_X \cap A_X)P(A_X \cap A_X) \end{aligned} \tag{1}$$

Para hallar cada probabilidad condicionada, aplicamos la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles):

$$\begin{aligned} P(N|A_C \cap A_C) &= \frac{h}{k+h} \\ P(N|A_C \cap A_X) &= \frac{2h}{k+2h} \\ P(N|A_X \cap A_C) &= \frac{h}{2k+h} \\ P(N|A_X \cap A_X) &= \frac{2h}{2k+2h} = \frac{h}{k+h} \end{aligned}$$

Como cada lanzamiento de moneda es independiente, deducimos que $P(A_x \cap A_y) = P(A_x)P(A_y)$. Basta ahora sustituir en la expresión 1 y operar, dando como resultado:

$$P(N) = p^2\frac{h}{k+h} + p(1-p)\left(\frac{2h}{k+2h} + \frac{h}{2k+h}\right) + (1-p)^2\frac{h}{k+h}$$