Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 5

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1

Apartado 1

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función masa de probabilidad:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X=i) = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X=i) = \sum_{i=1}^{20} ki = k\sum_{i=1}^{20} i = k \cdot \frac{20(20+1)}{2} = 210k \Rightarrow k = \frac{1}{210}$$

Luego, la función de distribución de la variable aleatoria X sería la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210} & si \quad 1 \leq x \leq 19 \\ 1 & si \quad x \geq 20 \end{cases}$$

Ahora calculamos las probabilidades que nos piden con la función de distribución calculada:

$$P(X=4) = F(4) - F(4^-) = F(4) - F(3) = \frac{10}{210} - \frac{6}{210} = \frac{4}{210}$$
$$P(X<4) = P(X \leq 4) - p(X=4) = F(4^-) = f(3) = \frac{6}{210}$$
$$P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X < 3) = F(10) - F(3^-) = F(10) - F(2) =$$
$$= \frac{55}{210} - \frac{3}{210} = \frac{52}{210}$$
$$P(3 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = F(10) - F(3) = \frac{55}{210} - \frac{6}{210} = \frac{49}{210}$$
$$P(3 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 3) = F(10^-) - F(3) =$$
$$= F(9) - F(3) = \frac{45}{210} - \frac{6}{210} = \frac{39}{210}$$

Apartado 2

La ganancia viene dada de la siguiente forma:

$$Ganancia = \begin{cases} 20 & si \quad x < 4 \\ 24 & si \quad x = 4 \\ -1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Calculemos las probabilidades de cada situación:

$$P(x < 4) = \frac{6}{210}$$
$$P(X = 4) = \frac{4}{210}$$
$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{10}{210} = \frac{20}{21}$$

Para ver si este juego le es favorable al jugador calculemos la esperanza matemática (media) de una nueva variable Y que tome estos valores. Si la esperanza matemática es positiva, el juego será favorable, si es negativa, no.Definimos la variable Y con sus valores y probabilidades:

$$P(Y = 20) = P(x < 4) = \frac{6}{210} P(Y = 24) = P(X = 4) = \frac{4}{210} P(Y = -1) = P(X > 4) = \frac{20}{21}$$

Ahora calculamos su esperanza matemática:

$$E[Y] = \sum_i y_i \cdot P(Y = y_i) = \frac{120}{210} + \frac{96}{210} - \frac{20}{21} = \frac{8}{105} \approx 0{,}076$$

Al ser $E[Y] > 0$ vemos que el juego es favorable, aunque la ganancia será muy pequeña.

Problema 2

Apartado 1

Tenemos que la variable X puede tomar 3 valores: 0, 1, 2 (No sale ninguna bola blanca, sale una o salen dos). Por tanto:

$$P[X = 0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \quad P[X = 1] = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45} \quad P[X = 2] = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

Ahora podemos definir la función de distribución:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{45} & \text{si } 0 <= x < 1 \\ \frac{17}{45} & \text{si } 1 <= x < 2 \\ 1 & \text{si } x >= 1 \end{cases}$$

Apartado 2

- Media: Es la esperanza matemática, es decir, el centro de gravedad de la distribución de probabilidad y se calcula como
$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P[X = x_i] = \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{8}{5}$$

- Mediana: Es el valor de la variable que deja por debajo la el 50 % de la probabilidad. En nuestro caso, mirando a la función de distribución tenemos que

$$\text{Me} = 2$$

- Moda: Es el valor de x_i con mayor probabilidad, por lo que se calculará como el máximo de los $P[X = x_i]$. Por tanto

$$\text{Mo} = 2$$

Apartado 3

Para el recorrido intercuartílico calculemos los percentiles 75 y 25:

$$P_{75} = \min\{\ x_i\ /\ P[X < x_i] = F[x_i] > 0{,}75\} = x_2 = 2$$

$$P_{25} = \min\{\ x_i\ /\ P[X < x_i] = F[x_i] > 0{,}25\} = x_1 = 1$$

Por tanto el recorrido intercuartílico será $Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$, que indica la longitud del intervalo en el que se encuentra el 50 % de los datos.

Problema 3

Sabemos que se trata de una variable aleatoria discreta.
Para probar que la función masa de probabilidad está bien definida, comprobamos que cumple:

Apartado 1

1. $P(X = x_i) \geq 0\ \forall i \in N \Rightarrow P[X = x] = \frac{1}{2^x}$ que siempre va a ser positiva pues nunca se anula; y 2^x está siempre en el intervalo $(0, +\infty)$, por lo que la fracción nunca va a ser negativa.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + ...$ Esta es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge. Su suma viene dada por $\sum_{i}^{n} 2^{-n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Apartado 2

$P(4 \leq x \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} p_i = \sum_{i=4}^{10} 2^{-x_i} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{127}{1024} \simeq 0'124$

Apartado 3

$Q_1 : P(X \leq x_i) = \frac{25}{100} = 0'25 \Rightarrow \sum_{i=1}^{x_i} 2^{-x_i} = 0'25 < 0'5 = 2^{-1} \Rightarrow Q_1 = 1$
$Q_2 : P(X \leq x_i) = \frac{50}{100} = 0'5 \Rightarrow 2^{-1} = 0'5 \Rightarrow Q_2 = [1, 2)$
$Q_3 : P(X \leq x_i) = \frac{75}{100 = 0'75} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} 2^{-x_i} = 0'5 + 0'25 = 0'75 \Rightarrow Q_3 = [2, 3)$
M_o: valor máximo. Cuanto mayor es x_i, menor es $\frac{1}{2_i^x}$. Por lo tanto, el valor máximo va a ser el primero, cuando $x_i = 1 \Rightarrow Mo = 1$

Apartado 4

Función generatriz de momentos: $M_x(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} * P[X = x_i] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} * \frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{e^t}{2})^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}}$. Esto es una serie geométrica que converge si $\frac{e^t}{2} < 1 \Rightarrow e^t < 2 \Rightarrow t < log(2)$. Por lo tanto, converge en un entorno de cero.

Esperanza: $E[X] = M_x^{'}(t) = \frac{(\frac{e^t}{2})^{'}(1-\frac{e^t}{2})-(\frac{e^t}{2})(1-\frac{e^t}{2})^{'}}{(1-\frac{e^t}{2})^2} = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-e^t+\frac{e^t}{4}}$. Sustituimos t=0: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 = E[X]$

Desviación típica: $E[X^2] = M_x^{''}(t) = \frac{\frac{e^t}{2}-\frac{e^{3t}}{8}}{1-2e^t+\frac{3e^{2t}}{2}-\frac{e^{3t}}{2}+\frac{e^{4t}}{16}}$. Sustituimos t=0: $\frac{\frac{6}{16}}{\frac{1}{16}} = 6$

Varianza: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 6 - 2^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2} \simeq 1'414$

Problema 4

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ k_2x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar $k_1,\ k_2$, y deducir su función de distribución.

Nótese que la variable aleatoria es continua y toma valores entre 0 y 6. En el desarrollo de este ejercicio, se presupondrá que la función de masa dada es correcta.

En primer lugar, calculemos la función de distribución de la variable aleatoria. Aplicamos la siguiente expresión: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Si $0 \leq x \leq 4$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} k_1(t+1)dt = k_1(\frac{x^2}{2}+x)$$

Si $4 < x \leq 6$, tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} k_1(t+1)dt + \int_{4}^{x} k_2t^2dt \\ &= k_1(\frac{4^2}{2}+4) + k_2(\frac{x^3}{3}-\frac{4^3}{3}) \end{aligned}$$

Sabemos que $P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-)$. Como la variable es continua, tenemos que $F(0^-) = F(0)$. Deducimos entonces que:

$$P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-) = F(4) - F(0) = k_1(\frac{4^2}{2}+4) = 2/3 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{18}$$

Por otra parte, para que se verifique que se trate, en efecto, de una función de distribución, se ha de verificar que:

$$F(+\infty) = k_2(\frac{6^3}{3}-\frac{4^3}{3}) + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{152}$$

Por tanto, la función de distribución viene dado por la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{18}(\frac{x^2}{2} + x) & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x^3}{456} + \frac{10}{19} & 4 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Problema 5

Apartado 1

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{10} \frac{k}{x^2}\,dx = \frac{k}{-x}\Big|_1^{10} = \frac{-k}{10} + k = \frac{9k}{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{10}{9}$$

Y finalmente tenemos que $k = \dfrac{10}{9}$. Para calcular la función de distribución debemos calcular la integral de la función de densidad, como ya la habíamos calculado antes, ahora solo tenemos que definirla. La definimos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 1 \\ \dfrac{10/9}{-x}\Big|_1^x & si & 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & si & x > 10 \end{cases}$$

Apartado 2

Para calcular esta probabilidad usaremos la función de distribución:

$$P(2 \leq x \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{10/9}{-x}\Big|_1^5 - \frac{10/9}{-x}\Big|_1^2 = \frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Apartado 3

En este apartado nos piden que calculemos el percentil 50 y el percentil 95, para calcularlos debemos resolver la ecuación $P(X \leq x_i) = \dfrac{r}{100}$ donde r es el percentil que queremos calcular. Resolvemos estas ecuaciones:

-P_{50}:

$$P(X \leq x_i) = 0{,}5; \quad F(x_i) = 0{,}5; \quad \frac{10/9}{-x}\Big|_1^{x_i} = 0{,}5; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}5;$$

$$10 - 10x_i = -4{,}5x_i; \quad x_i = \frac{20}{11} = 1{,}88$$

-P_{95}:

$$P(X \le x_i) = 0{,}95; \quad F(x_i) = 0{,}95; \quad \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^{x_i} = 0{,}95; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}95;$$

$$10 - 10x_i = -8{,}55x_i; \quad x_i = \frac{200}{29} \approx 6{,}897$$

Problema 6

Apartado 1

$$P(1'5 < x \le 2) = \int_{1'5}^{2} f(x)\,dx = \int_{1'5}^{2} \frac{2x-1}{10}\,dx = \frac{1}{10}[\int 2x\,dx - \int dx] = \frac{2}{10} - 0'075 = 0'125$$

$$P(2'5 < x \le 3'5) = 0$$

$$P(4'5 < x \le 5'5) = \int_{4'5}^{5'5} 0'4\,dx = 2'2 - 1'8 = 0'4$$

$$P(1'2 < x \le 5'2) = \int_{1'2}^{2} \frac{2x-1}{10}\,dx + \int_{4}^{5'2} 0'4\,dx = 0'2 - 0'024 + 2'08 - 1'6 = 0'656$$

Apartado 2

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * e^{xt}\,dx + \int_{4}^{6} 0'4\,dx = \frac{67}{60}$$

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * x^k\,dx + \int_{4}^{6} 0'4 * x^k\,dx$$

Apartado 3

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} * f(x)\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2x-1}{10} * e^{xt}\,dx + \int_{4}^{6} 0'4 * e^{xt}\,dx =$$

$$\frac{e^t((3t-2)e^t - t + 2)}{10t^2} + \frac{2(e^{2t}-1)e^{4t}}{5t}$$

Problema 7

Apartado 1

Se nos pide calcular el percentil 50, es decir, la mediana de la distribución de probabilidad. Por tanto, tenemos que calcular la función de distribución haciendo la integral de la función de densidad.

$$\int \frac{3}{4}(2x - x^2) = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4}$$

$$F(x) = 0{,}5; \quad \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} = 0{,}5$$

$$3x^2 - x^3 - 2 = 0$$

1 es solución de la ecuación y se encuentra entre 0 y 2, las cotas de los datos, por tanto, se necesitarán preparar 1000 unidades del producto.

Apartado 2

Para calcular las varianzas tendremos que hacer los siguientes cálculos:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{4}\int_{0}^{2} 2x^2 - x^3 dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \left.\frac{3 \cdot 2x^3}{4 \cdot 3}\right|_0^2 - \left.\frac{3x^4}{4 \cdot 4}\right|_0^2 = 1$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \frac{3}{4}\int_{1}^{3} 4y^2 - y^3 - 3y \; dy + \int_{3}^{\infty} 0dy =$$

$$= \left.\frac{3 \cdot 4y^3}{4 \cdot 3}\right|_1^3 - \left.\frac{3y^4}{4 \cdot 4}\right|_1^3 - \left.\frac{3 \cdot 3y^2}{4 \cdot 2}\right|_1^3 = 2$$

$$m_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{4}\int_{0}^{2} 2x^3 - x^4 dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \left.\frac{3 \cdot 2x^3}{4 \cdot 4}\right|_0^2 - \left.\frac{3x^4}{4 \cdot 5}\right|_0^2 = 1{,}2$$

$$m_2[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \frac{3}{4}\int_{1}^{3} 4y^3 - y^4 - 3y^2 \; dy + \int_{3}^{\infty} 0dy =$$

$$= \left.\frac{3y^4}{4}\right|_1^3 - \left.\frac{3y^5}{4 \cdot 5}\right|_1^3 - \left.\frac{3y^3}{4}\right|_1^3 = \frac{21}{5}$$

$$\mathrm{Var}[X] = m_2[X] - E[X]^2 = 0{,}2 \implies \sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = m_2[Y] - E[Y]^2 = 0{,}2 \implies \sigma_y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Efectivamente no ha afectado a la dispersión de la demanda.

Problema 8

Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$ y $Z = X^2$, siendo X una variable aleatoria con distribución:

$$P(X = -2) = \frac{1}{5}, \quad P(X = -1) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}.$$

¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

En primer lugar, notemos que la variable aleatoria X es discreta. Basta aplicar el teorema de cambio de variable:

$$P(y_i) = \begin{cases} 1/5 & y_i = 0 \\ 1/10 & y_i = 1 \\ 1/5 & y_i = 2 \\ 2/5 & y_i = 3 \\ 1/10 & y_i = 4 \end{cases}$$

$$P(z_i) = \begin{cases} 1/5 & z_i = 0 \\ 1/2 & z_i = 1 \\ 3/10 & z_i = 4 \end{cases}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} EY &= \sum_i P(Y = y_i)y_i = \sum_i P(Y = y_i)(x_i - a) = \sum_i P(X = x_i)(x_i - a) \\ &= \sum_i P(X = x_i)x_i - a\sum_i P(X = x_i) = \sum_i P(X = x_i)x_i - a \\ &= EX - a \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que:

$$\begin{aligned} E[(Y - EY)^2] &= \sum_i P(Y = y_i)(y_i - EY)^2 = \sum_i P(X = x_i)(x_i - a - EX + a)^2 \\ &= \sum_i P(X = x_i)(x_i - EX)^2 = E[(X - EX)^2] \end{aligned}$$

Deducimos que el coeficiente de variación no ha de variar.

Por otra parte, sabemos que $C.V.(X) = \frac{E[(X-EX)^2]}{EX}$ y $C.V.(Y) = \frac{E[(Y-EY)^2]}{EY}$. Dividiendo ambas expresiones, tenemos que $C.V.(X) = \frac{EY}{EX}C.V.(Y)$. Operamos:

	$p(x_i)$	$p(x_i)x_i$	$(x_i - EX)^2$	$p(x_i)(x_i - EX)^2$
-2	0,2	-0,4	4,41	0,882
-1	0,1	-0,1	1,21	0,121
0	0,2	0	0,01	0,002
1	0,4	0,4	0,81	0,324
2	0,1	0,2	3,61	0,361
		EX = 0,1		$E[(X - EX)^2]$=1,69

	$p(y_i)$	$p(y_i)y_i$	$(y_i - EY)^2$	$p(y_i)(y_i - EY)^2$
0	0,2	0	4,41	0,882
1	0,1	0,1	1,21	0,121
2	0,2	0,4	0,01	0,002
3	0,4	1,2	0,81	0,324
4	0,1	0,4	3,61	0,361
		$EY = 2,1$		$E[(Y - EY)^2] = 1,69$

Deducimos que $C.V.(X) = 21C.V.(Y)$.

Problema 9

Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $\{|X| \leq 2\}$.

b) $\{|X| \leq 2 \quad \text{ó} \quad X \geq 0\}$.

c) $\{|X| \leq 2 \quad \text{y} \quad X \leq -1\}$.

d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.

e) $\{X \text{ es irracional}\}$.

En el desarrollo de este ejercicio se presupondrá que la función de masa de probabilidad proporcionada es correcta y está bien definida (nótese que X es una variable aleatoria continua). Calculamos a partir de ella la función de distribución.

Si $x < 0$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{2}dt = \frac{e^x}{2}$$

Si $0 \leq x$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{2}dt + \int_{0}^{x} \frac{e^{-t}}{2}dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{-e^-t}{2}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{2e^x}$$

De esta forma, tenemos que la función de distribución viene dado por la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2e^x} & x \geq 0 \end{cases}$$

De esta forma, obtenemos las siguientes probabilidades (considerando en todo momento que la variable aleatoria es continua):

1. $P(|X| \leq 2) = P(2) - P(-2^-) = P(2) - P(-2) = 1 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,8647$
2. $P(|X| \leq 2) \cup X \geq 0) = P(X \geq -2) = 1 - \frac{1}{2e^2} \approx 0,9323$
3. $P(|X| \leq 2 \cap X \leq -1) = P(-2 \leq X \leq -1) = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2} \approx 0,1163$
4. $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P(X \leq 2)$ (donde para aplicar esta igualdad hemos factorizado mediante el método de Ruffini, dando como resultado que $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$, siendo este segundo término siempre positivo y $x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0 \iff x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2$). Por tanto, $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P(X \leq 2) = 1 - \frac{1}{2e^2} \approx 0,9323$.
5. $P(X \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 1 - P(X \in \mathbb{Q}) = 1$ (pues el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable, por lo que la suma de la probabilidad de un conjunto infinito numerable de puntos es 0).

Problema 10

Antes de empezar, tomaremos los datos que nos dan para deducir la desviación típica y la esperanza matemática. Para empezar nos dicen que el coeficiente de variación es 1, lo que implica que:

$$C.V_X = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_X}{E[X]} = 1 \Rightarrow \sigma_X = E[X]$$

Además, nos dicen que la variable aleatoria es simétrica con respecto al punto 2. Esto implica que el punto que deja a la misma cantidad de valores a su derecha que a su izquierda es dos, por lo que $E[X] = 2$ y además:

$$E[X] = 2 \Rightarrow \sigma_X = E[X] = 2$$

Ahora, para abordar el ejercicio, usaremos la desigualdad de Chebychev de la siguiente forma:

$$P(|X - E[X]| \geq k\sigma_X) = P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Apartado 1

Vamos a calcular k para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X] + 2k = 12 \Rightarrow k = \frac{12-2}{2} = 5$$

Finalmente sustituimos $k = 5$ en la expresión anterior:

$$P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) = P(-8 < x < 12) \geq 1 - \frac{1}{5^2} = 0{,}96$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-8 < x < 12) \geq 0{,}96$.

Apartado 2

Vamos a calcular k para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X] + 2k = 10 \Rightarrow k = \frac{10-2}{2} = 4$$

Finalmente sustituimos $k = 4$ en la expresión anterior:

$$P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) = P(-6 < x < 10) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = 0{,}9375$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-6 < x < 10) \geq 0{,}9375$.