

Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 3

Autores, por orden alfabético:

Shao Jie Hu Chen

Adrián Jaén Fuentes

Aarón Jerónimo Fernández

Noura Lachhab Bouhmadi

Laura Lázaro Soraluze

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1	2
Problema 2	3
Problema 3	4
Problema 4	5
Problema 5	6
Problema 6	7
Problema 7	8
Problema 8	8



Problema 1

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

1. que una persona viaje en metro y no en autobús;
2. que una persona tome al menos dos medios de transporte;
3. que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;
4. que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;
5. que una persona vaya a pie.

Apartado 1

En este apartado debemos calcular la probabilidad de la intersección entre M y \bar{A} :

$$P(M \cap \bar{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

Apartado 2

Aquí debemos considerar todas las formas posibles de tomar dos medios de transporte. Calculamos:

$$\begin{aligned} P((A \cap M) \cup (A \cap C) \cup (M \cup C) \cup (A \cup M \cup C)) = \\ P(A \cap M) + P(A \cap C) + P(M \cup C) - 2P(A \cup M \cup C) = 0,2 + 0,05 + 0,06 - 2 \cdot 0,01 = 0,19 \end{aligned}$$

Apartado 3

Ahora debemos calcular la probabilidad de la unión entre las intersecciones de \bar{A} con M y C:

$$\begin{aligned} P((M \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A})) = P(M \cap \bar{A}) + P(C \cap \bar{A}) - P(C \cap M \cap \bar{A}) = \\ P(M \cap \bar{A}) + P(C) - P(C \cap A) - P(M \cap C) + P(C \cap M \cap A) = 0,2 + 0,15 - 0,06 - 0,05 + 0,01 = 0,25 \end{aligned}$$

Apartado 4

En este apartado debemos calcular la unión entre M y la intersección de A y C:

$$P(M \cup (A \cap C)) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0,3 + 0,06 - 0,01 = 0,35$$

Apartado 5

En este último apartado, para calcular lo que nos piden debemos considerar que no hay otro transporte además de los dados en el ejercicio. Si hubiera otro medio, como barco o patinete, no tendríamos los datos suficientes para hacer los cálculos. Hecha esta suposición, calculamos la probabilidad que nos piden:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{M} \cap \overline{C}) &= \overline{P(A \cup M \cup C)} = 1 - P(A \cup M \cup C) = \\ P(A) + P(M) + P(C) - P(A \cap M) - P(A \cap C) - P(M \cap C) + P(A \cap M \cap C) &= \\ 1 - (0,2 + 0,3 + 0,15 - 0,1 - 0,06 - 0,05 + 0,01) &= 0,55 \end{aligned}$$

Problema 2

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) , tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. sólo ocurre A ,
2. ocurren los tres sucesos,
3. ocurren A y B pero no C ,
4. por lo menos dos ocurren,
5. ocurren dos y no más,
6. no ocurren más de dos,
7. ocurre por lo menos uno,
8. ocurre sólo uno,
9. no ocurre ninguno.

Apartado 1

Debemos calcular la probabilidad de que ocurra A y no ocurra ni B ni C . Para hacer los cálculos tenemos en cuenta que $B \cap C = \emptyset$:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A - B - C) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

Apartado 2

Como nos dicen que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ es claro que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

Apartado 3

Como en el apartado anterior, tenemos en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y entonces:

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) = 0,1$$

Apartado 4

Ahora debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o más, teniendo de nuevo en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$:

$$P((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0,1$$

Apartado 5

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 sucesos:

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) = 0,1$$

Apartado 6

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o menos sucesos:

$$P(A \cup B \cup C \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

Apartado 7

En este apartado solo tenemos que calcular la unión entre A, B y C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,8$$

Apartado 8

Ahora debemos considerar los casos en los que solo ocurre A o B o C:

$$P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = 0,3 + 0,2 - 0,1 + 0,3 = 0,7$$

Apartado 9

Para este apartado podemos tomar la probabilidad complementaria del suceso calculado en el apartado g:

$$P(\overline{A \cap B \cap C}) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Problema 3

Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

Apartado 1

Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.

$\omega = (R1, R2), (R1, R3), (R1, B1), (R1, B2), (R2, R1), (R2, R3), (R2, B1), (R2, B2), (R3, R1), (R3, R2), (R3, B1), (R3, B2), (B1, R1), (B1, R2), (B1, R3), (B1, B2), (B2, R1), (B2, R2), (B2, R3), (B2, B1)$

Apartado 2

Descomponer en sucesos elementales los sucesos: "la primera bola es roja", "la segunda bola es blanca" calcular la probabilidad de cada uno de ellos.

A = La primera bola es roja: $(R1, R2), (R1, R3), (R1, B1), (R1, B2), (R2, R1), (R2, R3), (R2, B1), (R2, B2),$

(R3,R1), (R3,R2), (R3,B1), (R3,B2)

$$P(A) = \frac{12}{20} = 0'6$$

B = La segunda bola es blanca: (R1,B1), (R1,B2), (R2,B1), (R2,B2), (R3,B1), (R3,B2), (B1,B2), (B2,B1)

$$P(B) = \frac{8}{20} = 0'4$$

Apartado 3

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'3 = 0'7$$

Problema 4

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

Apartado 1

a) dos bolas rojas

A1 = primera roja, A2 = segunda roja

$$P(A1 \cap A2) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = 0'375 * 0'286 = 0'107$$

También se podría haber hecho por combinatoria. Llamemos A al suceso de extraer dos bolas rojas. Bastaría aplicar la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = 0'107$$

Apartado 2

b) dos bolas blancas

B1 = primera blanca, B2 = segunda blanca

$$P(B1 \cap B2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = 0'625 * 0'571 = 0'357$$

También se podría haber hecho por combinatoria. Llamemos B al suceso de extraer dos bolas blancas. Bastaría aplicar la regla de Laplace:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = 0'357$$

Apartado 3

c) una blanca y otra roja

$$P((A1 \cap B2) \cup (A2 \cap B1)) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = 0'536$$

También se podría haber hecho por combinatoria. Llamemos C al suceso de extraer una bola blanca y una roja. Bastaría aplicar la regla de Laplace:

$$P(C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = 0'536$$

Problema 5

En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?
2. ¿Cuántos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que $4/5$?

Apartado 1

Sea A el suceso de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes. Para determinarlo, procedemos primero a calcular $P(\bar{A})$ mediante la regla de Laplace en cada boleto de lotería comprado:

$$P(\bar{A}) = \frac{98}{100} \frac{97}{99} \frac{96}{98} \dots \frac{98-12+1}{100-12+1} = 0,77333$$

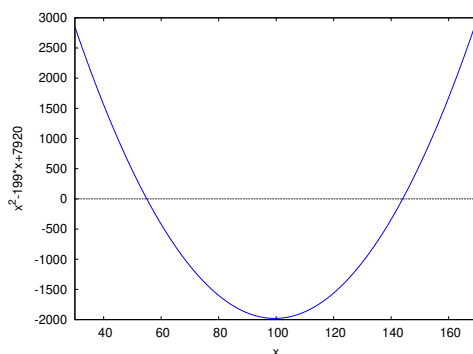
Por tanto, deducimos que:

$$P(A) = 0,22667$$

Apartado 2

Para calcular el número de boletos de lotería que se ha de adquirir para que se alcance dicha probabilidad, sea A_n el suceso de ganar al menos un premio tras adquirir n billetes de lotería. Queremos hallar $n \in \mathbb{N}$ de forma que se verifique $P(A_n) = \frac{4}{5} > 0,8$, por lo que se ha de cumplir $P(\bar{A}_n) < 0,2$. Razonamos nuevamente como el apartado anterior:

$$P(\bar{A}_n) = \frac{98}{100} \frac{97}{99} \frac{96}{98} \dots \frac{98-n+1}{100-n+1} = \frac{(99-n+1)(98-n+1)}{10099} < 0,2$$



De la desigualdad de la derecha obtenemos que se ha de cumplir $n^2 - 199n + 7920 < 0$. Dado que la función $f(x) = x^2 - 199x + 7920$ corta al eje OX en los puntos $x = 55$ y $x = 144$ y es cóncava hacia arriba, deducimos que la mínima cantidad de boletos que ha de adquirir una persona para tener una probabilidad estrictamente mayor que $0,8$ son **56 boletos**.

Problema 6

A := 1º es cuadrado perfecto

B := 2º es cuadrado perfecto

C := 3º es cuadrado perfecto

D := Ninguno es perfecto

Apartado 1

Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

Buscamos $P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$

Hay 10 cuadrados perfectos entre los 100 primeros números naturales, luego

$$P(D) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{117480}{161700} = 0,7265$$

Luego la probabilidad de que entre 3 números que escojamos entre los 100 primeros naturales no haya ningún cuadrado perfecto es de:

$$P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = \frac{117480}{161700} = 0,7265$$

Apartado 2

Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.

Se nos pide $P(\overline{D})$, que es simplemente

$$1 - P(D) = 0,2735$$

Apartado 3

Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

■ $P(1 \text{ perfecto}) =$

$$\begin{aligned} &P(1^\circ \text{ perfecto} \cap 2^\circ \text{ no perfecto} \cap 3^\circ \text{ no perfecto}) + \\ &P(1^\circ \text{ no perfecto} \cap 2^\circ \text{ perfecto} \cap 3^\circ \text{ no perfecto}) + \\ &P(1^\circ \text{ no perfecto} \cap 2^\circ \text{ no perfecto} \cap 3^\circ \text{ perfecto}); \\ &P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \\ &P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) = \\ &\frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = 0,2477 \end{aligned}$$

■ $P(3 \text{ perfectos}) = P(1^\circ \text{ perfecto} \cap 2^\circ \text{ perfecto} \cap 3^\circ \text{ perfecto}) =$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{2}{2695} = 0,0007421$$

■ $P(2 \text{ perfectos})$; Se podría hacer de forma similar que para 1 perfecto pero como sabemos que los conjuntos son disjuntos (no se pueden dar a la vez dos a dos) y que la probabilidad de que se haya al menos un cuadrado es $P(\overline{D}) =$

$$P(A \cup B \cup C) = 0,2735, \text{ entonces tenemos que } P(\overline{D}) = P(A) + P(B) + P(C) \\ P(B) = P(\overline{D}) - P(A) - P(C) = 0,02505$$

Problema 7

Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

Sean A_n el suceso de localizar exactamente n productos defectuosos en el control de calidad y A el suceso de pasar dicho control de calidad. Se verifica que $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$ (por ser A la unión de los A_n y ser cada par de sucesos independientes dos a dos).

Aplicando la regla de Laplace, tenemos que:

$$P(A_0) = \frac{\binom{290}{60}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 0,2684$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{290}{58}}{\binom{300}{60}} = 0,3071$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{290}{57}}{\binom{300}{60}} = 0,2039$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{10}{4} \binom{290}{56}}{\binom{300}{60}} = 0,0869$$

$$P(A_5) = \frac{\binom{10}{5} \binom{290}{55}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

Deducimos que:

$$P(A) = 0,9944$$

Problema 8

Pongamos que tenemos K sobres, y pongamos que el suceso A_i ocurre si el sobre i está en su sitio correspondiente.

Usaré el principio de inclusión-exclusión, para ello, calcularé $P(A_i), P(A_i \cap A_j) \dots$

Primero, tenemos que el número de casos posibles son permutaciones sin repetición de k elementos: $k!$

Para A_i los casos favorables serían las permutaciones de $k-1$ elementos porque hemos fijado el elemento i : $(k-1)!$

Por tanto $P(A_i) = \frac{(k-1)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i de k formas.

Para $A_i \cap A_j$, los casos favorables son las permutaciones de $k-2$ elementos ya que hemos fijado i y j : **$(k-2)!$**

Por tanto $P(A_i \cap A_j) = \frac{(k-2)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i y A_j de $\binom{k}{2}$ formas, es decir $\frac{k!}{2!(k-2)!}$

Y así sucesivamente.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \\
 &= \binom{k}{1} \frac{(k-1)!}{k!} - \binom{k}{2} \frac{(k-2)!}{k!} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \frac{(k-1)!}{k!} \\
 &= \frac{k!(k-1)!}{(k-1)!k!} - \frac{k!(k-2)!}{2!(k-2)!k!} + \frac{k!(k-3)!}{3!(k-3)!k!} - \dots \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{(-1)^k}{k!}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Si evaluamos el polinomio de Taylor de grado k de la función exponencial en -1 obtenemos:

$$P_{k,0}^x(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + P_{k,0}^x(-1) = 1$$

Por tanto,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - P_{k,0}^x(-1)$$

Y aproximando, o a medida que k se acerca a infinito:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Para el caso de 3 cartas que es lo que realmente nos pide el ejercicio tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = 1 - P_{3,0}^x(-1) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0,6667$$