Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 5

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1

Apartado 1

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función masa de probabilidad:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X=i) = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X=i) = \sum_{i=1}^{20} ki = k\sum_{i=1}^{20} i = k \cdot \frac{20(20+1)}{2} = 210k \Rightarrow k = \frac{1}{210}$$

Luego, la función de distribución de la variable aleatoria X sería la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ \sum_{i=1}^{x} \frac{i}{210} & si \quad 1 \leq x \leq 19 \\ 1 & si \quad x \geq 20 \end{cases}$$

Ahora calculamos las probabilidades que nos piden con la función de distribución calculada:

$$P(X=4) = F(4) - F(4^-) = F(4) - F(3) = \frac{10}{210} - \frac{6}{210} = \frac{4}{210}$$
$$P(X<4) = P(X \leq 4) - p(X=4) = F(4^-) = f(3) = \frac{6}{210}$$
$$P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X<3) = F(10) - F(3^-) = F(10) - F(2) =$$
$$= \frac{55}{210} - \frac{3}{210} = \frac{52}{210}$$
$$P(3 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = F(10) - F(3) = \frac{55}{210} - \frac{6}{210} = \frac{49}{210}$$
$$P(3 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 3) = F(10^-) - F(3) =$$
$$= F(9) - F(3) = \frac{45}{210} - \frac{6}{210} = \frac{39}{210}$$

Apartado 2

La ganancia viene dada de la siguiente forma:

$$Ganancia = \begin{cases} 20 & si \quad x<4 \\ 24 & si \quad x=4 \\ -1 & si \quad x>4 \end{cases}$$

Calculemos las probabilidades de cada situación:

$$P(x < 4) = \frac{6}{210}$$
$$P(X = 4) = \frac{4}{210}$$
$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{10}{210} = \frac{20}{21}$$

Para ver si este juego le es favorable al jugador calculemos la esperanza matemática (media) de una nueva variable Y que tome estos valores. Si la esperanza matemática es positiva, el juego será favorable, si es negativa, no.Definimos la variable Y con sus valores y probabilidades:

$$P(Y = 20) = P(x < 4) = \frac{6}{210} P(Y = 24) = P(X = 4) = \frac{4}{210} P(Y = -1) = P(X > 4) = \frac{20}{21}$$

Ahora calculamos su esperanza matemática:

$$E[Y] = \sum_i y_i \cdot P(Y = y_i) = \frac{120}{210} + \frac{96}{210} - \frac{20}{21} = \frac{8}{105} \approx 0{,}076$$

Al ser $E[Y] > 0$ vemos que el juego es favorable, aunque la ganancia será muy pequeña.

Problema 2

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar k_1, k_2, y deducir su función de distribución.

Nótese que la variable aleatoria es continua y toma valores entre 0 y 6. En el desarrollo de este ejercicio, se presupondrá que la función de masa dada es correcta.

En primer lugar, calculemos la función de distribución de la variable aleatoria. Aplicamos la siguiente expresión: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Si $0 \leq x \leq 4$, tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} k_1(t+1)dt = k_1(\frac{x^2}{2} + x)$$

Si $4 < x \leq 6$, tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} k_1(t+1)dt + \int_{4}^{x} k_2 t^2 dt \\ &= k_1(\frac{4^2}{2} + 4) + k_2\frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Sabemos que $P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-)$. Como la variable es continua, tenemos que $F(0^-) = F(0)$. Deducimos entonces que:

$$P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0^-) = F(4) - F(0) = k_1(\frac{4^2}{2} + 4) = 2/3 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{18}$$

Por otra parte, para que se verifique que se trate, en efecto, de una función de distribución, se ha de verificar que:

$$F(+\infty) = k_2\frac{6^3}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{216}$$

Por tanto, la función de distribución viene dado por la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ \frac{x^2}{216} & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Problema 3

Apartado 1

Para determinar el valor de k usaremos la siguiente característica de la función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{10} \frac{k}{x^2}\,dx = \left.\frac{k}{-x}\right|_1^{10} = \frac{-k}{10} + k = \frac{9k}{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{10}{9}$$

Y finalmente tenemos que $k = \frac{10}{9}$. Para calcular la función de distribución debemos calcular la integral de la función de densidad, como ya la habíamos calculado antes, ahora solo tenemos que definirla. La definimos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \\ \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^x & si \quad 1 \leq x \leq 10 \\ \\ 1 & si \quad x > 10 \end{cases}$$

Apartado 2

Para calcular esta probabilidad usaremos la función de distribución:

$$P(2 \leq x \leq 5) = F(5) - F(2) = \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^5 - \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^2 = \frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Apartado 3

En este apartado nos piden que calculemos el percentil 50 y el percentil 95, para calcularlos debemos resolver la ecuación $P(X \leq x_i) = \frac{r}{100}$ donde r es el percentil que queremos calcular. Resolvemos estas ecuaciones:

-P_{50}:

$$P(X \leq x_i) = 0{,}5; \quad F(x_i) = 0{,}5; \quad \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^{x_i} = 0{,}5; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}5;$$
$$10 - 10x_i = -4{,}5x_i; \quad x_i = \frac{20}{11} = 1{,}88$$

-P_{95}:

$$P(X \leq x_i) = 0{,}95; \quad F(x_i) = 0{,}95; \quad \left.\frac{10/9}{-x}\right|_1^{x_i} = 0{,}95; \quad \frac{10/9}{-x_i} + \frac{10}{9} = 0{,}95;$$
$$10 - 10x_i = -8{,}55x_i; \quad x_i = \frac{200}{29} \approx 6{,}897$$

Problema 4

Antes de empezar, tomaremos los datos que nos dan para deducir la desviación típica y la esperanza matemática. Para empezar nos dicen que el coeficiente de variación es 1, lo que implica que:

$$C.V_X = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_X}{E[X]} = 1 \Rightarrow \sigma_X = E[X]$$

Además, nos dicen que la variable aleatoria es simétrica con respecto al punto 2. Esto implica que el punto que deja a la misma cantidad de valores a su derecha que a su izquierda es dos, por lo que $E[X] = 2$ y además:

$$E[X] = 2 \Rightarrow \sigma_X = E[X] = 2$$

Ahora, para abordar el ejercicio, usaremos la desigualdad de Chebychev de la siguiente forma:

$$P(|X - E[X]| \geq k\sigma_X) = P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Apartado 1

Vamos a calcular k para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X] + 2k = 12 \Rightarrow k = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

Finalmente sustituimos $k = 5$ en la expresión anterior:

$$P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) = P(-8 < x < 12) \geq 1 - \frac{1}{5^2} = 0{,}96$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-8 < x < 12) \geq 0{,}96$.

Apartado 2

Vamos a calcular k para adaptar la desigualdad de Chebychev a esta probabilidad:

$$E[X] + 2k = 10 \Rightarrow k = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

Finalmente sustituimos $k = 4$ en la expresión anterior:

$$P(E[X] - k\sigma_X < k < E[X] + k\sigma_X) = P(-6 < x < 10) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = 0{,}9375$$

Luego, con los datos que tenemos, podemos decir que $P(-6 < x < 10) \geq 0{,}9375$.