Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 4

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1 . . . 2
Problema 2 . . . 2
Problema 3 . . . 2
Problema 4 . . . 2
Problema 5 . . . 3
Problema 6 . . . 3
Problema 7 . . . 4
Problema 8 . . . 5
Problema 9 . . . 5
Problema 10 . . . 5
Problema 11 . . . 6
Problema 12 . . . 7

Problema 1

Ejercicio 1. En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0'6, la de que lo acierte el segundo es 0'3 y la de que lo acierte el tercero es 0'1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

Ri: acierta el disparo el destructor i.
P(R1) = 0'6, P(R2) = 0'3, P(R3) = 0'1
$P(R1 \cup R2 \cup R3) = P(R1) + P(R2) + P(R3) - P(R1 \cap R2) - P(R1 \cap R3) - P(R2 \cap R3) + P(R1 \cap R2 \cap R3) =$
$0'6 + 0'3 + 0'1 - (0'6 * 0'1) - (0'6 * 0'3) - (0'1 * 0'3) + (0'6 * 0'3 * 0'1) = 0'748$

Problema 2

Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i -ésima, habiendo pasado las anteriores es $1/(7-i)$. Determinar la probabilidad de que el alumno apruebe el curso.

De los datos del enunciado sabemos que la probabilidad de aprobar la prueba i-esima es: $P(A_i) = \frac{1}{7-i}$

Los sucesos son independientes ya que el hecho de aprobar una prueba o no aprobarla no influye en la probabilidad de aprobar el resto de las pruebas, entonces la probabilidad de aprobar el curso es:

$P(\cap_{i=1}^{5} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{720} = 0,001389$

Problema 3

Ejercicio 3. En una ciudad, el 40 % de las personas tienen el pelo rubio, el 25 % tienen ojos azules y el 5 % el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

R: tener el pelo rubio
A: tener los ojos azules
Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada para el apartado a y b: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)}$.

a) tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules
$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{0'05}{0'25} = 0'2$

b) tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio
$P(A|R) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0'05}{0'4} = 0'125$

c) no tener pelo rubio ni ojos azules
$P(A \cup R) = 1 - (P(A) + P(R) - P(A \cap R)) = 1 - (0'4 + 0'25 - 0'05) = 0'4$

d) tener exactamente una de estas características
$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = 0'4 - 0'05 + 0'25 - 0'05 = 0'55$

Problema 4

O := Mutación en los ojos

A := Mutación en las alas

Datos que nos dan: $P(O) = 0{,}25 \quad P(A) = 0{,}50 \quad P_r(A/O) = 0{,}40$

Apartado 1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?

Se nos pide calcular $P(O \cup A)$, que como no son conjuntos disjuntos tenemos que calcularlos de esta manera: Dado que $O \cup A = O + A - O \cap A$

$$P(O \cup A) = P(O) + P(A) - P(O \cap A)$$

$$P_r(A/O) = \frac{P(O \cap A)}{P(O)}$$

$$P(O \cap A) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$$

$$P(O \cup A) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}65$$

Apartado 2

b) ¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?

Se nos pide calcular $P(O \cap \overline{A})$. Ya que $O \cap \overline{A} = O - O \cap A$ tenemos que:

$$P(O \cap \overline{A}) = P(O) - P(O \cap A) = 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}15$$

Problema 5

Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20 % de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es $2/3$ si éste se fabricó por el sistema A y $2/5$ si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender el producto.

De los datos del enunciado sabemos que la probabilidad de usar el sistema de producción A es 20 % luego la probabilidad de usar el sistema de producción B es 80 %. Definimos los siguientes sucesos:

A = Usar el sistema de producción A
B = Usar el sistema de producción B
C = Comprar un producto fabricado por el sistema de producción A
D = Comprar un producto fabricado por el sistema de producción B

Entonces la probabilidad de vender un producto es:
$P = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(D|B) = 0,2 \cdot \frac{2}{3} + 0,8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{34}{75} = 0,4533$

Problema 6

Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de ésta, calcular la probabilidad de que sea blanca.

Para abordar este problema, antes de hacer nada, le daremos nombre a los sucesos que queremos estudiar:

B_i = Sacar bola blanca en la caja i.
N_i = Sacar bola negra en la caja i.

Lo que queremos calcular es la probabilidad de B_1 teniendo en cuenta que añadimos una bola a la urna 1 de la urna 2. Procedemos con los cálculos:

$$P(B_1) = P(B_2) \cdot P(B_1/B_2) + (N_2) \cdot P(B_1/N_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9$$

Problema 7

Se dispone de tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:

U_1: 5B y 5N $\quad$ U_2: 6B y 4N $\quad$ U_3: 7B y 3N.

Se elige una urna al azar y se sacan cuatro bolas sin reemplazamiento.

1. Calcular la probabilidad de que las cuatro sean blancas.
2. Si en las bolas extraídas sólo hay una negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido U_2?

Apartado 1

A = Sacar blanca en la primera urna

B = Sacar blanca en la segunda urna

C = Sacar blanca en la tercera urna

$P(Sacar\ 4\ blancas) = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(C|U_3) =$
$\frac{1}{3}(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}) + \frac{1}{3}(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}) + \frac{1}{3}(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}) = 0{,}0873$

Apartado 2

A_i = Coger una urna i

B = Sacar 4 y que solo una sea negra

$P(A_i) = \frac{1}{3}$

$P(B|A_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84} = 0{,}0595$

$P(B|A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{21} = 0{,}0952$

$P(B|A_3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Para calcular $P(A_2|B)$ usamos la regla de Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_2)} = \frac{\frac{2}{21 \cdot 3}}{\frac{1}{3}(\frac{5}{84} + \frac{2}{21} + \frac{1}{8})} = \frac{16}{47}$$

Problema 8

Ejercicio 8. La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es 2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0'25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

M: enfermo ha mejorado
S: se le ha inyectado suero
Utilizamos la regla de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)*P(A)}{\sum P(B|A)*P(A)}$

$P(\overline{S}) = \frac{2}{3}$, $P(M|S) = 0'5$, $P(\overline{M}|S) = 0'5$, $P(M|\overline{S}) = 0'25$
$P(\overline{S}|\overline{M}) = \frac{P(\overline{S})*P(\overline{M}|\overline{S})}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{2}{3}*0'75}{0'5*\frac{1}{3}+0'75*\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0'75$

Problema 9

N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 blancas y 5 negras. De las $N+1$ urnas se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin reemplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es $1/7$, encontrar N .

A = Elegir la urna N+1
B = Extraer 2 bolas negras sucesivamente sin remplazamiento
Luego tenemos que calcular la probabilidad de A condicionada a B:

$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$

Remplazamos las probabilidades con los datos que tenemos y obtenemos que:

$P(A|B) = \frac{0{,}5\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{N+1}}{N\cdot 0{,}6\cdot\frac{5}{9}\frac{1}{N+1}+0{,}5\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{N+1}}$

Despejando N obtenemos que $N = 4$

Problema 10

Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?

Antes de abordar este ejercicio vamos a nombrar los sucesos que vamos a estudiar y a determinar qué datos nos están dando:

C_1 = elegir una caja con 4 tornillos defectuosos
C_2 = elegir una caja con 6 tornillos defectuosos
C_3 = elegir una caja con 8 tornillos defectuosos
B = sacar un tornillo bueno
D = sacar un tornillo defectuoso
A = sacar 2 tornillos buenos y 1 defectuoso (sin reemplazamiento)

¿Qué datos nos dan?

$$P(C_1) = \frac{1}{6} \quad P(C_2) = \frac{2}{6} \quad P(C_3) = \frac{3}{6}$$

Ahora procedemos a realizar el ejercicio. Para calcular la probabilidad que nos piden usaremos la regla de Bayes de la siguiente forma:

$$P(C_2/A) = \frac{P(A/C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{n=1}^{3} P(A/C_n) \cdot P(C_n)}$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$$P(A/C_1) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{9}$$

$$P(A/C_2) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{3}{8}$$

$$P(A/C_3) = 3 \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$$

Multiplicamos las probabilidades por 3 porque el orden no es importante ya que hay reemplazamiento. Finalmente, aplicamos la regla de Bayes:

$$P(C_2/A) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{27}{67} \approx 0{,}403$$

Problema 11

Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^n,\ n \in \mathbb{N}$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?

Sean A el suceso de sumar las caras de los dados lanzados (supuesto no trucado), obteniéndose una suma igual a 4 y D_n el suceso de lanzar n dados. Se nos pide encontrar $P(D_4|A)$. Basta darse cuenta de que $n \leq 4$ (pues, en caso contrario, ninguna combinación suma exactamente 4) y aplicar la regla de Bayes:

$$P(D_4|A) = \frac{P(A|D_4)P(D_4)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3) + P(A|D_4)P(D_4)}$$

Para hallar cada uno de los sumandos de la expresión anterior, aplicamos la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles):

$$P(A|D_1) = \frac{1}{VR_{6,1}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|D_2) = \frac{3}{VR_{6,2}} = \frac{3}{36}$$

$$P(A|D_3) = \frac{3}{VR_{6,3}} = \frac{3}{216}$$

$$P(A|D_4) = \frac{1}{VR_{6,4}} = \frac{1}{1296}$$

Por otra parte, en virtud de los datos proporcionados por el enunciado, deducimos que:

$$P(D_n) = \frac{1}{2^n}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$P(D_4|A) = 0,00046$$

Esto quiere decir que es muy poco probable que se hayan lanzado 4 dados en el experimento descrito.

Problema 12

Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen $2k$ bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y $2h$ si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Aclaraciones a añadir al enunciado: La urna se considera en un principio vacía y se supone que la moneda está trucada.

Sean N el suceso de sacar una bola negra de la urna resultante del ejercicio y A_x el suceso de obtener tras el lanzamiento de la moneda cara si $x = C$ o cruz si $x = X$. Dado que la moneda está trucada, podemos suponer que $P(A_C) = p$ y $P(A_X) = 1 - p$. Se nos pide determinar $P(N)$. Para ello, aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(N) = {} & P(N|A_C \cap A_C)P(A_C \cap A_C) + P(N|A_C \cap A_X)P(A_C \cap A_X) \\ & + P(N|A_X \cap A_C)P(A_X \cap A_C) + P(N|A_X \cap A_X)P(A_X \cap A_X) \end{aligned} \tag{1}$$

Para hallar cada probabilidad condicionada, aplicamos la regla de Laplace (casos favorables entre casos posibles):

$$\begin{aligned} P(N|A_C \cap A_C) &= \frac{h}{k+h} \\ P(N|A_C \cap A_X) &= \frac{2h}{k+2h} \\ P(N|A_X \cap A_C) &= \frac{h}{2k+h} \\ P(N|A_X \cap A_X) &= \frac{2h}{2k+2h} = \frac{h}{k+h} \end{aligned}$$

Como cada lanzamiento de moneda es independiente, deducimos que $P(A_x \cap A_y) = P(A_x)P(A_y)$. Basta ahora sustituir en la expresión 1 y operar, dando como resultado:

$$P(N) = p^2 \frac{h}{k+h} + p(1-p)(\frac{2h}{k+2h} + \frac{h}{2k+h}) + (1-p)^2 \frac{h}{k+h}$$