Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación de Ejercicios 3

Autores, por orden alfabético:
Shao Jie Hu Chen
Adrián Jaén Fuentes
Aarón Jerónimo Fernández
Noura Lachhab Bouhmadi
Laura Lázaro Soraluce

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Lista de Problemas

Problema 1

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

1. que una persona viaje en metro y no en autobús;
2. que una persona tome al menos dos medios de transporte;
3. que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;
4. que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;
5. que una persona vaya a pie.

Apartado 1

En este apartado debemos calcular la probabilidad de la intersección entre M y $\overline{A}$:

$$P(M \cap \overline{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$$

Apartado 2

Aquí debemos considerar todas las formas posibles de tomar dos medios de transporte. Calculamos:

$$P((A \cap M) \cup (A \cap C) \cup (M \cup C) \cup (A \cup M \cup C)) =$$
$$P(A \cap M) + P(A \cap C) + P(M \cup C) - 2P(A \cup M \cup C) = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}06 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}19$$

Apartado 3

Ahora debemos calcular la probabilidad de la unión entre las intersecciones de $\overline{A}$ con M y C:

$$P((M \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})) = P(M \cap \overline{A}) + P(C \cap \overline{A}) - P(C \cap M \cap \overline{A}) =$$
$$P(M \cap \overline{A}) + P(C) - P(C \cap A) - P(M \cap C) + P(C \cap M \cap A) = 0{,}2 + 0{,}15 - 0{,}06 - 0{,}05 + 0{,}01 = 0{,}25$$

Apartado 4

En este apartado debemos calcular la unión entre M y la intersección de A y C:

$$P(M \cup (A \cap C)) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0{,}3 + 0{,}06 - 0{,}01 = 0{,}35$$

Apartado 5

En este último apartado, para calcular lo que nos piden debemos considerar que no hay otro transporte además de los dados en el ejercicio. Si hubiera otro medio, como barco o patinete, no tendríamos los datos suficientes para hacer los cálculos. Hecha esta suposición, calculamos la probabilidad que nos piden:

$$P(\overline{A} \cap \overline{M} \cap \overline{C}) = \overline{P(A \cup M \cup C)} = 1 - P(A \cup M \cup C) =$$
$$P(A) + P(M) + P(C) - P(A \cap M) - P(A \cap C) - P(M \cap C) + P(A \cap M \cap C) =$$
$$1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}06 - 0{,}05 + 0{,}01) = 0{,}55$$

Problema 2

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$, $P(C) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. sólo ocurre A,
2. ocurren los tres sucesos,
3. ocurren A y B pero no C,
4. por lo menos dos ocurren,
5. ocurren dos y no más,
6. no ocurren más de dos,
7. ocurre por lo menos uno,
8. ocurre sólo uno,
9. no ocurre ninguno.

Apartado 1

Debemos calcular la probabilidad de que ocurra A y no ocurra ni B ni C. Para hacer los cálculos tenemos en cuenta que $B \cap C = \emptyset$:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A - B - C) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$$

Apartado 2

Como nos dicen que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ es claro que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

Apartado 3

Como en el apartado anterior, tenemos en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y entonces:

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) = 0{,}1$$

Apartado 4

Ahora debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o más, teniendo de nuevo en cuenta que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$:

$$P((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0{,}1$$

Apartado 5

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 sucesos:

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) = 0{,}1$$

Apartado 6

Aquí debemos considerar todos los casos en los que ocurren 2 o menos sucesos:

$$P(A \cup B \cup C \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \overline{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

Apartado 7

En este apartado solo tenemos que calcular la unión entre A, B y C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8$$

Apartado 8

Ahora debemos considerar los casos en los que solo ocurre A o B o C:

$$P((A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)) = P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(B)-P(A\cap B)+P(C) = 0{,}3+0{,}2-0{,}1+0{,}3 = 0{,}7$$

Apartado 9

Para este apartado podemos tomar la probabilidad complementaria del suceso calculado en el apartado g:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \overline{P(A \cup B \cup C)} = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Problema 3

Ejercicio 3. Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.
Sabemos que no intervienen todos los elementos, porque sólo se sacan dos bolas de las cinco que hay en la urna; y sí influye el orden, pues no es lo mismo sacar primero una blanca y luego otra roja, que al contrario. Por tanto, se trata de una variación sin repetición, ya que no se vuelven a meter las bolas sacadas.
$V_5^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{120}{6} = 20$ elementos.

Ri: sale la bola roja i
Bi: sale la bola blanca i
ω ={(R1,R2), (R1,R3), (R1,B1), (R1,B2), (R2,R1), (R2,R3), (R2,B1), (R2,B2), (R3,R1), (R3,R2), (R3,B1), (R3,B2), (B1,R1), (B1,R2), (B1,R3), (B1,B2), (B2,R1), (B2,R2), (B2,R3), (B2,B1)}

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: ”la primera bola es roja”, ”la segunda bola es blancaz calcular la probabilidad de cada uno de ellos.
A = La primera bola es roja: {(R1,R2), (R1,R3), (R1,B1), (R1,B2), (R2,R1), (R2,R3), (R2,B1), (R2,B2),

(R3,R1), (R3,R2), (R3,B1), (R3,B2)}
$P(A) = \frac{12}{20} = 0'6$
B = La segunda bola es blanca: {(R1,B1), (R1,B2), (R2,B1), (R2,B2), (R3,B1), (R3,B2), (B1,B2), (B2,B1)}
$P(B) = \frac{8}{20} = 0,4$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'3 = 0'7$

Problema 4

Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de color distinto?

A = .$^{\text{Ex}}$traer bola blanca"
B = .$^{\text{Ex}}$traer bola negra"
C = .$^{\text{Ex}}$traer bolas de distinto color"

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B) =$
$= P(A) + P(B) + P(A - B) + P(B - A) =$
$= P(A) + P(B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(B \cap A) =$
$= P(A) \cdot P(B) + P(B) \cdot P(A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$

Problema 5

Ejercicio 5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) dos bolas rojas
A1 = primera roja, A2 = segunda roja
$P(A1 \cap A2) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = 0'375 * 0'286 = 0'107$

b) dos bolas blancas
B1 = primera blanca, B2 = segunda blanca
$P(B1 \cap B2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = 0'625 * 0'571 = 0'357$

c) una blanca y otra roja
$P((A1 \cap B2) \cup (A2 \cap B1)) = \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = 0'536$

Problema 6

En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?
2. ¿Cuantos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que 4/5?

Apartado 1

Sea A el suceso de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes. Para determinarlo, procedemos primero a calcular $P(\bar{A})$ mediante la regla de Laplace en cada boleto de lotería comprado:

$$P(\bar{A}) = \frac{98}{100}\frac{97}{99}\frac{96}{98}\cdots\frac{98-12+1}{100-12+1} = 0,77333$$

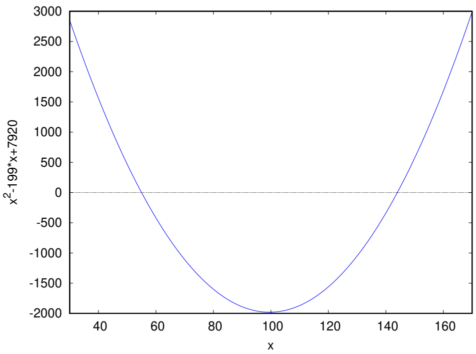
Por tanto, deducimos que:

$$P(A) = 0,22667$$

Apartado 2

Para calcular el número de boletos de lotería que se ha de adquirir para que se alcance dicha probabilidad, sea A_n el suceso de ganar al menos un premio tras adquirir n billetes de lotería. Queremos hallar $n \in \mathbb{N}$ de forma que se verifique $P(A_n) = \frac{4}{5} > 0,8$, por lo que se ha de cumplir $P(\bar{A}_n) < 0,2$. Razonamos nuevamente como el apartado anterior:

$$P(\bar{A}_n) = \frac{98}{100}\frac{97}{99}\frac{96}{98}\cdots\frac{98-n+1}{100-n+1} = \frac{(99-n+1)(98-n+1)}{10099} < 0,2$$



De la desigualdad de la derecha obtenemos que se ha de cumplir $n^2 - 199n + 7920 < 0$. Dado que la función $f(x) = x^2 - 199x + 7920$ corta al eje OX en los puntos $x = 55$ y $x = 144$ y es cóncava hacia arriba, deducimos que la mínima cantidad de boletos que ha de adquirir una persona para tener una probabilidad estrictamente mayor que 0,8 son **56 boletos**.

Problema 7

A := 1º es cuadrado perfecto

B := 2º es cuadrado perfecto

C := 3º es cuadrado perfecto

D := Ninguno es perfecto

Apartado 1

Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

Buscamos $P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$

Hay 10 cuadrados perfectos entre los 100 primeros números naturales, luego

$$P(D) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{117480}{161700} = 0{,}7265$$

Luego la probabilidad de que entre 3 números que escojamos entre los 100 primeros naturales no haya ningún cuadrado perfecto es de:

$$P(D) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = \frac{117480}{161700} = 0{,}7265$$

Apartado 2

Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.
Se nos pide $P(\overline{D})$, que es simplemente

$$1 - P(D) = 0{,}2735$$

Apartado 3

Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

- P(1 perfecto) =
  P(1º perfecto ∩ 2º no perfecto ∩ 3º no perfecto) +
  P(1º no perfecto ∩ 2º perfecto ∩ 3º no perfecto) +
  P(1º no perfecto ∩ 2º no perfecto ∩ 3º perfecto);
  $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$
  $P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$
  $\frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} = 0{,}2477$

- P(3 perfectos) = P(1º perfecto ∩ 2º perfecto ∩ 3º perfecto) =
  $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{2}{2695} = 0{,}0007421$

- P(2 perfectos); Se podría hacer de forma similar que para 1 perfecto pero como sabemos que los conjuntos son disjuntos (no se pueden dar a la vez dos a dos) y que la probabilidad de que se haya al menos un cuadrado es $P(\overline{D}) =$
  $P(A \cup B \cup C) = 0{,}2735$, entonces tenemos que $P(\overline{D}) = P(A) + P(B) + P(C)$
  $P(B) = P(\overline{D}) - P(A) - P(C) = 0{,}02505$

Problema 8

En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de un colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe formar un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

1. ¿Entre cuántos equipos distintos habrá de elegir el entrenador si los 10 corredores son de igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes)
2. Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera sea seleccionado.

Apartado 1

Siguiendo el esquema de combinatoria llegamos a que :

⋆No intervienen todos los corredores ya que intervienen solo 4 atletas

⋆ Importa el orden

⋆ No se pueden repetir personas

Entonces nos encontramos ante una variación sin repeticiones, entonces:

$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
$V_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$ equipos posibles

Apartado 2

La probabilidad de que un alumno sea seleccionado es:

$P = \frac{4}{10} = 0,4$

Problema 9

Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

Sean A_n el suceso de localizar exactamente n productos defectuosos en el control de calidad y A el suceso de pasar dicho control de calidad. Se verifica que $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$ (por ser A la unión de los A_n y ser cada par de sucesos independientes dos a dos).

Aplicando la regla de Laplace, tenemos que:

$$P(A_0) = \frac{\binom{290}{60}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 0,2684$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 0,3071$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{10}{2}\binom{290}{58}}{\binom{300}{60}} = 0,2039$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{10}{3}\binom{290}{57}}{\binom{300}{60}} = 0,0869$$

$$P(A_5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{290}{56}}{\binom{300}{60}} = 0,1033$$

Deducimos que:

$$P(A) = 0,9944$$

Problema 10

Pongamos que tenemos K sobres, y pongamos que el suceso A_i ocurre si el sobre i está en su sitio correspondiente.

Usaré el principio de inclusión-exclusión, para ello, calcularé $P(A_i), P(A_i \cap A_j)\dots$

Primero, tenemos que el número de casos posibles son permutaciones sin repetición de k elementos: **k!**

Para A_i los casos favorables serían las permutaciones de k-1 elementos porque hemos fijado el elemento i: **(k-1)!**

Por tanto $P(A_i) = \dfrac{(k-1)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i de k formas.

Para $A_i \cap A_j$, los casos favorables son las permutaciones de k-2 elementos ya que hemos fijado i y j: **(k-2)!**

Por tanto $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{(k-2)!}{k!}$

Además, podemos elegir A_i y A_j de $\binom{k}{2}$ formas, es decir $\dfrac{k!}{2!(k-2)!}$

Y así sucesivamente.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \\
&= \binom{k}{1}\frac{(k-1)!}{k!} - \binom{k}{2}\frac{(k-2)!}{k!} + \dots (-1)^{k-1}\binom{k}{k}\frac{(k-1)!}{k!} \\
&= \frac{k!(k-1)!}{(k-1)!k!} - \frac{k!(k-2)!}{2!(k-2)!k!} + \frac{k!(k-3)!}{3!(k-3)!k!} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned} \tag{1}$$

Si evaluamos el polinomio de Taylor de grado k de la función exponencial en -1 obtenemos:

$$P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + P_{k,0}^{e^x}(-1) = 1$$

Por tanto,

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 1 - P_{k,0}^{e^x}(-1)$$

Y aproximando, o a medida que k se acerca a infinito:

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Para el caso de 3 cartas que es lo que realmente nos pide el ejercicio tenemos que

$$P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) = 1 - P_{3,0}^{e^x}(-1) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$