Relaciones de Ejercicios Cálculo II

Adrián Jaén Fuentes

March 8, 2021

Contents

1 Relación 1

Ejercicio 1

Estudiar la derivabilidad de la función $f : A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{2x}{1 + |x|}$

d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = \sqrt{x^x}$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $f(0) = 0$

Solución

a) Empecemos estudiando la continuidad de f. Para que la función sea continua en el dominio el argumento ha de ser mayor o igual a 0:

$$1 - x^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \leq 1 \leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Por tanto f es continua en A. Comprobemos ahora su derivabilidad. Para ello obtengamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

Podemos ver fácilmente que el dominio de esta función será $Dom f'(x) = Dom(\sqrt{1 - x^2}) \backslash \{0\}$

$$1 - x^2 > 0 \leftrightarrow x^2 < 1 \leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Por tanto la función $f(x)$ es derivable en $(-1, 1)$

b) Veamos la continuidad de f. Dividamos el valor absoluto.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & x < 0 \\ \\ \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Como la raíz cúbica es continua en todo $\mathbb{R}$ y $f_-(0) = f_+(0) = f(0) = 0$, f es continua en todo $\mathbb{R}$. Veamos ahora si es derivable. Tomemos su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos ver que existe la derivada en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sin embargo, $f'(x)$ no está definida en x = 0 por lo que f no es derivable en su dominio.

c

d

e hola xd

f

g

h