Método Simplex
Para la solución de problemas lineales

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido

- Notación
  - Algebraica
  - Matricial
- Solución
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- Método Gráfico
  - Para problemas pequeños (2 var)
- Método de B&B
  - Para problemas enteros
- Métodos Simplex
  - Estructura de una iteración
  - Complejidad matemática
  - Ejemplos en forma tabular

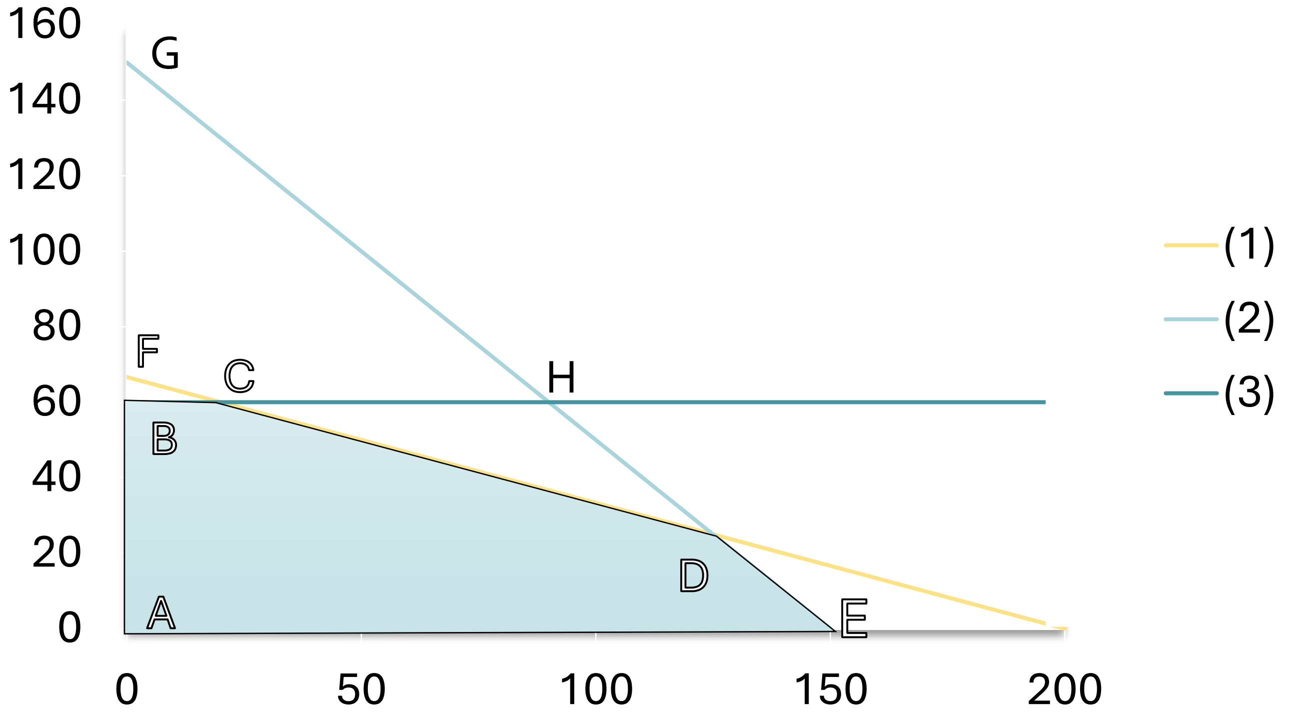
Una iteración Simplex (con tableros) Para problemas de maximización

- Las columnas de variables básicas deben transformarse en una submatriz identidad, incluida la fila de ceros (fila z).
- Los valores de las variables básicas en la primera columna pueden leerse en la última columna (término independiente).
- El cambio de la BFS ocurre cuando:
  - Una variable no básica (columna k-ésima) entra a la base.
    ¿Cuál? La que tenga el valor más negativo. **Columna pivote**
  - Una variable básica (fila r-ésima) sale de la base. **Fila pivote**
    ¿Cuál? La que tenga la mínima razón entre el lado derecho y la columna pivote *

Nota*: El cociente sólo se considera para valores positivos de la columna pivote.

Ejemplo 1

$$
\begin{aligned}
&\max Z = x1 + 2x2 \\
&st \\
&x1 + 3x2 \leq 200 \quad (1) \\
&2x1 + 2x2 \leq 300 \quad (2) \\
&x2 \leq 60 \quad (3) \\
&x1 \geq 0 \quad (4) \\
&x2 \geq 0 \quad (5)
\end{aligned}
$$



First Simplex Tableau

- First BFS:
  - If feasible, original variables equal to zero.
  - x1= x2= 0, then basic variables: s1, s2, s3

Basic variables	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD
Z	1	-1	-2	0	0	0	0
S1	0	1	3	1	0	0	200
S2	0	2	2	0	1	0	300
S3	0	0	1	0	0	1	60

First Simplex Tableau

- First BFS:
  - If feasible, original variables equal to zero.
  - x1= x2= 0, then basic variables: s1, s2, s3
- Entering variable: X2
- Leaving variable: S3

Basic variables	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD	
Z	1	-1	-2	0	0	0	0	
S1	0	1	3	1	0	0	200	200/3
S2	0	2	2	0	1	0	300	300/2
S3	0	0	1 <	0	0	1	60	60/1

Pivot row

Pivot

Pivot column

Minimun!

Second Simplex Tableau

- Nonbasic variables: x1, s3
- Entering variable: X1
- Leaving variable: S1

Basic variables	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD
Z	1	-1	0	0	0	2	120
S1	0	1	0	1	0	-3	20
S2	0	2	0	0	1	-2	180
X2	0	0	**1**	0	0	1	60

20/1
180/2

Mínimo!

Third Simplex Tableau

- Nonbasic variables: s1, s3
- Entering variable: s3
- Leaving variable : s2

Basic variables	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD	
Z	1	0	0	1	0	-1	140	
X1	0	1	0	1	0	-3	20	
S2	0	0	0	-2	1	4	140	140/4
X2	0	0	**1**	0	0	1	60	

Min!

Fourth Simplex Tableau: The optimal one

- Row zero >=0

Basic variables	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD
Z	1	0	0	1/2	1/4	0	175
X1	0	1	0	-1/2	3/4	0	125
S3	0	0	0	-1/2	1/4	1	35
X2	0	0	**1**	1/2	-1/4	0	25

Optimum!

Optimal solution

X*=

X1=125

X2=25

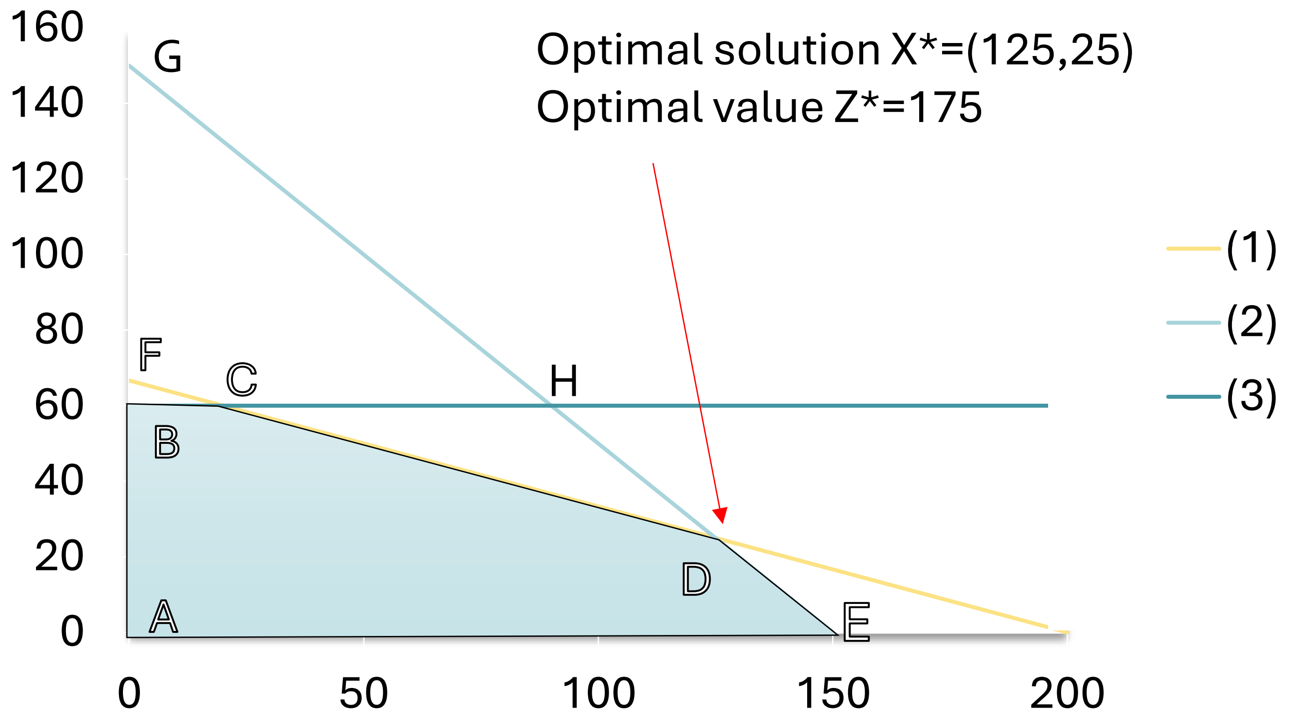
S1=0

S2=0

Non basic variables

S3=35

Z*=175



Ejemplo 2: Método Gráfico

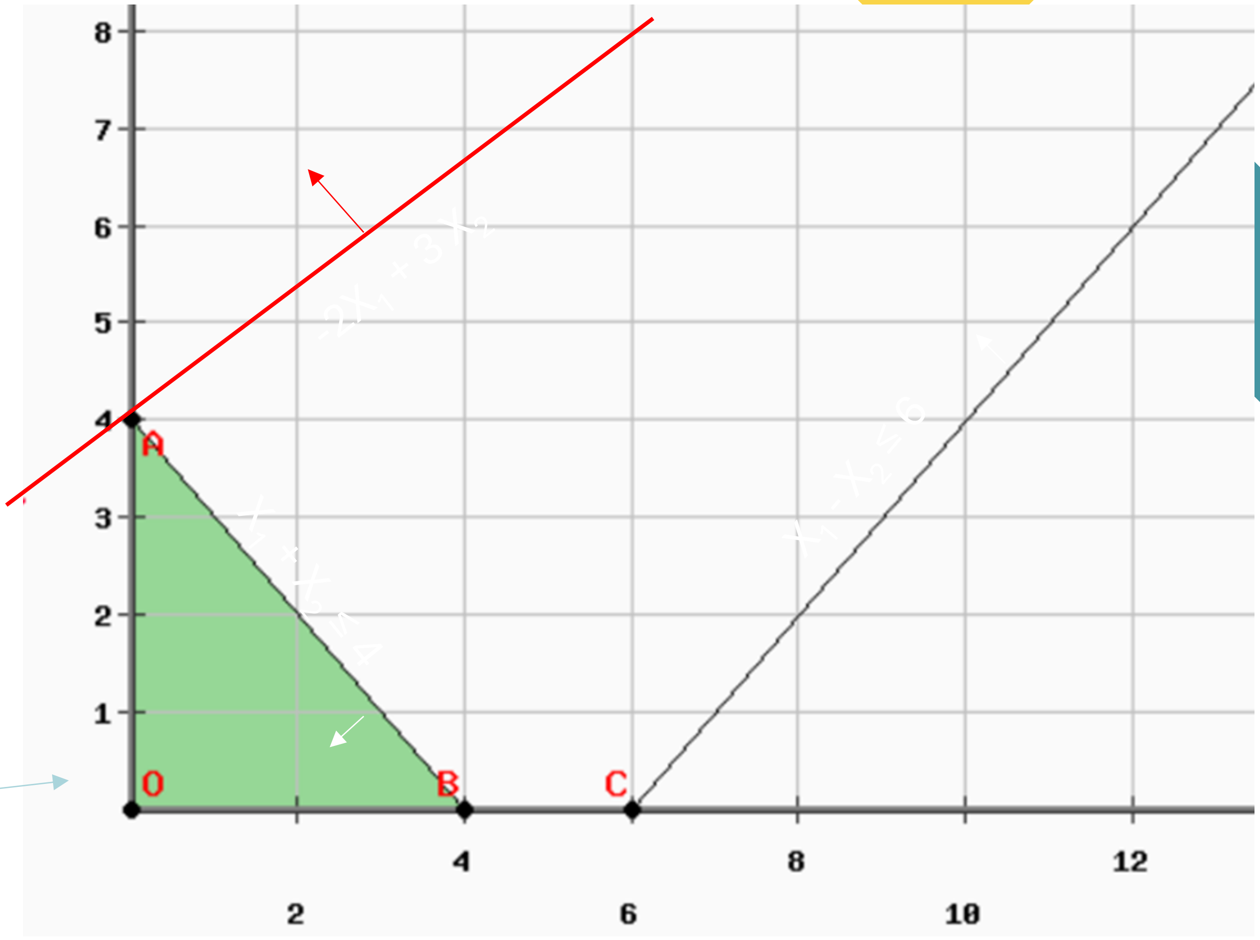
Maximizar $z = -2x_1 + 3x_2$

Sujeto a: $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

El método simplex siempre inicia en el origen (0, 0) y va recorriendo los puntos extremos adyacentes hasta encontrar la solución optima.



Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	4	12
B	4	0	-8

Tablero Inicial Simplex

Maximizar $z = -2x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + h_1 = 4$$
$$x_1 - x_2 + h_2 = 6$$
$$x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0$$

Base	C_j	x_1	x_2	h_1	h_2	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
		-2	3	0	0		
h_1	0	1	1	1	0	4	
h_2	0	1	-1	0	1	6	
	z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

Coeficientes de la función objetivo

Recursos

Coeficientes Tecnológicos

Variables Básicas (V. B.) = variables con valor diferente de cero en la solución actual

Coeficientes de la F. O. de las V. B.

Se obtiene de la suma de las multiplicaciones de los coeficientes tecnológicos por los coeficientes de la F. O. de las V. B.

Ejemplo. 0 x 1 + 0 x 1 =0

Costo reducido: es el valor que aumenta o disminuye en la F. O. cuando esta variable entra como V. B.

Valor de la función objetivo en la solución actual

En esta iteración x_1=0, x_2=0, h_1=4, h_2=6

Tablero 0

Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
h_1	0	1	1	1	0	4	4/1 = 4
h_2	0	1	-1	0	1	6	-
	z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

Paso 1. Seleccionar la columna j con el costo reducido ($C_j - z_j$) mas alto

Paso 2. Seleccionar la fila i con el coeficiente $\frac{b_i}{+a_{ij}}$ mas bajo. Solo para valores de a_{ij} positivos. Se identifica el elemento pivote.

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1	h_1	0	1	1	1	0	4	4/1 = 4
R2	h_2	0	1	-1	0	1	6	-
		z_j	0	0	0	0	0	
		$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1*	x_2	3	1	1	1	0	4	
	h_2	0						
		z_j						
		$C_j - z_j$						

El **elemento Pivote debe ser igual a 1** en el Tablero 1, dado que ya es 1 se copia el reglón igual. En caso de que fuera otro valor se divide todo el renglón entre el valor del elemento pivote para que sea igual a 1.

Rp* = Rp/elemento pivote

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1	h_1	0	1	1	1	0	4	4/1 = 4
R2	h_2	0	1	$\boxed{-1}$	0	1	6	-
		z_j	0	0	0	0	0	
		$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1*	x_2	3	1	1	1	0	4	
R2*	h_2	0	2	0	1	1	10	
		z_j						
		$C_j - z_j$						

Para hacer 0 el elemento con valor actual de -1. En este caso: R2* = R2 + 1xR1*

Siempre se utiliza el renglón Ri* del elemento pivote en el nuevo tablero para hacer las operaciones.

Rk* = Rk + N x Rp* → 0

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1	h_1	0	1	1	1	0	4	4/1 = 4
R2	h_2	0	1	-1	0	1	6	-
		z_j	0	0	0	0	0	
		$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1*	x_2	3	1	1	1	0	4	
R2*	h_2	0	2	0	1	1	10	
		z_j	3	3	3	0	12	
		$C_j - z_j$						

Para z_j calcular de cada columna se multiplican los coeficientes tecnológicos por los C_j de las V. B. y se suman Ejem. Para $Z_1 = 3 \times 1 + 0 \times 2 = 3$

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1	h_1	0	1	1	1	0	4	4/1 = 4
R2	h_2	0	1	-1	0	1	6	-
		z_j	0	0	0	0	0	
		$C_j - z_j$	-2	3	0	0		

	Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
R1*	x_2	3	1	1	1	0	4	
R2*	h_2	0	2	0	1	1	10	
		z_j	3	3	3	0	12	
		$C_j - z_j$	-5	0	-3	0		

Para calcular $C_j - z_j$ se resta la primera fila C_j menos la fila z_j.

Rodolgo Mendoza

Base	C_j	x_1 -2	x_2 3	h_1 0	h_2 0	b_i	$\frac{b_i}{+a_{ij}}$
x_2	3	1	1	1	0	4	
h_2	0	2	0	1	1	10	
	z_j	3	3	3	0	12	
	$C_j - z_j$	-5	0	-3	0		

La solución optima es:
$x_1=0$, $x_2=4$, $h_1=0$, $h_2=10$

El valor de la función objetivo es:
Z=12

Dado que todos los valores son menores o iguales que cero, se ha encontrado una solución optima al problema.

Ejemplo Simplex: Dakota

Victor Villegas

- La Mueblería Dakota fabrica escritorios, mesas y sillas.
  - La fabricación de cada tipo de mueble requiere madera y dos tipos de mano de obra calificada: acabado y carpintería.
  - La cantidad de cada recurso necesario para hacer que cada tipo de muebles se da en la tabla siguiente.

Recurso	Escritorio	Mesa	Silla
Madera	8 m de tabla	6 m de tabla	1 m de tabla
M.O. Acabado	4 horas	2 horas	1.5 horas
M.O. Carpintería	2 horas	1.5 horas	0.5 horas

  - Actualmente se dispone de 48 m de tabla, 20 horas de acabado, y 8 horas de carpintería.
  - Un escritorio se vende por $ 60, una mesa a $ 30, y una silla a $ 20.
  - Dakota cree que la demanda de escritorios y las sillas es ilimitada, pero sólo se pueden vender 5 mesas.
  - Dado que los recursos disponibles ya han sido comprados, Dakota quiere maximizar los ingresos totales.

Ejemplo Simplex: Dakota

Victor Villegas

- **Variables de decisión**

  X_1= Número de escritorios producidos

  X_2= Número de mesas producidas

  X_3= Número de sillas producidas

- **Función objetivo**

  Maximizar $Z = 60\,X_1 + 30\,X_2 + 20\,X_3$

Sujeto a:

$8\,X_1 + 6\,X_2 + X_3 \leq$ 48 metros de tabla disponible

$4\,X_1 + 2\,X_2 + 1.5\,X_3 \leq$ 20 horas de m.o. de acabado

$2\,X_1 + 1.5\,X_2 + 0.5\,X_3 \leq$ 8 horas de m.o. de carpintería

$X_2 \leq$ 5 mesas como demanda máxima

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Ejemplo Dakota – Paso 1, Iteración 0

Victor Villegas

- Comenzar el algoritmo simplex mediante la conversión de las restricciones del PL a la forma estándar.
- A continuación, convertir la función objetivo del PL al formato de renglón 0.

$$Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3$$

- Añadir las variables de holgura s_1,s_2,s_3,s_4, a las cuatro restricciones, respectivamente.
- Nombrar los renglones de las restricciones renglón 1, renglón 2, renglón 3, y renglón 4 respectivamente
- Añadir las restricciones de signo $s_i \geq 0$.

Ejemplo Dakota – Paso 1, Iteración 0

Victor Villegas

- Poner los renglones 1-4 junto con el renglón 0 y las restricciones de signo resultan en estas ecuaciones y variables básicas en el **formato canónico**.

- El formato canónico es aquel en que **cada ecuación** tiene **una variable** con **coeficiente 1** en esa ecuación y **coeficiente 0 en el resto de las ecuaciones**.

- Estas variables con coeficiente 1 en un solo renglón son las **variables básicas**.

Ejemplo Dakota – Paso 1, Iteración 0

Victor Villegas

- Poner los renglones 1-4 junto con el renglón 0 y las restricciones de signo resultan en estas ecuaciones y variables básicas en el **formato canónico**.

	Formato Canónico 0		Variables Básicas
Renglón 0	$Z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3$	$= 0$	$Z = 0$
Renglón 1	$8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + s_1$	$= 48$	$s_1 = 48$
Renglón 2	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2$	$= 20$	$s_2 = 20$
Renglón 3	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3$	$= 8$	$s_3 = 8$
Renglón 4	$1x_2 + s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

Ejemplo Dakota – Paso 2, Iteración 0

Victor Villegas

- Para llevar a cabo el algoritmo simplex, necesitamos una variable básica para el renglón 0.
  - Dado que Z aparece en el renglón 0 con un coeficiente de 1, y que Z no aparece en ningún otro renglón, se usa como la **variable básica**. Esto permite cumplir con el formato canónico.
  - Con esta convención, la solución básica factible para nuestra forma canónica inicial es
    - $BV = \{Z, s_1, s_2, s_3, s_4\}$
    - $NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$.
  - Para esta sbf inicial: $Z = 0, s_1 = 48, s_2 = 20, s_3 = 8, s_4 = 5$, y $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
  - **Nota:** Una variable de holgura puede ser utilizado como una variable básica si el lado derecho de la restricción es no-negativo.

Ejemplo Dakota – Paso 3, Iteración 0

Victor Villegas

- Una vez que obtenida una SBF, tenemos que determinar si es óptima.
- Para ello, hay que determinar si el valor de Z puede aumentar mediante la introducción de una variable no-básica al conjunto de variables básicas.
  - Esto significa cambiar el valor actual de cero de una variable no-básica mientras se mantiene todas las otras variables no-básicas en sus valores actuales de cero.
  - También implica que una de las variables básicas actuales tomará el valor de 0 y se convertirá en una variable no-básica
- Resolviendo para *Z* en el renglón 0 se obtiene:

$$Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

  - Note que las variables en el renglón 0 son las variables no-básicas (excepto por Z).

Ejemplo Dakota – Paso 3, Iteración 0

Victor Villegas

- Resolviendo para Z en el renglón 0 se obtiene:

$$Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

- Podemos utilizar esta ecuación para cada variable no-básica y determinar si su inclusión aumentará Z.
- Las 3 variables no-básicas en la ecuación tienen signo positivo, de modo que cualquiera de las 3 puede ayudar a incrementar el valor de Z.
- Por lo tanto la SBF aún no es óptima.

- Esto significa que comienza una nueva **iteración**

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 1

Victor Villegas

- Ahora es necesario identificar que variable debe entrar como variable-básica y cual debe dejar de serlo.

$$Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

  - En esta ecuación se puede ver que el aumento de cualquiera de las variables no-básicas causará un incremento en el valor de Z.
  - Sin embargo, en este ejemplo, introducir $\boldsymbol{x_1}$ produce el **mayor incremento de Z**. Si x_1 deja de ser cero, entonces tendrá que convertirse en una variable básica.
  - Por esta razón, x_1 se llama **variable entrante**. Observe que x_1 tiene **el coeficiente más negativo en el renglón 0**.

$$Z \ \mathbf{- 60}x_1 - 30x_2 - 20x_3$$

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 1

Victor Villegas

- Luego de seleccionar la variable no-básica con el coeficiente más negativo en el renglón 0 como variable entrante el objetivo es hacer x_1 lo más grande posible.
  - A medida que el valor de x_1 aumenta, las variables básicas actuales cambiarán de valor, por lo tanto, el aumento de x_1 puede llegar a ocasionar que una variable básica tome un valor negativo.
  - Esto significa que es necesario identificar el valor máximo de x_1 que mantenga todas las variables básicas con valores no-negativos.
  - En este ejemplo el mayor valor que x_1 puede tomar es $\min \{6, 5, 4\} = 4$.

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 1

Victor Villegas

- En este ejemplo el mayor valor que x_1 puede tomar es min {6, 5, 4} = 4.
- El motivo es el siguiente:
  - Considerando que x_2 y x_3 son no-básicas y por lo tanto igual a 0.

    Renglón 1

    $8x_1 + s_1 = 48 \rightarrow s_1 = 48 - 8x_1$, si $x_1 > 6$ entonces s_1 es negativo

    Renglón 2

    $4x_1 + s_2 = 20 \rightarrow s_2 = 20 - 4x_1$, si $x_1 > 5$ entonces s_2 es negativo

    Renglón 3

    $2x_1 + s_3 = 8 \rightarrow s_3 = 8 - 2x_1$, si $x_1 > 4$ entonces s_3 es negativo

  - Por lo tanto 4 es el mayor valor que x_1 puede tomar sin que las variables básicas tengan valores negativos.

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 1

Victor Villegas

- Debido a lo anterior, se utiliza esta regla para determinar qué tan grande puede ser la variable de entrada.
  - Al introducir una variable en la base, calcular la razón

$$\frac{\text{Lado Derecho del renglón}}{\text{Coeficiente de la variable de entrada en el renglón}}$$

    para cada restricción en la que la variable entrante tiene un **coeficiente positivo**.

  - Se **selecciona la restricción (renglón)** cuyo resultado de esta operación sea el **menor**.
  - En caso de haber un empate entre renglones se puede seleccionar el que se quiera **arbitrariamente**.

Ejemplo Dakota – Paso 5, Iteración 1

Victor Villegas

- Para hacer que x_1 sea una variable básica en la fila 3, utilizamos las operaciones elementales de renglón (Gauss-Jordan) de manera que x_1 tenga un coeficiente de 1 en la fila 3, y 0 en todas las otras filas.
  - Este procedimiento se llama **pivoteo**, y el renglón 3 se llama **renglón pivote**.
  - El término del renglón pivote que involucra la variable de entrada básica se llama **término pivote**.
  - El resultado final es que $\boldsymbol{x_1}$ **reemplaza a** $\boldsymbol{s_3}$ **como la variable básica en el renglón 3**.

Ejemplo Dakota – Paso 5, Iteración 1

Victor Villegas

- El resultado es

	Formato Canónico 1	Variables Básicas
Renglón 0	$Z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$	$Z = 240$
Renglón 1	$-1x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
Renglón 2	$-1x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
Renglón 3	$1x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$
Renglón 4	$1x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

- Ahora se vuelve al paso 3 para determinar si la solución es óptima.
- El procedimiento utilizado para ir de un SBF a otra SBF adyacentes se denomina **iteración** del algoritmo simplex.

Ejemplo Dakota – Paso 3, Iteración 1

Victor Villegas

- Determinar si la SBF actual es óptima.
  - Se reordena el renglón 0 de la forma canónica 1, y la solución para Z resulta en

$$Z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3$$

  - La **SBF actual no es óptima** ya que un incremento en el valor de x_3 haría crecer el valor de Z.
  - Hacer x_2 ó s_3 variables básicas, es decir > 0, haría que el valor de Z disminuyera.
- Una vez que se ha concluido que el valor de Z aún no es óptimo es necesario iniciar una **nueva iteración**

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 2

Victor Villegas

- Recuerde que la regla para determinar la variable entrante es seleccionar la que tenga el coeficiente en el renglón 0 con el valor más negativo.
- Dado que x_3 es la *única* variable con un coeficiente negativo, x_3 deberá incluirse como variable básica.

Ejemplo Dakota – Paso 4, Iteración 2

Victor Villegas

- Una vez que se ha determinado que x_3 es la variable entrante es necesario identificar el renglón y término pivote.
  - Se lleva a cabo la prueba de razón con x_3 como variable entrante se obtienen los siguientes resultados:
    - Renglón 1, $s_1 = 16 + x_3$, $s_1 \geq 0$ para todos los valores de x_3
    - Renglón 2, $s_2 = 4 - 0.5x_3$, $s_2 \geq 0$, sólo si $x_3 \leq 4 / 0.5 = 8$
    - Renglón 3, $x_1 = 4 - 0.25x_3$, $x_1 \geq 0$, sólo si $x_3 \leq 4 / 0.25 = 16$
    - Renglón 4, $s_4 = 5$, $s_4 \geq 0$ para todos los valores de x_3
  - Esto significa que para que todas las variables básicas permanezcan no-negativas el valor más alto posible de x_1 es min $\{8,16\} = 8$.
  - Así, el **renglón 2** se convierte en el **renglón pivote** y **$0.5x_3$** en el **término pivote** y **s_2** se convierte en **variable no-básica** con valor 0.

Ejemplo Dakota – Paso 5, Iteración 2

Victor Villegas

- El resultado es

Formato Canónico 2

		Variables Básicas
Renglón 0	$Z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$Z = 280$
Renglón 1	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
Renglón 2	$-2x_2 + 1x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
Renglón 3	$1x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
Renglón 4	$1x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

- De la forma canónica 2
  - **VB= {Z, s_1, x_3, x_1, s_4}**
  - **VNB = {x_2, s_2, s_3 }** (estas son las variables que quedan en la FO)
  - La sfb queda: $Z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $s_4 = 5$, $x_2 = s_2 = s_3 = 0$

Ejemplo Dakota – Paso 3, Iteración 2

Victor Villegas

- Ahora se vuelve a evaluar si la SBF es óptima
  - Despejando Z en la fila 0 obtenemos

$$Z = 280 - 5x_2 - 10s_2 - 10s_3$$

  - Se puede ver que incrementar x_2,s_2 ó s_3 (Mientras se mantiene las otras VNBs como cero) no hará que el valor de Z aumente.

- La solución al final de la iteración 2 es por lo tanto óptima. La siguiente regla se puede aplicar para determinar si SBF una forma canónica es óptima.