

Solución de un Problema de Programación Entera

Método de Branch & Bound (Ramificación y acotamiento)

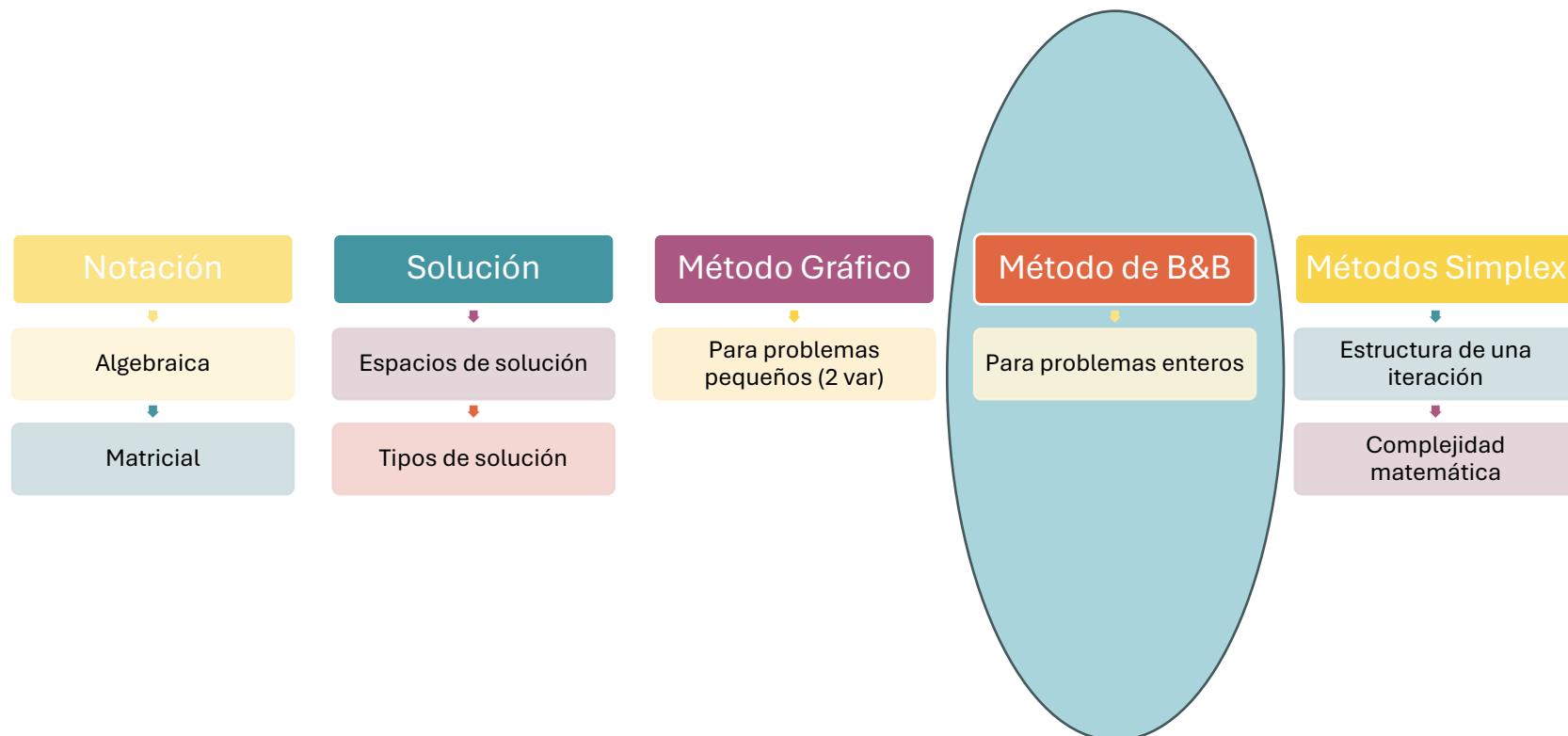
Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido



Método Gráfico / Enumeración Exhaustiva

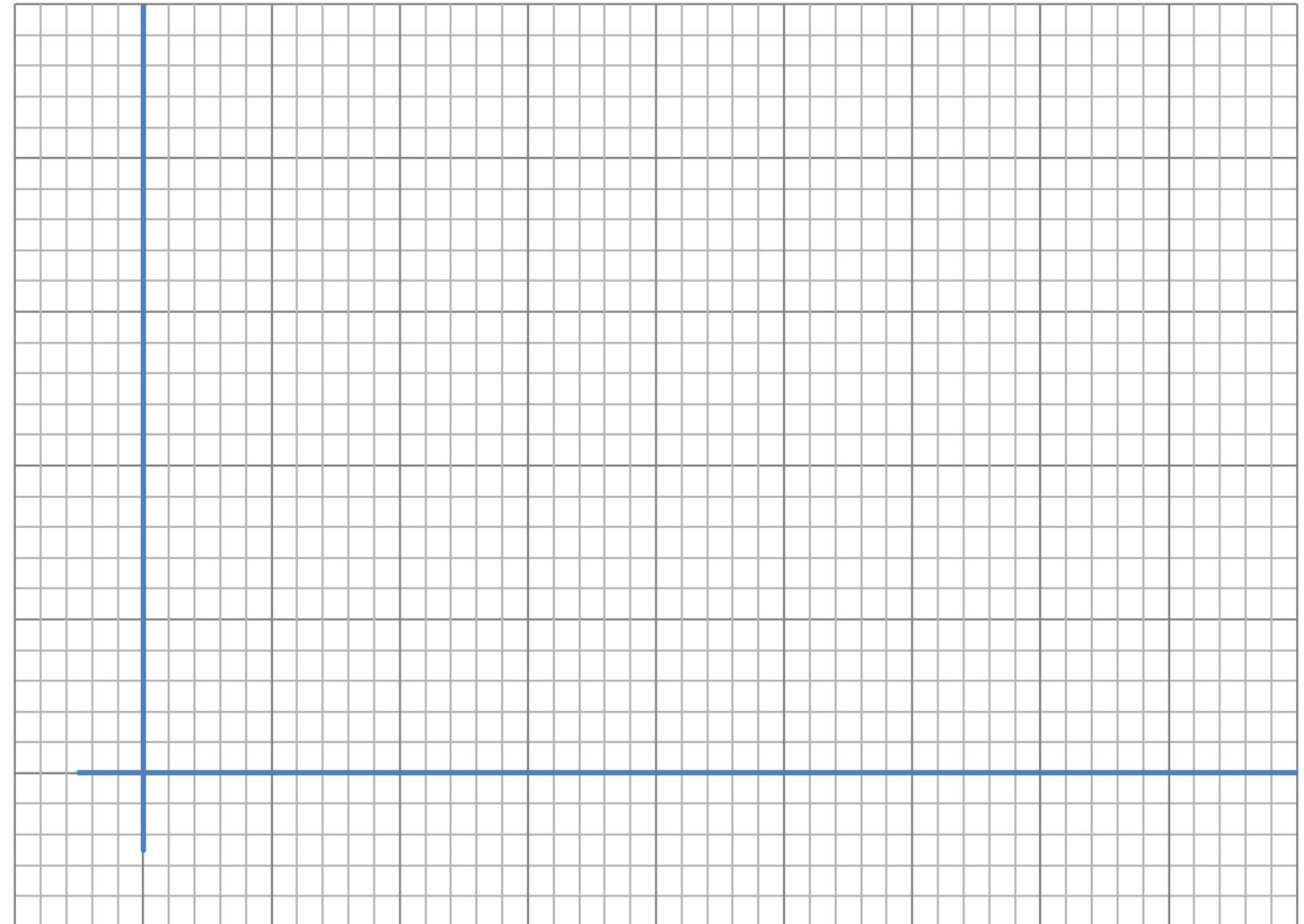
$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$



Algoritmos de Programación Entera

- Se han desarrollado dos métodos generales para obtener las restricciones especiales del paso 3.
 - 1.- Método de ramificación y acotamiento (B&B, *de Branch and bound*).
 - 2.- Método del plano cortante

Aunque ninguno es efectivo computacionalmente en forma consistente, de acuerdo a la experiencia B&B es mucho mejor que el del plano cortante.

Método de Ramificación y Acotamiento Branch and Bound (B&B)

Algoritmos de Programación Entera

En la estrategia de los algoritmos de programación lineal entera se utilizan tres pasos:

- | | |
|-----------------|---|
| Paso 1 : | Relajar el espacio de soluciones del programa lineal entero omitiendo la restricción entera en todas las variables enteras, y sustituyéndola con cualquier variable binaria que tenga el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del relajamiento es un programa lineal normal. |
| Paso 2: | Resolver el programa lineal e identificar su resultado óptimo continuo. |
| Paso 3: | Iniciar en el punto óptimo continuo e ir agregando restricciones especiales que modifiquen en forma iterativa el espacio de soluciones del programa lineal, en una forma que al final produzca un punto extremo que satisfaga los requisitos enteros. |

Espacio de solución de un PP Entera

1. Relaje el problema a un problema de programación lineal.
2. Modele.

PL1

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 5x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

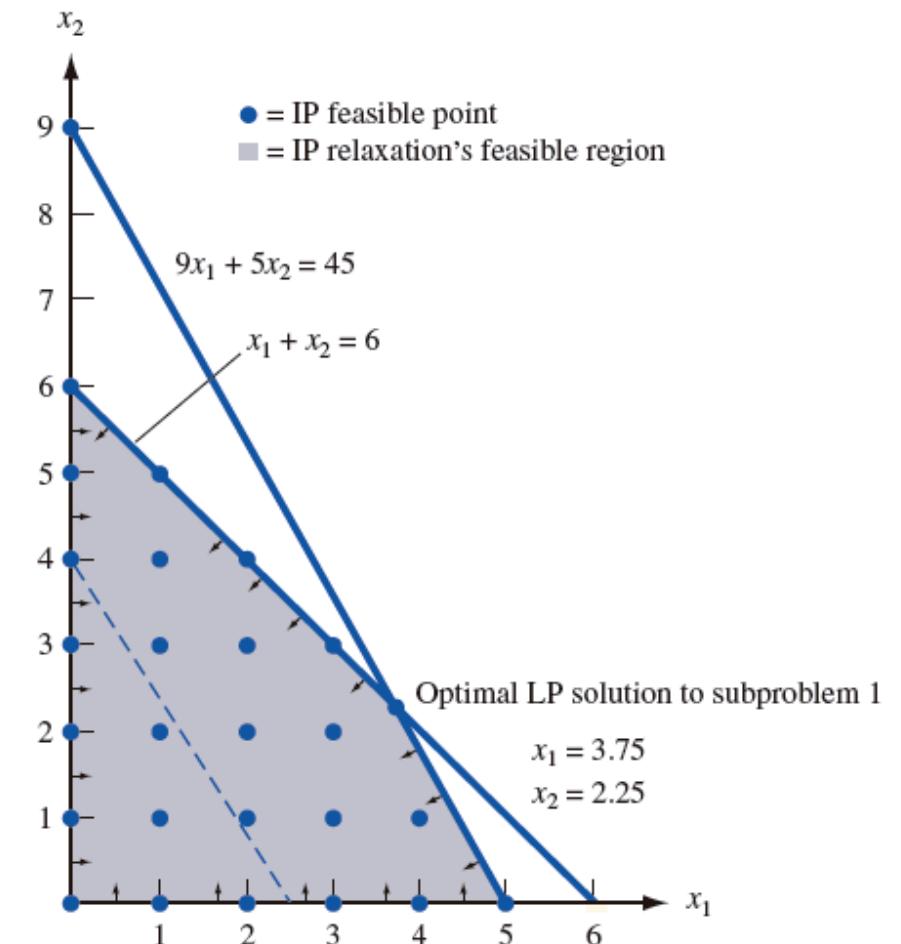
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

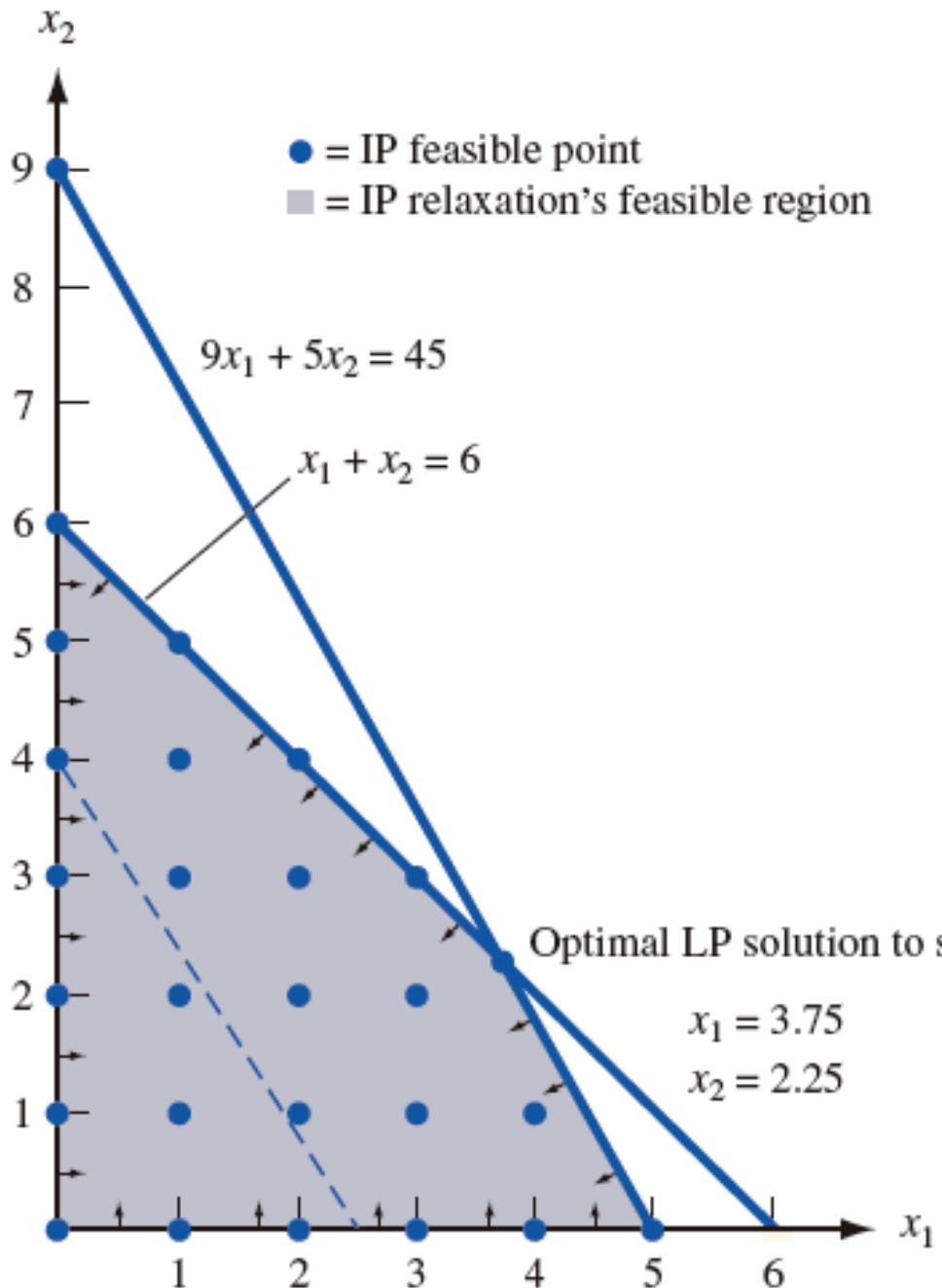
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Grafique el PPL

4. Cambie la restricción de no negatividad por esta: x_1, x_2 es entero no negativo

5. Identique las soluciones factibles (finitas)





Solución óptima del problema lineal

$$X_1^* = 3.75$$

$$X_2^* = 2.25$$

$$Z^* = 41.25$$

(cota superior de Z del problema entero).

Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)

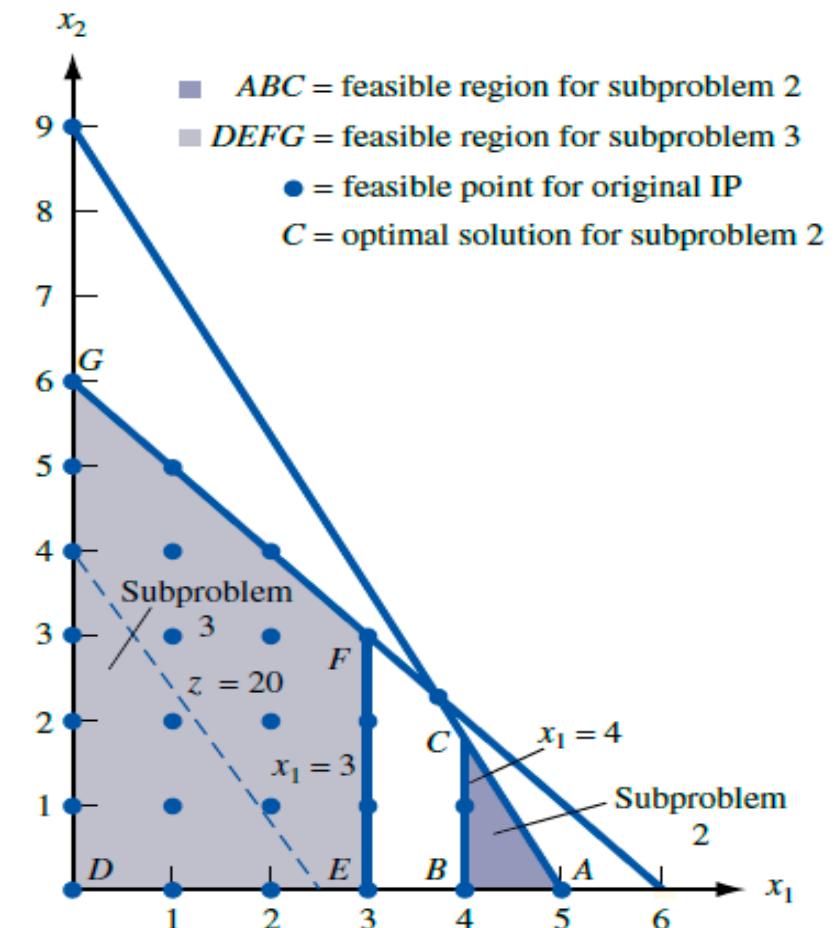
Primero se selecciona una de las variables enteras cuyo valor óptimo en el programa inicial no sea cero.

$$x_1 (= 3.75) \quad \Rightarrow \quad 3 < x_1 < 4$$

Esto equivale a reemplazar el programa original (PL0) con dos nuevos programas lineales (PL1, PL2).

$$\text{Espacio PL1} = \text{Espacio PL0} + (x_1 \leq 3)$$

$$\text{Espacio PL2} = \text{Espacio PL0} + (x_1 \leq 4)$$



Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)...

- Las nuevas restricciones, $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$, son mutuamente excluyentes, por lo que se deben manejar como programas separados.
- Esta dicotomización da lugar al concepto de ramificación en el algoritmo de ramificación y acotamiento, y x_1 es la variable de ramificación.

PL2

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 5x_2$$

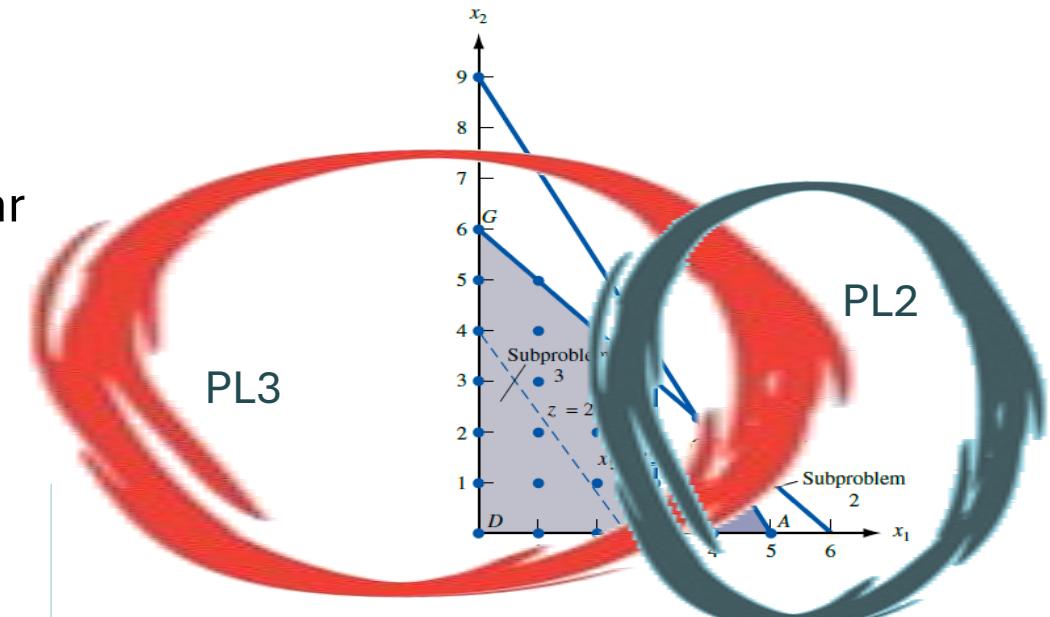
Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



PL3

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 5x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

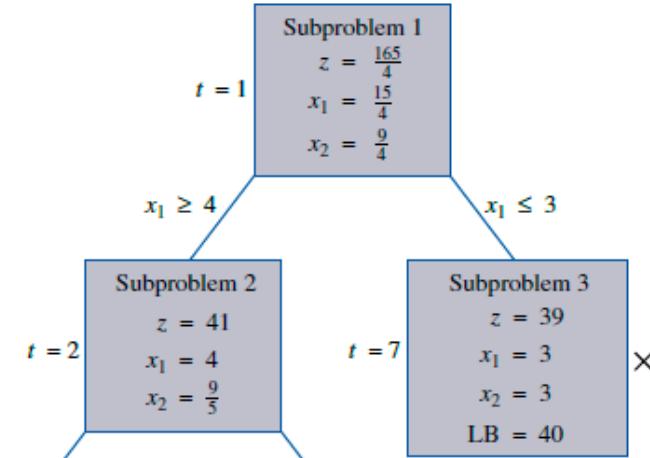
Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)...

- PL3 → Satisface los requisitos de ser entero para x_1 y x_2 , por consiguiente el PL3 está agotado.
- $Z=39$ es una cota inferior del valor objetivo óptimo (máximo) del PL1 (valor incumbente)

Si un subproblema no examinado produce una solución entera mejor, se debe actualizar la cota inferior (valor incumbente) en consecuencia.

PL2 → Data la cota inferior, se examina PL2, todos los coeficientes de la FO son enteros, por lo que es imposible producir una mejor solución y por lo tanto el PL2 se ha agotado.

Llamaremos valor incumbente en un iteración al mejor obtenido hasta dicha iteración.



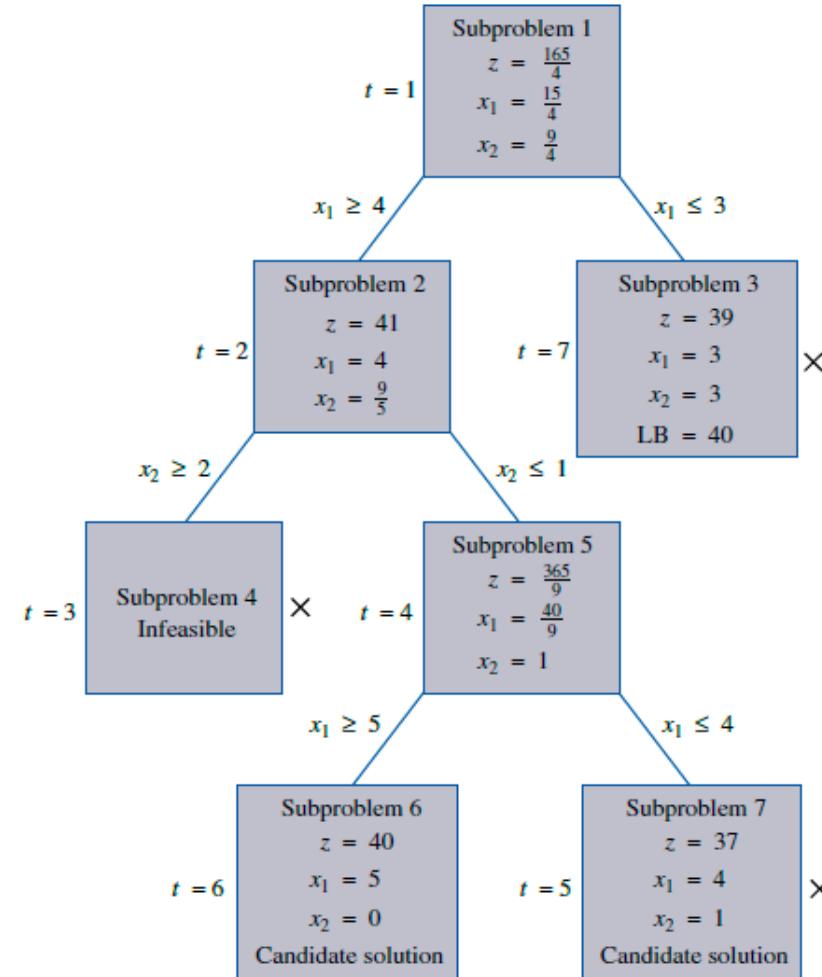
Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)...

- Con PL2, se repite el procedimiento. Esta vez x_2 no es entera, así que se ramifica.
- El PL4 es un problema infactible, por lo que esta rama se agota.
- El PL5 tiene nuevamente una solución fraccional en x_1 , por lo que se ramifica nuevamente.

El PL6 tiene solución entera. $Z = 40 > 39$.
La cota inferior (valor incumbente) se actualiza.

El PL7 tiene solución entera, pero $Z = 37 <$ mejor cota inferior (valor incumbente) = 40. Por lo tanto, esta rama se agota.

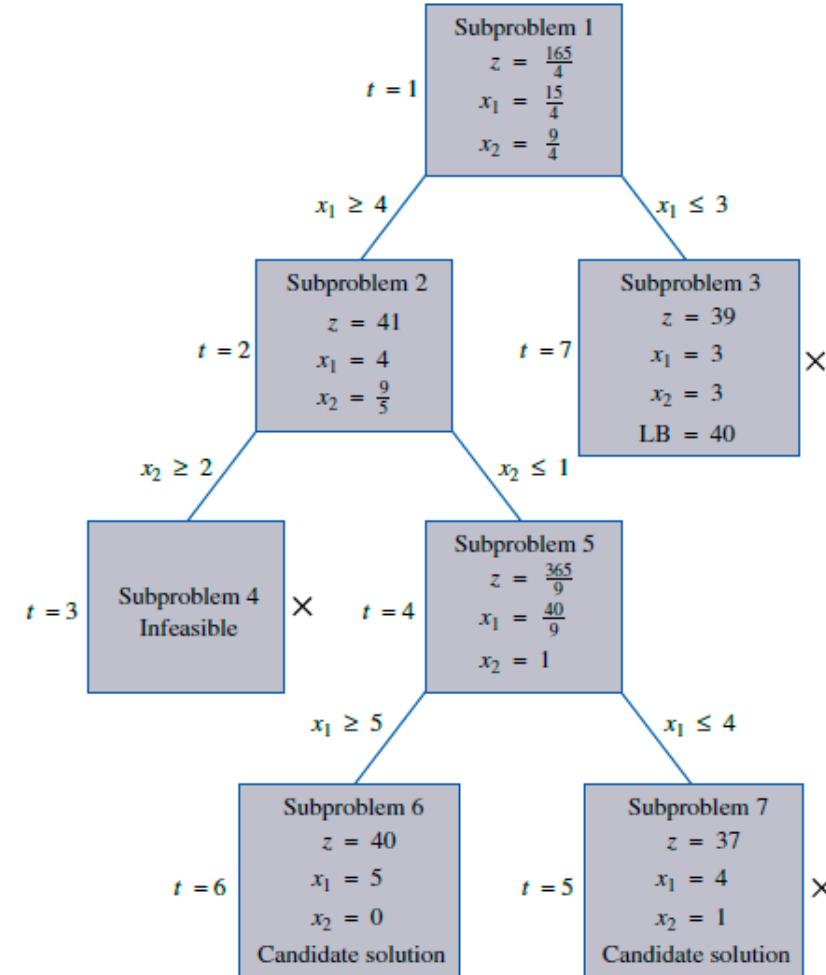
El proceso se repite, desde PL1, pero ahora ramificando desde x_2 .



Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)...

- El proceso termina cuando se han agotado todas las ramas.
- Las causas de acotamiento son:
 - Solución entera encontrada
 - Problema infactible
 - Solución repetida y ya explorada
 - Solución con cota inferior < valor incumbente.

Aunque hay técnicas heurísticas para poder aumentar la capacidad de «adivinar» De B&B cual rama conduce a una mejor solución de PLE, no hay una firme teoría para producir resultados consistentes.



Resumen de Pasos para el Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)

Suponiendo un problema de maximización, se establece una cota inferior inicial $z = -\infty$ del valor objetivo óptimo del PLE. Se iguala $i = 0$.

Paso 1: (Acotamiento) Se selecciona PLi, el siguiente subproblema a examinar.

Se resuelve PLi y se trata de agotarlo, usando las siguientes tres condiciones.

- A) El valor de z óptimo no puede producir un valor objetivo mejor que la cota inferior actual.
- B) PLi Produce una solución entera factible mejor, que la cota inferior actual.
- C) PLi no tiene solución factible.

Se presentan dos casos:

- Si PLi está agotado y se encuentra una mejor solución, actualizar la cota inferior. Si todos los subproblemas se han agotado, detenerse; el PLE óptimo corresponde a la cota inferior actual. Si la hay. En caso contrario igualar $i=1+1$ y repetir paso 1.
- Si PLi no está agotado, seguir en el paso 2, para ramificar.

Resumen de Pasos para el Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)

Paso 2: (Ramificación) Seleccionar uno de los valores enteros, x_j , cuyo valor óptimo x_j^* , en la solución del PLi no sea entero. Alminar región

$$\lfloor x_j^* \rfloor < x_j < \lceil x_j^* \rceil + 1$$

En el que $\lfloor v \rfloor$ define el mayor entero $\leq v$, creando dos subproblemas lineales que corresponden a

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \text{ y } x_j \geq \lceil x_j^* \rceil + 1$$

Igualando $i = i+1$ e ir al paso 1. 393

Para los problemas de minimización se sustituye la cota inferior por una cota superior con $z = +\infty$

Branch & Bound (resumido)

Método iterativo

$Z_{inc} = -\infty$ (inc de incumbente)

Se inicia resolviendo el problema relajado linealmente: Se elimina la condición de integralidad en las variables y se resuelve el PL asociado.

En cada iteración:

- **Ramificación**

- Crear nuevos problemas (subproblemas) a partir del problema relajado “superior”.
- Para cada variable no entera, se generan nuevos subproblemas adicionando restricciones
- En cada subproblema se adiciona una restricción a la vez, evitando las soluciones entre los valores enteros que rodean el valor de cada variable no entera.

- **Acotamiento**

- Se obtiene la cota de cada nuevo subproblema resolviendo el problema relajado lineal y redondeando hacia abajo Z

- **Sondeo (agotamiento)**

- Cota $\leq Z^*$
- El PL relajado es infactible
- La solución óptima del PL relajado es entera

- **Actualización solución incumbente**

- $Z_{inc} = \text{Valor incumbente inicial} = -\infty$
- Si el Z^* de un PL relajado con solución entera es mejor que Z_{inc} , entonces se actualiza Z_{inc} :

$$Z_{inc} \leftarrow Z^*$$

Resolver:

$$\max z = x_2$$

st

$$-x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 \leq 3\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$



Resolver por B&B

$$\max z = x_2$$

st

$$-x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 \leq 3\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

Resolver por B&B:

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

st

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$

Resolver por B&B:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

st

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9$$

$$10x_1 + 5x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \in [0,1]$$

Resolver por B&B:

$$\max z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

st

$$20x_1 + 15x_2 - x_3 \leq 10$$

$$12x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{int}$$