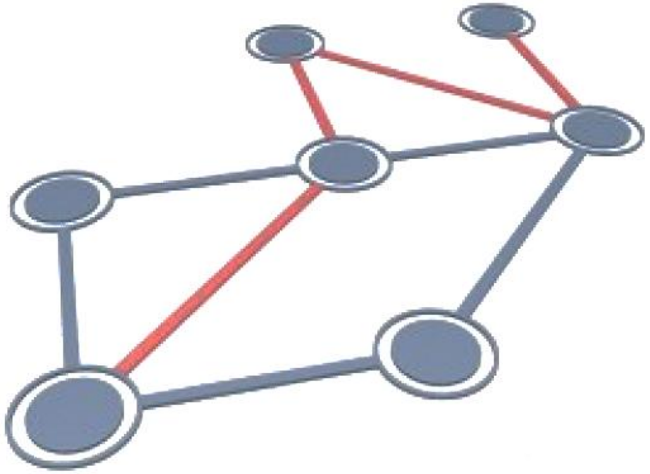
Modelos de Redes

Profesor name
Optimización de Procesos Industriales
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey

True optimization is the revolutionary contribution of modern research to decisión processes.
George Dantzig

Jenny Díaz Ramírez PhD

El Problema de la Ruta Más Corta



$x_{ij} =$ 1 si se visita el nodo j inmediatamente después de visitar el nodo i,
0 de otro modo

$$\min \sum_{(i,j)} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i x_{ji} \quad \forall j \backslash \{1, n\}$$

$$\sum_j x_{1j} = 1$$

$$\sum_j x_{in} = 1$$

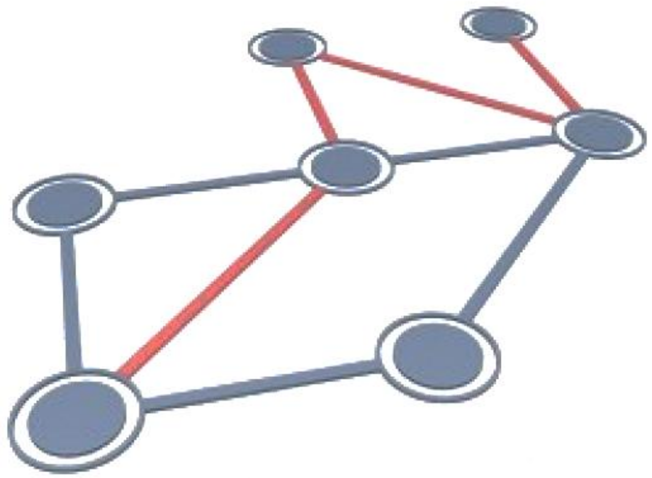
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

El objetivo del SPP *(Shortest Path Problem)* es encontrar un recorrido que minimice la distancia total de la ruta, con las siguientes condiciones:

- Debe iniciar en el nodo origen (i.e i=1)
- Debe terminar en el nodo destino (i.e. i=n)
- Si un nodo se visita, debe ser máximo una vez.

Jenny Díaz Ramírez PhD

El Problema de la Ruta Más Corta



$x_{ij} =$ 1 si se visita el nodo j inmediatamente después de visitar el nodo i,
0 de otro modo

$$\min \sum_{(i,j)} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i x_{ji} \quad \forall j \setminus \{1, n\}$$

$$\sum_j x_{1j} = 1$$

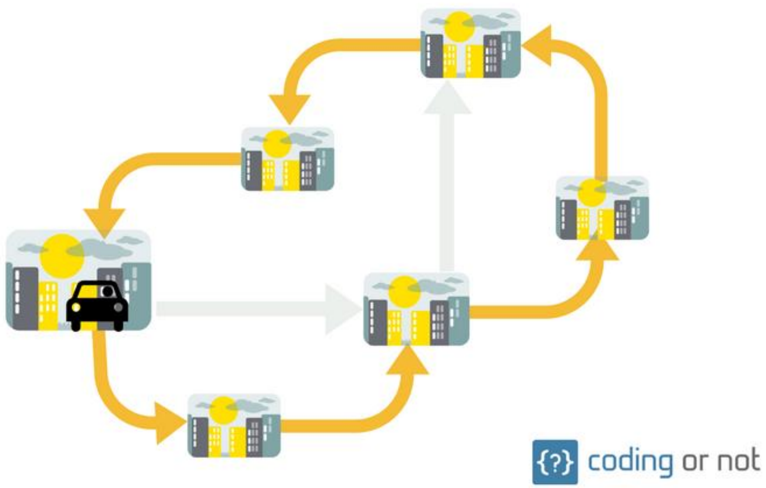
$$\sum_j x_{in} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

Métodos de solución

- Algoritmo de Dijkstra
- Algoritmo de Bellman – Ford
- Algoritmo de Búsqueda A*
- Algoritmo de Floyd-Marshall...

El Problema del Agente Viajero



$x_{ij} =$ 1 si se visita el nodo j inmediatamente después de visitar el nodo i,
0 de otro modo

$$\boldsymbol{min} \sum_{(i,j)} \boldsymbol{d_{ij} x_{ij}}$$

st

$$\sum_{i} \boldsymbol{x_{ij}} = \boldsymbol{1} \quad \forall \boldsymbol{j}$$

$$\sum_{j} \boldsymbol{x_{ij}} = \boldsymbol{1} \quad \forall \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{x_{ij}} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\} \quad \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$$

El objetivo del TSP (*(Travelling Salesman Problem)*,) es encontrar un recorrido completo que minimice la distancia total de la ruta, o el tiempo total del recorrido, con las siguientes condiciones:

- Que conecten todos los nodos de una red
- Que se conecten visitándolos tan sólo una vez
- El recorrido debe volver al punto de partida.

Ciclo Hamiltoniano

Imagen: https://codingornot.com/01-agente-viajero-introduccion

Jenny Díaz Ramírez PhD

El Problema del Agente Viajero

- (n-1)! Soluciones
- Red simétrica: (n-1)!/2 soluciones

- Podemos enumerar las soluciones y escoger la mejor?.
  - 10 ciudades : $\approx 10^{5.5}$ posibilidades.
  - 100 ciudades : $\approx 10^{156}$ posibilidades.
  - 1.000 ciudades : $\approx 10^{2.565}$ posibilidades.
  - 33.810 ciudades : $\approx 10^{138.441}$ posibilidades.
  - Edad del universo : $\approx 10^{18}$ segundos.
  - Número de átomos en el universo: $< 10^{100}$.
  - Enumeración solo es posible para problemas muy pequeños.

Métodos de solución

- Exactos – Branch & Bound
- Heurísticos
  - El vecino más cercano
- Metaheurísticos
  - Algoritmos genéticos
  - Colonia de hormigas
  - Redes neuronales…

$x_{ij} =$ 1 si se visita el nodo j inmediatamente después de visitar el nodo i,
0 de otro modo

$$\min \sum_{(i,j)} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_{i} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Restricciones de rompimiento de subciclos para cada subconjunto *S*.

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad 2 \leq i \neq 1 \leq n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

Cálculos enumeración: http://www.dii.uchile.cl/~daes pino/PApers/TSP_and_IP_chile_050820.pdf

Aplicación del TSP

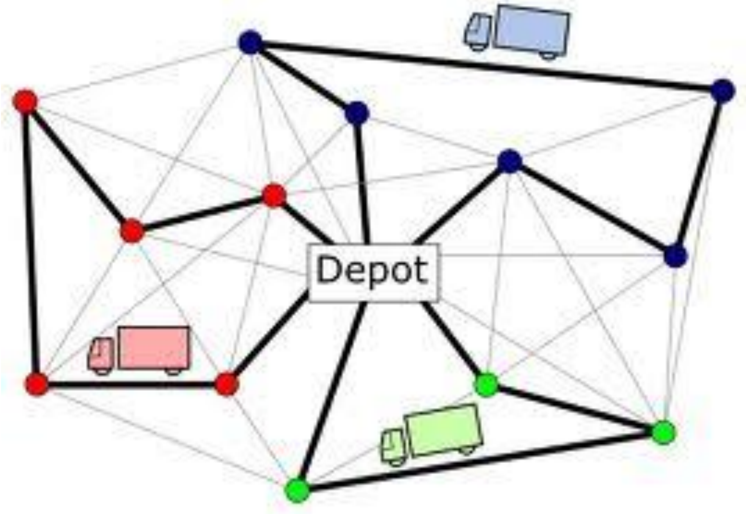
El programa de producción diaria de Rainbow Company incluye lotes de pinturas blancas (W), amarilla (Y), roja (R) y negra (B). Como Rainbow usa las mismas instalaciones en las cuatro clases de pintura, es necesario hacer una buena limpieza entre los lotes. La siguiente tale resume el tiempo de limpieza, en minutos, donde al color del renglón sigue el color de la columna.

Determinar la secuencia óptima para la producción diaria de los cuatro colores, que minimice el tiempo total de limpieza necesario.

El problema del agente viajero (TSP)

	Minutos de limpieza si la siguiente pintura es:			
Pintura actual	**Blanca**	**Amarilla**	**Negra**	**Roja**
Blanca	∞	10	17	15
Amarilla	20	∞	19	18
Negra	50	44	∞	25
Roja	45	40	20	∞

El Problema Ruteo de Vehículos



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si se visita el nodo } j \text{ inmediatamente después de visitar el nodo } i, \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{min} \sum_{(i,j)} \boldsymbol{d_{ij} x_{ij}}$$

$$st$$

$$\sum_{i} \boldsymbol{x_{ij}} = \mathbf{1} \quad \forall \boldsymbol{j} \setminus \{0\}$$

$$\sum_{j} \boldsymbol{x_{ij}} = \mathbf{1} \quad \forall \boldsymbol{i} \setminus \{0\}$$

$$\sum_{j} \boldsymbol{x_{0j}} = \boldsymbol{k}$$

$$\sum_{i} \boldsymbol{x_{i0}} = \boldsymbol{k}$$

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} \boldsymbol{x_{ij}} \geq \boldsymbol{r(S)} \quad \forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}\{\mathbf{0}\}, \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{x_{ij}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \quad \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$$

El objetivo del VRP *(Vehicle Routing Problem),*) es encontrar las rutas para un conjunto de vehículos que minimicen la distancia total recorrida, con las siguientes condiciones:

- Deben iniciar y terminar en el nodo depot, o nodo 0.
- Deben respetar la capacidad del vehículo y la longitud máxima de ruta.

Fuente imagen: https://www.r-bloggers.com/wp-content/uploads/2010/11/vrp.jpg

Jenny Díaz Ramírez PhD

El Problema Ruteo de Vehículos - Variantes

- ❖Capacitated VRP (CVRP): VRP considerando restricciones de capacidad en vehículos
- ❖ Multiple Depot VRP (MDVRP): VRP considerando varios CD's intercalados con los clientes
- ❖ Periodic VRP (PVRP): VRP para M días de planeación
- ❖ Split Delivery VRP (SDVRP): VRP donde se atiende a un cliente usando varios vehículos
- ❖ Stochastic VRP (SVRP): VRP donde uno o mas componentes son aleatorios (demanda, tiempos)
- ❖ VRP with Backhauls: VRP donde el cliente retorna productos
- ❖ VRP with Pick-Up and Delivering: VRP con recogida y despacho simultáneamente.
- ❖ VRP with Satellite Facilities: VRP considerando la re planeación de rutas satelitalmente
- ❖ VRP with Time Windows (VRPTW): VRP con ventanas de tiempo
- ❖VRP con velocidades dependientes del tiempo.

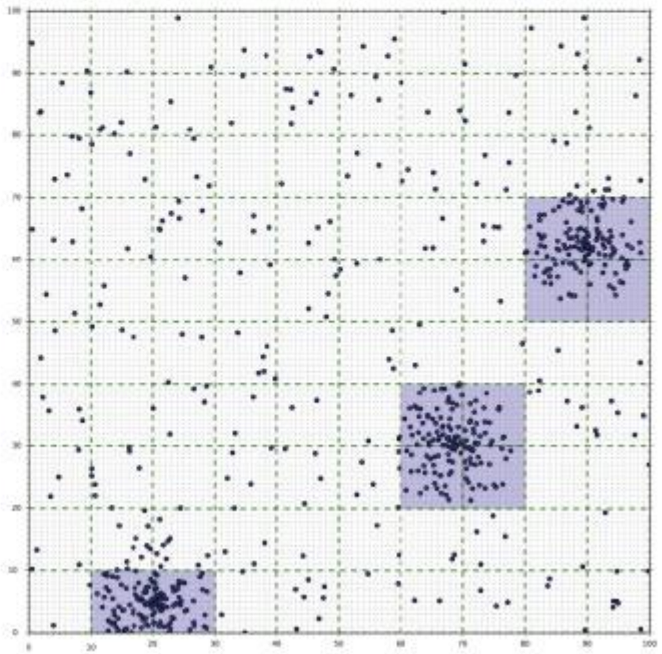
Jenny Díaz Ramírez PhD

Fuente imagen: https://www.simpliroute.com/post/ventanas-horarias-en-el-vrp

"That's what modeling does, makes something real before it happens."
Paul Kemp

Problemas de localización

El problema de Máximo Cubrimiento



Variables

x_i = 1 if facility i is opened,
0 otherwise

y_j = 1 if neighborhood j is covered,
0 otherwise

Parameters

a_{ij} = 1 if neighborhood j can be covered by a facility at i.
0 otherwise

d_j= neighborhood j demand

MIP model

$$\max \sum_j d_j y_j$$

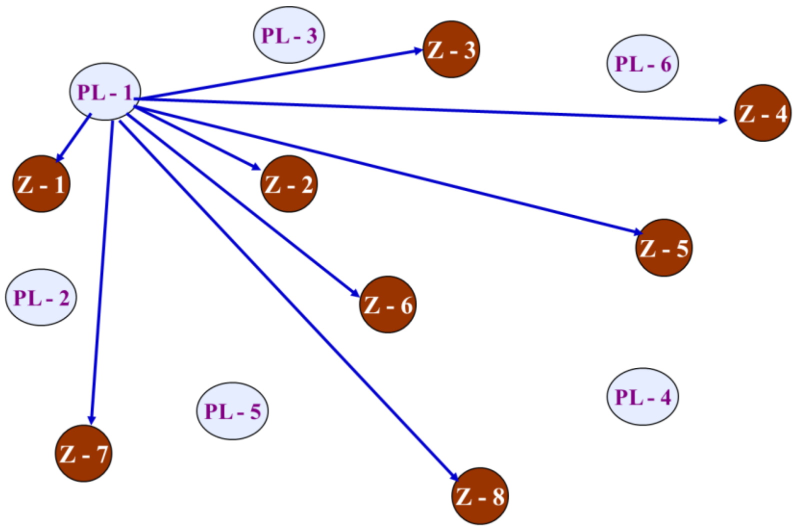
st

$$\sum_i a_{ij} x_i \geq y_j \quad \forall j$$

$$\sum_i x_i = p$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}$$

El problema de Localización de una planta



De varias alternativas identificadas previamente, ¿cuál de ellas debe abrirse para minimizar el costo de abastecimiento?
Sin restricciones de capacidad.

Median Model

$y_i =$ 1 if plant is located at site i, 0 otherwise

$x_{ij} =$ 1 if market j is supplied from plant site i, 0 otherwise

$$\textit{Minimizar} \text{ la distancia total } \mathrm{D} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{8} \mathrm{d}_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a :

$$\text{Número de plantas a abrir } \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Y}_i = 1$$

$$\textit{Zona de} \text{ consumo atendida } \sum_{i=1}^{6} \mathrm{X}_{ij} = 1 \ \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

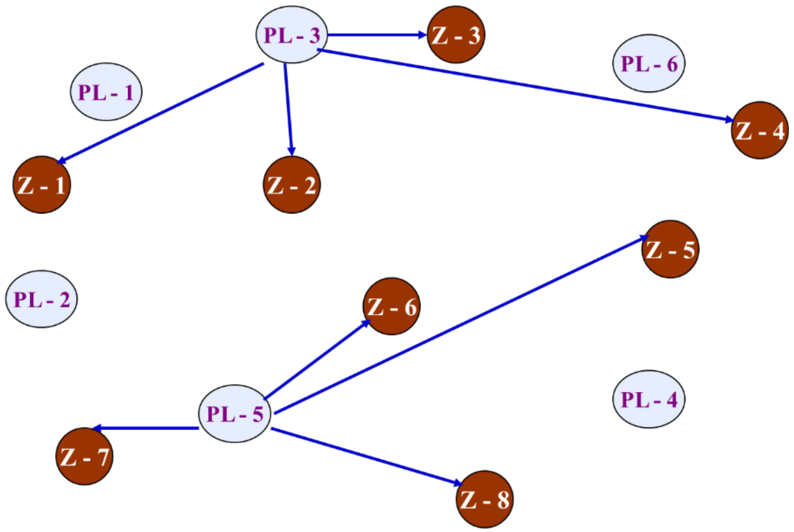
Relación entre la planta y la zona de consumo

$$\mathrm{X}_{ij} \le Y_i \ \forall\ i = 1, 2, ..., 6 \wedge \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

$$\mathrm{X}_{ij}, \mathrm{Y}_i \in \{0, 1\} \forall\ i = 1, 2, ..., 6 \wedge \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

Jenny Díaz Ramírez PhD

El problema de Localización con fuente única



De varias alternativas identificadas previamente, ¿cuáles **p** de ellas deben abrirse para satisfacer la demanda de abastecimiento?
Sin restricciones de capacidad.
P-median

P-Model

$y_i =$ 1 if plant is located at site i, 0 otherwise
$x_{ij} =$ 1 if market j is supplied from plant site i, 0 otherwise

$$\textit{Minimizar} \text{ la distancia total } D = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{8} d_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a :

$$\text{Número de plantas a abrir } \sum_{i=1}^{6} Y_i = p$$

$$\textit{Zona de} \text{ consumo atendida } \sum_{i=1}^{6} X_{ij} = 1 \quad \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

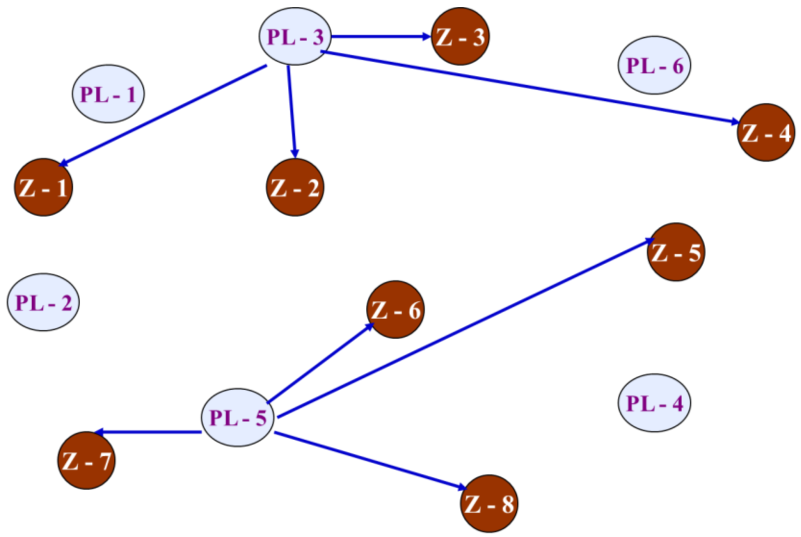
Relación entre la planta y la zona de consumo

$$X_{ij} \leq Y_i \ \forall\ i = 1, 2, ..., 6 \wedge \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

$$X_{ij}, Y_i \in \{0, 1\} \ \forall\ i = 1, 2, ..., 6 \wedge \forall\ j = 1, 2, ..., 8$$

Jenny Díaz Ramírez PhD

Uncapacitated Faility Location Problem



$y_i =$ 1 if plant is located at site i, 0 otherwise
$x_{ij} =$ 1 if market j is supplied from plant site i, 0 otherwise

$$\min \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_i y_i \leq p$$

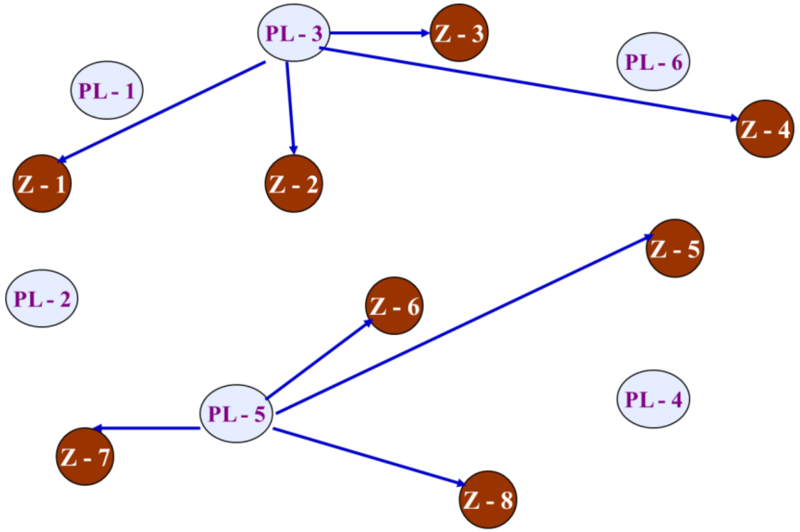
$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

De varias alternativas identificadas previamente, ¿cuáles **p** de ellas deben abrirse para satisfacer la demanda de abastecimiento?

- Se consideran costos fijos de apertura de plantas
- Sin restricciones de capacidad.
- Fuente única (por destino)

Capacitated Facility Problem



$y_i =$ 1 if plant is located at site i, 0 otherwise

$x_{ij} =$ 1 if market j is supplied from plant site i, 0 otherwise

$$min \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j D_j x_{ij} \leq q_i y_i \quad \forall i$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

De varias alternativas identificadas previamente, ¿cuáles de ellas deben abrirse para satisfacer la demanda de abastecimiento?

- Fuente única (para cada destino)
- Se consideran costos fijos de apertura de plantas
- Se considera la capacidad de las plantas potenciales
- No se sabe cuántas plantas se abrirán

Referencias

The Science of Better www.scienceofbetter.org/
Díaz, J y Escobar, J.W. Material de clase de Modelación Logística.
Ejercicios de:

- TAHA, Handy (2010) **Investigación de Operaciones** Prentice Hall
- WINSTON, W.L. (2005) **Investigación de Operaciones** McGraw Hill.
- HILLIER, F.S., y LIEBERMAN, G.J. (2010) **Introducción a la Investigación de Operaciones** McGraw Hill.