Solución de un Problema de Programación Lineal

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Rodolfo Mendoza PhD

Métodos de Solución - Contenido

- Notación
  - Algebraica
  - Matricial
- Solución
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- Método Gráfico
  - Para problemas pequeños (2 var)
- Método de B&B
  - Para problemas enteros
- Métodos Simplex
  - Estructura de una iteración
  - Complejidad matemática

Rodolfo Mendoza PhD

“Notación matemática”

Rodolfo Mendoza PhD

Notación de conjuntos

Conjunto. Es una colección de elementos considerada en si misma como un objeto.

Ejemplo:

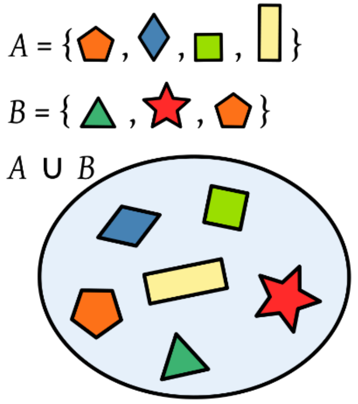
$N = \{1,2,3,4,5\}$

- La expresión $\forall i \in N$ se refiere a "*para todo elemento de N*", es decir una acción se va a repetir para cada uno de los elementos de N. Es decir, para $1, 2, 3, 4\ y\ 5$.
- El número de elementos se define por la cardinalidad del conjunto: $|N| = 5$. En este ejemplo es 5, porque el conjunto tiene 5 elementos.
- Otro ejemplo: $M = \{A, B, C, D, E, F\}$, en este caso $|M| = 6$
- En la expresión $i = 1,2, \ldots, N$, N es el valor del último elemento y el conjunto se representa como la secuencia de elementos enteros de 1 hasta N. En este caso N no representa al conjunto.

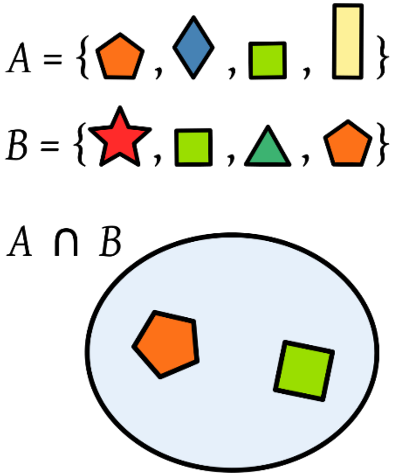
Rodolfo Mendoza PhD

Notación de conjuntos

- $A \cup B$, es la unión del conjunto A y B en uno solo.
  - Ejem. A={0,1} y B={2,3,4}. Si C= A ∪ B entonces C= {0,1,2,3,4}



- $A \cap B$, es la intersección del conjunto A y B en uno solo.
  - Ejem. A={1,2,3} y B={3,4,5}. Si C= A∩B entonces C= {3}

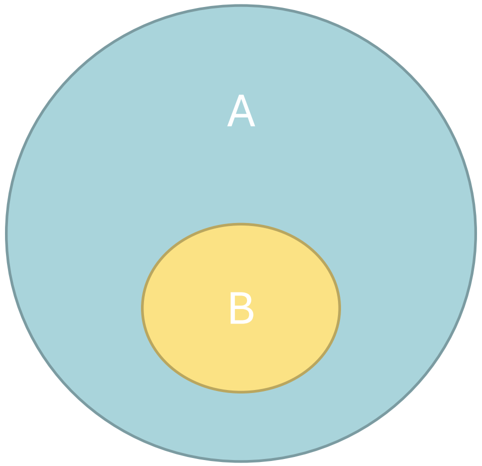


∅ significa conjunto vacío

Notación de conjuntos

- $B \subset A$, significa que B es un subconjunto de A
  - Ejem. A={0,1,2,3,4,5}. Si B={2,3,4}, entonces B es subconjunto de A.
- $B \subseteq A$, significa que B puede ser un subconjunto de menor o igual tamaño que A.
  - Ejem. A={1,2,3}, B={1,2,3}, E={1,2}.
  - En este caso B $\subseteq$A, pero asu vez A$\subseteq$B.
  - Por otro lado, E $\subset$A y E$\subset$B

∅ significa conjunto vacío



Rodolfo Mendoza PhD

Notación matemática

Sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Producto:

$$\prod_{1=1}^{5} x_i = 1 \Rightarrow x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i x_i$$

$$\Downarrow$$

$$a_1\, x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

$$\Downarrow$$

11 12 13 21 22 23

Rodolfo Mendoza PhD

Notación matemática

Sumatoria de conjuntos:

$$\sum_{i \in M} x_i \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$Donde{:}\ M = \{1,2,3,4,5\}$

$$\sum_{i \in M} x_i \Rightarrow x_A + x_B + x_C$$

$Donde{:}\ M = \{A, B, C\}$

$Dado\ A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,2,6,7\}$

$$\sum_{i \in A \cap B} x_i$$

Rodolfo Mendoza PhD

Notación matemática

- Variables de decisión

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i \in N$$
$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,2, \dots, N$$
$$x_i \geq 0 \qquad \text{para todo } i \in N$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \dots, N$$
$$x_i \geq 0 \qquad i \in N$$

Ejemplo para $i = 1,2,3,4,5$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0$$
$$x_5 \geq 0$$

- Restricciones

$$\sum_{i \in N} x_i \leq 1$$

o

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \leq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

Matrices y vectores

Suponga el siguiente vector:

$$c = [4 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 8]$$

Para representar un elemento especifico se puede usar:

$c_2 = 3$, donde el subíndice representa la posición del elemento a consular.

La siguiente expresión representa la sumatoria de todos los elementos del vector:

$$\sum_{i=1}^{5} c_i = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 4 + 3 + 6 + 2 + 8 = 23$$

Matrices y vectores

Suponga la siguiente matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sus dimensiones son $m \times n$. Donde m es el número de renglones y n el número de columnas. En este caso es de dimensión $3x4$.

Para representar un elemento especifico se puede usar:

$G_{23} = 6$, donde el subíndice representa la posición del elemento a consular.

La sumatoria de todos los elementos de esta matriz se representa:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} G_{ij} = 37$$

La sumatoria de todos los elementos del renglón 1:

$$\sum_{j=1}^{4} G_{1j} = 15$$

Matrices y vectores

Se pueden representar sumatorias de elementos de un vector con una matrix. Ejemplo:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} G_{ij}\, x_i \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 4x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1x_4$$

Restricciones

Una restricción se puede representar con notación matemática:

Dado el siguiente vector $c = [4 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 8]$ y la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{5} c_i x_i = 20 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 20$$

Un conjunto de restricciones también se puede representar con notación matemática:

$$\sum_{j=1}^{4} G_{ij}\, x_i \;\leq\; b_i \quad \forall \text{ (para todo) } i = 1, \dots, 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\leq 30 \\ 4x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\ 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1x_4 &\leq 28 \end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = [30 \quad 20 \quad 28]$$

Son equivalentes $\begin{cases} i = 1, \dots, 3 \\ \forall i \in I, \end{cases}$ donde $I = \{1, 2, 3\}$ ($\forall$ se lee "para todo")

Programación entera

- **Programación entera pura (IP).** Todas las variables tienen valores enteros.

$$x_i \in N \cup \{0\} \quad | \quad x_i \text{ entera} \quad | \; x_i \; \in Z^+$$

- **Programación binaria (BP).** Las variables de decisión deben tener valores enteros de 0 o 1.

$$x_i \in \{0,1\} \quad | \quad x_i \text{ binaria} \quad | \quad x_i = \; 0 \text{ o } 1$$

- **Programación entera mixta (MIP).** Algunas variables son enteras y algunas otras pueden ser variables continuas.

$$x_i \text{ entera}$$
$$y_i \text{ binaria}$$
$$t_i \geq 0$$

Rodolfo Mendoza PhD