Tecnológico de Monterrey

# Análisis de Sensibilidad

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

# Introducción

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

Hasta ahora los problemas de PL que hemos analizado consideran *supuestos deterministas*, es decir, que los **datos son fijos**: los precios, los recursos y las relaciones.

## ¿Qué pasa si?

- La utilidad de un producto cambiará de \$5 a \$5.5.
- Si se comprara una maquina nueva que ocupará 1 hora en lugar de 2 para producir una silla.
- Si el almacén se amplio y ahora se cuenta con 100 $m^2$ mas de espacio para materia prima.
- Si el horario de trabajo se extendiera una hora mas diariamente.

# Análisis de Sensibilidad

- Frecuentemente no podemos conocer los valores de los parámetros con total certeza o exactitud.
- En muchas ocasiones los parámetros son estimados o incluso simplemente adivinados.
- Por lo tanto, estos valores están sujetos a cambios.
- Los cambios pueden ser reacciones a las incertidumbres previstas en los parámetros o información nueva o modificada, relevante al modelo.

**El análisis de sensibilidad determina el efecto sobre la solución óptima de cambios en valores de los parámetros de la función objetivo y las ecuaciones de restricción.**

# Análisis de Sensibilidad

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

El análisis de sensibilidad permite evaluar los efectos que se producen al cambiar:

La tasa de contribución de cada variable

$$\text{Max o Min } Z = \boxed{C_1} X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$$

Los valores disponibles de los recursos

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \boxed{a_{11}} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n <= \boxed{b_1} \\ & a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n <= b_2 \\ & \quad . \qquad . \qquad + \ldots + \qquad . \qquad . \\ & \quad . \qquad . \qquad + \ldots + \qquad . \qquad . \\ & a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n <= b_m \\ & X_i \ 0, \text{ para }_i = 1,2, \ldots n \end{aligned}$$

Los valores de los coeficientes tecnológicos

- Análisis también de los cambios en el problema dual
- Puedo escoger con cuál problema trabajar (primal o dual)

# Análisis de Sensibilidad…

Impacto de la solución ante cambios que afecten:

### Factibilidad

- Cambios en el lado derecho (bi)
- Adición de una nueva restricción
- Rangos de factibilidad (para bi y aij)

### Optimalidad

- Cambios en los coeficientes de la F.O. (cj)
- Adición de una nueva variable
- Rangos de optimalidad
- Soluciones no básicas

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

# Ejemplo 1

## Compañía High Note Sound

La compañía HNS fabrica audífonos y altavoces de calidad. Cada uno de estos productos requiere cierta cantidad de mano de obra especializada, de la cual hay un suministro semanal limitado. La compañía formula el siguiente problema PL para determinar la mejor mezcla de producción de audífonos (X1) y altavoces (X2).

Maximizar 50 X1 + 120 X2 (maximizar la utilidad)

Sujeto a: 2 X1 + 4 X2 ≤ 80 (horas de mano de obra de **electricistas**)

3 X1 + 1 X2 ≤ 60 (horas de mano de obra de **técnicos de audio**)

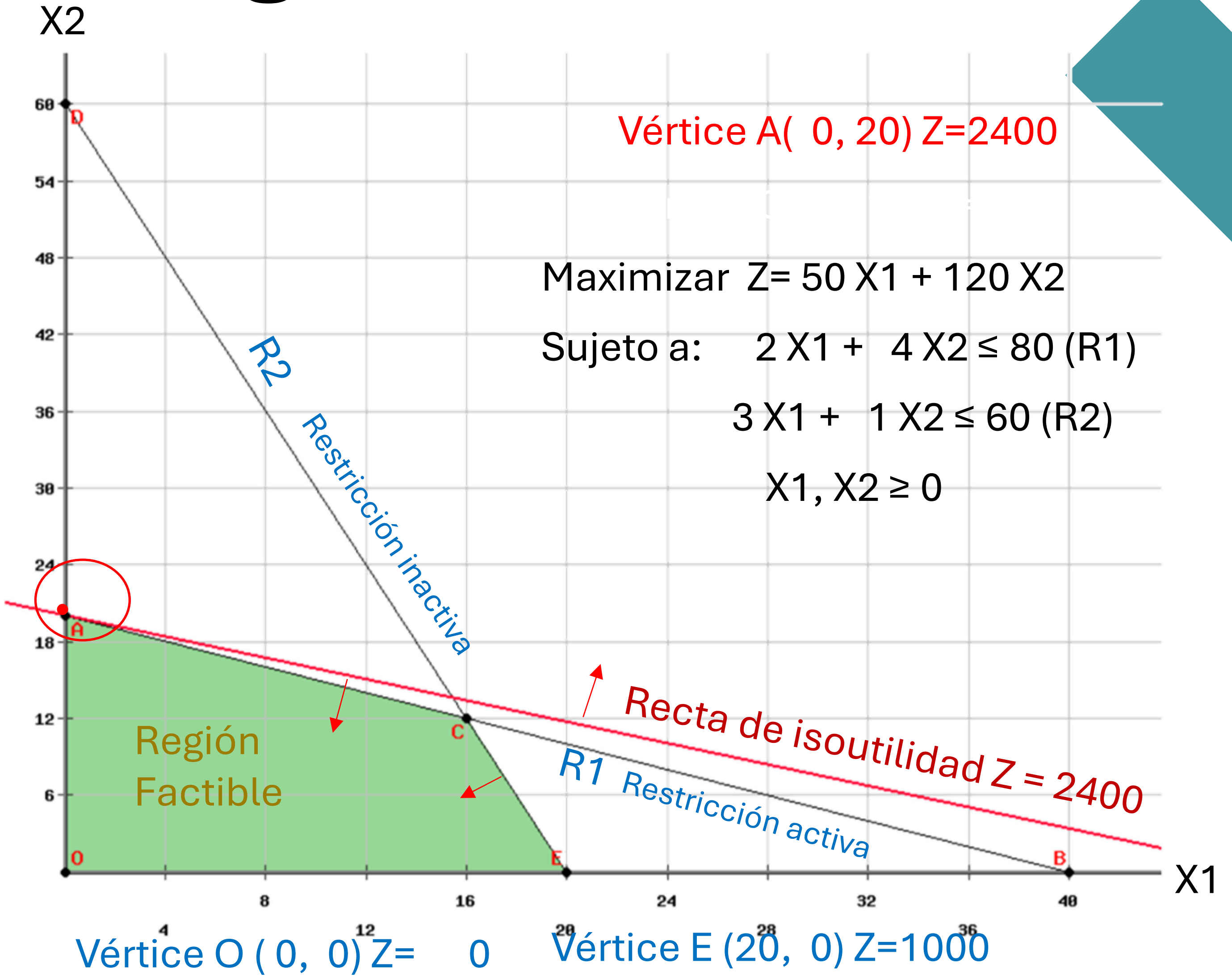
X1, X2 ≥ 0

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Ejemplo 1. Solución gráfica

**Solución**:
No producir audífonos y
Producir 20 altavoces obteniendo
una utilidad de $2,400

**Restricción activa**: si al sustituir los valores de las variables de decisión de la solución óptima en una restricción, el valor resultante es igual al valor del lado derecho de la restricción.
**Restricción inactiva** Si una restricción no es activa, se dice que es inactiva.



# Ejemplo 1…

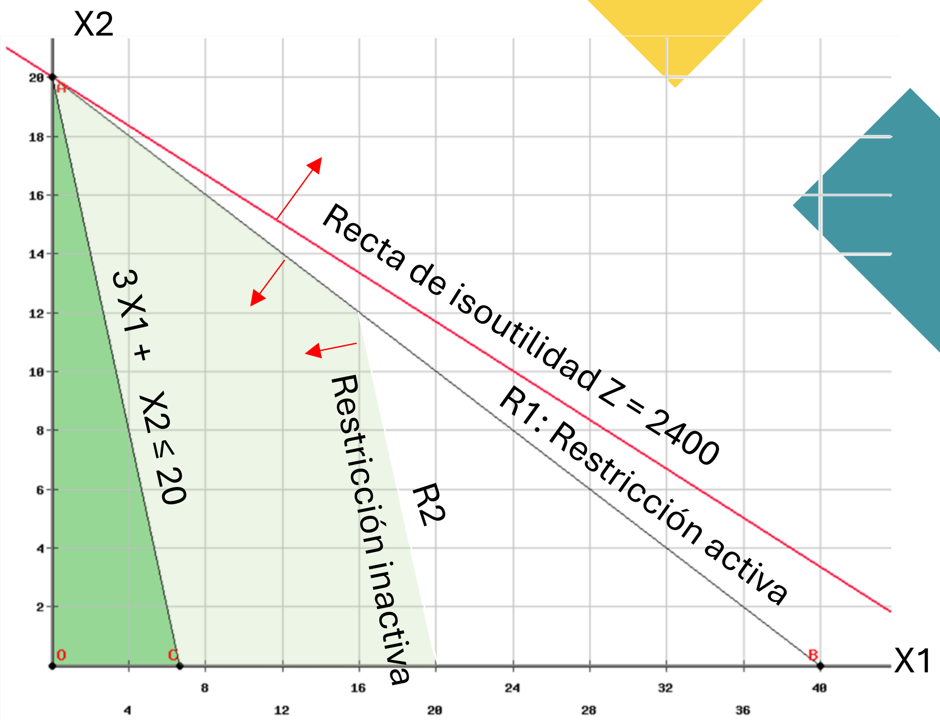
Sustituyendo la solución óptima (0, 20) en las restricciones:

$2(0) + 4(20) \leq 80$ (R1) (horas de tiempo de electricistas disponibles)

$\mathbf{80} \leq 80$

$3(0) + 1(20) \leq 60$ (R2) (horas de tiempo de técnicos de audio disponibles)

$\mathbf{20} \leq 60$




| Row | Slack or Surplus |
|---|---|
| FUNCION_OBJETIVO | 2400.000 |
| TIEMPO_ELECTRICISTAS | 0.000000 |
| TIEMPO_TECNICOS | 40.00000 |

Restricción activa
Restricción inactiva

No se utilizaron 40 horas de tiempo de los técnicos.

Con esta solución se ocuparon todas las horas disponibles de electricistas, pero solo se ocuparon 20 de los técnicos de Audio, quedando sin ocuparse 40 horas.

La solución seguirá siendo la misma aun cuando se aumente o disminuya el tiempo disponible de técnicos de audio, mientras existan como mínimo 20 horas disponibles.

$3X1 + 1X2 \leq 20$ (R2)

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

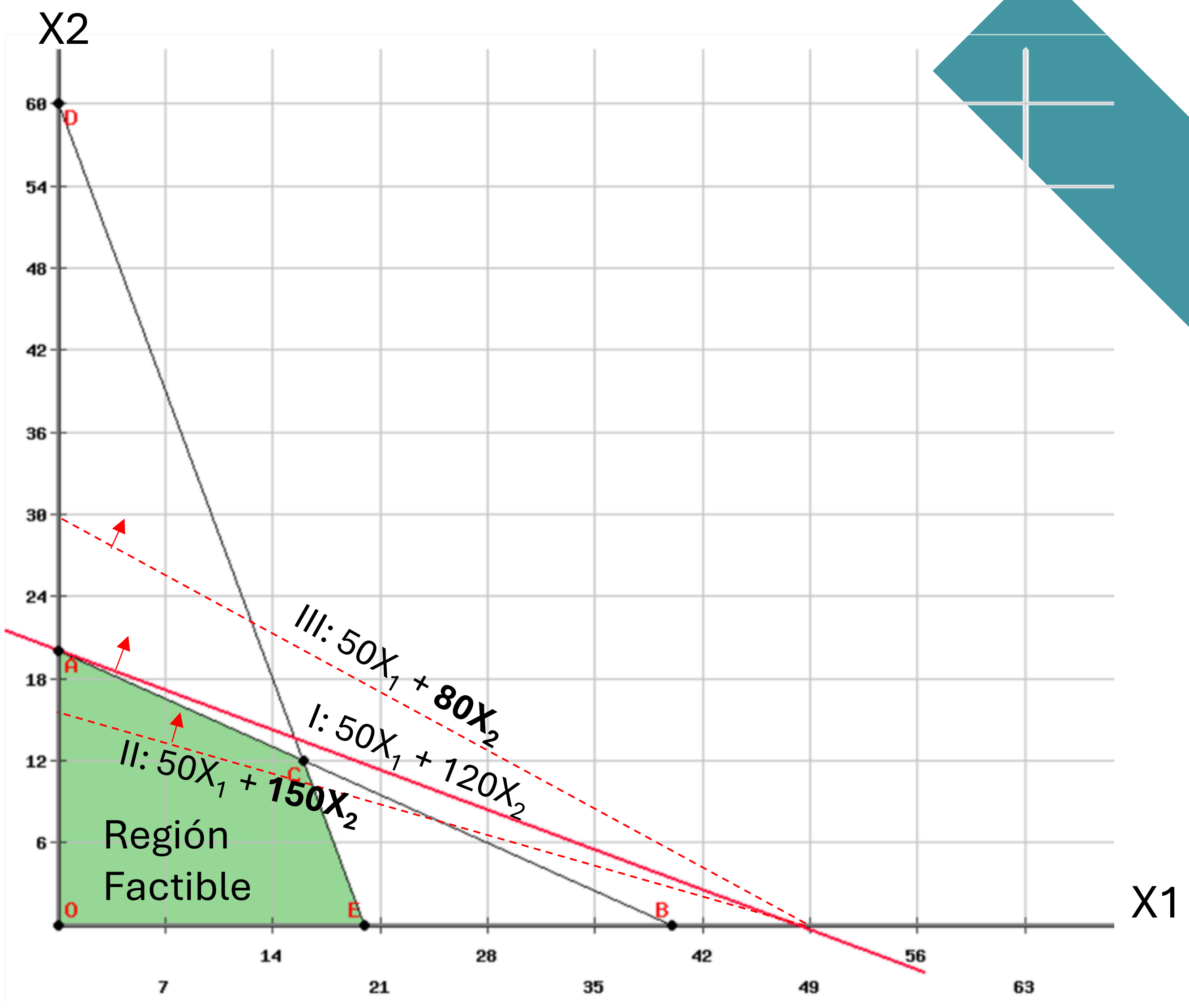
# Cambios en los coeficientes de la función objetivo

¿Qué pasa si debido a un cambio técnico se pudiera cambiar la utilidad de los altavoces?

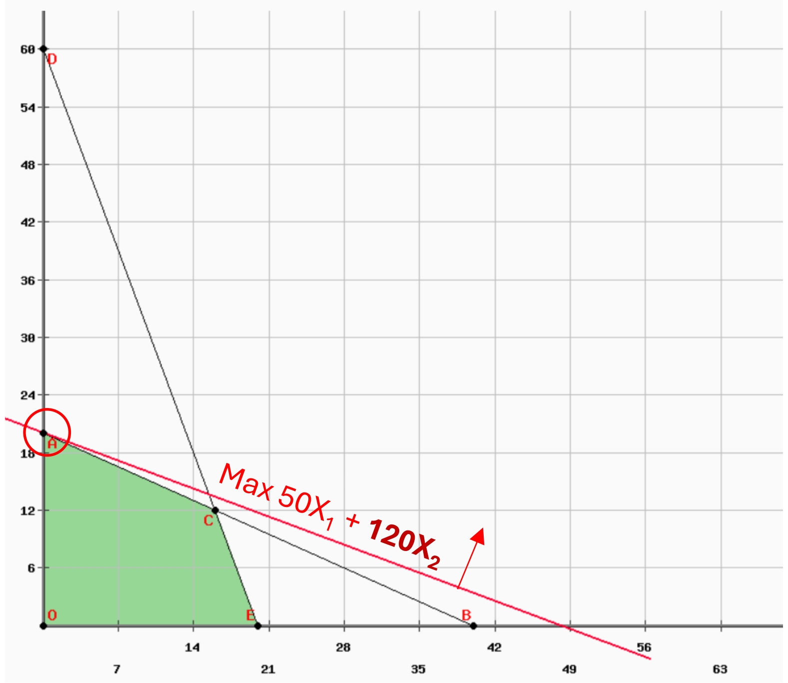
- Para la función objetivo original (I) la solución optimo es el vértice A.
- Para (II) la solución optima también esta en el vértice A.
- Para (III) la solución optima esta en el vértice C.

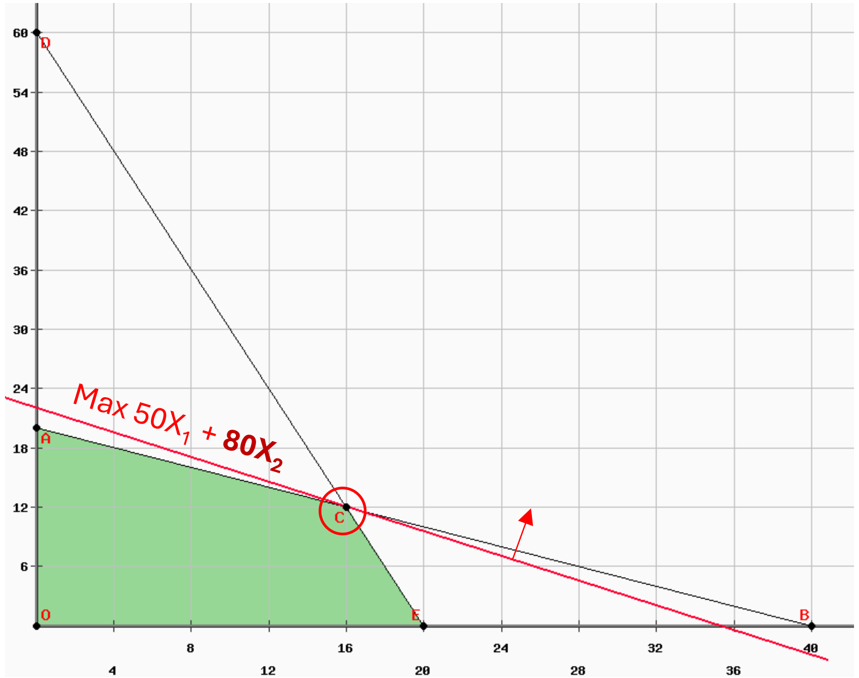
La solución optima puede cambiar pero la región factible se sigue manteniendo igual.

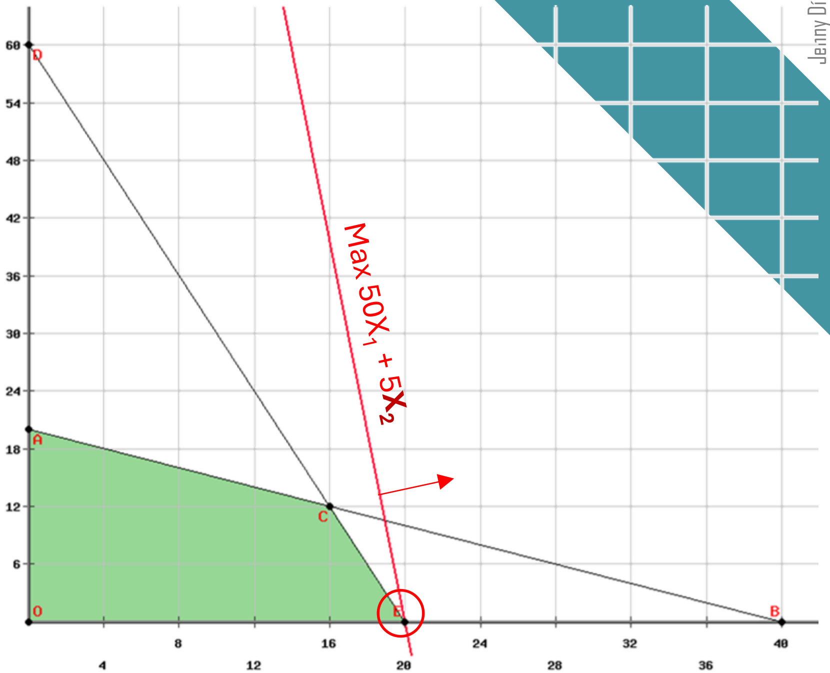
¿Cuánto podemos cambiar la función objetivo sin que la solución cambie?



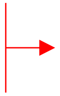
# Cambios en los coeficientes de la función objetivo




- Cuando el coeficiente de X1 tiene mayor peso (+), la recta de isoutilidad tiende a apuntar hacia la derecha.



- Cuando el coeficiente de X2 tiene mayor peso (+), la recta de isoutilidad tiende a apuntar hacia arriba.


Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Lectura de una salida de software

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

- En los software de optimización podemos encontrar la respuesta.
- En LINGO podemos obtener el siguiente análisis.

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| X1 | 50.00000 | 10.00000 | INFINITY |
| X2 | 120.0000 | INFINITY | 20.00000 |

- X1: Para este problema podemos aumentar hasta en $10 la utilidad de los audífonos (utilidad ≤ $60) sin que cambie la solución. Si disminuimos la utilidad incluso hasta $0, la solución actual se mantiene igual.
- X2: Se puede aumentar la utilidad de los altavoces hasta el infinito sin que la solución cambie, pero si disminuimos la utilidad en mas de $20 (utilidad <$100), la solución puede cambiar.

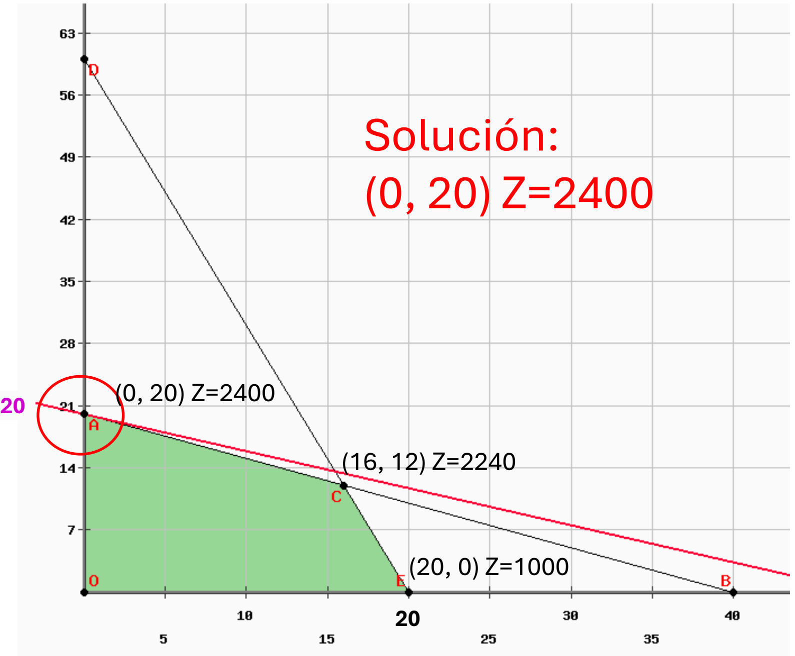
# Cambios en los coeficientes tecnológicos

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

- Los cambios en estos coeficientes generalmente están asociados en cambios tecnológicos. Por ejemplo, producir audífonos o altavoces con menos tiempo debido a una nueva herramienta disponible.
- Estos cambios **influyen** directamente en la **región factible** por lo que la utilidad o costos puede no ser la misma.
- Cuando estos cambios suceden es necesario resolver el problema nuevamente.

# Cambios en los coeficientes tecnológicos

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

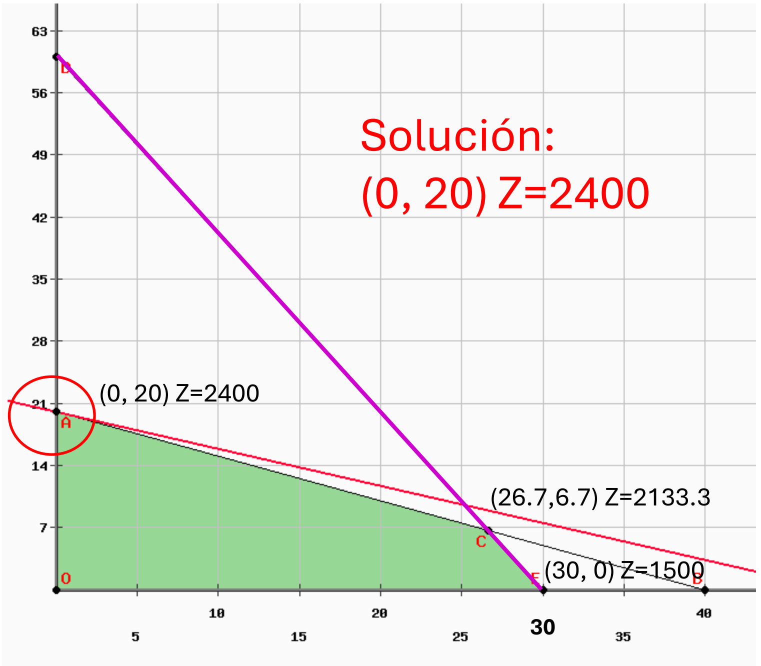



Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + 4\,X2 \leq 80$

$3\,X1 + 1\,X2 \leq 60$

$X1, X2 \geq 0$



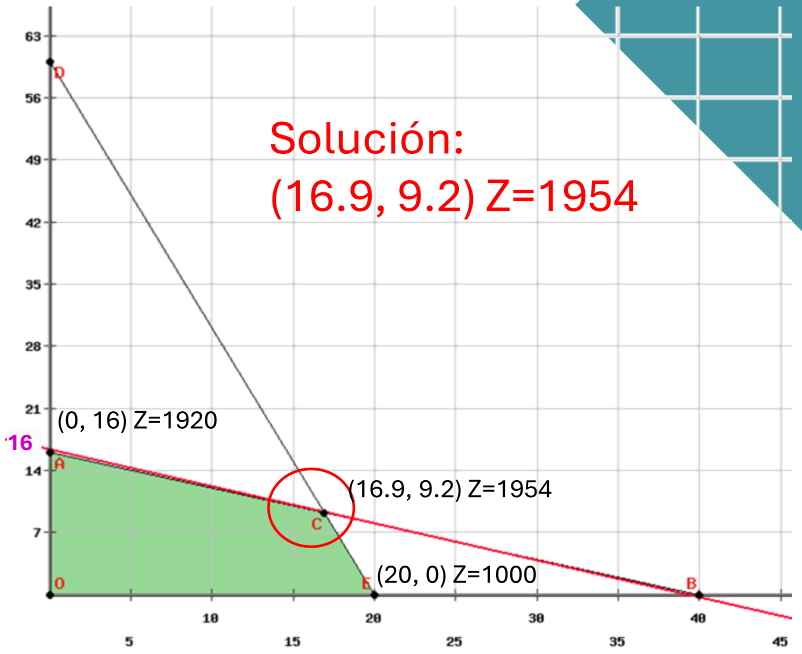

Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + 4\,X2 \leq 80$

$\mathbf{2}\,X1 + 1\,X2 \leq 60$

$X1, X2 \geq 0$

Una disminución en el tiempo de producción de los audífonos no influyo en la solución, ni la utilidad debido a que en la solución optima se recomienda no producir audífonos.




Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + \mathbf{5}\,X2 \leq 80$

$3\,X1 + 1\,X2 \leq 60$

$X1, X2 \geq 0$

Una aumento en el tiempo de producción de los electricistas para los altavoces, si genera un cambio en la solución ya que al aumentar 1 hora de fabricación por cada pieza, se puede producir menos piezas.

# Cambios en los recursos o valores del lado derecho

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

- Estos cambios representan el cambio en los recursos disponibles de la empresa. Por ejemplo, el aumento de horas de trabajo o tiempo de máquina.
- En el ejemplo visto previamente los recursos son el tiempo de mano de obra de los electricistas y de los técnicos.
- ¿Cuánto debería la empresa estar dispuesta a pagar por horas adicionales? ¿ Es rentable tener electricistas o técnicos que trabajen horas extra?

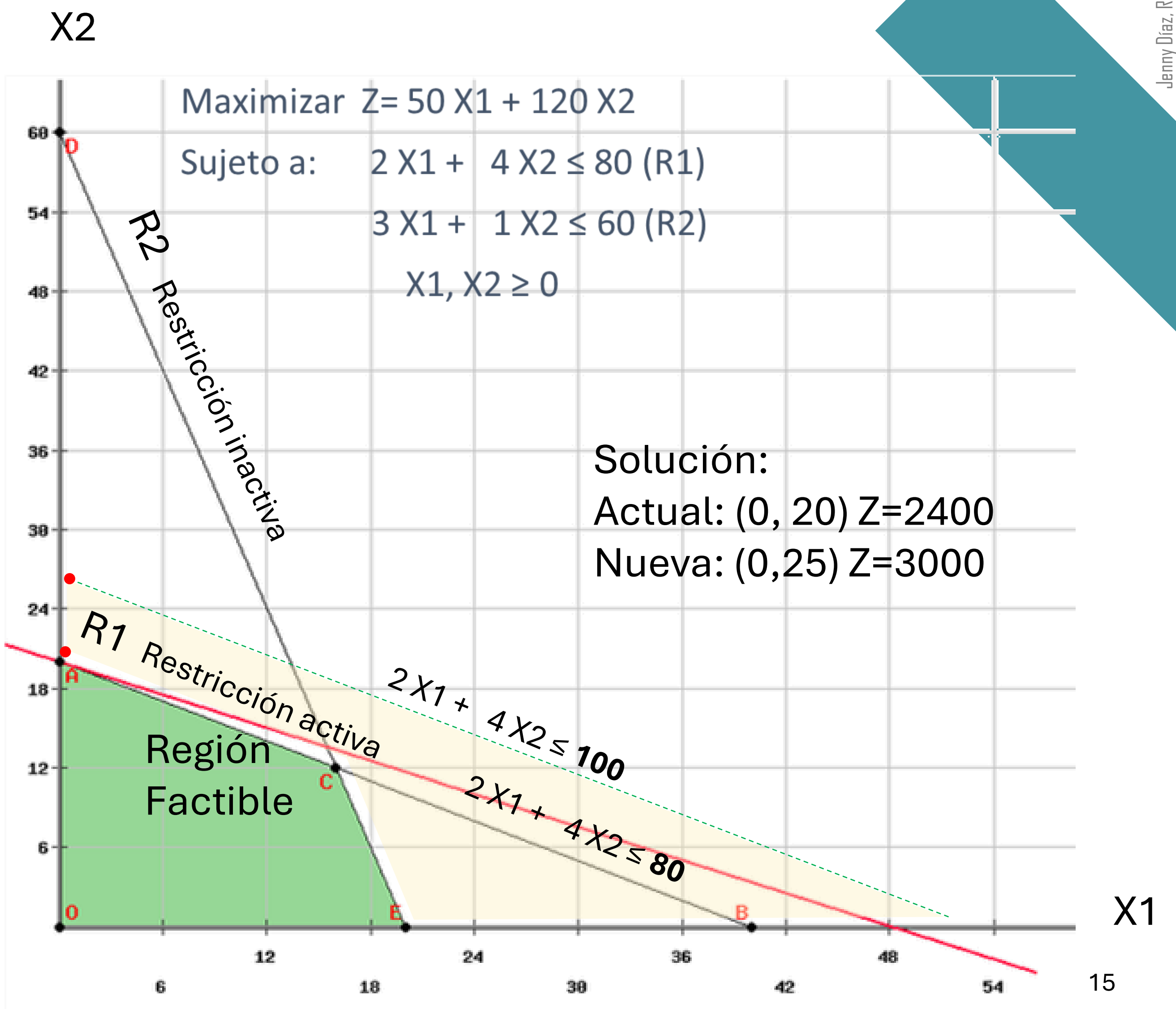
# Cambios en el lado derecho

Suponga que se pudieran incrementar a 100 horas (20 horas extra) el tiempo de los electricistas:

2 X1 + 4 X2 ≤ **100** (R1)

- La nueva solución con 100 horas seria (0, 25) con una utilidad de $3,000.
- Anteriormente con 80 horas la solución era (0,20) y se obtenía una utilidad de $2,400.
- Por lo que las 20 horas extra produjeron una utilidad extra de $600.
- Por cada hora extra se obtuvo una utilidad adicional de $30.

Los **$30** que se generan en la utilidad por cada hora extra se le llama **precio dual o precio sombra**.
El **precio dual o precio sombra** para una restricción es la mejora en el valor de la función objetivo que resulta de un aumento de una unidad en el lado derecho de la restricción.






Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

# Cambios en el lado derecho

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- LINGO también nos proporciona el precio dual de cada una de las restricciones al momento de resolver el modelo.

| | Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|---|
| | FUNCION_OBJETIVO | 2400.000 | 1.000000 |
| Restricción activa | TIEMPO_ELECTRICISTAS | 0.000000 | 30.00000 |
| Restricción inactiva | TIEMPO_TECNICOS | 40.00000 | 0.000000 |

- En esta caso el precio dual de R2 es de $0 porque en la solución optima sólo se utilizan 20 horas de las 60 disponibles, por lo que conviene mejor reducir hasta 40 horas el tiempo de técnicos.

- Desafortunadamente no se pueden incrementar la capacidad de manera indefinida generando siempre un incremento en la utilidad, llega un punto en el que aumentar las horas ya no produce un incremento en la utilidad.

# Cambios en el lado derecho

- LINGO también nos proporciona esta información en el análisis de sensibilidad.

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                          Objective Coefficient Ranges:

                        Current        Allowable        Allowable
         Variable     Coefficient       Increase         Decrease
               X1        50.00000       10.00000         INFINITY
               X2        120.0000       INFINITY         20.00000

                             Righthand Side Ranges:

                          Current        Allowable        Allowable
                  Row         RHS         Increase         Decrease
TIEMPO_ELECTRICISTAS     80.00000         160.0000         80.00000
     TIEMPO_TECNICOS     60.00000         INFINITY         40.00000
```

Restricción Activa

Restricción Inactiva

Mejora o disminuye la utilidad

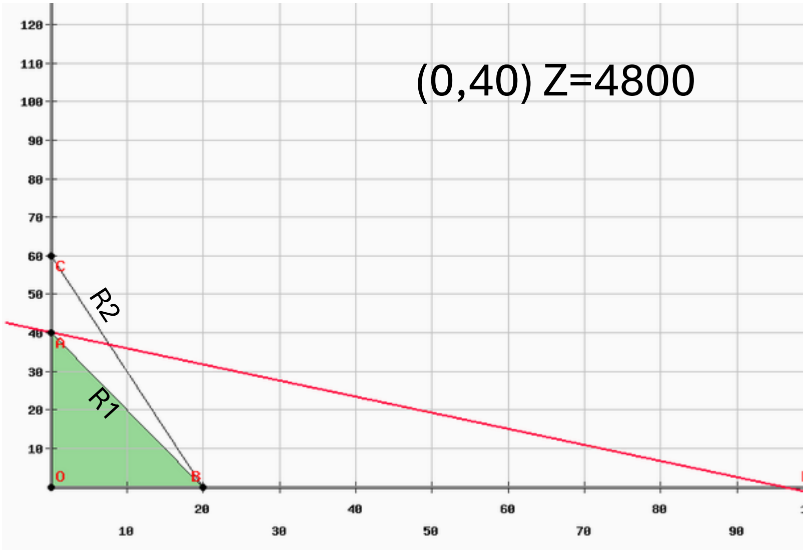
Se mantiene la solución actual

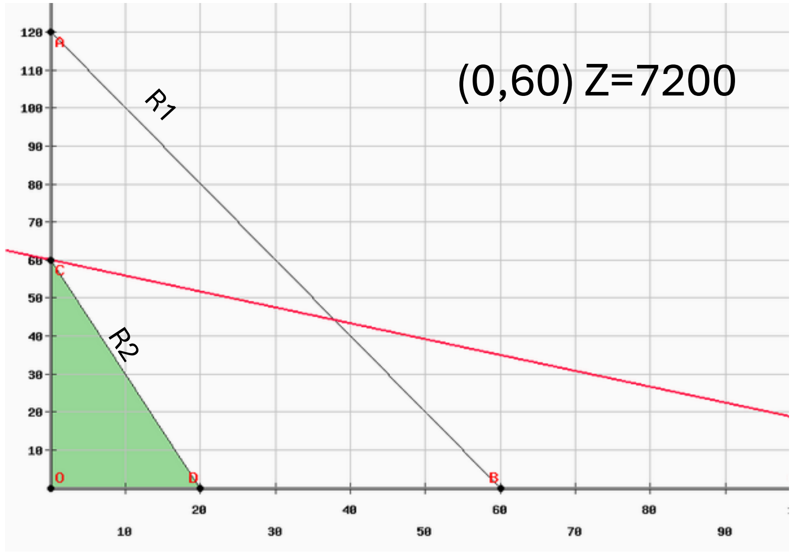
- En este caso sólo se puede incrementar la capacidad del tiempo de electricistas hasta 160 horas más (total de 240 horas), si se aumentara más la capacidad, la utilidad ya no podría mejorar.

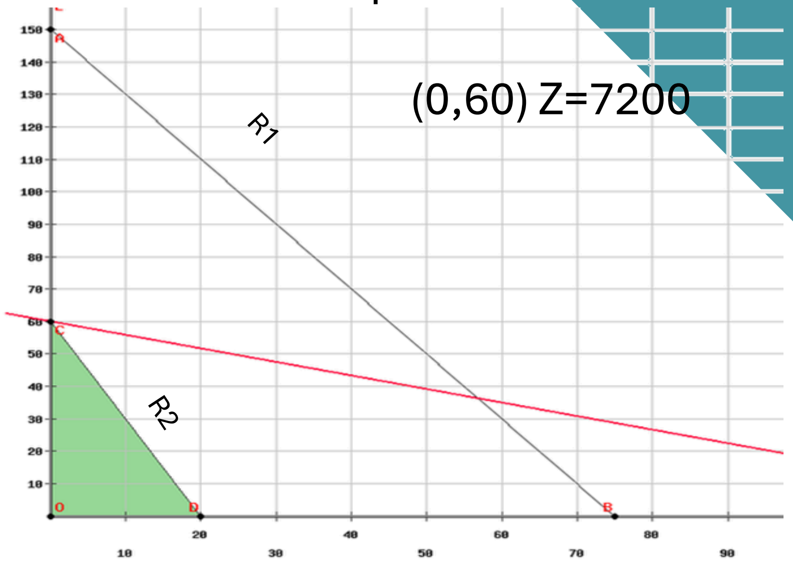
Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

# Cambios en el lado derecho

Cambiando el lado derecho de la restricción 1 (R1) a 240 y 300 horas de tiempo de electricistas disponible.




Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + 4\,X2 \leq 80$ (R1) **Activa**

$3\,X1 + 1\,X2 \leq 60$ (R2) Inactiva

$X1, X2 \geq 0$

Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + 4\,X2 \leq \mathbf{240}$ (R1) Inactiva

$3\,X1 + 1\,X2 \leq 60$ (R2) **Activa**

$X1, X2 \geq 0$

Maximizar $Z = 50\,X1 + 120\,X2$

Sujeto a: $2\,X1 + 4\,X2 \leq \mathbf{300}$ (R1) Inactiva

$3\,X1 + 1\,X2 \leq 60$ (R2) **Activa**

$X1, X2 \geq 0$

Se observa que al aumentar a 240 horas la utilidad fue de 7,200 y al aumentar mas horas ya no se generó mayor utilidad.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Cambios en el lado derecho

Por ejemplo, si cambiáramos R1:

$2X1 + 4X2 \leq 240$ (R1)

```
Objective value:  7200.000

      Variable           Value        Reduced Cost
            X1        0.000000            10.00000
            X2        60.00000            0.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
FUNCION_OBJETIVO        7200.000            1.000000
TIEMPO_ELECTRICISTAS    0.000000            30.00000
TIEMPO_TECNICOS         0.000000            0.000000

              Objective Coefficient Ranges:

                  Current        Allowable        Allowable
  Variable      Coefficient       Increase         Decrease
        X1        50.00000        10.00000         INFINITY
        X2        120.0000        INFINITY         20.00000

                  Righthand Side Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
               Row       RHS          Increase         Decrease
TIEMPO_ELECTRICISTAS  240.0000        0.000000         240.0000
     TIEMPO_TECNICOS  60.00000        INFINITY         0.000000
```

$2X1 + 4X2 \leq 300$ (R1)

```
Objective value:  7200.000
      Variable           Value        Reduced Cost
            X1        0.000000            310.0000
            X2        60.00000            0.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
FUNCION_OBJETIVO        7200.000            1.000000
TIEMPO_ELECTRICISTAS    60.00000            0.000000
TIEMPO_TECNICOS         0.000000            120.0000

              Objective Coefficient Ranges:

                  Current        Allowable        Allowable
  Variable      Coefficient       Increase         Decrease
        X1        50.00000        310.0000         INFINITY
        X2        120.0000        INFINITY         103.3333

                  Righthand Side Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
               Row       RHS          Increase         Decrease
TIEMPO_ELECTRICISTAS  300.0000        INFINITY         60.00000
     TIEMPO_TECNICOS  60.00000        15.00000         60.00000
```

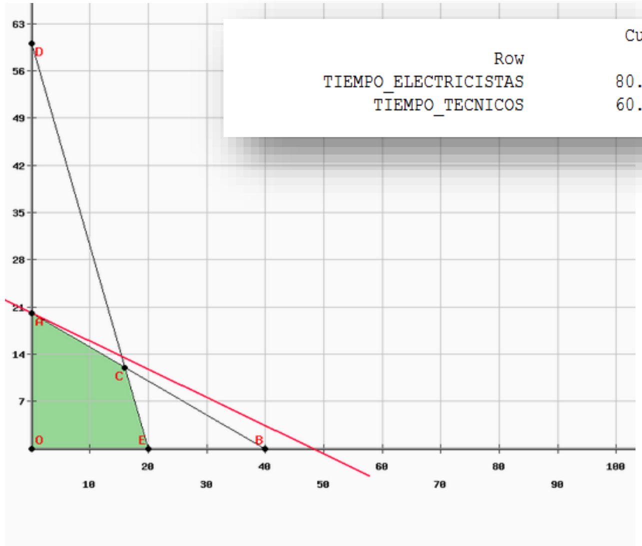
La función objetivo ya no mejoró al aumentar la capacidad mas allá de 240 para R1, en el caso de aumentar a 300 horas, ya no se pueden producir mas receptores porque el tiempo de los técnicos se ocupa en su totalidad y ahora si se aumentaran las horas de técnicos se lograría un aumento en la utilidad de $120.

# Cambios en el lado derecho

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

Cambiando el lado derecho de la restricción 1 (R2) a 20 y 10 horas de tiempo de técnicos de audio.

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| TIEMPO_ELECTRICISTAS | 80.00000 | 160.0000 | 80.00000 |
| TIEMPO_TECNICOS | 60.00000 | INFINITY | 40.00000 |



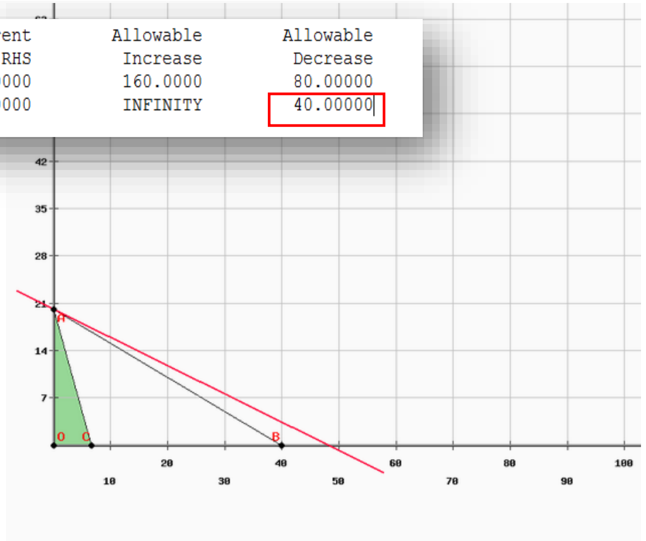
| Punto | Coordenada X ($X_1$) | Coordenada Y ($X_2$) | Valor de la función objetivo (Z) |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | 20 | 2400 |
| B | 40 | 0 | 2000 |
| C | 16 | 12 | 2240 |

Maximizar Z= 50 X1 + 120 X2

Sujeto a: 2 X1 + 4 X2 ≤ 80

3 X1 + 1 X2 ≤ 60

X1, X2 ≥ 0



| Punto | Coordenada X ($X_1$) | Coordenada Y ($X_2$) | Valor de la función objetivo (Z) |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | 20 | 2400 |
| B | 40 | 0 | 2000 |
| C | 6.6666666666667 | 0 | 333.33333333333 |

Maximizar Z= 50 X1 + 120 X2

Sujeto a: 2 X1 + 4 X2 ≤ 80

3 X1 + 1 X2 ≤ **20**

X1, X2 ≥ 0

| Punto | Coordenada X ($X_1$) | Coordenada Y ($X_2$) | Valor de la función objetivo (Z) |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 0 |
| A | 0 | 20 | 2400 |
| B | 40 | 0 | 2000 |
| C | 0 | 10 | 1200 |

Maximizar Z= 50 X1 + 120 X2

Sujeto a: 2 X1 + 4 X2 ≤ 80

3 X1 + 1 X2 ≤ **10**

X1, X2 ≥ 0

Se observa que al disminuir hasta 20 horas, la solución no cambia; pero si se disminuye a menos de 20 horas la solución cambia y tiene menor utilidad.

# Análisis de Sensibilidad Gráfico

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

**Ejercicio:**

TOYCO produce dos artículos en dos máquinas. Una unidad del artículo 1 requiere 2 horas en la máquina 1 y 1 hora en la máquina 2. El artículo 2 requiere 1 hora en la máquina 1 y 3 horas en la máquina 2. Las ganancias por unidad de artículos 1 y 2 son \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo diario total de procesamiento disponible por cada máquina es 8 horas.

Sea $x1$ y $x2$ las variables que representan el número diario de unidades de artículos 1 y 2 a producir, respectivamente.

# Análisis de Sensibilidad Gráfico

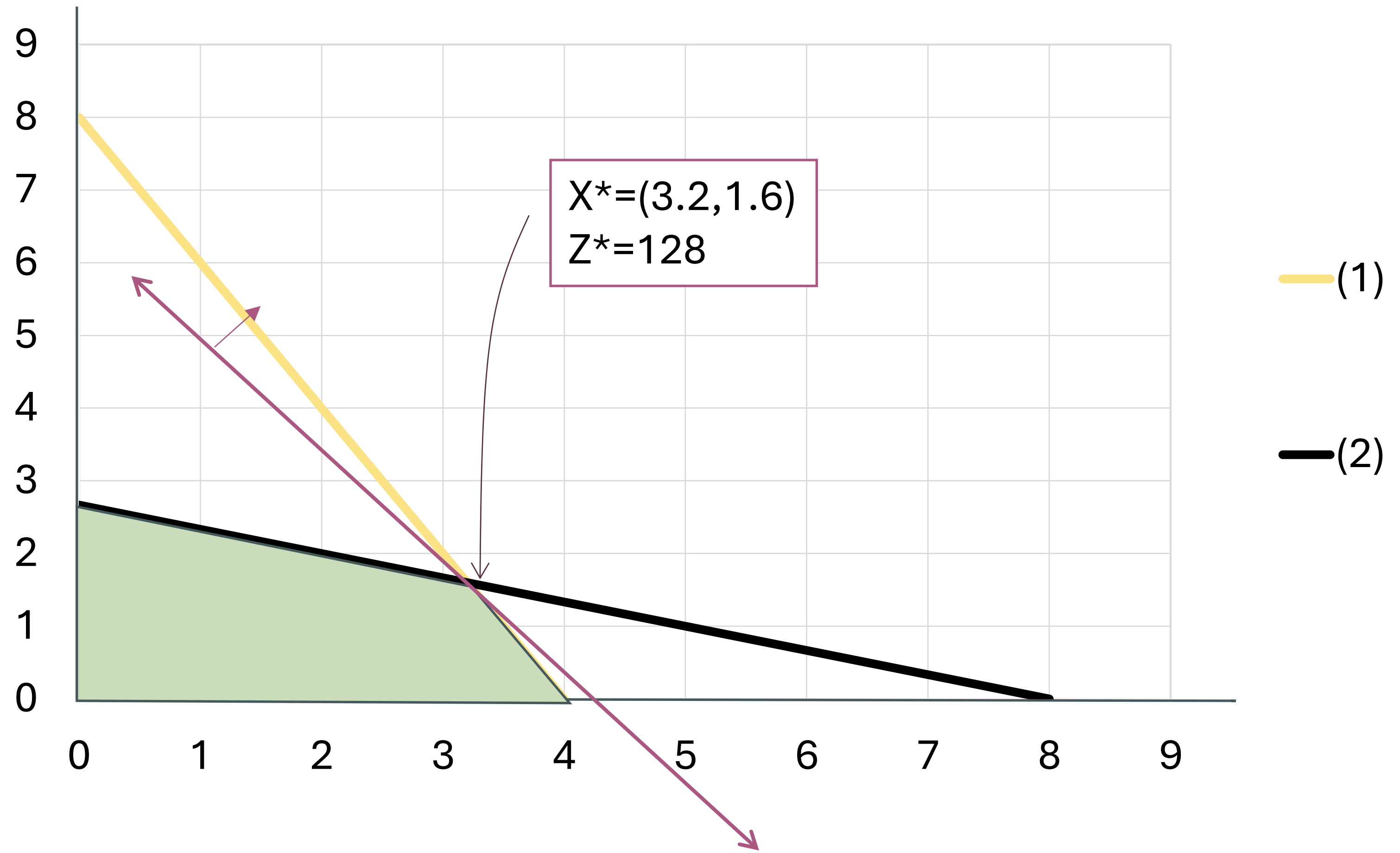
Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

## Cambios en el Lado Derecho

### Concepto de rangos de factibilidad

- Q1: Si TOYCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, cuál máquina debería recibir mayor prioridad?
- Q2: Se sugirió incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 a un costo adicional de $10/h. Es esto recomendable?
- Q3: Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, en cuánto impactará este cambio en la ganancia óptima?
- Q4: Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas. Cuál es el impacto en el incremento de la ganancia óptima?

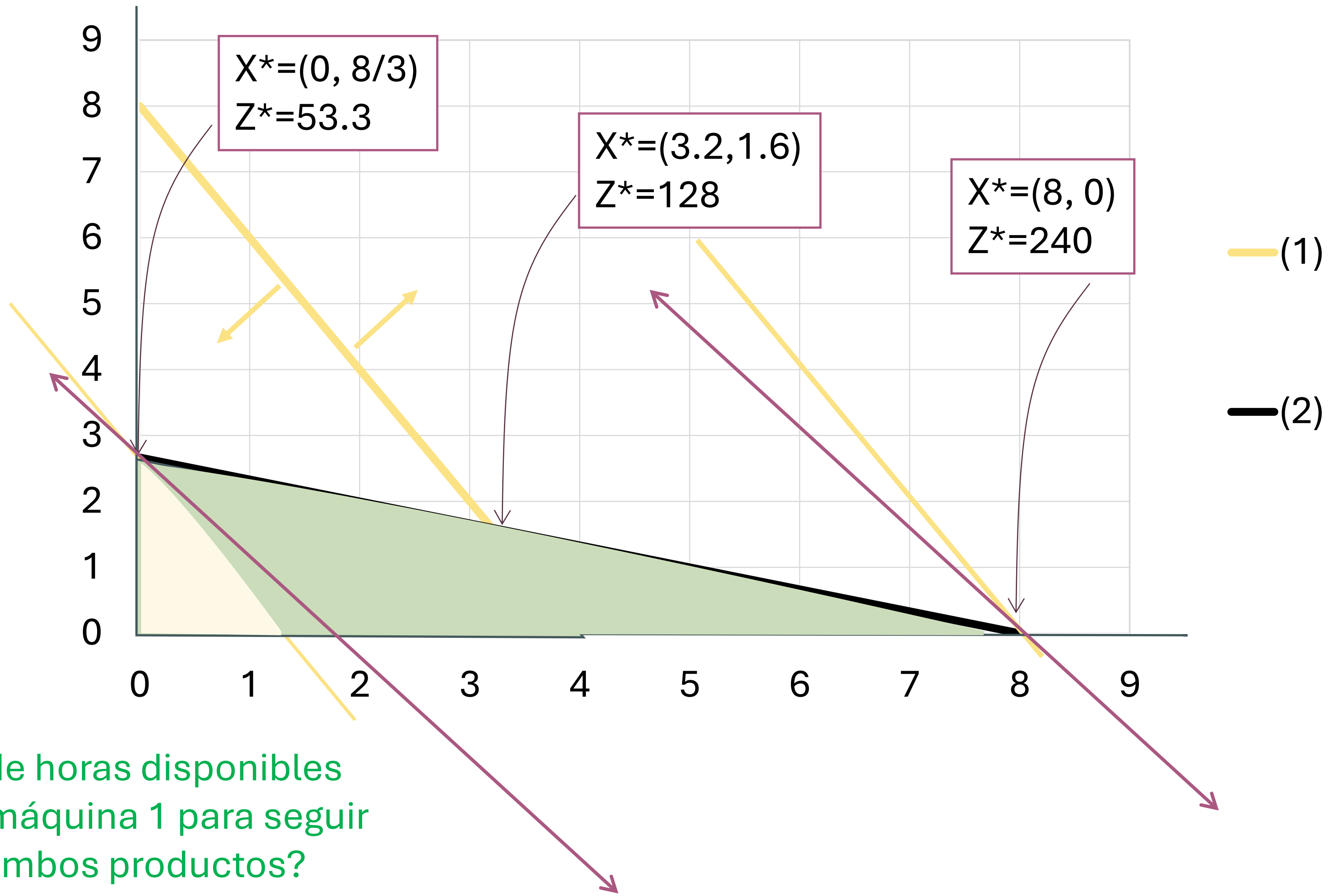
# Análisis gráfico




Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Análisis gráfico

Cambio de la región factible y de la solución cuando se cambia el lado derecho de la restricción 1:
Si el tiempo disponible de la máquina 1 cambia.

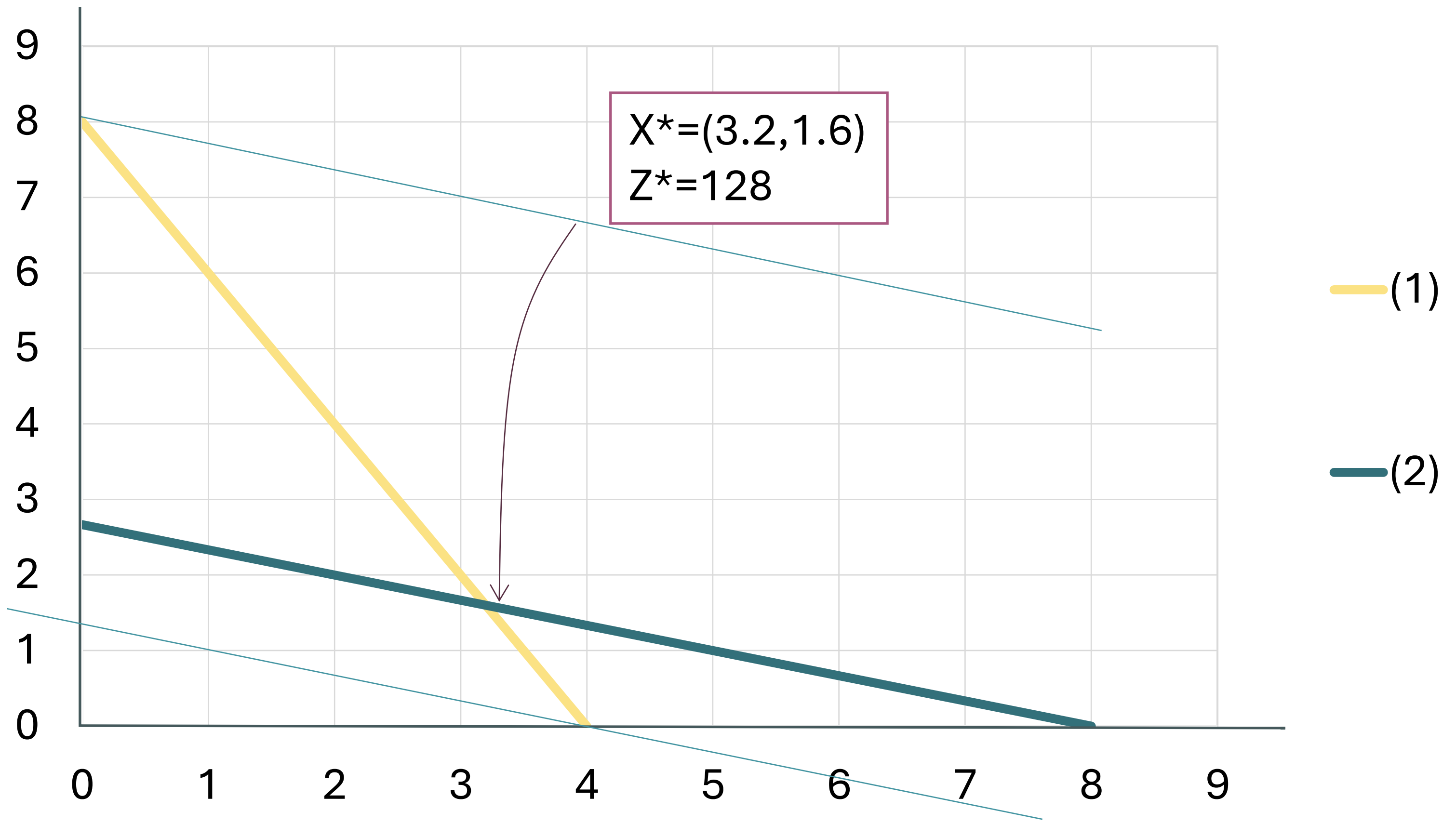



En qué rango de horas disponibles debe tener la máquina 1 para seguir produciendo ambos productos?

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

# Análisis gráfico

Ahora, ¿cómo cambia la región factible y la solución cuando se cambia el lado derecho de la restricción 2:
Es decir, si el tiempo disponible de la máquina 2 cambia.




En qué rango de horas disponibles debe tener la máquina 2 para seguir produciendo ambos productos?

# Análisis de Sensibilidad Gráfico

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

## Cambios en los coeficientes de la función objetivo

## Concepto de rangos de optimalidad

- Q1: Suponga que las ganancias unitarios de los artículos 1 y 2 se cambian a \$35 y \$25 respectivamente. Se mantendrá el óptimo actual?
- Q2: Suponga que la ganancia unitaria del artículo 2 se fija a su valor actual de \$20. Cuál es el rango asociado a c1, la ganancia unitario del artículo 1, que mantendrá el óptimo sin cambio?

# Análisis de Sensibilidad…

Impacto de la solución ante cambios que afecten:

**Factibilidad**

- Cambios en el lado derecho (bi)
- Adición de una nueva restricción
- Rangos de factibilidad (para bi y aij)

**Optimalidad**

- Cambios en los coeficientes de la F.O. (cj)
- Adición de una nueva variable
- Rangos de optimalidad
- Soluciones no básicas

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Cambios que afectan la factibilidad de Xb*

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Cambios en el lado derecho

$$\bar{b}_{new} = b + \Delta b = b + \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix}$$

- Rango de factibilidad de los recursos (lado derecho)

$$\bar{b}_{new} = B^{-1} b_{new} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Cambio en Z por cambio en los recursos (LD)

$$z_{new} = z + y' \Delta b \qquad z_{new} = z + \sum_i y_i \Delta b_i$$

# Cambios que afectan la factibilidad de Xb*

- Adición de una nueva restricción: $\mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b_{m+1}$
  - Reemplazar valores de X* en la nueva restricción.
  - Si se satisface, X* permanece óptima.  La restricción es redundante en X*.
  - Si no, el nuevo problema es infactible.
  - Acciones
    - Aplicar el simplex dual al nuevo problema (óptimo infactible).
      - La base cambia de tamaño. (por qué?).
      - La nueva variable básica= la holgura asociada a la nueva restricción es negativa. (por qué?)
      - El nuevo tablero tiene la forma:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ | $\mathbf{0}$ | |
| $\mathbf{a}_B'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{a}_{m+1}$ | $1$ | |

    - Otra opción es calcular el dual y reoptimizar con simplex.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

# Cambios que afectan la optimalidad de Xb*

- Cambios en los coeficientes de la función objetivo:
  - Coeficientes de variables no básicas:
    - Revisar si la condición de optimalidad se cumple.

$$c_{j\,new} = c_j + \Delta c_j$$

$$\bar{c}_{j\,new} = \mathbf{y}'\mathbf{A}_j - c_{j\,new} \geq 0?$$

- Si no, la solución es factible pero ya no es óptima.
- Aplicar Simplex. La variable es candidata a entrar a la base.

*Problema de maximización

# Cambios que afectan la optimalidad de Xb*

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Cambios en los coeficientes básicos de la función objetivo: $c_i, x_i \in x_B$

  - Rangos de los coeficientes de variables básicas:
    - Asegurar que la condición de optimalidad se mantiene para todas las variables no básicas. Por qué?

$$\bar{c}_{j\,new} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - c_j \geq 0 \quad \forall j \in N$$

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \ldots & c_i & c_m \end{bmatrix}$$

*Problema de maximización

# Cambios que afectan la optimalidad de Xb*

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Adición de una nueva variable:
  - X* actual == $x_{n+1} = 0$ , es decir, $x_{n+1}$ es no básica
  - Acciones
    - Calcular el costo reducido de la nueva variable.
    - La base no cambia (por qué?).

$$\bar{c}_{n+1} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{n+1} - c_{n+1} \geq 0\,??$$

    - Si $\bar{c}_{n+1} \geq 0$. La solución actual es óptima.
    - De lo contrario, la solución actual es factible pero no óptima. (por qué?)
    - Aplique el Simplex. La nueva variable entra a la base.

# Cambios que afectan la optimalidad de Xb*



- Cambios en una columna no básica de A

$$\mathbf{A}_{j\,new} = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \Delta_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

- Es $\Delta_{ij} \times y_i - \bar{c}_j \geq 0$??

# Ejemplo 3

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

## Cambios en coeficientes de LD de restricción

- El rango de sensibilidad del valor del lado derecho de una restricción es el rango de valores sobre los que el valor de la cantidad puede cambiar sin cambiar la mezcla de variables de solución, incluyendo las variables de holgura.
- Dichas variables de solución son aquellas que tienen valores diferentes de cero.
- El rango de sensibilidad para el coeficiente lado derecho de la restricción i es llamado $q_i$.

# Cambios en coeficientes de LD de restricción

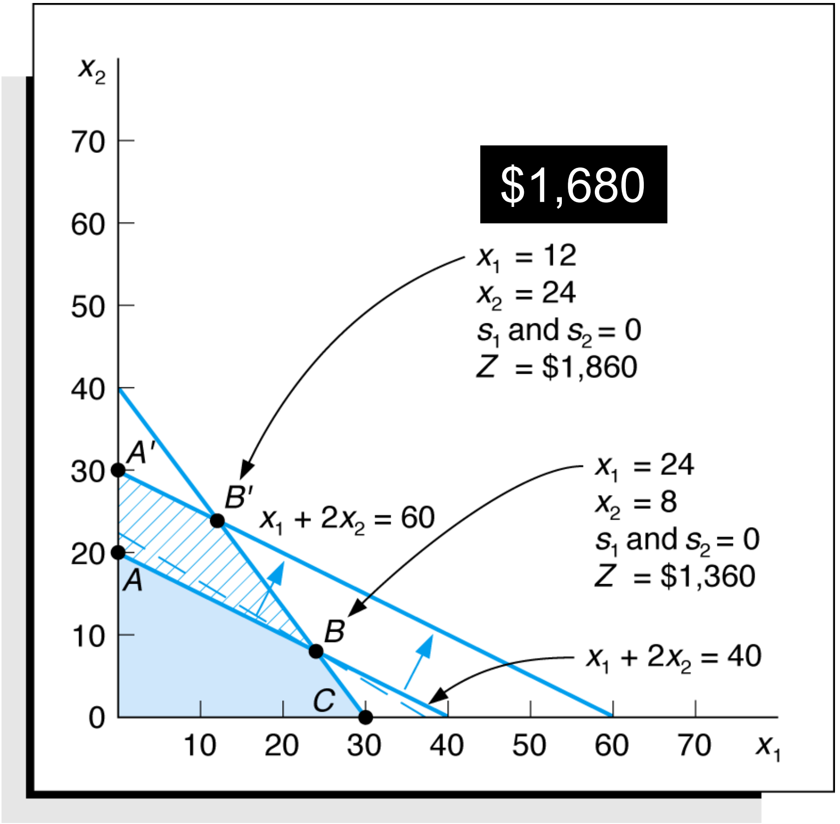
Max $Z = \$ 40x_1 + \$ 50x_2$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

- Este es el resultado de un incremento en la restricción de mano de obra.
- Los valores cambian, pero las variables con valores solución ó diferentes de cero son las mismas.



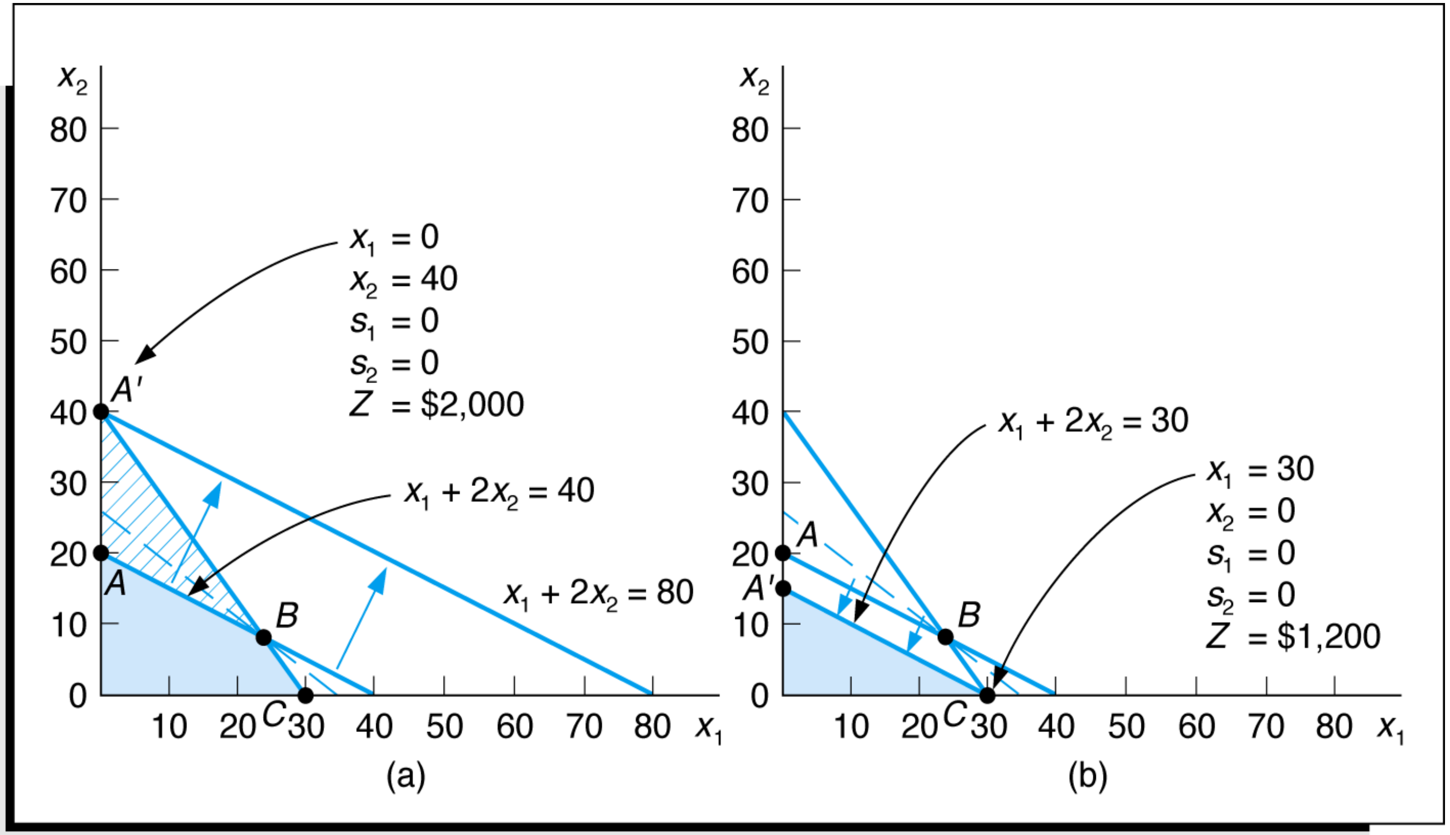

Incremento en la restricción de mano de obra

# Cambios en coeficientes de LD de restricción



Determinando el rango de sensibilidad para la cantidad de mano de obra disponible: esto es donde alguna de las variables de la solución se hace cero

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \$40x_1 + \$50x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ & 1x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ & X_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$




Rango de sensibilidad: $30 \leq q_1 \leq 80$ hrs

Se deja de hacer uno de los productos, sean tazas o tazones.

# Cambios en coeficientes de LD de restricción

Determinando el rango de sensibilidad para la cantidad de material disponible: esto es donde alguna de las variables de la solución se hace cero.

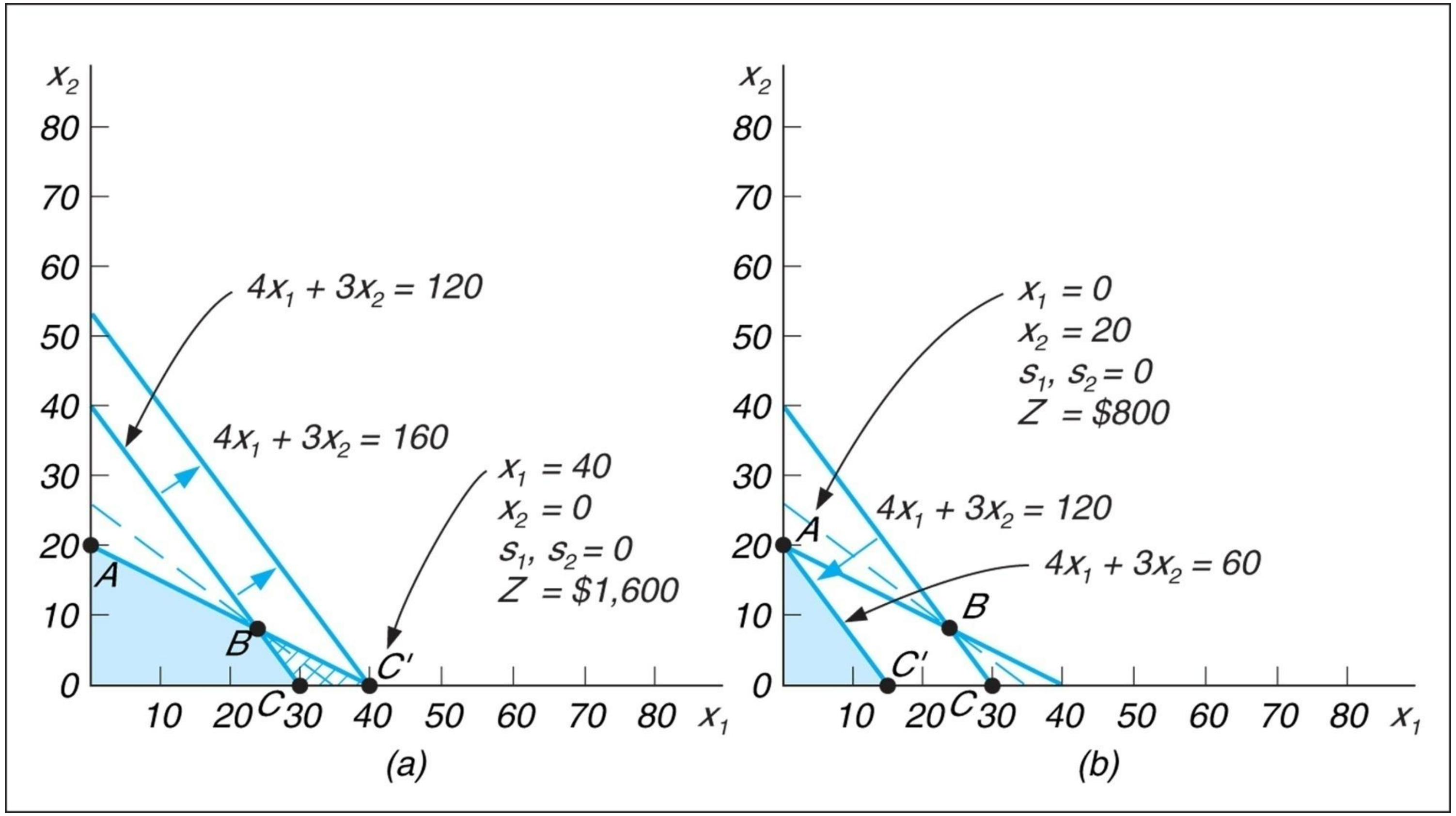
max $Z = \$40x_1 + \$50x_2$

sujeto a:

$1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, x_2 \geq 0$

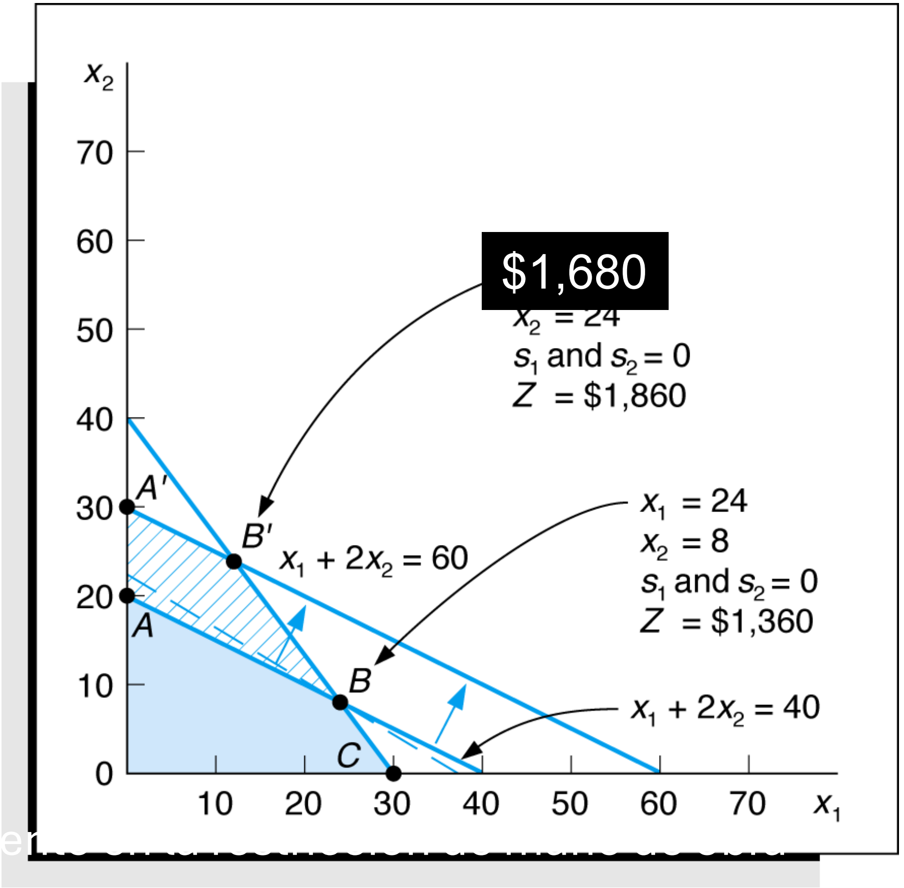



Rango de sensibilidad: $60 \leq q_2 \leq 160$ hrs

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

- También podemos preguntar ¿cuál es el efecto en el valor de Z de agregar una unidad adicional de algún recurso?
- Por ejemplo, si agregamos 20 horas adicionales a la cantidad de mano de obra disponible.



# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Este cálculo nos da una relación directa entre las entradas del modelo (recursos) y su resultado (ganancia total).
- Nos dice que por cada incremento en la cantidad de horas disponibles las ganancias se incrementarán en $16.
- Esto se conoce como el **Precio Dual** o **Precio Sombra**.
- Es el valor marginal de un recurso, la contribución a la función objetivo por cada unidad de recurso adicional.

# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Con este dato a la mano es fácil saber que si agregamos una hora adicional de mano de obra
  Z será igual a $1,376…

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \$\,40x_1 + \$\,50x_2 \\ \text{s. a.} \quad 1x_1 + 2x_2 &\le 40 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 120 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$X_1=24,\ x_2=8,\ Z=\$1,360$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \$\,40x_1 + \$\,50x_2 \\ \text{s. a.} \quad 1x_1 + 2x_2 &\le 41 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 120 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$X_1=23.4,\ x_2=8.8,\ Z=\$1,376$

- … sin necesidad de resolver el problema nuevamente.
- Esto es útil cuando el programa lineal tiene miles de restricciones y variables, y correr la solución otra vez es costoso y consume demasiado tiempo.

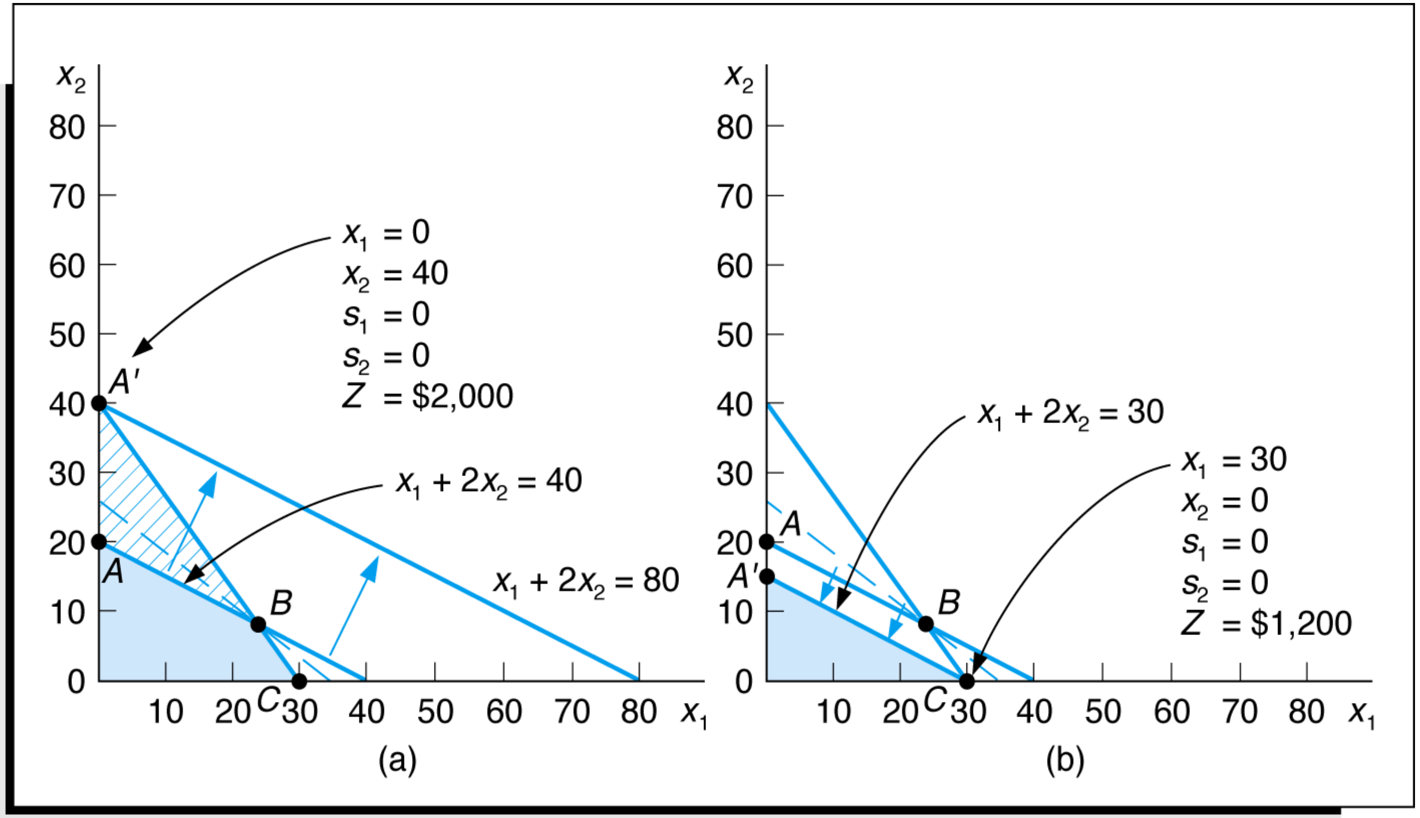
# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

El precio dual es válido mientras el cambio en el LD permanezca dentro del rango de sensibilidad.

Es decir, mientras 30 hrs. ≤ mano de obra ≤ 80 hrs.

Max $Z = \$40x_1 + \$50x_2$
sujeto a:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$




Rango de sensibilidad: $30 \leq q_1 \leq 80$ hrs

# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Llevando a cabo los mismo cálculos para la restricción de materia prima (arcilla) podemos obtener los siguientes datos:

Precio Dual = $6

60 lbs ≤ arcilla ≤ 160 lbs.

**Con esta información es posible responder a varias preguntas gerenciales de interés.**

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Coeficientes de LD de restricción y Precio Dual

- También es posible determinar cuales serán los valores de las variables básicas dependiendo del cambio en el lado derecho de una restricción.
- En el caso de Beaver Creek se igualan

$$x_1+2x_2 = 40 + \Delta \quad y \quad 4x_1+3x_2 = 120$$

- Esto resulta en las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = 24 - 0.6\,\Delta \quad y \quad x_2 = 8 + 0.8\,\Delta$$

**Max $Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$**

**s. a.** $\quad 1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$\quad 4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$

**$X_1=24, x_2=8, Z=\$1,360$**

**Max $Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$**

**s. a.** $\quad 1x_1 + 2x_2 \leq 41$

$\quad 4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$

**$X_1=23.4, x_2=8.8, Z=\$1,376$**

# Decisiones gerenciales

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Si Beaver Creek pudiera incrementar sus recursos de mano de obra o de materia prima, ¿a cual debería darle prioridad?
- A partir de la información de precios duales se puede ver que cada hora adicional puede aportar un incremento de $16, mientras que un aumento en materia prima solo aporta $6. Por lo tanto se debe dar prioridad a un incremento en mano de obra.

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| $16 | 30 hrs $\leq q_1 \leq$ 80 hrs | $6 | 60 lbs $\leq q_2 \leq$ 160 lbs |

# Decisiones gerenciales

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Se sugiere incrementar la cantidad de mano de obra a un costo de $18 por hora, y de materia prima a un costo de $5 por libra. ¿Es esto recomendable?

Para mano de obra 16-18= -$2

Para materia prima 6-5= $1

Por lo tanto sólo se debe considerar el incremento en materia prima.

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| $16 | 30 hrs $\le q_1 \le$ 80 hrs | $6 | 60 lbs $\le q_2 \le$ 160 lbs |

# Decisiones gerenciales

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Si la cantidad de mano de obra se incrementa de 40 a 55 hrs ¿cuál sería el impacto en la ganancia óptima?

El incremento está dentro del rango de factibilidad, de modo que aplica el dual de $16.

- Por lo tanto el incremento en sería de $16*(55-40)=$240
- La utilidad final sería de $1,360 + 240 = $1,600

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| $16 | 30 hrs ≤ $q_1$ ≤ 80 hrs | $6 | 60 lbs ≤ $q_2$ ≤ 160 lbs |

# Decisiones gerenciales

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Suponga que la disponibilidad de materia prima se incrementa a 170 lbs. ¿Cómo afectaría esto la ganancia óptima?

El incremento se ubica fuera del rango de factibilidad, por lo tanto no es posible sacar conclusiones de manera inmediata acerca del incremento de 50 lbs.

Sería necesario hacer más cálculos.

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| \$16 | 30 hrs ≤ $q_1$ ≤ 80 hrs | \$6 | 60 lbs ≤ $q_2$ ≤ 160 lbs |

# Decisiones gerenciales

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

- ¿Cómo se podría determinar el cambio en los valores de las variables causado por el cambio en recursos de la pregunta anterior?
- Las variables de la solución básica factible cambian. Por lo tanto es necesario hacer otra serie de cálculos.

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| $16 | 30 hrs $\leq q_1 \leq$ 80 hrs | $6 | 60 lbs $\leq q_2 \leq$ 160 lbs |

# Análisis de sensibilidad en la computadora

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

- Si un PL tiene más de dos variables de decisión, el rango de valores para un LD (o coeficiente de función objetivo) para los que la base sigue siendo la óptima no se puede determinar de forma gráfica.
- Estos rangos se pueden calcular a mano, pero esto suele ser tedioso, por lo que normalmente se recurre a software especializado en investigación de operaciones.

# Ejemplo: Valley Wines

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- **Variables de decisión**

  $X_1$= Número de lotes de 1000 galones de Valley Nectar

  $X_2$= Número de lotes de 1000 galones de Valley Red

- **Función objetivo**

  Maximizar $Z = 9{,}000\,X_1 + 12{,}000\,X_2$

- **Sujeto a:**

| | |
|---|---|
| $4X_1 + 8X_2 \le$ | 64 tons. de uva disponibles |
| $5X_1 + 5X_2 \le$ | 50 yd.$^3$ de almacenamiento disponible |
| $15X_1 + 8X_2 \le$ | 120 hrs. de procesamiento disponible |
| $X_1 \le$ | 7 lotes de demanda para V. Nectar |
| $X_2 \le$ | 7 lotes de demanda para V. Red |
| $X_1, X_2 \ge$ | 0 |

# Ejemplo: Valley Wines

- Utilizando QM se obtiene la siguiente información de salida:

- Estas ventanas muestra rangos de sensibilidad y precios sombra.

Linear Programming Results

Valley Wine Solution

| Variable | Status | Value |
|---|---|---|
| Lotes de Nectar | Basic | 4 |
| Lotes de Rojo | Basic | 6 |
| slack 1 | NONBasic | 0 |
| slack 2 | NONBasic | 0 |
| slack 3 | Basic | 12 |
| slack 4 | Basic | 3 |
| slack 5 | Basic | 1 |
| Optimal Value (Z) | | 108000 |

Ranging

Valley Wine Solution

| Variable | Value | Reduced Cost | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
|---|---|---|---|---|---|
| Lotes de Nectar | 4 | 0 | 9000 | 6000 | 12000 |
| Lotes de Rojo | 6 | 0 | 12000 | 9000 | 18000 |
| Constraint | Dual Value | Slack/Surplus | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
| Uva disponible | 750 | 0 | 64 | 57.1429 | 68 |
| Almacenamiento disponible | 1200 | 0 | 50 | 45 | 52.7273 |
| Hrs procesamiento disponible | 0 | 12 | 120 | 108 | Infinity |
| Lotes de demanda Nectar | 0 | 3 | 7 | 4 | Infinity |
| Lotes de demanda Rojo | 0 | 1 | 7 | 6 | Infinity |

# Ejemplo: Valley Wines

- Utilizando QM se obtiene la siguiente información de salida:

- Observe que solo los recursos utilizados al 100% pueden agregar un valor adicional.

**Linear Programming Results**

Valley Wine Solution

| Variable | Status | Value |
|---|---|---|
| Lotes de Nectar | Basic | 4 |
| Lotes de Rojo | Basic | 6 |
| slack 1 | NONBasic | 0 |
| slack 2 | NONBasic | 0 |
| slack 3 | Basic | 12 |
| slack 4 | Basic | 3 |
| slack 5 | Basic | 1 |
| Optimal Value (Z) | | 108000 |

**Ranging**

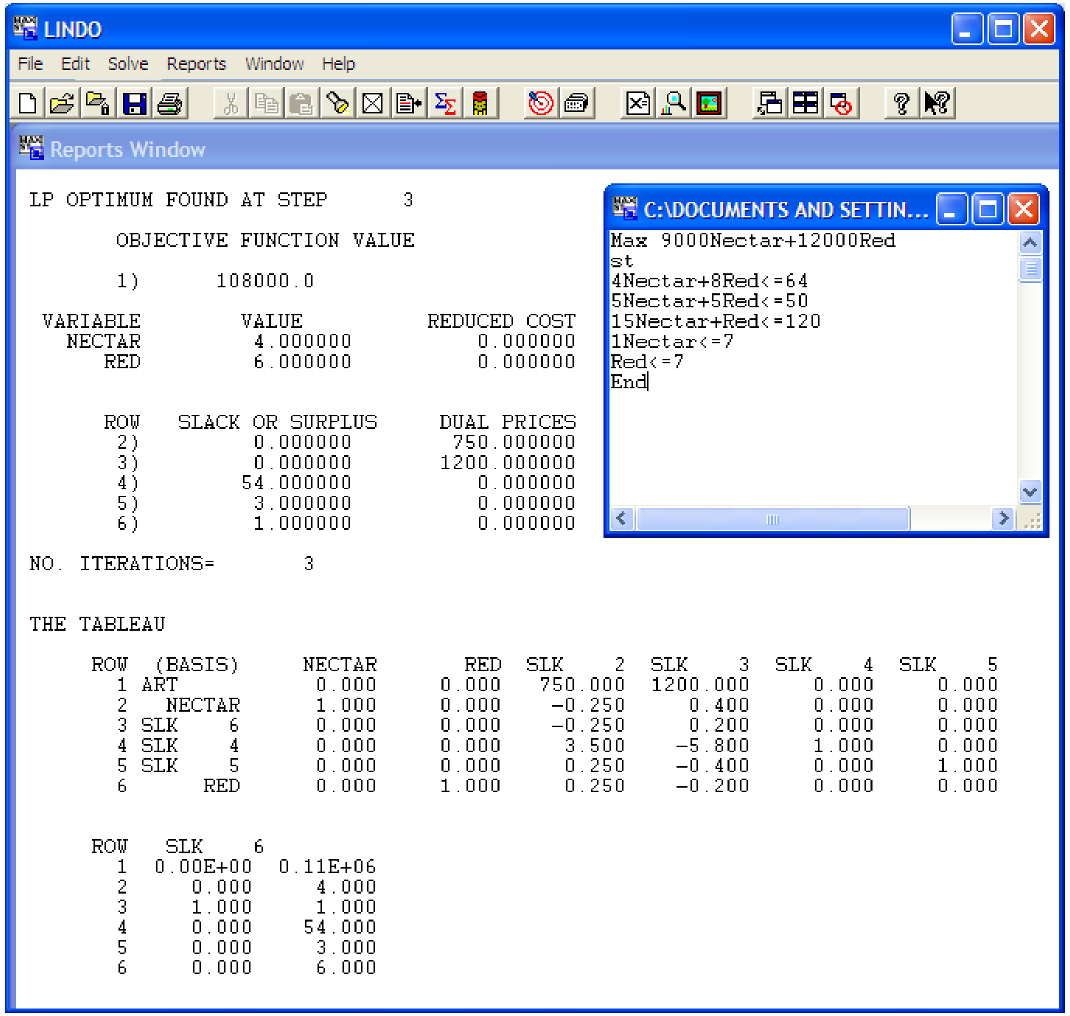
Valley Wine Solution

| Variable | Value | Reduced Cost | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
|---|---|---|---|---|---|
| Lotes de Nectar | 4 | 0 | 9000 | 6000 | 12000 |
| Lotes de Rojo | 6 | 0 | 12000 | 9000 | 18000 |
| Constraint | Dual Value | Slack/Surplus | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
| Uva disponible | 750 | 0 | 64 | 57.1429 | 68 |
| Almacenamiento disponible | 1200 | 0 | 50 | 45 | 52.7273 |
| Hrs procesamiento disponible | 0 | 12 | 120 | 108 | Infinity |
| Lotes de demanda Nectar | 0 | 3 | 7 | 4 | Infinity |
| Lotes de demanda Rojo | 0 | 1 | 7 | 6 | Infinity |

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Ejemplo: Valley Wines

- Lindo también nos da la siguiente información:




Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

# Ejemplo: Beaver Creek

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- Excel produce la siguiente información:

| Mano de obra | | Materia prima | |
|---|---|---|---|
| Dual | Rango | Dual | Rango |
| \$16 | 30 hrs ≤ $q_1$ ≤ 80 hrs | \$6 | 60 lbs ≤ $q_2$ ≤ 160 lbs |

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Microsoft Excel 12.0 Sensitivity Report | | | | | | | |
| 2 | Worksheet: [Ejercicios de Modelación en Excel.xlsx]Beaver Creek | | | | | | | |
| 3 | Report Created: 09/06/2011 12:33:50 p.m. | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | Adjustable Cells | | | | | | | |
| 7 | | | | Final | Reduced | Objective | Allowable | Allowable |
| 8 | | Cell | Name | Value | Cost | Coefficient | Increase | Decrease |
| 9 | | \$B\$10 | Bowls = | 24 | 0 | 40 | 26.66666667 | 15 |
| 10 | | \$B\$11 | Mugs = | 8 | 0 | 50 | 30 | 20 |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | Constraints | | | | | | | |
| 13 | | | | Final | Shadow | Constraint | Allowable | Allowable |
| 14 | | Cell | Name | Value | Price | R.H. Side | Increase | Decrease |
| 15 | | \$E\$6 | labor (hr/unit) Usage | 40 | 16 | 40 | 40 | 10 |
| 16 | | \$E\$7 | clay (lb/unit) Usage | 120 | 6 | 120 | 40 | 60 |
| 17 | | | | | | | | |