

Método Simplex

Para la solución de problemas lineales

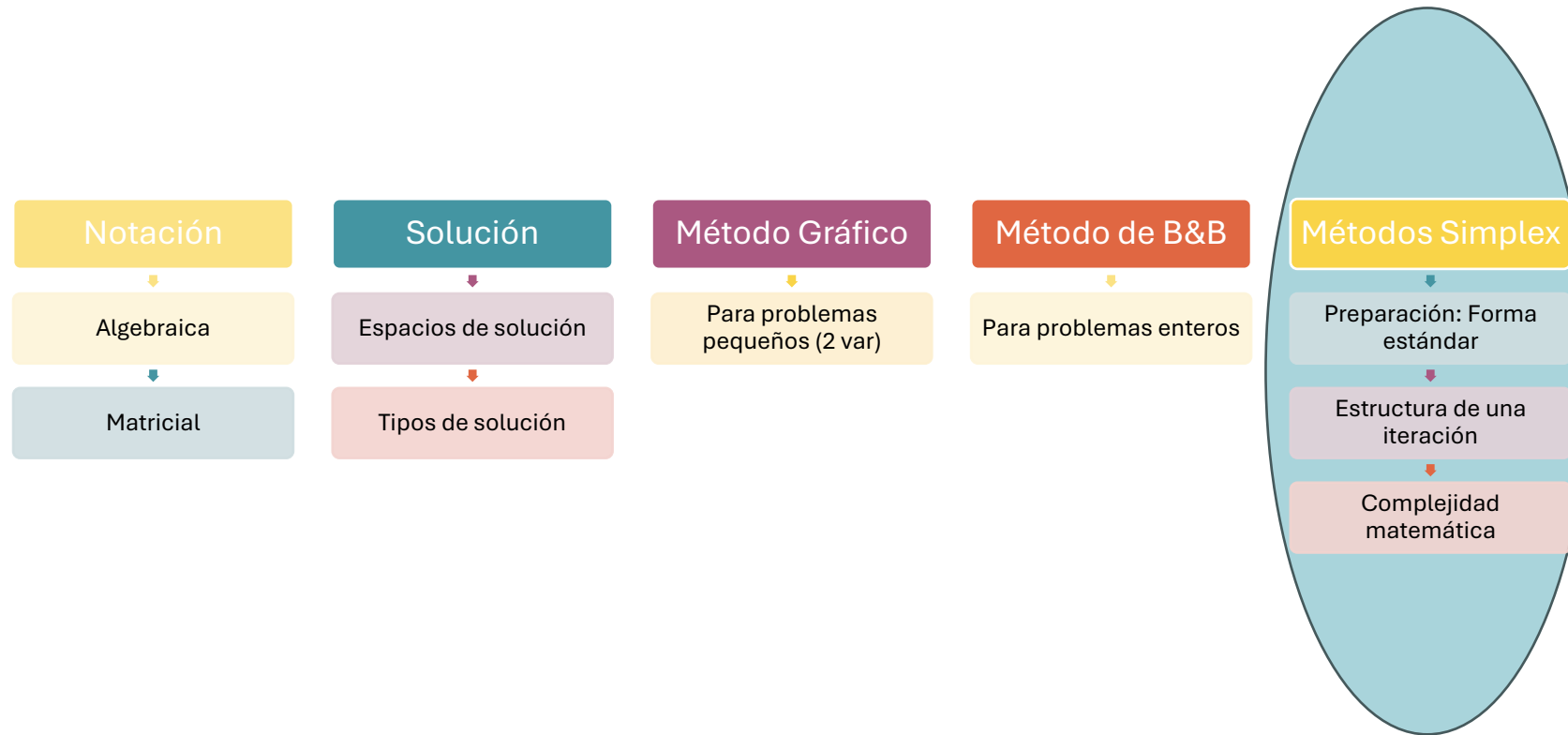
Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido



Un sistema $Ax=b$ de ecuaciones lineales

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Solución Básica

- **Propiedades**

- Una variable es básica o no básica.
- Las variables no básicas valen cero.
- El número de variables básicas = número de restricciones funcionales independiente = m
- El valor de las variables básicas se obtiene de resolver el sistema ($m \times m$) de ecuaciones (restricciones funcionales).
- El conjunto de variables básicas se llama: **BASE**
- Si todas las variables básicas son ≥ 0 , entonces la solución básica es factible y se denomina: **Solución Básica Factible (SBF)**.

Solución Básica Factible

- Considere un sistema $Ax = b$ de m ecuaciones lineales y n variables, incluyendo variables de holgura (donde $n \geq m$).
- Una solución básica a $Ax = b$ se obtiene mediante el establecimiento de $n - m$ variables igual a 0 (**Variables No-Básicas**) y la solución de las $n - (n - m) = m$ variables restantes (**Variables Básicas**).
- $n - m$ refleja la máxima dimensión del espacio factible.
- Esto supone que la fijación de los $n - m$ variables iguales a 0 se obtiene un valor único para las m variables restantes, o equivalentemente, las columnas correspondientes a las variables n restantes son linealmente independientes.
- Cualquier solución básica en la que todas las variables son no negativas se llama **solución básica factible** (o **SBF**).

Soluciones factibles adyacentes

- El método Simplex es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una SBF a otra SBF adyacente.
- Dos SBFs son adyacentes si comparten $(m-1)$ variables básicas y $(n-m-1)$ variables no básicas.
- Moverse de una SBF a una SBF adyacente implica que una variable básica pasa a ser no básica en la adyacente y una variable no básica pasa a ser básica en la SBF adyacente.
- Ejemplo:

$n=7$ variables

$m=3$ restricciones funcionales

$n-m=4$ variables no básicas

SBF 1

- $XB=\{s1,s2,s3\}$
- $XN=\{x1,x2,x3, x4\}$

Una SBF Adyacente a SBF1

- $XB=\{s1,x2,s3\}$
- $XN=\{x1,s2,x3, x4\}$

Ejemplo: Valley Wine

La compañía Valley Wine produce dos tipos de vino: Valley Nectar y Valley Red. Los vinos serán producidos con 64 tons. de uva que la compañía ha comprado esta temporada.

Un lote de 1000 galones de Nectar requiere de 4 tons. de uva, y un lote de Red 8 tons. Sin embargo, la producción está limitada por la disponibilidad de solo 50 yd³ de espacio para añejamiento y 120 horas de tiempo de procesamiento. Un lote de cada tipo de vino requiere de 5 yd³ de espacio. El tiempo de proceso para un lote de Nectar es de 15 hrs. y para Red es de 8 hrs. La demanda para cada tipo de vino está limitada a siete lotes.

La utilidad por un lote de Nectar es de \$9,000 y por un lote de Red es de \$12000. La compañía quiere determinar el número de lotes de 1000 galones de Nectar y Red que producirá la mayor utilidad.

...Ejemplo: Valley Wine

- **Variables de decisión**

X_1 = Número de lotes de 1000 galones de Valley Nectar

X_2 = Número de lotes de 1000 galones de Valley Red

- **Función objetivo**

Maximizar $Z = 9,000 x_1 + 12,000 x_2$

- **Sujeto a:**

$$4 x_1 + 8 x_2 \leq 64 \text{ tons. de uva disponibles}$$

$$5 x_1 + 5 x_2 \leq 50 \text{ yd.}^3 \text{ de almacenamiento disponible}$$

$$15 x_1 + 8 x_2 \leq 120 \text{ hrs. de procesamiento disponible}$$

$$x_1 \leq 7 \text{ lotes de demanda para V. Nectar}$$

$$x_2 \leq 7 \text{ lotes de demanda para V. Red}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

...Ejemplo: Soluciones Básicas Factibles

1

A **B**

Punto óptimo: C
 $X_1=4, X_2=6$

Z= \$108,000

Max Z = 9,000 X1 + 12,000 X2
Región factible
4 X1 + 8 X2 ≤ 64 tons. de uva disponible
5 X1 + 5 X2 ≤ 50 yd almacenamiento disponible
15 X1 + 8 X2 ≤ 120 hrs. procesamiento disponible
X1 ≤ 7 Demanda máxima de Nectar
X2 ≤ 7 Demanda máxima de Red

D

E **Función
Objetivo**

G

F

VB – Todas las variables con valores positivos diferentes de cero son Variables Básicas y constituyen una Solución Básica Factible

Variable No-Básica (VNB)

$n - m = 7 - 5 = 2$ (máxima dimensión de la región factible)

A	$X_1=$	0	B	$X_1=$	2	C	$X_1=$	4				
	$X_2=$	7		$X_2=$	7		$X_2=$	6				
	$S_1=$	8		$S_1=$	0		$S_1=$	0				
	$S_2=$	15		$S_2=$	5		$S_2=$	0				
	$S_3=$	64		$S_3=$	34		$S_3=$	12				
	$S_4=$	7		$S_4=$	5		$S_4=$	3				
	$S_5=$	0		$S_5=$	0		$S_5=$	1				
D	$X_1=$	5.71	E	$X_1=$	7	F	$X_1=$	7	G	$X_1=$	0	
	$X_2=$	4.29		$X_2=$	1.875		$X_2=$	0		$X_2=$	0	
	$S_1=$	6.86		$S_1=$	21		$S_1=$	36		$S_1=$	64	
	$S_2=$	0		$S_2=$	5.625		$S_2=$	15		$S_2=$	50	
	$S_3=$	0		$S_3=$	0		$S_3=$	15		$S_3=$	120	
	$S_4=$	1.29		$S_4=$	0		$S_4=$	0		$S_4=$	7	
	$S_5=$	2.71		$S_5=$	5.125		$S_5=$	7		$S_5=$	7	

Factibilidad de un PPL

Un PPL es factible cuando:

1. $n \geq m$
2. Existe un conjunto de solución X que satisfice:

Región Factible $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

3. Existe un subconjunto de X con elementos no negativos

$$\begin{array}{ll} \max & Z = \mathbf{cx} \\ \text{st} & \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Región Factible

- La **región factible** para cualquier problema de programación lineal es un **conjunto convexo**.
- Si un PPL tiene una solución óptima, debe haber un punto extremo de la región factible que es óptima.
- Si un PPL tiene una solución óptima, ésta corresponde a una SBF.
- Un PPL tiene finitas SBFs. El número de SBFs está acotado por $\binom{n}{m}$
- Un vértice o intersección geométrica representa una SBF.

Solución Óptima Global

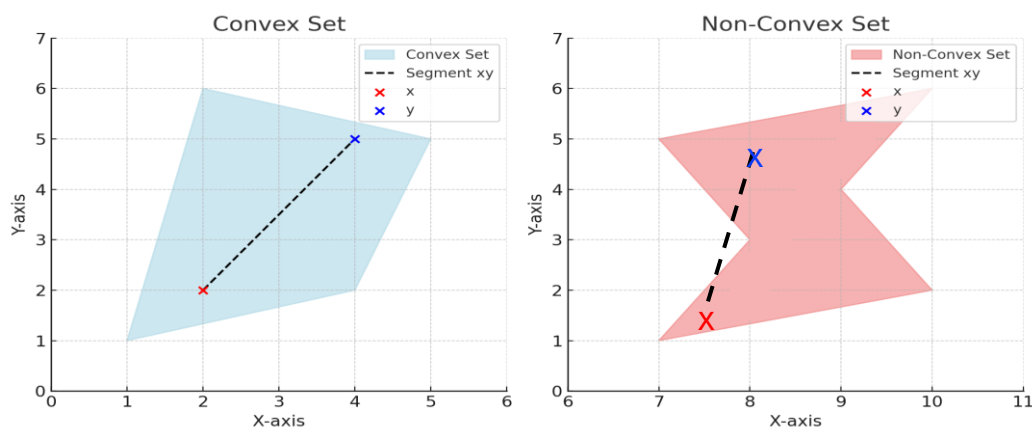
Sea el problema de optimización:

$\min f(x)$ sujeto a $(x) \in S$ donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto factible y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

El problema tiene una **solución óptima global** si:

S es un conjunto convexo y no vacío (existe al menos una solución factible),
 $f(x)$ es coerciva y es una solución convexa en S , es decir:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]$$



Teorema de Existencia de Óptimos

Si S es un conjunto convexo, cerrado y acotado en \mathbb{R}^n y $f(x)$ es convexa y continua en S , entonces **existe al menos una solución óptima global** $x^* \in S$ tal que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$

Si además, $f(x)$ es estrictamente convexa, la solución óptima global es única.

$f(x)$ es coerciva si $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$

Soluciones factibles adyacentes

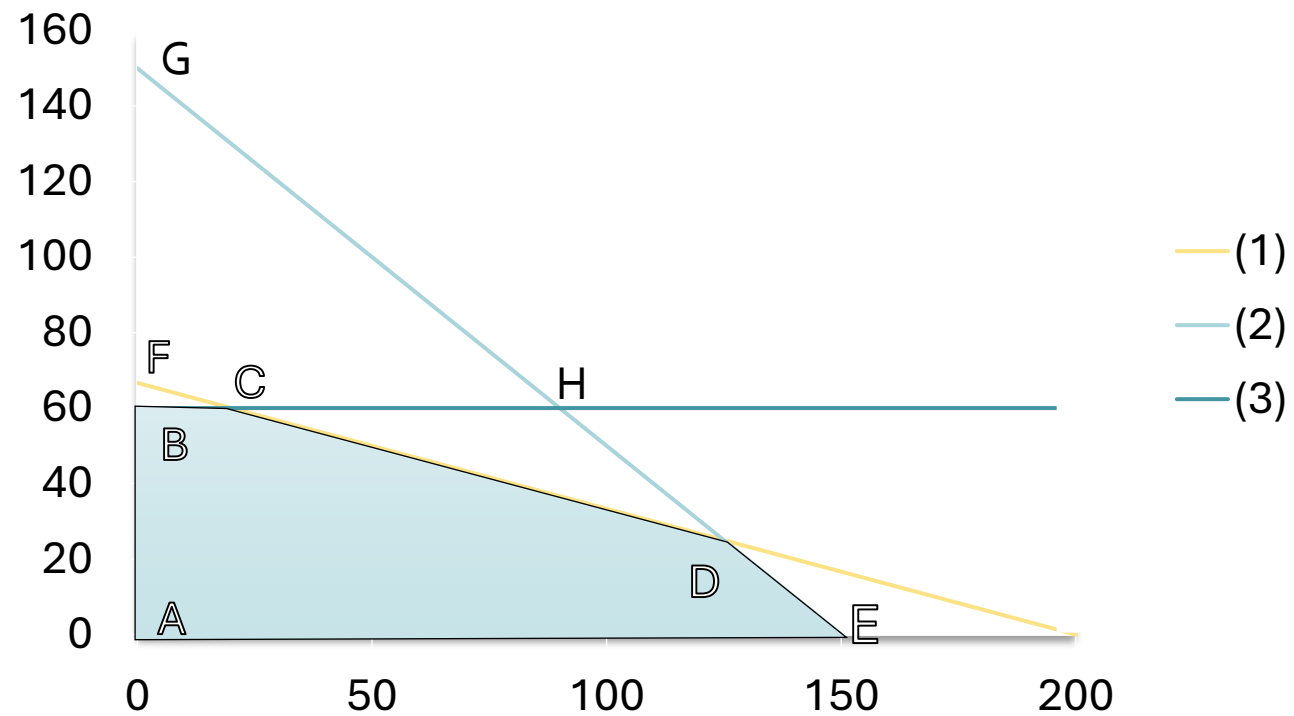
- El método simplex es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una sbf a otra sbf adyacente.
- El número máximo de iteraciones posibles en este proceso es el resultado de

$$\binom{n}{m}$$

- Regularmente, el método simplex puede encontrar la solución óptima después de examinar menos de $3m$ sbf

Grafica el siguiente PPL

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{st} \\ x_1 + 3x_2 &\leq 200 \quad (1) \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 300 \quad (2) \\ x_2 &\leq 60 \quad (3) \\ x_1 &\geq 0 \quad (4) \\ x_2 &\geq 0 \quad (5) \end{aligned}$$



Identifica todas las SBFs

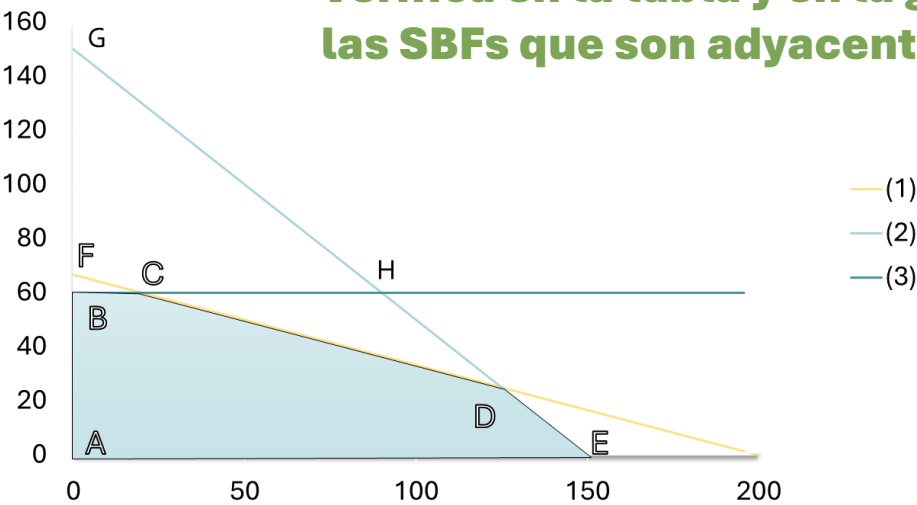
Resuelve los 10 sistemas de ecuaciones

No básicas	x1	x2	s1	s2	s3	SBF o vértice	Factible
x1 x2							
x1 s1							
x1 s2							
x1 s3							
x2 s1							
x2 s2							
s1 s2							
s1 s3							
s2 s3							

¿Por qué 10 SBFs máximo?

¿Por qué x_2 y s_3 no pueden ser no básicas al mismo tiempo?

Verifica en la tabla y en la gráfica las SBFs que son adyacentes.



El Método Simplex

- Desarrollado por [George Dantzig](#) en 1947
- El PPL debe estar en su forma estándar.
- Se inicia con una SBF dada.
 - Generalmente, se inicia con el origen si éste es factible.
- Es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una SBF a otra SBF adyacente con mejor valor objetivo (mejor Z)
- Mantiene la factibilidad y busca la optimalidad
 - Factibilidad: Variables no básicas igual a cero y variables básicas satisfacen $Ax=b$, $x \geq 0$.
- La base de la nueva SBF contiene las mismas variables básicas, excepto por una.
 - Por lo tanto, tiene las mismas variables no básicas, excepto por una.

Proceso iterativo: Procedimiento sistemático que repite una serie de pasos (iteración) hasta que se obtiene el resultado esperado.

$$\begin{array}{ll} \max & Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{st} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

El Método Simplex ...

- ¡La terminación está garantizada!
- Cuando encuentra una SBF óptima (x^*) y un valor finito de Z .
 $Z^* < \infty$
- Cuando determina que el problema es infectible
 - Esto significa que la region factible es vacía. $S = \{\emptyset\}$
- Cuando identifica que el valor óptimo Z es infinito. $Z^* = \infty$
 - Por lo tanto, no se puede identificar una solución óptima

Un PPL en forma matricial

$$\begin{array}{ll}\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{st} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

When the LPP is in standard form:

- n variables
- m functional constraints

$$\mathbf{x} : n \times 1$$

$$\mathbf{A} : m \times n$$

$$\mathbf{c} : 1 \times n$$

$$\mathbf{b} = m \times 1$$

$$\mathbf{B} : m \times m$$

$$\mathbf{N} : (m \times (n - m))$$

$$\mathbf{0} : n \times 1$$

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Ejercicio

- Identifique los vectores y matrices correspondientes si:
 - a) $\mathbf{XB}=\{s1,s2,s3\}$
 - b) $\mathbf{XB}=\{x1,x2,x3\}$

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

st

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 300 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 60 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

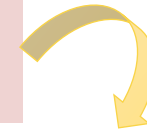
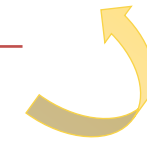
$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Un tablero Simplex

Costo reducido

Z	$\bar{c}' = c'_B B^{-1} A - c'$	$c'_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} A$	$B^{-1} b$

Valor de Z



Valor de las variables básicas

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

$$A = [N, B]$$

Submatriz de variables no básicas



Submatriz de variables básicas:
Matriz Base

Z	$\bar{c}' = [y' N - c'_N, 0]$	$c'_B \bar{b}$
x_B	$B^{-1} [N, B] = [B^{-1} N, I]$	\bar{b}

Problema de maximización

$$y' = c'_B B^{-1}$$

Valor de las variables duales

Condición de factibilidad

$$\bar{b} \geq 0$$

Siempre en una iteración Simplex

Condición de optimalidad

$$\bar{c}' \geq 0$$

En el óptimo

Una iteración de Simplex

(Problemas de maximización)

Dada una SBF con:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\} \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}] \\ \mathbf{c} &= \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}\end{aligned}$$

$$1. \quad \text{Resuelva } Bx_B = b, \quad x_B = B^{-1}b = \bar{b} \quad x_B = \bar{b} \quad x_N = 0 \quad z = c_B B^{-1}b = c_B x_B$$

Si es SBF: $\bar{b} \geq 0$ (condición de factibilidad)

1. Resuelva $wB = c_B$, $w = c_B B^{-1}$ $z_j - c_j = \bar{c}_j = (c_B B^{-1})A_j - c_j \quad j \in J$: índices de variables no básicas
2. Sea x_k la variable entrante, donde $k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\}$
3. Si $\bar{c}_j = z_k - c_k > 0$. Pare. La SBF actual es óptima.
4. Calcule $By_k = a_k$ donde $y_k = B^{-1}a_k$ Si $y_k \leq 0$. Pare. La solución óptima es no acotada.
5. De otra forma, x_k entra a la base. Sea x_{Br} la variable saliente, donde $\frac{b_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
6. Actualice la base B, donde a_k reemplaza a_{Br} . Actualice el conjunto de índices J y vaya al paso 1.

Operaciones básicas de una iteración (Matlab)

- `basicas = [...]`
 - `J=[...]`
 - `B=A(:,basicas)`
 - `cb=c(:,basicas)`
 - `cn=c(:,J)`
 - `AN=A(:,J)`
 - `invB=inv(B)`
 - `bbar= invB*b`
 - `z= cb*bbar`
 - `w=cb*invB`
 - `cbar=w*AN-cn`
 - `k= ? posición entrante`
 - `Yk=invB*AN(:,k)`
 - `bbar./yk`
 - `r=?? Posición saliente`
- Reemplace:
- `basicas = [en posición r poner k]`
- `J= [en posición r poner XBr]`

Ejercicio

- Realice una iteración del método Simplex iniciando con la siguiente SBF:
- $X_B = \{s_1, s_2, s_3\}$
- $X_N = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Confirme que la SB es factible:

$$B^{-1}b = \bar{b} \geq 0$$

$$\max Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

st

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 40 \quad (1)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8 \quad (2)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Practica en casa, resolviendo completamente este ejercicio con el método Simplex.

Ejercicio

- Resuelva el siguiente ejercicio de minimización

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

st

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 300 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 60 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

Equivalent to

$$\max -Z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\max -Z + x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

Un problema de minimización se convierte en maximización multiplicando por (-1) la función objetivo

$$\min Z = \max -Z$$

Método Simplex – Minimización

- Método 1: Multiplicar Z por (-1) y maximizar
- Método 2 – Modificar el algoritmo simplex para resolver problemas de minimización directamente.

...

2. Sea x_k la variable entrante, donde $k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$

3. Si $\bar{c}_j = z_k - c_k < 0$. Pare. La SBF actual es óptima.

...

El Algoritmo Simplex (resumen)

- **Paso 1** Convertir el LP al formato estándar
- **Paso 2** Obtener una SBF (si es posible) a partir del formato estándar
- **Paso 3** Determinar si la SBF actual es óptima
- **Paso 4** Si la SBF actual no es óptima, determinar que variable no-básica debe convertirse en una variable básica y la variable básica que debe convertirse en una variable no básica para encontrar una SBF con un mejor valor de la función objetivo.
- **Paso 5** Actualizar la base (Utilizar Operaciones Elementales de Renglón) para encontrar una nueva SBF con un mejor valor de la función objetivo. Volver al paso 3.