

# Solución de un Problema de Programación Lineal

---

Professor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey



“

- **Un modelo**

Es una representación idealizada de un sistema de la vida real.

Es un patrón, plan, representación (especialmente en miniatura) o descripción diseñada para mostrar la estructura o el funcionamiento de un objeto, sistema o concepto.

- **Un modelo matemático**

Es un modelo abstracto que usa lenguaje matemático.

# Un modelo matemático lineal

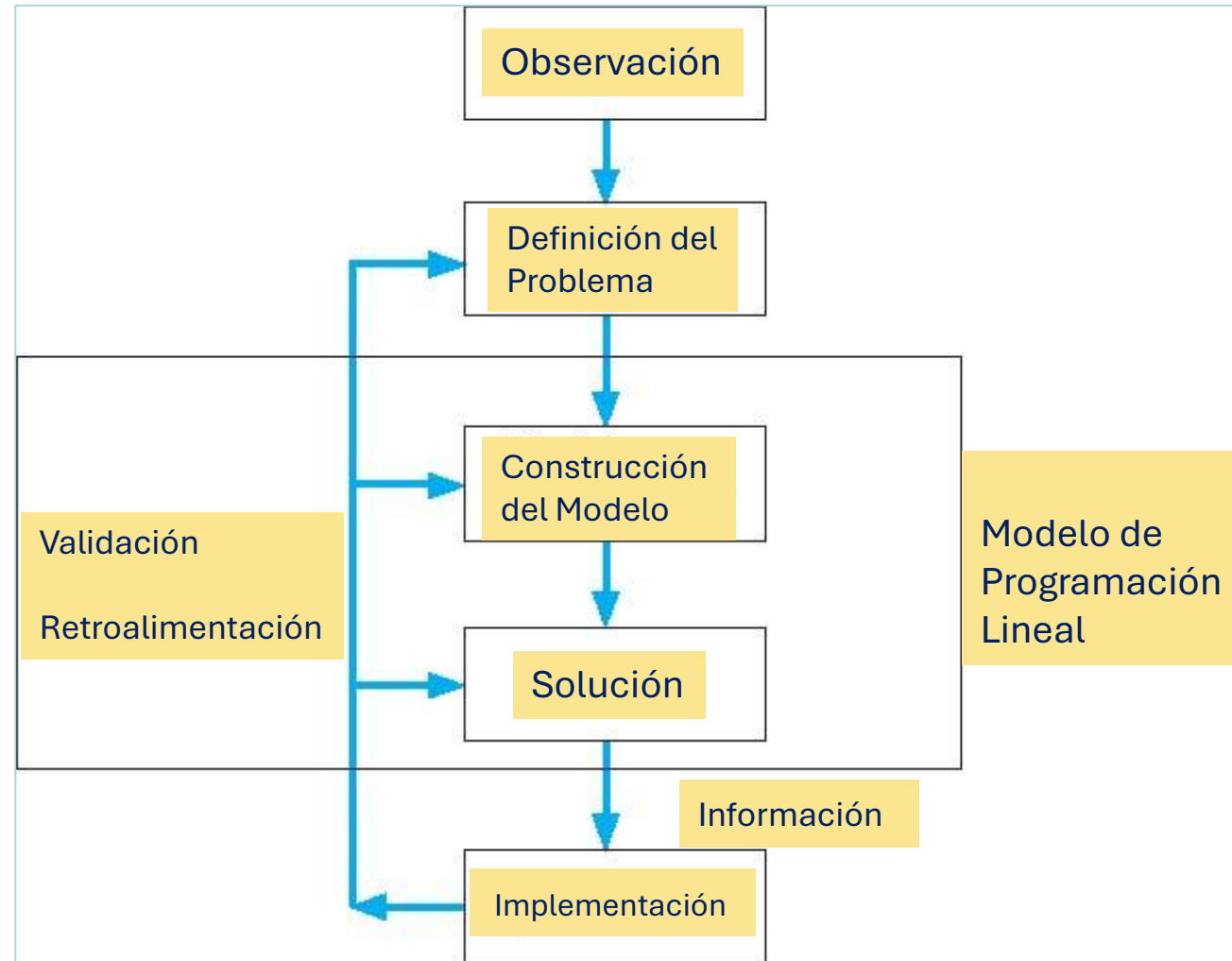
- Función objetivo lineal
- Restricciones lineales
- Variables continuas

## Programación lineal:

Usa un modelo matemático lineal para describir el problema.

Un problema que puede representarse como un modelo matemático lineal es un **Problema de Programación Lineal (LPP)**.

# Modelando en programación lineal



# Un modelo de programación lineal

## FUNCIÓN OBJETIVO: max/min

- Una función lineal
- Su valor se asigna a una nueva variable de decisión, usualmente “Z”, pero se puede usar cualquier nombre.

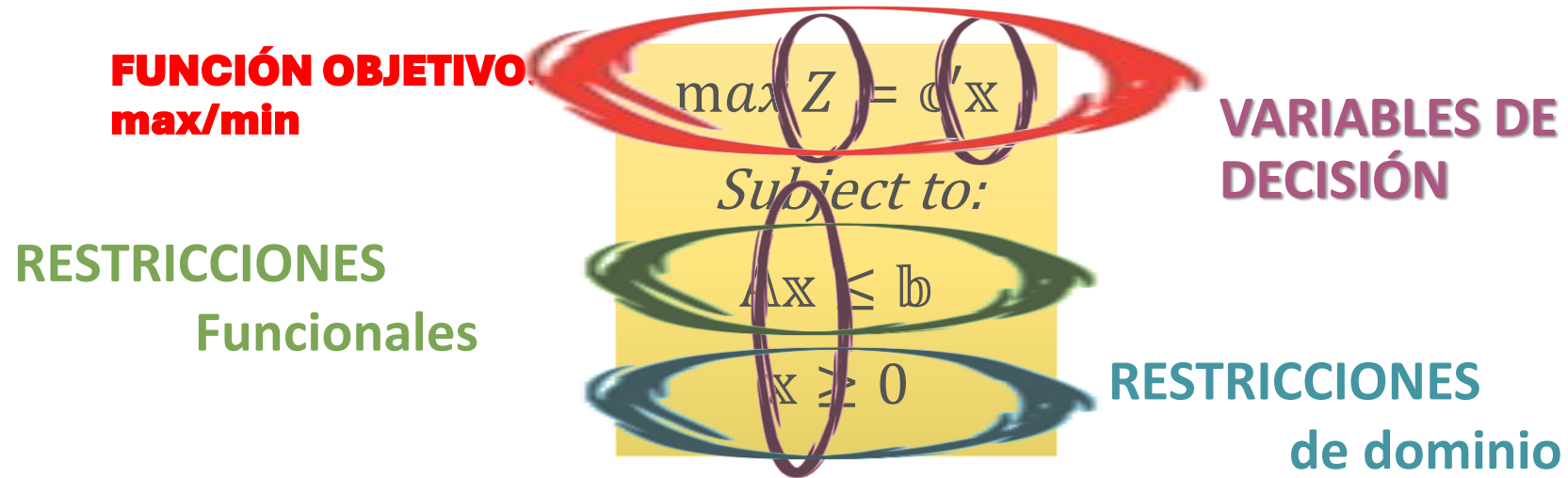
## Variables de Decisión

- Significado: objeto, acción y unidades.
- Dominio, continuidad
- No negatividad
- Se pueden agrupar usando un índice: cuando el mismo tipo de decisión se aplica a un conjunto (o subconjunto) de elementos.
- El número de variables es finito.

## Restricciones

- Ecuaciones o desigualdades ( $=, \geq, \leq$ )
- Lado Izquierdo (Left-hand side (LHS)): una expresión lineal.
- Lado derecho (Right-hand side (RHS)): Un parámetro.

# Un modelo de programación lineal



# Principios (o supuestos) de un PPL

---

## Proporcionalidad

- Único exponente permitido en las variables: 1

## Additividad

- Las variables sólo se pueden sumar o restar

## Divisibilidad

- Las variables son continuas

## Certidumbre

- Los parámetros son conocidos y fijos

# Ejemplo:

---



## El granjero mágico

Un agricultor necesita un fertilizante especial que contenga al menos 10, 12 y 12 unidades de nutrientes de Nitrógeno, Hierro y Potasio, respectivamente.

En el mercado encuentra un producto líquido que contiene 5, 2 y 1 unidades de Nitrógeno, Hierro y Potasio por galón, respectivamente, con un costo de \$6000/galón. También encuentra un producto sólido que contiene 1, 2 y 4 unidades de Nitrógeno, Hierro y Potasio por kilogramo, respectivamente, con un costo de \$4000/kg.

¿Qué cantidades de cada producto debe comprar el agricultor para minimizar el costo del fertilizante que satisfaga los requisitos mencionados?



# Responda las siguientes preguntas

Elementos? Contables, finitos

**(índices)**

¿Qué sé de cada elemento?

**(parámetros)**

¿Qué no sé (y quiero saber) de cada elemento?

**(variables de decisión)**

¿Qué quiero?

**(función objetivo)**

¿Qué condiciones debo satisfacer?

**(restricciones)**

¿Cuál es el rango de las posibles soluciones? (dominio de las variables)

**(valores no negativos)**

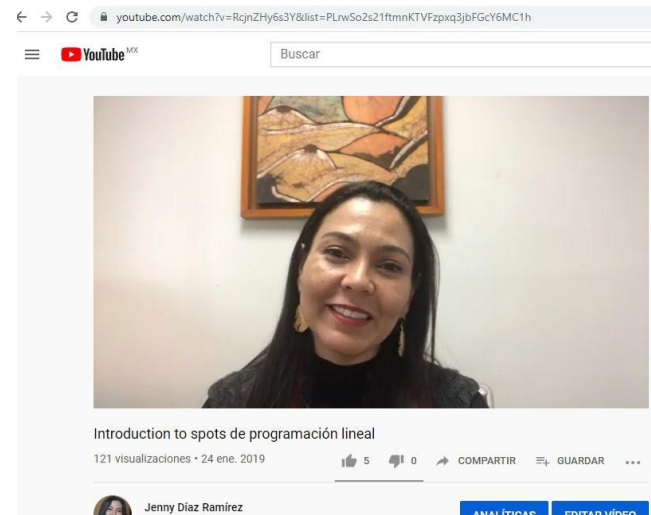
¿Cuál es la solución de este problema?

**Esa es la idea! Averiguar cuánto valen las variables**

# Apoyos Visuales para Modelar



<https://www.youtube.com/playlist?list=PLrwSo2s21ftmnKTVFzpxq3jbFGcY6MC1h>



# Organice the information


- Organice the information
  - Use tablas
  - Procese los datos existentes
  - Obtenga nuevos datos

# Organice the information

El granjero mágico

| Producto               | Contenido por unidad |    |    | Precio unitario |
|------------------------|----------------------|----|----|-----------------|
|                        | N                    | Fe | K  |                 |
| Líquido                | 5                    | 2  | 1  | (\$/galón) 6000 |
| Sólido                 | 1                    | 2  | 4  | (\$/kg) 4000    |
| Requerimientos mínimos | 10                   | 12 | 12 |                 |

# Construcción de un modelo de PL

- Organice the information 
- Identifique los elementos

# Un modelo matemático

## • Elementos

- Función objetivo (FO)
  - Criterio para evaluar las alternativas (variables) de decision
  - Función matemática a optimizarse (max/min)
  - FO: verbo, objeto, horizonte, unidades.
- Variables de decisión
  - Sus valores son controlables
  - Representan las alternativas de decisión
- Restricciones
  - Disponibilidad de recursos
  - Condiciones que restringen los valores de las variables

### Variables de decisión

- Alternatives
- Valores desconocidos (Incógnitas)
- Or just **Variables**

All the same

### Objetivo:

**Encontrar los valores de las variables de decision que optimicen el valor de la FO.**

Jenny Díaz Ramírez PhD

# El granjero mágico

- **Declaración de las variables de decisión**
  - Cantidad de galones de producto líquido a comprar
  - Cantidad de galones de producto sólido a comprar
- **Declaración de la función objetivo**
  - MINIMIZAR el costo para el granjero de satisfacer los requerimientos establecidos.

# El granjero mágico

- **Constraints declaration**

- Requirement of minimum amount of nutrient A: N
- Requirement of minimum amount of nutrient B: Fe
- Requirement of minimum amount of nutrient C: K
- Quantities to be purchased must be greater or equal to zero.



# Construction of a LP Model

- Organice la información ✓
- Identifique los elementos ✓
- **Escriba las expresiones matemáticas**

$$\min Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

*Subject to:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

En álgebra:

- $\mathbf{A}$  matrix  $[m \times n]$
- $\mathbf{b}$  vector  $[m \times 1]$
- $\mathbf{c}$  vector  $[1 \times n]$
- $\mathbf{x}$  vector  $[1 \times n]$
- $0$  vector  $[1 \times n]$

# El granjero mágico

## El modelo matemático de PL

Minimizar  $C = 6000x_1 + 4000x_2$

Sujeto a:

$$5x_1 + x_2 \geq 10$$

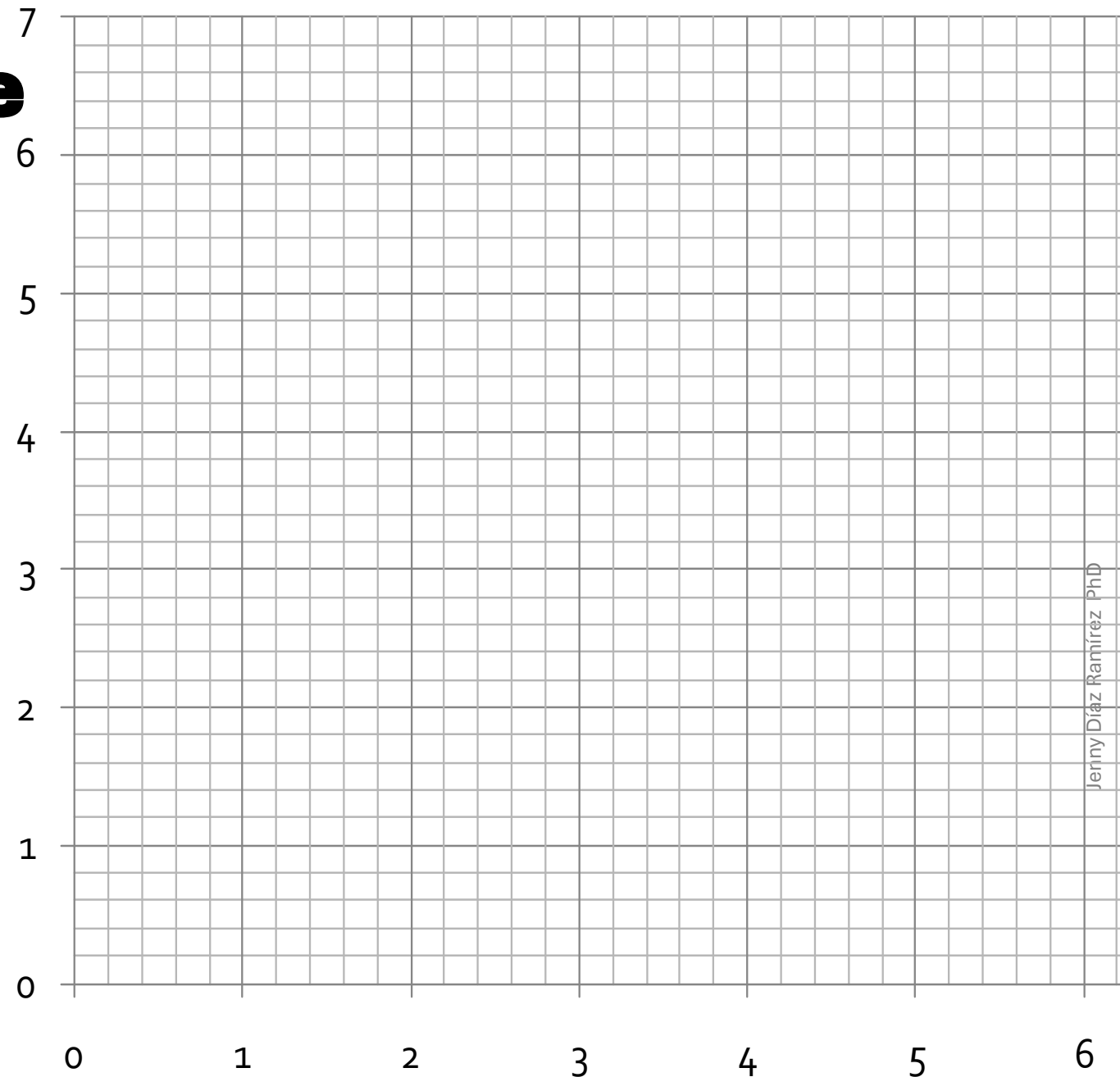
$$2x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





# Espacio Factible de Solución

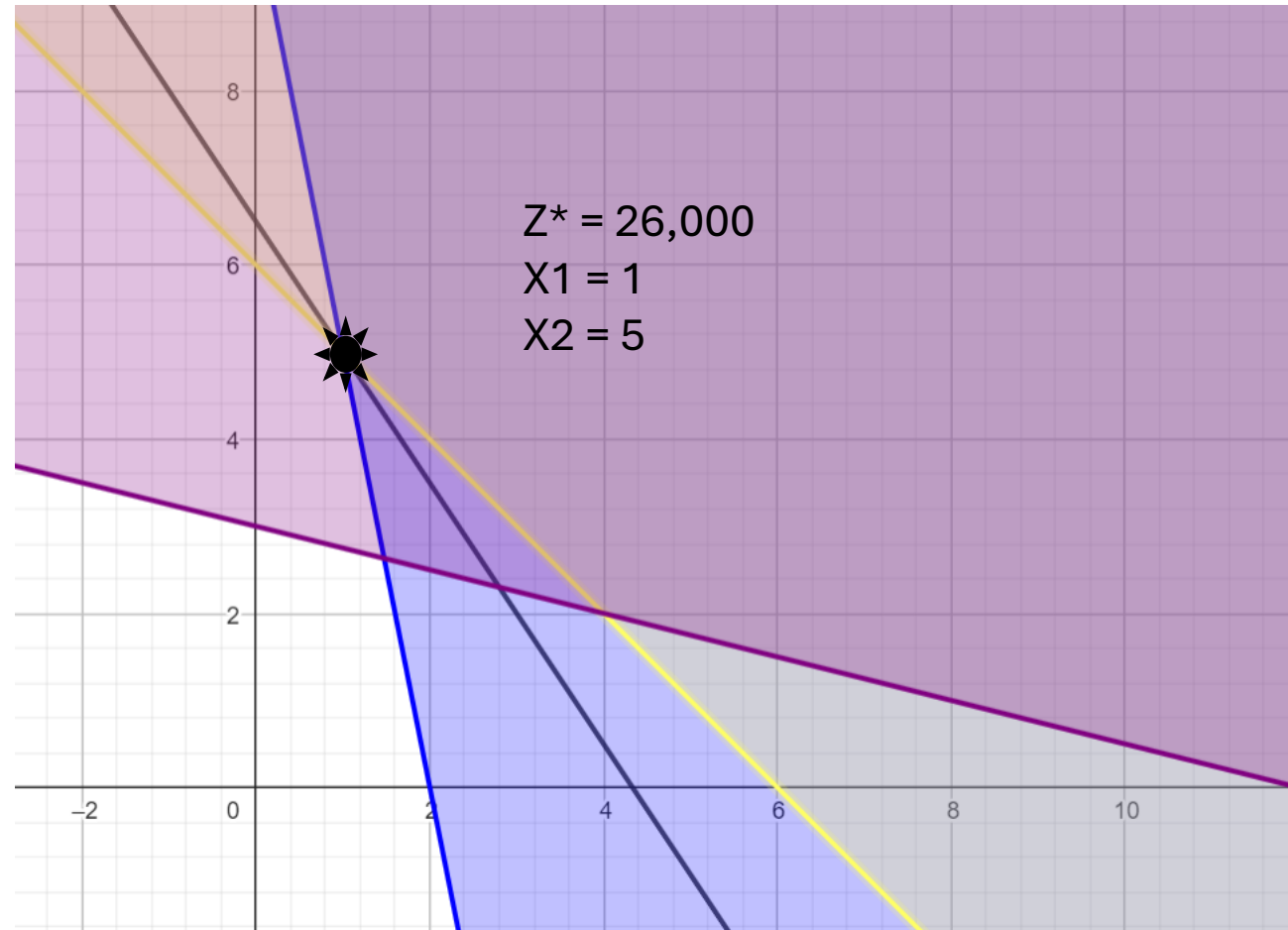
Grafiquemos la región factible.



# Solución Gráfica

GeoGebra

|   |                               |   |
|---|-------------------------------|---|
|  | a : $5x + y \geq 10$          | ⋮ |
|  | b : $2x + 2y \geq 12$         | ⋮ |
|  | c : $x + 4y \geq 12$          | ⋮ |
|  | ec1 : $6000x + 4000y = 26000$ | ⋮ |



# Solución en Lindo

The screenshot shows the LINDO software interface. The main window displays the following problem:

```
min 6000x1 + 4000x2
Subject to
5x1 + x2 > 10
2x1 + 2x2 > 12
x1 + 4x2 > 12
end
```

The Reports Window displays the following output:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 26000.00

| VARIABLE | VALUE    | REDUCED COST |
|----------|----------|--------------|
| X1       | 1.000000 | 0.000000     |
| X2       | 5.000000 | 0.000000     |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES  |
|-----|------------------|--------------|
| 2)  | 0.000000         | -500.000000  |
| 3)  | 0.000000         | -1750.000000 |
| 4)  | 9.000000         | 0.000000     |

NO. ITERATIONS= 2

$$Z^* = 26,000$$

$$X1^* = 1$$

$$X2^* = 5$$

# Solución en Excel

**Excel Solver Parameters**

Set Objective:

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method  
Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Help, Solve, Close

|                                 |   | productos |      | nutrientes que vienen en la compra |    | nutrientes que necesito |  |
|---------------------------------|---|-----------|------|------------------------------------|----|-------------------------|--|
|                                 |   | 1         | 2    |                                    |    |                         |  |
| nutrientes                      | A | 5         | 1    | 0                                  | 10 |                         |  |
|                                 | B | 2         | 2    | 0                                  | 12 |                         |  |
|                                 | C | 1         | 4    | 0                                  | 12 |                         |  |
| Costo unitario de producto      |   | 6000      | 4000 |                                    |    |                         |  |
| Cantidad de productos a comprar |   | x1        | x2   |                                    |    |                         |  |
| costo total                     |   | z         | 0    |                                    |    |                         |  |

# Otro Ejemplo

---

Una pequeña ciudad de 15,000 habitantes consume un promedio de 1,200,000 litros de agua al día. La ciudad se abastece de una central donde el agua es purificada por métodos convencionales de filtración y clorohidratación. Adicionalmente, dos compuestos químicos: suavizante y purificador, son necesarios para el agua como elementos salubres. La planta purificadora está considerando a dos proveedores de estos productos químicos. El proveedor PA ofrece paquetes de 4 kg de suavizante y 1.5 kg de purificador por \$80. El proveedor PB ofrece paquetes de 2kg de suavizante y 4.5 kg de purificador por \$100.

Para mantener el agua a un nivel mínimo de suavidad y protección mínima de pureza, se requieren 75 kg de suavizante y 50 kg de purificador.

¿Qué combinación de productos se debe adquirir?

# Modelo Matemático

$x_j$  = Cantidad de paquetes a comprar  
al proveedor  $j$ .  $j \in J = \{1:A, 2:B\}$

$Z$  = Costo total de la compra

$$\min \quad Z = 80x_1 + 100x_2$$

Sujeto a:

Suavizante)  $4x_1 + 2x_2 \geq 75$

Purificador)  $1.5x_1 + 4.5x_2 \geq 50$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix}; \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 75 \\ 50 \end{bmatrix}; \mathbb{c} = [80 \quad 100]; \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, el problema se puede escribir así:

$$\min Z = \mathbb{c}'\mathbb{x}$$

*Sujeto a:*

$$\mathbb{A}\mathbb{x} \geq \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x} \geq 0$$



# Solución en Excel

Excel interface showing the Solver Parameters dialog box overlaid on a spreadsheet. The spreadsheet contains data for a linear programming problem, including variables, constraints, and the objective function.

**Spreadsheet Data:**

|    | A                | B   | C   | D              | E            |
|----|------------------|-----|-----|----------------|--------------|
| 1  |                  |     |     |                |              |
| 2  |                  |     |     |                |              |
| 3  |                  |     |     |                |              |
| 4  |                  |     |     |                |              |
| 5  |                  | 1   | 2   |                |              |
| 6  | variables        | 0.0 | 0.0 | Total lado izq | Lado derecho |
| 7  | suavizante       | 4   | 2   | 0              | 75           |
| 8  | purificador      | 1.5 | 4.5 | 0              | 50           |
| 9  |                  |     |     |                |              |
| 10 | Precio           | 80  | 100 |                |              |
| 11 |                  |     |     |                |              |
| 12 |                  | Z   |     |                |              |
| 13 | Función objetivo | 0   |     |                |              |
| 14 |                  |     |     |                |              |
| 15 |                  |     |     |                |              |
| 16 |                  |     |     |                |              |
| 17 |                  |     |     |                |              |
| 18 |                  |     |     |                |              |
| 19 |                  |     |     |                |              |
| 20 |                  |     |     |                |              |
| 21 |                  |     |     |                |              |
| 22 |                  |     |     |                |              |

**Solver Parameters Dialog Box:**

- Establecer objetivo:
- Para: ☐ Máx ☒ Mín ☐ Valor de:
- Cambiando las celdas de variables:
- Sujeto a las restricciones:
- ☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas
- Método de resolución: Simplex LP
- Método de resolución: Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.
- Buttons: Ayuda, Resolver, Cerrar

# Interpretación de la solución

|                            |             | 1        | 2        | Lo que compro | Lo que necesito (lado derecho) |
|----------------------------|-------------|----------|----------|---------------|--------------------------------|
| ingredientes               | suavizante  | 4        | 2        | 75            | 75                             |
|                            | purificador | 1.5      | 4.5      | 50            | 50                             |
| Costo unitario de producto |             | 80       | 100      |               |                                |
| variables                  |             | 15.83333 | 5.833333 |               |                                |
| costo total                | z           | 1850     |          |               |                                |

$x_j$  = Cantidad de paquetes a comprar al proveedor  $j$ .  $j \in J = \{1: A, 2: B\}$

$Z$  = Costo total de la compra

Compro 15.833 paquetes al proveedor A y 5.833 paquetes al proveedor B, con un costo total de \$1,850.

¿Paquetes con fracciones?

# Interpretación de la solución

## ¿Se necesita la solución entera?

**Opción 1.** Redondear. Cuando los valores de las variables son grandes y/o el modelo se resuelve periódicamente.

**Opción 2.** Agregar una restricción nueva de dominio de las variables: Ya no continuas sino enteras:

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ enteras}$$

|                              |             | 1   | 2   | Lo que compro | Lo que necesito (lado derecho) |
|------------------------------|-------------|-----|-----|---------------|--------------------------------|
| ingredientes                 | suavizante  | 4   | 2   | 76            | 75                             |
|                              | purificador | 1.5 | 4.5 | 51            | 50                             |
| Costo unitario de producción |             |     |     |               |                                |
| variables                    |             | x1  | x2  |               |                                |
|                              |             | 16  | 6   |               |                                |
| costo total                  |             |     |     | 1880          |                                |

Solver Parameters  
Set Objective:   
To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value of  
By Changing Variable Cells:   
Subject to the Constraints:

Compro 16 paquetes al proveedor A y 6 paquetes al proveedor B, con un costo total de \$1,880.

# Implementación del Modelo en GAMS

```
C:\Users\jenny.diaz\Documents\gamsdir\projdir\M9. modelo_ejemplo_b
Abono2.gms Abono2.lst CAR 110718sb8c.gms clase_modelo.lst dual.lst
sets
j proveedores /A, B/
i componentes /suavizante, purificador/;

table a(i,j)
           A      B
suavizante 4      2
purificador 1.5    4.5 ;

parameters
b(i)  requisitos por componente en (kg)
/  suavizante 75 , purificador 100 /
c(j)  precio de paquetes ($ por paq)
/  A 80 , B 100/;

VARIABLES z;
POSITIVE VARIABLES x(j);
EQUATIONS costo, requisitos(i);
costo.. Z=E=sum(j,c(j)*x(j));
requisitos(i).. sum(j,a(i,j)*x(j))=g=b(i);
MODEL PLbb /ALL/;

OPTION
lp=cplex;
PLbb.Optfile = 1;

SOLVE PLbb using LP minimizing Z;
display x.l
```

# Implementación del Modelo en R

```
ruido_blanco.R x mov_aver.R x ts_tendencia.R x MIP_base.R x ts_estacional.R x lp_base.R x
Source on Save Run
1 # ejemplo base de PL
2 #install.packages("lpsolve")
3
4 library(lpsolve)
5 library(ggplot2)
6 A2<-rbind(c(4,2),c(1.5, 4.5))
7 # o también
8 # A2 <-matrix(c(4, 2, 1.5, 4.5),nrow = 2, ncol = 2,byrow = TRUE)
9 b2<-c(75,50)
10 a<-c(80,100)
11 Dir_Res <- c(">=", ">=")
12
13 Dir_Res
14 sol_lp <- lp(direction = "min",
15             objective.in = a,
16             const.mat = A2,
17             const.dir = Dir_Res,
18             const.rhs = b2,
19             compute.sens=TRUE)
20 sol_lp
21 sol<-c(sol_lp$objval, sol_lp$solution)
22 sol
23 #si compute.sens=TRUE:..
24 #sensibilidad: coef restr y OF
25 sol_lp$sens.coef.from
26 sol_lp$sens.coef.to
27 #duales
28 sol_lp$duals
29
```