

Solución de un Problema de Programación Lineal – Forma Estándar –

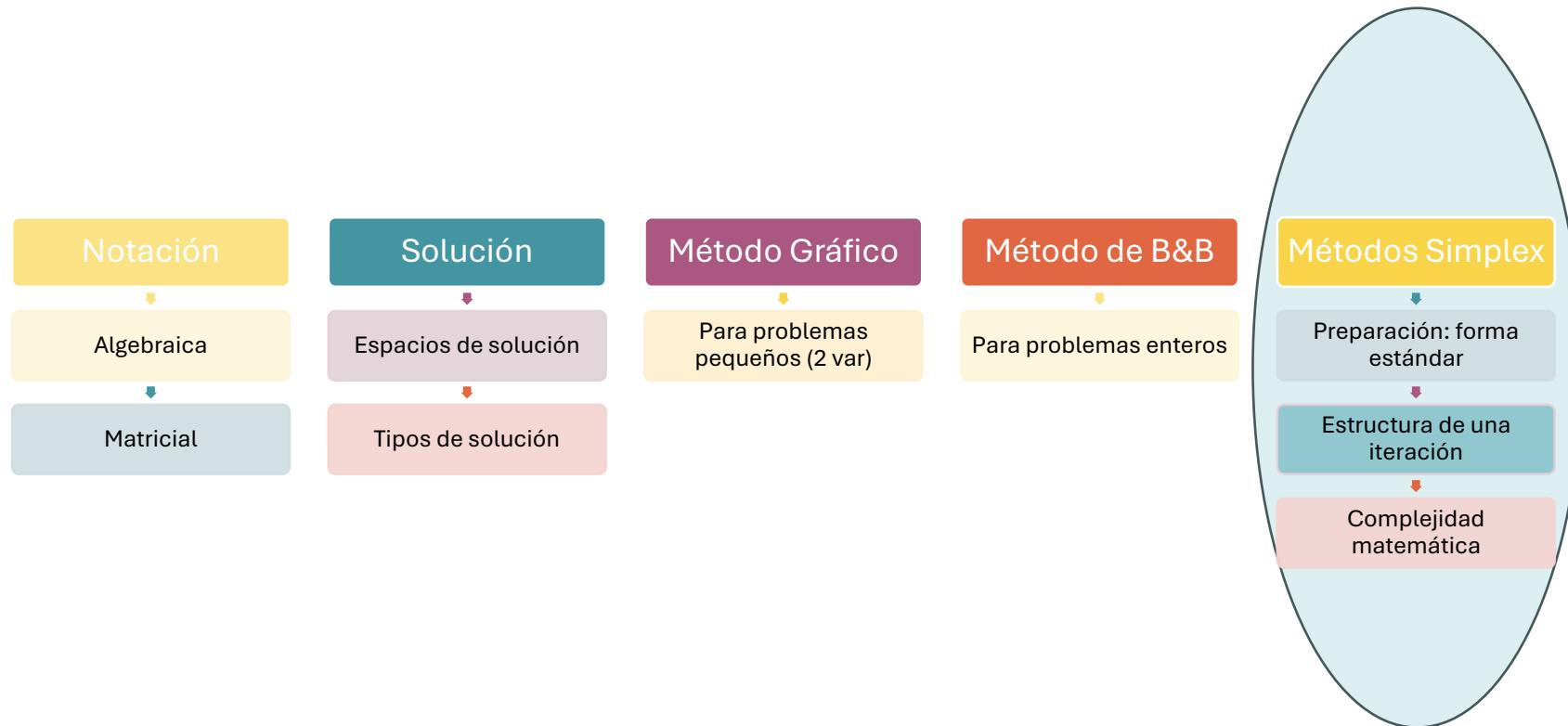
Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido



Estandarización

Antes de emplear el Método Simplex para resolver un LP, el problema debe ser convertido a la **forma estándar** del LP. En el cual todas las restricciones tienen signo de igualdad y las variables son no negativas.

Forma Estándar

Condiciones para que un PPL esté en su forma estándar

- Restricciones funcionales (o tecnológicas) → ecuaciones
- Lados derechos → parámetros no negativos
- Variables → no negativas

Por convención:

- n: número de variables
- m: número de restricciones funcionales

$$\begin{array}{ll}\max & Z = \mathbf{c}x \\ \text{st} & \\ & \mathbf{A}x = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Forma Estándar

- Sistema de ecuaciones

- Si $n=m^*$

- Si existe, hay una única solución

- Si $n < m$

- Hay restricciones redundantes o el sistema no tiene solución

- Si $n > m$

- Soluciones múltiples

- $n-m^*$

- Grados de Libertad o número de variables libres. A $(n-m)$ variables se les da un valor arbitrario, típicamente **cero** y las otras m variables se encuentran resolviendo el Sistema de ecuaciones (mxm).

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

* m : número de ecuaciones linealmente independientes

Modelo General de PL

Maximizar

Coeficientes de la función objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

⋮

⋮

Recursos

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Coeficientes Tecnológicos

Estandarización

Conversión de desigualdades a ecuaciones

- Las restricciones \leq se convierten en igualdad sumando una **variable de holgura** h_i en la restricción y agregando una restricción de no negatividad $h_i \geq 0$.
- Las restricciones \geq se convierten en igualdad restando una **variable de exceso** e_i y agregando una restricción de no negatividad $e_i \geq 0$.

En una restricción de recursos, donde el lado derecho representa la capacidad de un recurso (restricción con \geq) :
 h_i representa la cantidad de recurso no utilizado.

En una restricción donde el lado derecho representa un nivel de actividad mínima (restricción con \geq) :
 e_i representa la cantidad de actividad adicional realizada.

Estandarización

Conversión de lados derechos no negativos

- Si es una ecuación → Se multiplica toda la ecuación por (-1).
- Si es una desigualdad → Se multiplica la desigualdad por (-1) sin olvidar el cambio de signo de la desigualdad:

Ejemplos:

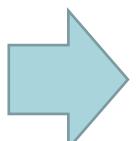
$$3x_1 - 2x_3 \leq -10 \times (-1) = -3x_1 + 2x_3 \geq 10$$

Maximizar $X_1 + X_2$

s.a.

$$-X_1 + 2X_2 \geq -8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

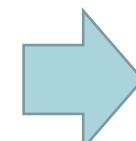


Maximizar $X_1 + X_2$

s.a.

$$X_1 - 2X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Maximizar $X_1 + X_2$

s.a.

$$X_1 - 2X_2 + h_1 = 10$$

$$X_1, X_2, h_1 \geq 0$$

Ejemplo 1:

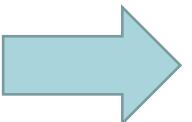
- Convertir el siguiente modelo a su forma estándar.

$$\text{Maximizar} \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\text{Maximizar} \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad x_1 + x_2 + h_1 = 50$$

$$x_1 + x_2 - e_1 = 25$$

$$x_1, x_2, h_1, e_1 \geq 0$$

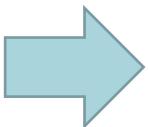
Ejemplo 2: Forma estándar

Minimizar $z = 2x_1 - 3x_2$

Sujeto a: $x_1 + x_2 \leq 4$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Maximizar $z = -2x_1 + 3x_2$

Sujeto a: $x_1 + x_2 + h_1 = 4$

$$x_1 - x_2 + h_2 = 6$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0$$

Estandarización

Conversión variables a no negativas

- Cuando una variable es irrestricta (que puede tener signo positivo o negativo) se puede transformar como la diferencia entre dos variables positivas. $X \rightarrow (X^+ - X^-)$

Ejemplo: Pasar a forma estándar el siguiente problema.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } X_1 + X_2 \\ & \text{s. a.} \end{aligned}$$

$$X_1 + 10X_2 \leq 8$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} X_2 &= (X_2^+ - X_2^-) \\ X_2^+, X_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformación de X_2

Restricción tácita:
 X_2 irrestricta

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } X_1 + (X_2^+ - X_2^-) \\ & \text{s. a.} \\ & X_1 + 10(X_2^+ - X_2^-) + h_1 = 8 \\ & 3X_1 + 2(X_2^+ - X_2^-) - e_1 = 10 \\ & X_1, X_2^+, X_2^-, h_1, e_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicios de práctica

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 300 \quad (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq -100 \quad (2) \\ -x_1 + x_3 &\geq -60 \quad (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\geq 0 \quad (4) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad (5) \\ x_3 &\text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Este problema tiene:

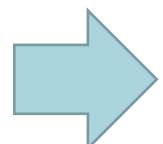
- Desigualdades
- Variables irrestrictas
- Lados derechos negativos

Estandarización

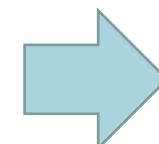
Restricciones con valor absoluto en el lado izquierdo

- Si una restricción tiene valor absoluto en el lado derecho ($|f(x)| \leq b$), esta se puede transformar como dos desigualdades una con signo positivo del lado derecho ($f(x) \leq b$) y otra con signo negativo ($-f(x) \leq b$).
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} & X_1 + X_2 \\ & |X_1 + 2X_2| \leq 10 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } X_1 + X_2 \\ & \text{s.a.} \\ & \quad X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & \quad -X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ & \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } X_1 + X_2 \\ & \text{s.a.} \\ & \quad X_1 + 2X_2 + h_1 = 10 \\ & \quad -X_1 - 2X_2 + h_2 = 10 \\ & \quad X_1, X_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Operaciones con matrices

- La matriz dimensión de una matriz se identifica como $r \times c$, donde r es el número de renglones y c el número de columnas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -7 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & -8 & 2 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$



Repasso de Algebra Lineal: Operaciones matriciales

Sumas y restas

- Para sumar y restar dos matrices, deben tener la misma dimensión

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 \\ -1+2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dimensiones: 2x2

2x2

2x2

2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-3 \\ -1-2 & 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & +5 \end{pmatrix}$$

2x2

2x2

2x2

2x2

Multiplicación de matrices

- Para multiplicar dos matrices o vectores, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda.
- El resultado obtenido de la operación genera una matriz con dimensiones iguales al número de renglones de la primera matriz por el número de columnas de la segunda.

Sea:

$$A [m \times n],$$

$$B [n \times p] \text{ y}$$

$$C [p \times m]$$

$$AB \text{ es } [m \times p]$$

BA no está definida

$$CA \text{ es } [p \times m]$$

Multiplicación de vectores y matrices

Para multiplicar un vector y una matriz:

$$[a \quad b] \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$$

1x2 2x1 1x1

Para multiplicar un vector y una matriz:

$$[a \quad b] \times \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} = [ac + be \quad ad + bf]$$

1x2 2x2 1x2

Para multiplicar dos matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

2x2 2x2 2x2

Ejercicios

$$[2 \quad 5] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$[3 \quad 8] \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 22 \\ 31 & 23 \end{bmatrix}$$