# Dualidad y Análisis de Sensibilidad –Dualidad–

Profesor name
Optimización de Procesos Industriales
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey

# Introducción

La teoría de la dualidad nos va a permitir, entre otras cosas, relacionar cada problema de programación lineal con otro denominado problema dual y obtener relaciones sobre el tipo de soluciones de ambos problemas.

Problema Primal ⟷ Problema Dual

El problema dual se puede definir directa y sistemáticamente, empezando con el problema primal.

La solución óptima de uno de los dos problemas da automáticamente la solución óptima del otro (si ambos tienen solución).

# Modelo General de PL

Coeficientes de la función objetivo

Maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Recursos

Coeficientes Tecnológicos

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Representación de un PPL

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

- n variables
- m functional constraints

$$\begin{aligned} \min Z &= \mathbf{c'x} \\ \mathbf{st} \quad \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Primal

$$\begin{aligned} \min Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{st} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots n \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{st} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\ldots,m \\ & x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots n \end{aligned}$$

# Representación de un PPL

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

- m variables
- n functional constraints

$$\begin{aligned} \max W &= \mathbf{y'b} \\ \text{st} \quad & \mathbf{y'A} \le \mathbf{c} \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \max W &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{st} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_2 \\ & \vdots \\ & a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \le c_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max W &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{st} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \; j = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

# Representación de un PPL

- m variables
- n functional constraints

- DUAL

$$
\begin{aligned}
\max W &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\
\text{st} \quad & a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \le c_1 \\
& a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \le c_2 \\
& \quad \vdots \\
& a_{1m} y_1 + a_{2m} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \le c_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max W &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\text{st} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \; j = 1,2,\ldots,m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max W &= \mathbf{y}'\mathbf{b} \\
\text{st} \quad & \mathbf{y}'\mathbf{A} \le \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Ejercicios

$$
\begin{aligned}
\min x_1 - 2x_2 &: \\
st &: \\
x_1 + x_2 &= 2 \\
-x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1 + x_2 &: \\
st &: \\
3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Escribe las matrices **A, b, c, x, 0** para los problemas originales y en su forma estándar

# Construcción de un problema dual a partir del primal

- Se define una variable dual por cada restricción del problema primal.
- Se define una restricción dual por cada variable del problema primal.
- Los coeficientes de la función objetivo del problema primal definen el término independiente (lado derecho) del problema dual.
- El término independiente (lado derecho) de las restricciones del problema primal define los coeficientes de la función objetivo del problema dual.
- Los coeficientes de las restricciones de una variable primal (columna) definen los coeficientes en el lado izquierdo de las restricciones del problema dual.
- La dirección de optimización cambia (de maximización a minimización y viceversa).

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

| Modelo Primal | Modelo Dual |
|---|---|
| Coeficientes de la función objetivo | Recursos |
| Recurso | Coeficientes de la función objetivo |
| Solución óptima (X*) | Precios duales/sombra |
| Precios duales/sombra | Solución óptima (Y*) |
| Costos reducidos | Valor de las variables de holgura/exceso |
| Valor de las variables de holgura/exceso | Costos reducidos |
| Rango de los coeficientes de la F.O. | Rango de los recursos (b) |
| Rango de los recursos (b) | Rango de los coeficientes de la F.O. |

# Ejercicios
# Conversiones de (P) to (D)

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c'x} \\ &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Escriba el problema dual de estos PPLs

# Construcción del problema dual

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

**Primal**

$$
\begin{aligned}
&\max Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4 \\
&\text{st} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
&\qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

**Dual**

$$
\begin{aligned}
&\min W = 10y_1 + 8y_2 \\
&\text{st} \quad y_1 + 2y_2 \geq 5 \\
&\qquad 2y_1 - y_2 \geq 12 \\
&\qquad y_1 + 3y_2 \geq 4 \\
&\qquad y_1 + 0y_2 \geq 0, \\
&\qquad y_1, y_2 \quad \text{irrestricta}
\end{aligned}
$$

# Relación primal-dual
# Tabla de conversión general

| Primal (P) | | Dual (D) | |
|---|---|---|---|
| Función objetivo | Max Z (W) | Min W (Z) | Función objetivo |
| Restricciones | $(\leq)$: *Común* ⟷<br>$(=)$: ⟷<br>$(\geq)$: *Raro* ⟷ | $y_i \geq 0 \ (x_i \geq 0)$<br>$y_i$ irrestricta $(x_i)$<br>$y_i \leq 0 \ (x_i \leq 0)$ | Variables |
| Variables | $x_j \geq 0 \ (y_j \geq 0)$ ⟷<br>$x_j$ irrestricta $(y_j)$ ⟷<br>$x_j \leq 0 \ (y_j \leq 0)$ ⟷ | $(\geq)$: *Común*<br>$(=)$:<br>$(\leq)$: *Raro* | Restricciones |

PARA USAR ESTA TABLA, LOCALICE EL PROBLEMA ORIGINAL en el lado izquierdo o derecho de la tabla (dual o primal, no importa), dependiendo únicamente de la dirección de optimización.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Relación primal-dual
# Tabla de conversión si el primal es max

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

| Primal (Dual) | | Dual (Primal) |
|---|---|---|
| máx | ——— | mín |
| Restricción "$\leq$" | ——— | Variable "$\geq 0$" |
| Restricción "$=$" | ——— | Variable no restringida |
| Restricción "$\geq$" | ——— | Variable "$\leq 0$" |
| Variable "$\geq 0$" | ——— | Restricción "$\geq$" |
| Variable no restringida | ——— | Restricción "$=$" |
| Variable "$\leq 0$" | ——— | Restricción "$\leq$" |

# Ejercicios

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

$$
\begin{aligned}
\min x_1 - 2x_2 &:\\
st &:\\
x_1 + x_2 &= 2\\
-x_1 + x_2 &= 1\\
x_2 &\leq 3\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1 + x_2 &:\\
st &:\\
3x_1 + x_2 &= 3\\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6\\
x_1 + 2x_2 &\leq 4\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Construya el problema dual

# Duality Theorem



| Primal | Dual |
|---|---|
| Si el problema primal es factible y $Z = \infty$ | El problema dual es factible y $Z < \infty$ |
| Si el problema primal es factible y $Z = \infty$ | El problema dual es infactible |
| Si el problema primal es infactible | El problema dual es: <br>▪ Factible y $Z = \infty$, o <br>▪ Infactible |

# Duality Theorem …

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

| P\D | Factible $Z<\infty$ | Factible $Z=\infty$ | Infactible |
|---|---|---|---|
| Factible $Z<\infty$ | * | | |
| Factible $Z=\infty$ | | | * |
| Infactible | | * | * |

# Relación Primal Dual

- Si P: max, D: min
- El dual del dual es el primal

| | | |
|---|---|---|
| Dualidad débil | • Si *x* es una SBF de (P), y *y* es una SBF de (D) | $c'x \leq y'b$ |
| Dualidad fuerte | • Si *x** es una solución óptima de (P), y *y** es una solución óptima de (D) | $c'x^* = y^{*\prime}b$ |

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Relación Primal Dual …

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

Holgura complementaria

- En una iteración, el método Simplex identifica simultáneamente una SBF $x$ para (P) y una solución complementaria $y$ para (D), donde $c'x = y'b$.
  - Si $x$ no es óptima para (P) → $y$ no es factible para (D)
  - Si $x^*$ es óptima para (P), entonces $y^*$ es la solución óptima complementaria para (D), y $c'x^* = y^{*\prime}b$
- $y$: precios sombra para (P).

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_{B^*} \times \mathbf{B}^{*-1}$$

# Exercise
# Holgura complementaria

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$st \quad :$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Si $x$ no es óptima para (P)
→ $y$ no es factible para (D)

Si $x^*$ es óptima para (P), entonces $y^*$ es la solución óptima complementaria para (D), y $c'x^* = y^{*\prime}b$

Resuelva por el método gráfico y algebráicamente este LPP y su dual

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Las variables duales en el Simplex

Reduced Cost

Z value

| | | |
|---|---|---|
| Z | $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}'$ | $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ |
| $\mathbf{x}_B$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ |

Value of basic variables

$$\mathbf{y}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

| | | |
|---|---|---|
| Z | $\bar{\mathbf{c}}' = [\mathbf{y}'\mathbf{N} - \mathbf{c}_N', 0]$ | $\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ |
| $\mathbf{x}_B$ | $\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{N},\mathbf{B}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}, \mathbf{I}]$ | $\bar{\mathbf{b}}$ |

Maximization Problem

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Un tablero final

$$\max Z = x1 + 2x2$$
$$st$$
$$x1 + 3x2 \leq 200 \quad (1)$$
$$2x1 + 2x2 \leq 300 \quad (2)$$
$$x2 \leq 60 \quad (3)$$
$$x1 \geq 0 \quad (4)$$
$$x2 \geq 0 \quad (5)$$

| Var. básicas | Z | x1 | x2 | s1 | s2 | s3 | LD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/4 | 0 | 175 |
| X1 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 3/4 | 0 | 125 |
| S3 | 0 | 0 | 0 | -1/2 | 1/4 | 1 | 35 |
| X2 | 0 | 0 | **1** | 1/2 | -1/4 | 0 | 25 |

Construya el problema dual-
Identifique la solución del problema dual en el tablero.
Verifique que y* es factible.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Ejercicios

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\
&st: \\
&x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \\
&x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 8 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Optimal zeroth row:

$$z + 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 16$$

$$
\begin{aligned}
&\min z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
&st: \\
&5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solve by inspection:

$$\mathbf{x}_B^* = \{x_3\}$$

Escriba el problema dual de estos PPLs
Encuentre las soluciones primal y dual.

# Ejercicio

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

$$\max z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$st:$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución final para valores específicos de b1 y b2:

| Básica | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | Solución |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | a | 7 | d | e | 150 |
| x1 | 1 | b | 2 | 1 | 0 | 30 |
| x5 | 0 | c | -8 | -1 | 1 | 10 |

Determine:
1) Los valores de b1 y b2
2) Los valores de a, b, c, d, e
3) El problema dual y su solucióm

# Lectura de la solución dual en el software

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

## Primal

```
[FO_P] Max = 50*X1 + 120*X2;
[R1_P] 2*X1 + 4*x2 <=80;
[R2_P] 3*X1 + 1*x2 <=60;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X1 | 0.0000 | 10.000 |
| X2 | 20.000 | 0.0000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO | 2400.0 | 1.0000 |
| R1 | 0.0000 | 30.000 |
| R2 | 40.000 | 0.0000 |

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| X1 | 50.000 | 10.000 | INFINITY |
| X2 | 120.00 | INFINITY | 20.000 |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1 | 80.000 | 160.00 | 80.000 |
| R2 | 60.000 | INFINITY | 40.000 |

## Dual

```
[FO_D] Min = 80*Y1 + 60*Y2;
[R1_D] 2*Y1 + 3*Y2 >= 50;
[R2_D] 4*Y1 + 1*Y2 >= 120;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| Y1 | 30.000 | 0.0000 |
| Y2 | 0.0000 | 40.000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO_D | 2400.0 | -1.0000 |
| R1_D | 10.000 | 0.0000 |
| R2_D | 0.0000 | -20.000 |

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| Y1 | 80.000 | 160.00 | 80.000 |
| Y2 | 60.000 | INFINITY | 40.000 |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1_D | 50.000 | 10.000 | INFINITY |
| R2_D | 120.00 | INFINITY | 20.000 |

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

## Primal

```
[FO_P] Max = 50*X1 + 120*X2;
[R1_P] 2*X1 + 4*x2 <=80;
[R2_P] 3*X1 + 1*x2 <=60;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X1 | 0.0000 | 10.000 |
| X2 | 20.000 | 0.0000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO | 2400.0 | 1.0000 |
| R1 | 0.0000 | 30.000 |
| R2 | 40.000 | 0.0000 |

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| X1 | 50.000 | 10.000 | INFINITY |
| X2 | 120.00 | INFINITY | 20.000 |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1 | 80.000 | 160.00 | 80.000 |
| R2 | 60.000 | INFINITY | 40.000 |

## Dual

```
[FO_D] Min = 80*Y1 + 60*Y2;
[R1_D] 2*Y1 + 3*Y2 >= 50;
[R2_D] 4*Y1 + 1*Y2 >= 120;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| Y1 | 30.000 | 0.0000 |
| Y2 | 0.0000 | 40.000 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO_D | 2400.0 | -1.0000 |
| R1_D | 10.000 | 0.0000 |
| R2_D | 0.0000 | -20.000 |

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| Y1 | 80.000 | 160.00 | 80.000 |
| Y2 | 60.000 | INFINITY | 40.000 |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1_D | 50.000 | 10.000 | INFINITY |
| R2_D | 120.00 | INFINITY | 20.000 |

# Ejercicio

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

Una empresa internacional produce y vende estos dos tipos de supercomputadores: el SC1 y el SC2. En la elaboración de ambos tipos de equipos hay que destacar dos procesos, el de ensamblado final y el de empaquetado, procesos P1 y P2. Esta empresa dispone mensualmente de 2000 horas dedicadas al proceso de ensamblado y 1000 horas dedicadas al proceso de empaquetado, además saben que los tiempos requeridos para realizar dichas operaciones para cada uno de los tipos de supercomputadores son los que se muestran en la tabla siguiente:

| Proceso | Horas requeridas | | Horas mensuales disponibles |
|---|---|---|---|
| | SC1 | SC2 | |
| P1 | 6 | 4 | 2000 |
| P2 | 2 | 4 | 1000 |

El beneficio neto obtenido tras la venta de un supercomputador de tipo SC1 es de $400 y tras la venta de una unidad de SC2 es de $600. Con esta información planteamos y resolvemos inicialmente un problema que permita determinar el numero de unidades de cada tipo de ordenador con objeto de maximizar el beneficio total.

**Variables de decisión:**

$x_1$ : Unidades a producir de SC1

$x_2$ : Unidades a producir de SC2

**Modelo:**

$$
\begin{aligned}
\text{máx } Z &= 400x_1 + 600x_2 \\
\text{s. a:} & \\
& 6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\
& 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Primal

$$
\begin{aligned}
\text{máx } Z &= 400x_1 + 600x_2 \\
\text{s. a:} & \\
& 6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\
& 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\
& x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\text{mín } Z &= 2000y_1 + 1000y_2 \\
\text{s. a:} & \\
& 6y_1 + 2y_2 \geq 400 \\
& 4y_1 + 4y_2 \geq 600 \\
& y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

**¿Qué cambió?**

- El dual cambia el de maximizar a minimizar
- Los coeficientes de la función objetivo se convierten en recursos y
- Los recursos se convierten en coeficientes de la función objetivo
- La matriz de coeficientes tecnológicos se transponen, los valores de los renglones se colocan ahora por columna.
- Los signos de las restricciones cambian.

**Adicional:**

- Ahora hay tantas variables como restricciones del primal y tantas restricciones como variables del primal.
- Las restricciones de no negatividad pueden cambiar.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# ¿Cómo se interpreta?

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

**Primal**

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 400x_1 + 600x_2 \\ \text{s. a:} & \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Z= $ 175 000
x1 = 250 unidades de SC1
x2 =125 unidades de SC2

| | Precio Dual |
|---|---|
| R1(activa) | 25 |
| R2 (activa) | 125 |

**Dual**

$$\begin{aligned} \text{mín } Z &= 2000y_1 + 1000y_2 \\ \text{s. a:} & \\ & 6y_1 + 2y_2 \geq 400 \\ & 4y_1 + 4y_2 \geq 600 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Z= $ 175 000
y1 = 25 unidades de SC1
y2 =125 unidades de SC2

| | Precio Dual |
|---|---|
| R1(activa) | -250 |
| R2(active) | -125 |

El **precio dual o precio sombra** para una restricción (≤) es la mejora en el valor de la función objetivo que resulta de un aumento de una unidad en el lado derecho de la restricción.

# ¿Cómo se interpreta?

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

## Primal

**Variables de decisión:**

$x_1$ : Unidades a producir de SC1

$x_2$ : Unidades a producir de SC2

$$\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2$$ Utilidad

s. a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2000$$ Capacidad proceso 1

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$ Capacidad proceso 2

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Solución:

Z= $ 175 000
x1 = 250 unidades de SC1
x2 =125 unidades de SC2

Precio Dual
R1 = -25
R2 = -125

## Dual

**Variables de decisión:**

$y_1$ : Cantidad de renta percibida por hora del P1

$y_2$ : Cantidad de renta percibida por hora del P2

$$\text{mín } Z = 2000y_1 + 1000y_2$$ Recursos

s. a:

$$6y_1 + 2y_2 \geq 400$$ utilidad mínima de 400 a generar para el SC1

$$4y_1 + 4y_2 \geq 600$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

utilidad mínima de 400 a generar para el SC2

Solución:

Z= $ 175 000
y1 = 25 unidades de SC1
y2 =125 unidades de SC2

Precio Dual
R1 = -250
R2 = -125

## Primal

```
[FO_P] Max = 400*x1 + 600*x2;
[R1_P]        6*x1 +    4*x2 + h1       =2000;
[R2_P]        2*x1 +    4*x2      + h2  =1000;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| X1 | 250.00 | 0.00 |
| X2 | 125.00 | 0.00 |
| H1 | 0.00 | 25.00 |
| H2 | 0.00 | 125.00 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO_P | 175000.0000 | 1.00 |
| R1_P | 0.0000 | 25.00 |
| R2_P | 0.0000 | 125.00 |

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| X1 | 400.00 | 500.00 | 100.00 |
| X2 | 600.00 | 200.00 | 333.33 |
| H1 | 0.00 | 25.00 | INFINITY |
| H2 | 0.00 | 125.00 | INFINITY |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1_P | 2000.00 | 1000.00 | 1000.00 |
| R2_P | 1000.00 | 1000.00 | 333.33 |

## Dual

```
[FO_D] Min = 2000*y1 + 1000*y2;
[R1_D]     6*y1 + 2*y2 -e1     = 400;
[R2_D]     4*y1 + 4*y2     -e2 = 600;
```

| Variable | Value | Reduced Cost |
|---|---|---|
| Y1 | 25.00 | 0.00 |
| Y2 | 125.00 | 0.00 |
| E1 | 0.00 | 250.00 |
| E2 | 0.00 | 125.00 |

| Row | Slack or Surplus | Dual Price |
|---|---|---|
| FO_D | 175000.00 | -1.00 |
| R1_D | 0.00 | -250.00 |
| R2_D | 0.00 | -125.00 |

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

| Variable | Current Coefficient | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| Y1 | 2000.00 | 1000.00 | 1000.00 |
| Y2 | 1000.00 | 1000.00 | 333.33 |
| E1 | 0.00 | INFINITY | 250.00 |
| E2 | 0.00 | INFINITY | 125.00 |

Righthand Side Ranges:

| Row | Current RHS | Allowable Increase | Allowable Decrease |
|---|---|---|---|
| R1_D | 400.00 | 500.00 | 100.00 |
| R2_D | 600.00 | 200.00 | 333.33 |

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Interpretación

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

- Ahora cambiamos el enfoque sobre el problema planteado, nuestro propósito va a ser determinar los precios a los cuales esta empresa deberá valorar sus recursos (horas de trabajo de los dos procesos) de tal manera que puedan determinar el mínimo valor total al cual estará dispuesta a arrendar o vender los recursos.
- Sean y1 e y2, la renta percibida por hora de los procesos P1 y P2 respectivamente. La renta total obtenida será pues, 2000y1 + 1000y2. Se desea como objetivo encontrar el mínimo valor de 2000y1 + 1000y2 de modo que la empresa pueda, de una manera inteligente, analizar algunas propuestas de alquiler o compra de todos los recursos como un paquete total.

# Interpretación económica de dualidad



- PPL: Ubicación de recursos
- *m*: recursos
- *n*: actividades económicas (e.g. productos)
- $c_j$: beneficio de la actividad *j*
- $b_i$: disponibilidad (máxima) de recurso *i*
- $a_{ij}$: consumo de recurso *i* por unidad de actividad *j*

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i$$

st

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

# Interpretación económica de dualidad

Si $z = w$

$$\text{beneficio } (\$) = \sum_i (\text{unidades de recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad de recurso } i)$$

$$y_i = \text{Valor de una unidad de recurso } i$$

Si $z < w$

$$\text{beneficio} < \text{valor de los recursos}$$

Inestable!!

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

# Interpretación económica de dualidad

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza

- Costo reducido

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}'$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{y}'\mathbf{A} - \mathbf{c}'$$

$$\bar{c}_j{}' = \mathbf{y}'\mathbf{A}_j - c_j$$

Costo de la actividad j

Beneficio de la actividad j

- Si max, incrementa el valor de la actividad j si: $c_j > \mathbf{y}'\mathbf{A}_j$

$$\bar{c}_j{}' \leq 0$$

Entonces, vale la pena desarrollar la actividad j