Modelos de Programación Entera

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Victor A. Villegas

Un modelo de programación lineal entera mixta

FUNCIÓN OBJETIVO: max/min

- Una función lineal
- Su valor se asigna a una nueva variable de decisión, usualmente "Z", pero se puede usar cualquier nombre.

Variables de Decisión

- Significado: objeto, acción y unidades.
- **Dominio: números naturales no negativos o binarios**
- El número de variables es finito.

$$\max Z = \mathbb{c}'\mathbb{x}$$

$$\textit{Sujeto a:}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x} \in \mathbb{N}^{+} \cup \{0\} \; o$$

$$\mathbb{x} \in \{0,1\}$$

Restricciones

- Ecuaciones o desigualdades (=, ≥, ≤)
- Lado Izquierdo (Left-hand side (LHS)): una expression lineal.
- Lado derecho (Right-hand side (RHS)): Un parámetro.

Víctor A. Villegas

Tipos de modelos de programación entera

- Modelo Entero Total:
  - Requiere que ***todas las variables*** de decisión sean ***valores enteros.***

- Modelo Entero 0-1:
  - ***Todas*** la variables de decisión deben ser valores ***enteros de cero o uno*** {0,1}

- Modelo Entero Mixto:
  - ***Algunas*** de las variables de decisión, no todas, ***requieren*** tener ***valores enteros.***

- Modelo Lineal Entero Mixto (MIP):
  - Es un ***modelo entero mixto*** con ***expresiones lineales*** en la función objetivo y en las restricciones.

Victor A. Villegas

Programación Entera

Modelos enteros y binarios → Modelos de redes (binarios) → Solución (branch & bound)

Problemas típicos de Programación Entera

- Problema de la mochila
- Problemas de selección de proyectos (análisis de inversión)
- Problemas de asignación
- Problema de cargo fijo: localización de plantas
- Problema de cubrimiento de conjuntos (set covering problem)
- Problemas de secuenciación (con restricciones condicionales if – then)
- Problema de redes:
  - Agente viajero (TSP: Traveling salesman problem)
  - Ruta más corta (SPP)
  - Localización de instalaciones

Victor A. Villegas

Un modelo entero total

- El dueño de un taller mecánico planea conseguir nuevas prensas y tornos para expandir su negocio.
- Rentabilidad marginal estimada:
  - $ 100 por prensa por día, $ 150 por torno por día .
- Limitaciones de recursos:
  - Presupuesto de $ 40,000, espacio en piso de 200 pies cuadrados.
- Precios de compra de las máquinas y requerimientos de espacio:

Maquina	Requerimiento de espacio en piso(ft.^{2})	Precio de compra
Prensa	15	$8,000
Torno	30	$4,000

Un modelo entero total

- **Variables de decisión :**

  x_1 = Número de prensas

  x_2 = Número de tornos

- **Función objetivo:**

  $$\text{Maximizar } Z = \$\,100x_1 + \$\,150x_2$$

- **Restricciones :**

  $$\$8000x_1 + \$4000x_2 \leq \$40{,}000$$
  $$15x_1 + 30x_2 \leq 200 \text{ ft}^2$$
  $$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y Entero}$$

- En este caso es necesario obtener un resultado tal que ambas variables de decisión sean números enteros, ya que no es posible comprar fracciones de máquinas.

Un modelo entero 0-1 (Variables binarias)

- Un gobierno municipal debe decidir que instalaciones construir para beneficio de sus residentes y maximizar su utilización.
- Las propuestas incluyen una alberca, una cancha de tenis, un campo de atletismo y un gimnasio.
- Restricciones de recursos: Presupuesto de $ 120,000; disponibilidad de 12 hectáreas de terreno.
- La piscina y la cancha de tenis tendrían que ser construidas en la misma parcela de terreno, por lo tanto, sólo es posible construir una o la otra.

Instalación Recreativa	Utilización estimada (personas/día)	Costo ($)	Requerimiento de terreno (hectareas)
Alberca	300	35,000	4
Canchas de tenis	90	10,000	2
Campo atletismo	400	25,000	7
Gimnasio	150	90,000	3

Un modelo entero 0-1

- **Variables de decisión :**

$$x_1 = \begin{cases} 1 \text{ si se construye la alberca} \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 \text{ si se construye la cancha de tenis} \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 \text{ si se construye el campo de atletismo} \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

$$x_4 = \begin{cases} 1 \text{ si se construye el gimnasio} \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

- **Función objetivo:**

$$\text{Maximizar } Z = 300x_1 + 90x_2 + 400x_3 + 150x_4$$

- **Restricciones :**

$$\begin{aligned} \$35{,}000x_1 + 10{,}000x_2 + 25{,}000x_3 + 90{,}000x_4 &\leq \$120{,}000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 &\leq 12 \text{ hectáreas} \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \text{ instalación} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &= 0 \text{ ó } 1 \end{aligned}$$

- En este caso los únicos valores válidos son 1 ó 0 ya que o se construye la instalación (1), o no se construye (0); y no se construye más de una de cada una de ellas.

Victor A. Villegas

Tipos de restricciones en modelos enteros 0-1

- **Mutuamente excluyente:**
  - Como en el caso de la alberca y la cancha de tenis, ***solamente una de las opciones*** puede ser construida. Es posible que no se construya ninguna de las dos ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

$x_1 + x_2 \leq 1$ instalación

- **De opción múltiple:**
  - Esta restricción especifica que ***alguna*** de las instalaciones ***debe*** ser construida. En este caso el modelo obliga a tomar una decisión entre 2 opciones.

$x_1 + x_2 = 1$ instalación

- **De opción múltiple (variación):**
  - En esta variación del caso de opción múltiple se ***especifica el número de instalaciones a construir***. Esta restricción especificaría la decisión del municipio de construir exactamente 2 instalaciones y forzaría a seleccionarlas.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ instalaciones

  - Si el municipio hubiese decidido no construir más de 2 instalaciones entonces la restricción quedaría en la forma:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$ instalaciones

Tipos de restricciones en modelos enteros 0-1

- **Condicional:**
  - En este caso la construcción de la cancha de tenis sería dependiente de la construcción de la alberca, es decir, la cancha de tenis ***podría*** ser construida ***sólo si*** la opción de la alberca ha sido aceptada también.

$$x_2 \le x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 - x_2 \ge 0$$

- **Co-requisito:**
  - Esta restricción hace que ambas opciones tengan el mismo valor, ya sea 1 ó 0.
  - De este modo especifica que si una de las instalaciones es construida entonces la otra ***también debe*** ser construida.

$$x_2 = x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 - x_1 = 0$$

Un modelo entero mixto

- Una persona cuenta con $250,000 para invertir de manera que obtenga el mayor rendimiento después de un año.

- Opciones:
    - Condominios con costo de $50,000 / unidad; $9,000 de utilidad si se venden después de un año.
    - Terrenos con costo de $12,000 / hectárea; ganancia de $1,500 si se venden después de un año. Es posible comprar fracciones de hectarea
    - Bono municipal un costo de $8,000 / bono, ganancia de $1,000 si se venden después de un año.

- Sólo hay 4 condominios, 15 hectáreas de terreno y 20 bonos municipales disponibles.

Victor A. Villegas

Un modelo entero mixto

- **Variables de decisión :**

  x_1 = Condominios comprados

  x_2 = Hectáreas de terreno compradas

  x_3 = Bonos municipales comprados

- **Función objetivo:**

  Maximizar $Z = \$9{,}000x_1 + 1{,}500x_2 + 1{,}000x_3$

- **Restricciones :**

$$
\begin{aligned}
\$50{,}000x_1 + 12{,}000x_2 + 8{,}000x_3 &\leq \$250{,}000 \\
x_1 &\leq 4 \text{ condominios} \\
x_2 &\leq 15 \text{ hectáreas} \\
x_3 &\leq 20 \text{ bonos} \\
x_2 &\geq 0 \\
x_1, x_3 &\geq 0, \text{ Entero}
\end{aligned}
$$

- En un modelo entero mixto las soluciones de algunas de las variables de decisión son enteras y otras pueden ser no-enteras.

Victor A. Villegas