Método Simplex
Para la solución de problemas lineales

Profesor name
Optimización de Procesos Industriales
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey

Jenny Díaz, R.
Rodolfo Mendoza PhD

Métodos de Solución - Contenido

- Notación
  - Algebraica
  - Matricial
- Solución
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- Método Gráfico
  - Para problemas pequeños (2 var)
- Método de B&B
  - Para problemas enteros
- Métodos Simplex
  - Estructura de una iteración
  - Inicialización

Jenny Díaz, R.

Método de la Gran M

- Problema original

$$\min \mathbf{cx}:$$
$$\text{st } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- Problema modificado

$$\min \mathbf{cx} + M\mathbf{1}\mathbf{x}_a$$
$$\text{st } \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_a \geq \mathbf{0}$$

- Agregar tantas variables artificiales como sean necesarias para formar la primera base.
- Variable artificial: No existe en el problema original. No tiene significado.
- El problema modificado es diferente al problema original.

Método de la Gran M

- Penalizar a la función de costo (objetivo) un gran costo unitario (M) por cada variable artificial agregada.
  - Si min: penalización== +M
  - Si max: penalización== -M

- Las variables artificiales empiezan como básicas. El método Simplex tenderá a sacarlas de la base, una por una en cada iteración.

- Si el problema original es **factible**, todas las variables artificiales saldrán de la base y/o tendrán valor de cero.
- Si el problema original es **infactible**, habrá al menos una variable artificial en la base y Z estará en función de M

Método de la Gran M

- Para iniciar el tablero: se debe corregir el renglón cero. Suponga que las variables artificiales están en los renglones 1 y 2, entonces:

  - Nuevo renglón cero (de z)= Renglón anterior (R0) + (M*(-1)*R1 + M*(-1)*R2)
  - Nuevo renglón cero (de z)= R0 - (M*R1 + M*R2)

- Y luego, aplicar el método Simplex

- Qué tan grande debe ser M?

Jenny Díaz, R.

Método de la Gran M

$$
\begin{aligned}
\min x_1 - 2x_2 &: \\
st &: \\
x_1 + x_2 &= 2 \\
-x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1 + x_2 &: \\
st &: \\
3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Método de la M…

- Primer tablero
  - Agregamos a1 y a2
  - La base inicial es {a1, a2, s3}

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
Z	1	1	-2	0	M	M	0
Z	**1**	**1**	**-2M-2**	**0**	**0**	**0**	**-3M**
a1	0	1	1	0	1	0	2
a2	0	-1	1	0	0	1	1
s3	0	0	1	1	0	0	3

Jenny Díaz, R.

Método de la M…

- Entra x2, sale a2
- Nueva R0= Ro+ (2M+2) R2

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
Z	**1**	**-2M-1**	**0**	**0**	**0**	**2M+2**	**2-M**
a1	0	2	0	< 0	1	-1	1
x2	0	-1	1	0	0	1	1
s3	0	1	0	1	0	-1	2

Mínimo!

Jenny Díaz, R.

Método de la M…

Jenny Díaz, R.

- Entra x1, sale a1
- Nueva R0= Ro+ (2M+1) R1

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
Z	**1**	**0**	**0**	**0**	**M+ 1/2**	**M+ 3/2**	**5/2**
a1	0	1	0	0	½	- ½	½
x2	0	0	1	0	½	½	3/2
s3	0	0	0	1	-½	-½	3/2

Óptimo!

Método de las dos fases

- Fase 1

$$\min \mathbf{1x}_a :$$
$$\text{st } \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_a \geq \mathbf{0}$$

- Fase 2

$$\min \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N$$
$$\text{st } \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

Jenny Díaz, R.

Método de las dos fases

Agregue las variables artificiales necesarias para formar la primera base.

Resuelva el problema de minimizar la suma de las variables artificiales, sujeta a las restricciones funcionales del problema original

Corrija el renglón 0:: nuevo R0’ = R0 – Ri, Ri=todos los renglones con artificiales

Si Z*>0 (o si alguna Xa*>0), pare. El problema original es infactible.

Si Z=0, vaya a la fase 2

Jenny Díaz, R.

Método de las dos fases

Jenny Díaz, R.

FASE 2

Elimine del tablero las columnas correspondientes a las variables artificiales.

Corrija el renglón 0 del problema original. Realice operaciones de filas para colocar “ceros” en las columnas básicas.

Resuelva el problema original, empezando con el tablero final de la fase 1 y el nuevo renglón cero

Método de las dos fases

Jenny Díaz, R.

$$
\begin{aligned}
\min x_1 - 2x_2 &: \\
st &: \\
x_1 + x_2 &= 2 \\
-x_1 + x_2 &= 1 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1 + x_2 &: \\
st &: \\
3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Fase 1

Problema original

$$\begin{aligned} \min x_1 - 2x_2 &: \\ st &: \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema a resolver en la Fase 1, en forma estándar

$$\begin{aligned} \min a_1 + a_2 &: \\ st &: \\ x_1 + x_2 + a_1 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + a_2 &= 1 \\ x_2 + s_3 &= 3 \\ x_1, x_2, s_3, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1 …

Jenny Díaz, R.

Problema a resolver en la Fase 1, en forma estándar

$$
\begin{aligned}
\min a_1 + a_2 &: \\
st &: \\
x_1 + x_2 + a_1 &= 2 \\
-x_1 + x_2 + a_2 &= 1 \\
x_2 + s_3 &= 3 \\
x_1, x_2, s_3, a_1, a_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\min w = a_1 + a_2$$

$$\max -w = -a_1 - a_2$$

$$\max$$

$$-w + a_1 + a_2 = 0$$

Problema diferente al original

- Algunas restricciones originales modificadas
- Función objetivo en fase 1: siempre minimización de la suma de las variables artificiales agregadas

Método de las dos fases …

- Fase 1
  - Agregamos a1 y a2
  - Min: w= a1 + a2
  - La base inicial es {a1, a2, s3}

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
w	-1	0	0	0	1	1	0
w	**-1**	**0**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**-3**
a1	0	1	1	0	1	0	2
a2	0	-1	1	0	0	1	1
s3	0	0	1	1	0	0	3

Jenny Díaz, R.

Método de las dos fases …

Entra x2, sale a2

- Nueva R0= Ro+2 R2

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
Z	**1**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**2**	**-1**
a1	0	2	0	0	1	-1	1
x2	0	-1	1	0	0	1	1
s3	0	1	0	1	0	-1	2

Mínimo!

Jenny Díaz, R.

Método de las dos fases …

- Entra x1, sale a1
- **Nueva R0= Ro+ 2 R1**

Fin de Fase 1

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	a1	a2	LD
Z	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
x1	0	1	0	0	½	- ½	½
x2	0	0	1	0	½	½	3/2
s3	0	0	0	1	-½	-½	3/2

Óptimo!

Método de las dos fases …

- Fase 2

¡Esta SBF es óptima!

V. Básicas	Z	x1	x2	s3	LD
Z	**1**	**1**	**-2**	**0**	**0**
	0	0	0	0	**5/2**
a1	0	1	0	0	½
x2	0	0	1	0	3/2
s3	0	0	0	1	3/2