

Dualidad y Análisis de Sensibilidad –Dualidad–

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Introducción

La teoría de la dualidad nos va a permitir, entre otras cosas, relacionar cada problema de programación lineal con otro denominado problema dual y obtener relaciones sobre el tipo de soluciones de ambos problemas.

Problema Primal



Problema Dual

El problema **dual** se puede definir directa y sistemáticamente, empezando con el problema **primal**.

La solución óptima de uno de los dos problemas da automáticamente la solución óptima del otro (si ambos tienen solución).

Modelo General de PL

Maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$

Coeficientes de la función objetivo

Coeficientes Tecnológicos

Recursos

Representación de un PPL

- n variables
- m functional constraints

$$\begin{array}{ll}\min Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{st} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

Primal

$$\begin{array}{ll}\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{st} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll}\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{st} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\end{array}$$

Representación de un PPL

- m variables
- n functional constraints

$$\begin{array}{ll} \max W = \mathbf{y}' \mathbf{b} \\ \text{st} & \mathbf{y}' \mathbf{A} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll} \max W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\ \text{st} & a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \leq c_1 \\ & a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \leq c_2 \\ & \vdots \\ & a_{1m} y_1 + a_{2m} y_2 + \cdots + a_{mm} y_m \leq c_m \end{array}$$

$$\max W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{st} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, 2, \dots, m$$

Representación de un PPL

- m variables

- n functional constraints

$$\max W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

$$\text{st} \quad a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \leq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \leq c_2$$

\vdots

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \leq c_n$$

$$\begin{array}{ll} \max W = & \mathbf{y}' \mathbf{b} \\ \text{st} & \mathbf{y}' \mathbf{A} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

• DUAL

$$\max W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{st} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Ejercicios

$$\min x_1 - 2x_2 :$$

st :

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min 4x_1 + x_2 :$$

st :

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Escribe las matrices **A**, **b**, **c**, **x**, **0** para los problemas originales y en su forma estándar

Construcción de un problema dual a partir del primal

- Se define una **variable dual** por cada **restricción** del problema **primal**.
- Se define una **restricción dual** por cada **variable** del problema **primal**.
- Los coeficientes de la **función objetivo** del problema **primal** definen el término independiente (**lado derecho**) del problema **dual**.
- El término independiente (**lado derecho**) de las restricciones del problema **primal** define los coeficientes de la **función objetivo** del problema **dual**.
- Los **coeficientes** de las restricciones de una **variable primal** (columna) definen los coeficientes en el lado izquierdo de las **restricciones** del **problema dual**.
- La **dirección** de optimización **cambia** (de maximización a minimización y viceversa).

Modelo Primal

Modelo Dual

Coeficientes de la función objetivo	→	Recursos
Recurso	→	Coeficientes de la función objetivo
<hr/>		
Solución óptima (X^*)	→	Precios duales/sombra
Precios duales/sombra	→	Solución óptima (Y^*)
<hr/>		
Costos reducidos	→	Valor de las variables de holgura/exceso
Valor de las variables de holgura/exceso	→	Costos reducidos
<hr/>		
Rango de los coeficientes de la F.O.	→	Rango de los recursos (b)
Rango de los recursos (b)	→	Rango de los coeficientes de la F.O.

Ejercicios

Conversiones de (P) to (D)

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

Escriba el problema dual de estos PPLs

Construcción del problema dual

Primal

$$\begin{aligned} \max Z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4 \\ \text{st} \quad &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min W &= 10y_1 + 8y_2 \\ \text{st} \quad &y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ &2y_1 - y_2 \geq 12 \\ &y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ &y_1 + 0y_2 \geq 0, \\ &y_1, y_2 \text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Relación primal-dual

Tabla de conversión general

Primal (P)		Dual (D)	
Función objetivo	Max Z (W)	Min W (Z)	Función objetivo
Restricciones	$(\leq): Común$ $(=):$ $(\geq): Raro$	$\longleftrightarrow y_i \geq 0 \ (x_i \geq 0)$ $\longleftrightarrow y_i \text{ irrestricta } (x_i)$ $\longleftrightarrow y_i \leq 0 \ (x_i \leq 0)$	Variables
Variables	$x_j \geq 0 \ (y_j \geq 0)$ $x_j \text{ irrestricta } (y_j)$ $x_j \leq 0 \ (y_j \leq 0)$	$\longleftrightarrow (\geq): Común$ $\longleftrightarrow (=):$ $\longleftrightarrow (\leq): Raro$	Restricciones

PARA USAR ESTA TABLA, LOCALICE EL PROBLEMA ORIGINAL en el lado izquierdo o derecho de la tabla (dual o primal, no importa), dependiendo únicamente de la dirección de optimización.

Relación primal-dual

Tabla de conversión si el primal es max

Primal (Dual)		Dual (Primal)
máx	_____	mín
Restricción " \leq "	_____	Variable " ≥ 0 "
Restricción " $=$ "	_____	Variable no restringida
Restricción " \geq "	_____	Variable " ≤ 0 "
Variable " ≥ 0 "	_____	Restricción " \geq "
Variable no restringida	_____	Restricción " $=$ "
Variable " ≤ 0 "	_____	Restricción " \leq "

Ejercicios

$$\min x_1 - 2x_2 :$$

st :

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min 4x_1 + x_2 :$$

st :

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

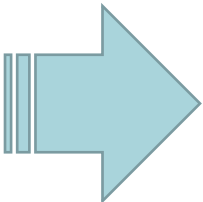
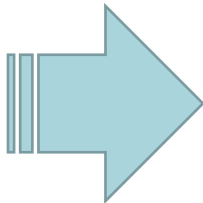
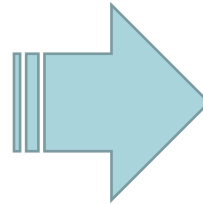
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Construya el problema dual

Duality Theorem

Primal

- Si el problema primal es factible y $Z = \infty$
- Si el problema primal es factible y $Z = \infty$
- Si el problema primal es infactible



Dual

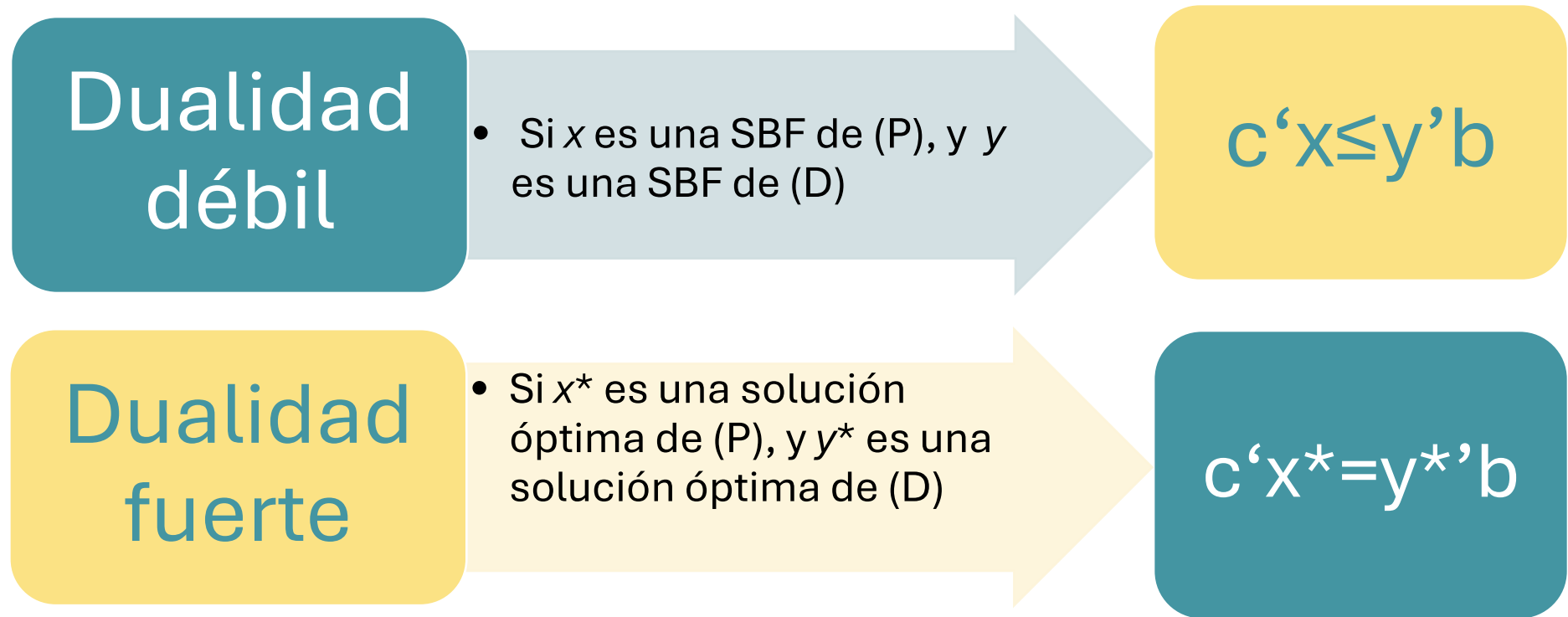
- El problema dual es factible y $Z < \infty$
- El problema dual es infactible
- El problema dual es:
 - Factible y $Z = \infty$, o
 - Infactible

Duality Theorem ...

P\D	Factible $Z < \infty$	Factible $Z = \infty$	Infactible
Factible $Z < \infty$	*		
Factible $Z = \infty$			*
Infactible		*	*

Relación Primal Dual

- Si P: max, D: min
- El dual del dual es el primal



Relación Primal Dual ...

Holgura complementaria

- En una iteración, el método Simplex identifica simultáneamente una SBF x para (P) y una solución complementaria y para (D), donde $c'x = y'b$.
 - Si x no es óptima para (P) $\rightarrow y$ no es factible para (D)
 - Si x^* es óptima para (P), entonces y^* es la solución óptima complementaria para (D), y $c'x^* = y^{*'}b$
- y : precios sombra para (P).

$$y^* = c_{B^*} \times B^{*-1}$$

Exercise

Holgura complementaria

$$\begin{array}{ll} \max z = 3x_1 + 5x_2 & \\ st & : \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Si x no es óptima para (P)
 $\rightarrow y$ no es factible para (D)

Si x^* es óptima para (P),
entonces y^* es la
solución óptima
complementaria para (D),
y $c'x^* = y'^*b$

Resuelva por el método gráfico y algebraicamente este LPP y su dual

Las variables duales en el Simplex

<div> <div>Reduced Cost</div> <div>Z value</div> </div>		
z	$\bar{c}' = c'_B B^{-1} A - c'$	$c'_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} A$	$B^{-1} b$
<div> <div>Value of basic variables</div> </div>		
<div> <div> $y' = c'_B B^{-1}$ </div> <div> $\bar{b} = B^{-1} b$ </div> <div> $A = [N, B]$ </div> </div>		
z	$c' = [y' N - c'_N, 0]$	$c'_B \bar{b}$
x_B	$B^{-1} [N, B] = [B^{-1} N, I]$	\bar{b}
<div> <div>Maximization Problem</div> </div>		

Un tablero final

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

st

$$x_1 + 3x_2 \leq 200 \quad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 300 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 60 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Var. básicas	Z	x1	x2	s1	s2	s3	LD
Z	1	0	0	1/2	1/4	0	175
X1	0	1	0	-1/2	3/4	0	125
S3	0	0	0	-1/2	1/4	1	35
X2	0	0	1	1/2	-1/4	0	25

Construya el problema dual-
Identifique la solución del problema dual en el tablero.
Verifique que y^* es factible.

Ejercicios

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

st :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Optimal zeroth row:

$$z + 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 16$$

$$\min z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

st :

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solve by inspection:

$$\mathbf{x}_B^* = \{x_3\}$$

Escriba el problema dual de estos PPLs
Encuentre las soluciones primal y dual.

Ejercicio

$$\max z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

st :

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución final para valores específicos de b1 y b2:

Básica	x1	x2	x3	x4	x5	Solución
Z	0	a	7	d	e	150
x1	1	b	2	1	0	30
x5	0	c	-8	-1	1	10

- Determine:
- 1) Los valores de b1 y b2
 - 2) Los valores de a, b, c, d, e
 - 3) El problema dual y su solución

Lectura de la solución dual en el software

Primal

[FO_P] Max = 50*X1 + 120*X2;
 [R1_P] 2*X1 + 4*x2 <=80;
 [R2_P] 3*X1 + 1*x2 <=60;

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.0000	10.000
X2	20.000	0.0000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.0	1.0000
R1	0.0000	30.000
R2	40.000	0.0000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	50.000	10.000	INFINITY
X2	120.00	INFINITY	20.000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1	80.000	160.00	80.000
R2	60.000	INFINITY	40.000

Dual

[FO_D] Min = 80*Y1 + 60*Y2;
 [R1_D] 2*Y1 + 3*Y2 >= 50;
 [R2_D] 4*Y1 + 1*Y2 >= 120;

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	30.000	0.0000
Y2	0.0000	40.000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO_D	2400.0	-1.0000
R1_D	10.000	0.0000
R2_D	0.0000	-20.000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
Y1	80.000	160.00	80.000
Y2	60.000	INFINITY	40.000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1_D	50.000	10.000	INFINITY
R2_D	120.00	INFINITY	20.000

Primal

$$\begin{aligned} [\text{FO_P}] \quad & \text{Max} = 50 \cdot X_1 + 120 \cdot X_2; \\ [\text{R1_P}] \quad & 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 80; \\ [\text{R2_P}] \quad & 3 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 \leq 60; \end{aligned}$$

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.0000	10.000
X2	20.000	0.0000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO	2400.0	1.0000
R1	0.0000	30.000
R2	40.000	0.0000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	50.000	10.000	INFINITY
X2	120.00	INFINITY	20.000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1	80.000	160.00	80.000
R2	60.000	INFINITY	40.000

Dual

$$\begin{aligned} [\text{FO_D}] \quad & \text{Min} = 80 \cdot Y_1 + 60 \cdot Y_2; \\ [\text{R1_D}] \quad & 2 \cdot Y_1 + 3 \cdot Y_2 \geq 50; \\ [\text{R2_D}] \quad & 4 \cdot Y_1 + 1 \cdot Y_2 \geq 120; \end{aligned}$$

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	30.000	0.0000
Y2	0.0000	40.000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO_D	2400.0	-1.0000
R1_D	10.000	0.0000
R2_D	0.0000	-20.000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
Y1	80.000	160.00	80.000
Y2	60.000	INFINITY	40.000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1_D	50.000	10.000	INFINITY
R2_D	120.00	INFINITY	20.000

Ejercicio

Una empresa internacional produce y vende estos dos tipos de supercomputadores: el SC1 y el SC2. En la elaboración de ambos tipos de equipos hay que destacar dos procesos, el de ensamblado final y el de empaquetado, procesos P1 y P2. Esta empresa dispone mensualmente de 2000 horas dedicadas al proceso de ensamblado y 1000 horas dedicadas al proceso de empaquetado, además saben que los tiempos requeridos para realizar dichas operaciones para cada uno de los tipos de supercomputadores son los que se muestran en la tabla siguiente:

Proceso	Horas requeridas		Horas mensuales disponibles
	SC1	SC2	
P1	6	4	2000
P2	2	4	1000

El beneficio neto obtenido tras la venta de un supercomputador de tipo SC1 es de \$400 y tras la venta de una unidad de SC2 es de \$600. Con esta información planteamos y resolvemos inicialmente un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo de ordenador con objeto de maximizar el beneficio total.

Variables de decisión:

x_1 : Unidades a producir de SC1

x_2 : Unidades a producir de SC2

Modelo:

$$\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2$$

s. a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2000$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Primal

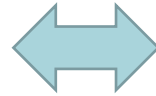
$$\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2$$

s. a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2000$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Dual

$$\text{mín } Z = 2000y_1 + 1000y_2$$

s. a:

$$6y_1 + 2y_2 \geq 400$$

$$4y_1 + 4y_2 \geq 600$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

¿Qué cambió?

- El dual cambia el de maximizar a minimizar
- Los coeficientes de la función objetivo se convierten en recursos y
- Los recursos se convierten en coeficientes de la función objetivo
- La matriz de coeficientes tecnológicos se transponen, los valores de los renglones se colocan ahora por columna.
- Los signos de las restricciones cambian.

Adicional:

- Ahora hay tantas variables como restricciones del primal y tantas restricciones como variables del primal.
- Las restricciones de no negatividad pueden cambiar.

¿Cómo se interpreta?

Primal

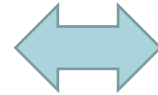
$$\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2$$

s. a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2000$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Dual

$$\text{mín } Z = 2000y_1 + 1000y_2$$

s. a:

$$6y_1 + 2y_2 \geq 400$$

$$4y_1 + 4y_2 \geq 600$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Solución:

$$Z = \$ 175\,000$$

$$x_1 = 250 \text{ unidades de SC1}$$

$$x_2 = 125 \text{ unidades de SC2}$$

Precio Dual

$$R1(\text{activa}) \quad 25$$

$$R2(\text{activa}) \quad 125$$

Solución:

$$Z = \$ 175\,000$$

$$y_1 = 25 \text{ unidades de SC1}$$

$$y_2 = 125 \text{ unidades de SC2}$$

Precio Dual

$$R1(\text{activa}) \quad -250$$

$$R2(\text{activa}) \quad -125$$

El **precio dual** o **precio sombra** para una restricción (\leq) es la mejora en el valor de la función objetivo que resulta de un aumento de una unidad en el lado derecho de la restricción.

¿Cómo se interpreta?

Primal

Variables de decisión:

x_1 : Unidades a producir de SC1

x_2 : Unidades a producir de SC2

$$\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2 \quad \text{Utilidad}$$

s. a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \quad \text{Capacidad proceso 1}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \quad \text{Capacidad proceso 2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

$$Z = \$ 175\,000$$

$$x_1 = 250 \text{ unidades de SC1}$$

$$x_2 = 125 \text{ unidades de SC2}$$

Precio Dual

$$R_1 = -25$$

$$R_2 = -125$$

Dual

Variables de decisión:

y_1 : Cantidad de renta percibida por hora del P1

y_2 : Cantidad de renta percibida por hora del P2

$$\text{mín } Z = 2000y_1 + 1000y_2 \quad \text{Recursos}$$

s. a:

$$6y_1 + 2y_2 \geq 400 \quad \text{utilidad mínima de 400 a generar para el SC1}$$

$$4y_1 + 4y_2 \geq 600$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

utilidad mínima de 400 a generar para el SC2

Solución:

$$Z = \$ 175\,000$$

$$y_1 = 25 \text{ unidades de SC1}$$

$$y_2 = 125 \text{ unidades de SC2}$$

Precio Dual

$$R_1 = -250$$

$$R_2 = -125$$

Primal

$[FO_P] \text{ Max} = 400 \cdot x_1 + 600 \cdot x_2;$
 $[R1_P] \quad 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + h_1 = 2000;$
 $[R2_P] \quad 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + h_2 = 1000;$

Variable	Value	Reduced Cost
X1	250.00	0.00
X2	125.00	0.00
H1	0.00	25.00
H2	0.00	125.00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO_P	175000.0000	1.00
R1_P	0.0000	25.00
R2_P	0.0000	125.00

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	400.00	500.00	100.00
X2	600.00	200.00	333.33
H1	0.00	25.00	INFINITY
H2	0.00	125.00	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1_P	2000.00	1000.00	1000.00
R2_P	1000.00	1000.00	333.33

Dual

$[FO_D] \text{ Min} = 2000 \cdot y_1 + 1000 \cdot y_2;$
 $[R1_D] \quad 6 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 - e_1 = 400;$
 $[R2_D] \quad 4 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 - e_2 = 600;$

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	25.00	0.00
Y2	125.00	0.00
E1	0.00	250.00
E2	0.00	125.00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
FO_D	175000.00	-1.00
R1_D	0.00	-250.00
R2_D	0.00	-125.00

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
Y1	2000.00	1000.00	1000.00
Y2	1000.00	1000.00	333.33
E1	0.00	INFINITY	250.00
E2	0.00	INFINITY	125.00

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
R1_D	400.00	500.00	100.00
R2_D	600.00	200.00	333.33

Interpretación

- Ahora cambiamos el enfoque sobre el problema planteado, nuestro propósito va a ser determinar los precios a los cuales esta empresa deberá valorar sus recursos (horas de trabajo de los dos procesos) de tal manera que puedan determinar el mínimo valor total al cual estará dispuesta a arrendar o vender los recursos.
- Sean y_1 e y_2 , la renta percibida por hora de los procesos P1 y P2 respectivamente. La renta total obtenida será pues, $2000y_1 + 1000y_2$. Se desea como objetivo encontrar el mínimo valor de $2000y_1 + 1000y_2$ de modo que la empresa pueda, de una manera inteligente, analizar algunas propuestas de alquiler o compra de todos los recursos como un paquete total.

Interpretación económica de dualidad

- PPL: Ubicación de recursos
- m : recursos
- n : actividades económicas (e.g. productos)
- c_j : beneficio de la actividad j
- b_i : disponibilidad (máxima) de recurso i
- a_{ij} : consumo de recurso i por unidad de actividad j

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$$

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

st

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Interpretación económica de dualidad

Si $z = w$

$$\text{beneficio (\$)} = \sum_i (\text{unidades de recurso } i) \times (\text{\$ por unidad de recurso } i)$$

y_i = Valor de una unidad de recurso i

Si $z < w$

beneficio < valor de los recursos

Inestable!!

Interpretación económica de dualidad

- Costo reducido

$$\mathbf{y}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}'$$

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{y}' \mathbf{A} - \mathbf{c}'$$

$$\bar{c}_j' = \mathbf{y}' \mathbf{A}_j - c_j$$

Costo de la actividad j

Beneficio de la actividad j

- Si max, incrementa el valor de la actividad j si: $c_j > \mathbf{y}' \mathbf{A}_j$

$$\bar{c}_j' \leq 0$$

Entonces, vale la pena desarrollar la actividad j