Tecnológico de Monterrey

Solución de un Problema de Programación Lineal

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Rodolfo Mendoza PhD

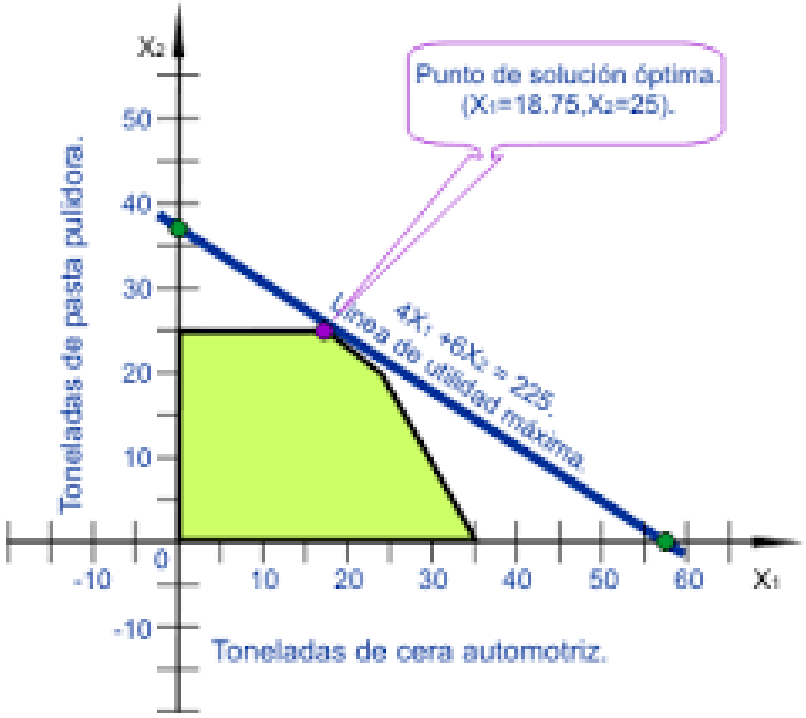
Métodos de Solución - Contenido

- **Notación**
  - Algebraica
  - Matricial
- **Solución**
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- **Método Gráfico**
  - Para problemas pequeños (2 var)
- **Método de B&B**
  - Para problemas enteros
- **Métodos Simplex**
  - Estructura de una iteración
  - Complejidad matemática

Método Gráfico

¿Qué es?

Es un método que permite resolver problemas de Programación Lineal de 2 variables a través de su representación gráfica en un plano cartesiano.

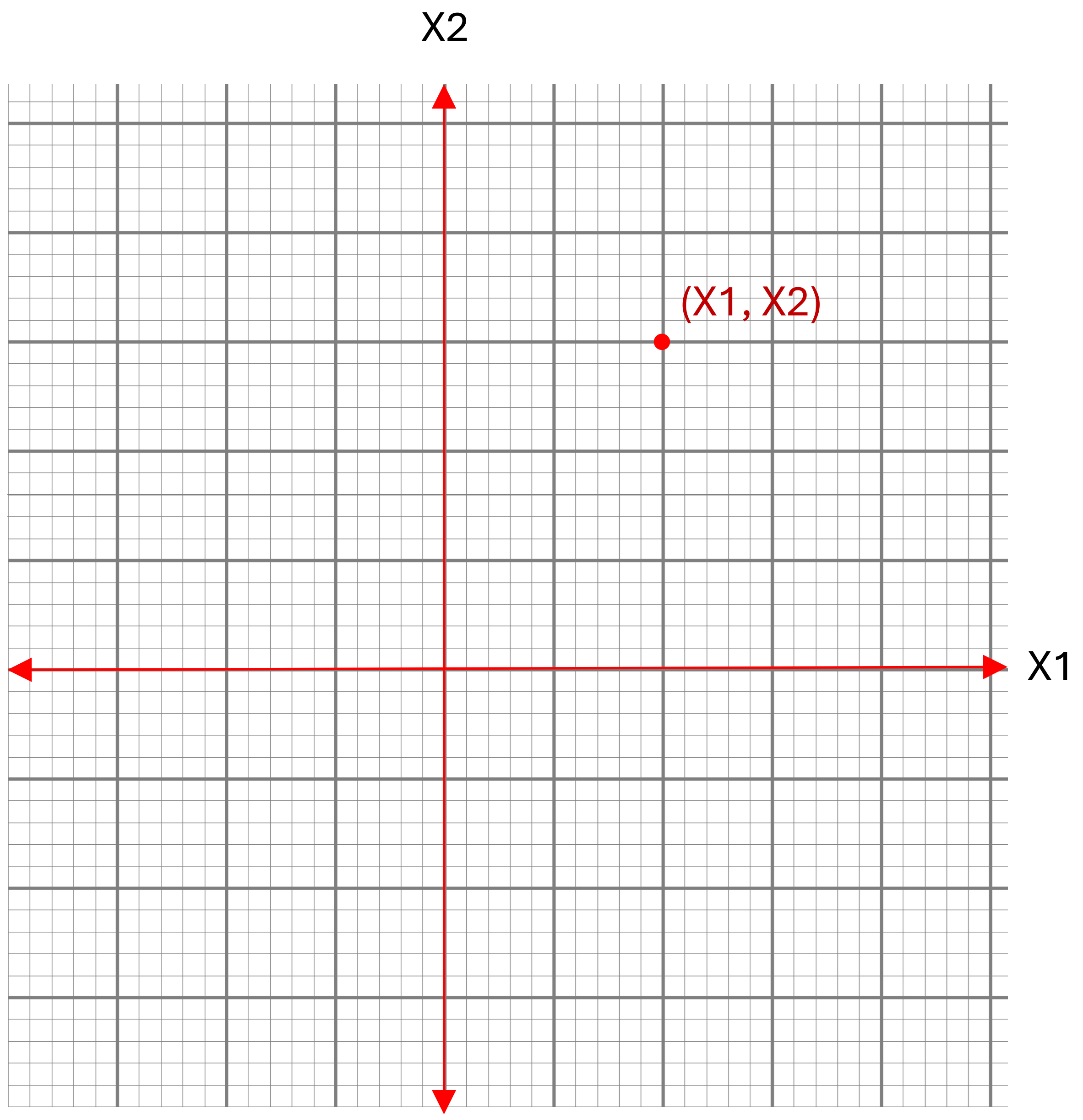


Rodolfo Mendoza PhD

Plano Cartesiano

- En el eje horizontal representamos los valores de X1 y en el eje vertical los valores de X2

- Un punto el plano se representa con las coordenadas (X1, X2)



Graficar restricciones

Graficar una igualdad:

$$2X1 + 3X2 = 6$$

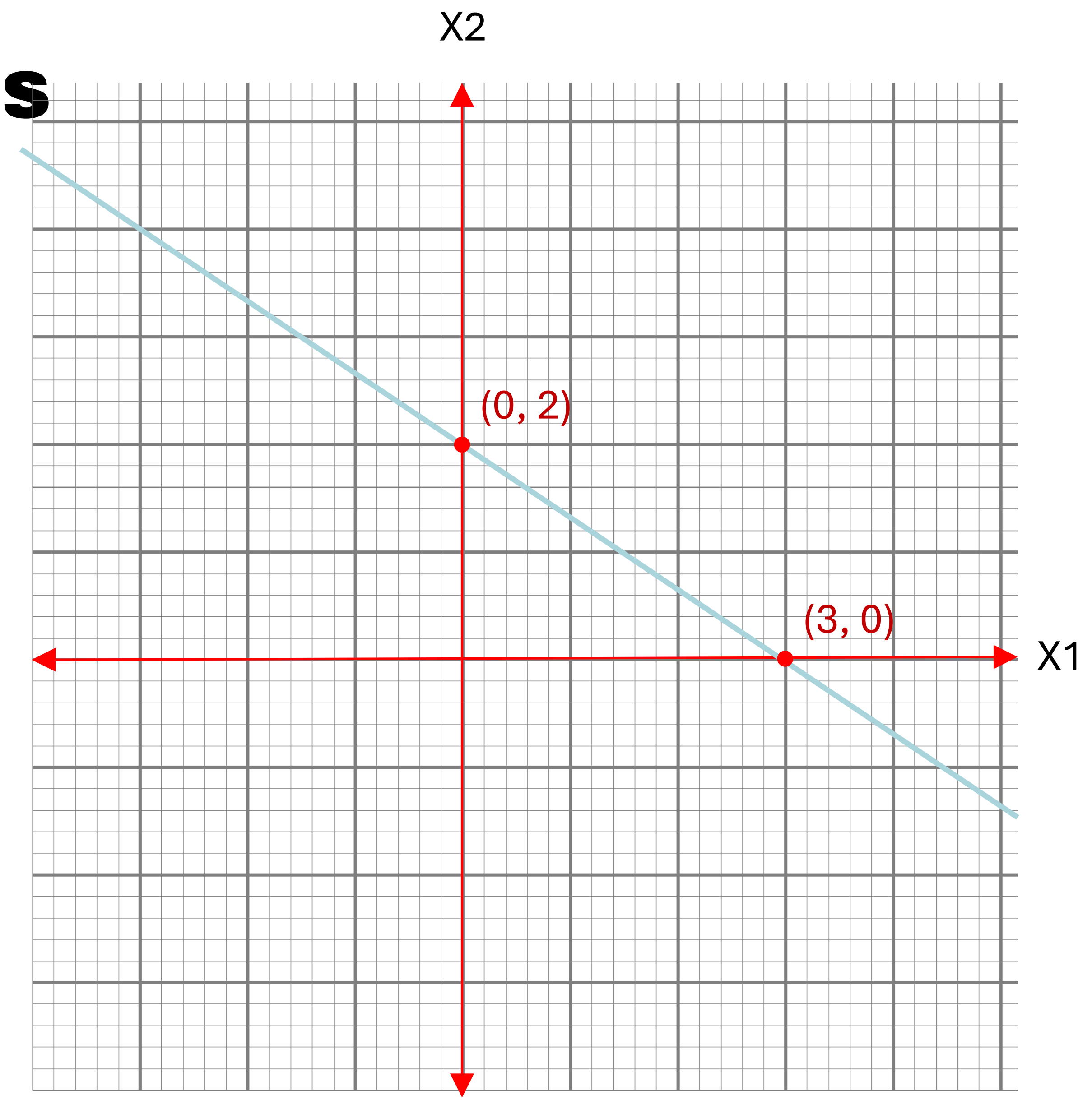
Su gráfica representa una línea en el plano.

Una forma sencilla es encontrar las intersecciones con los ejes (X1=0 y X2=0).

Igualando una variable a cero a la vez y despejando la otra.

X1=0 → X2=2 (0, 2)

X2=0 → X1=3 (3,0)



Graficar restricciones

Graficar una desigualdad “menor o igual que“ (≤):

$$2X1 + 3X2 \leq 6$$

El área de esta restricción cubre la mitad del plano y se llama “semiplano”.

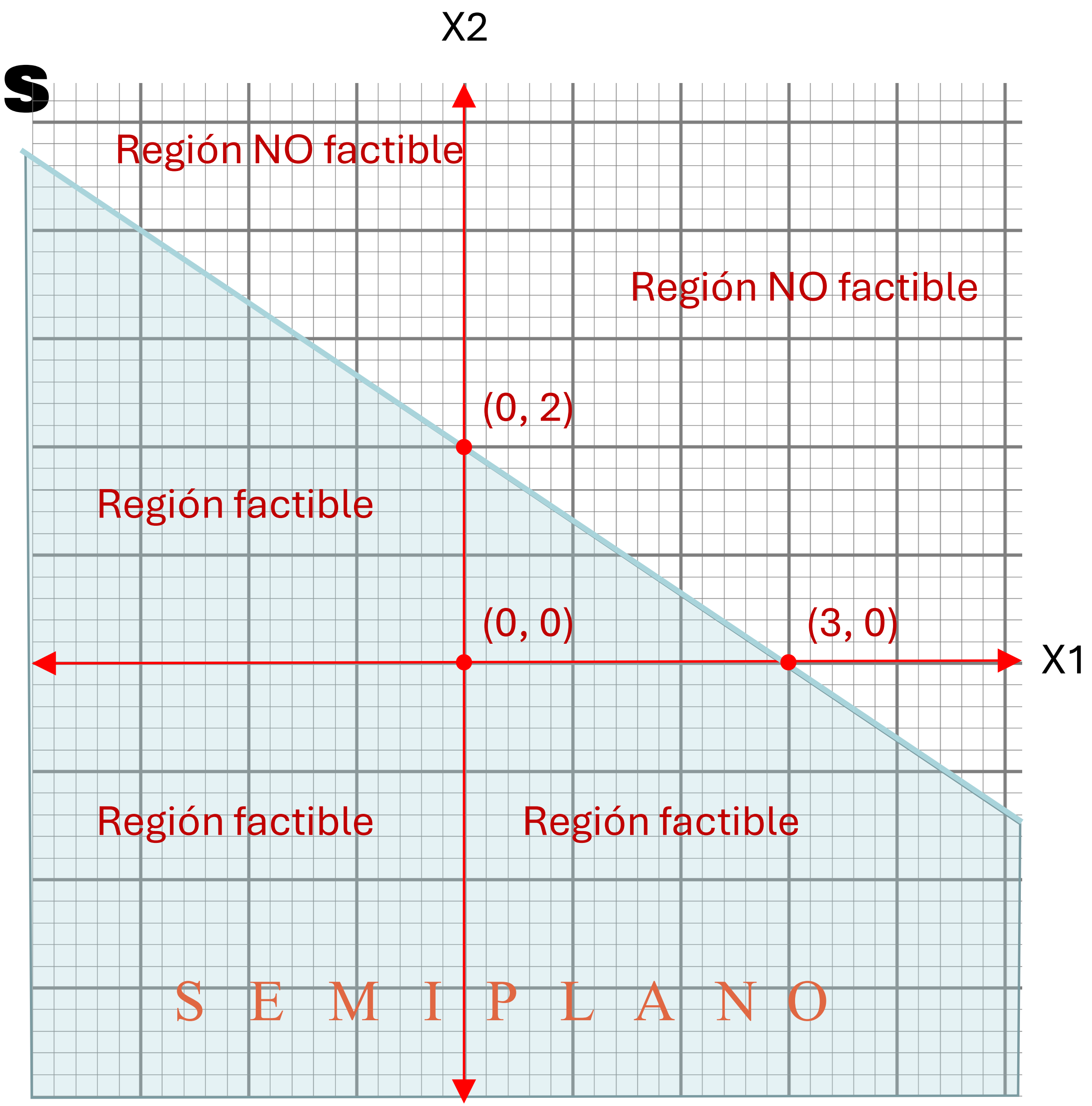
Se debe encontrar la frontera de la desigualdad, esta se cumple cuando:

$$2X1 + 3X2 = 6$$

Se encuentran dos puntos de la recta:

$X1=0 \rightarrow X2=2$ (0, 2)

$X2=0 \rightarrow X1=3$ (3,0)



Rodolfo Mendoza PhD

Graficar restricciones

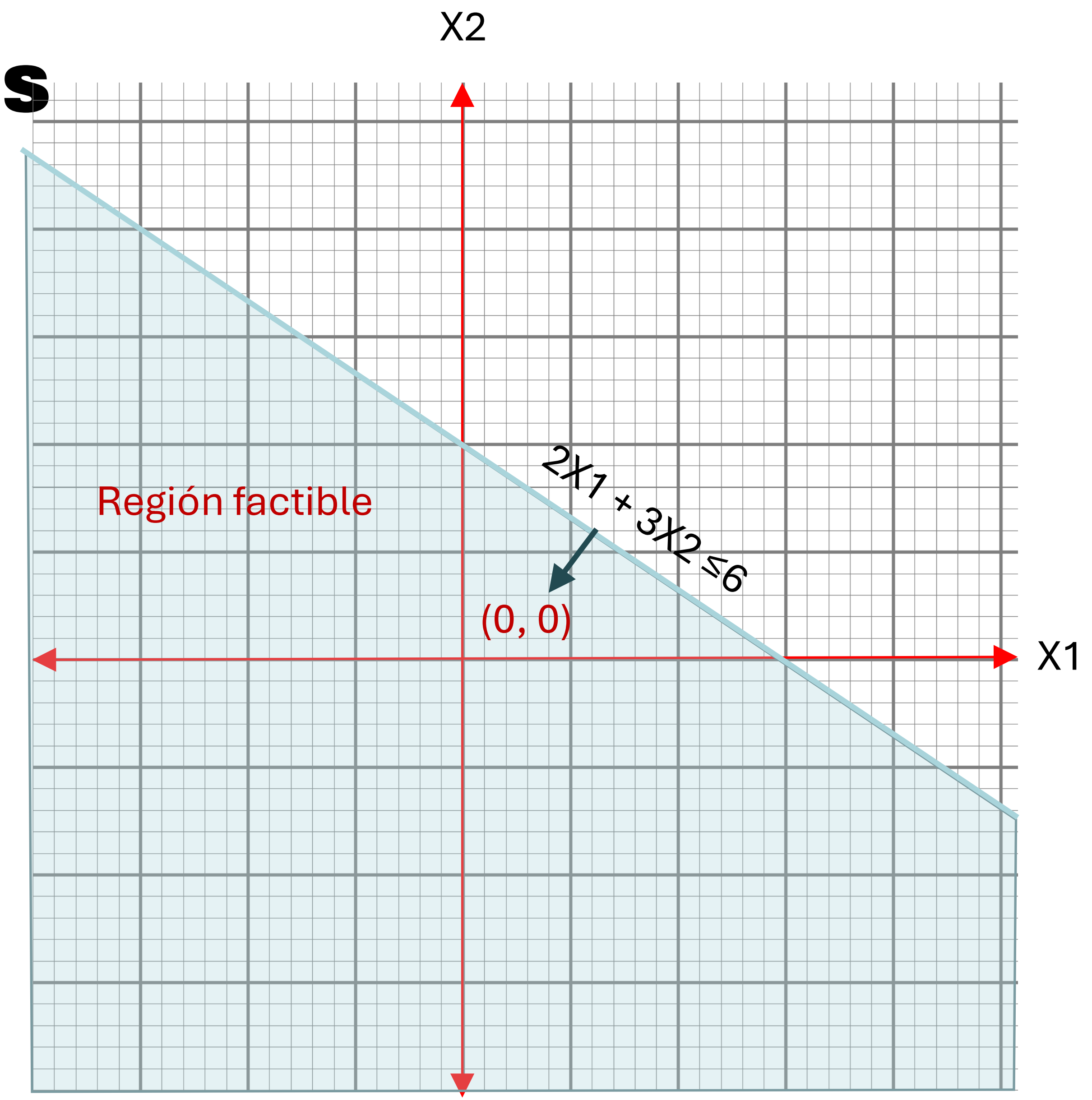
Dirección de Factibilidad (Para encontrar la región factible):

Se toma un punto cualquiera del plano, si la restricción original es factible en ese punto, entonces este punto pertenece a la región factible de la desigualdad. En caso contrario, la región factible esta en la otra mitad del plano.

Para facilidad se puede tomar el punto (0, 0):

$$2(0) + 3(0) \leq 6, \text{ si cumple.}$$

Por practicidad, se puede representar esta desigualdad con la recta de la frontera y una flecha perpendicular que indique hacia que región se encuentra la región factible.



Graficar restricciones

Graficar una desigualdad "mayor o igual que" (≥):

$$2X1 + 3X2 \geq 6$$

Las restricciones "mayor o igual que" (≥) se grafican igual que las restricciones "menor o igual que", solo que ahora la región factible estará del lado contrario de la recta pero incluyendo también la recta.

En el punto (0, 0) ya no se cumple en la desigualdad:

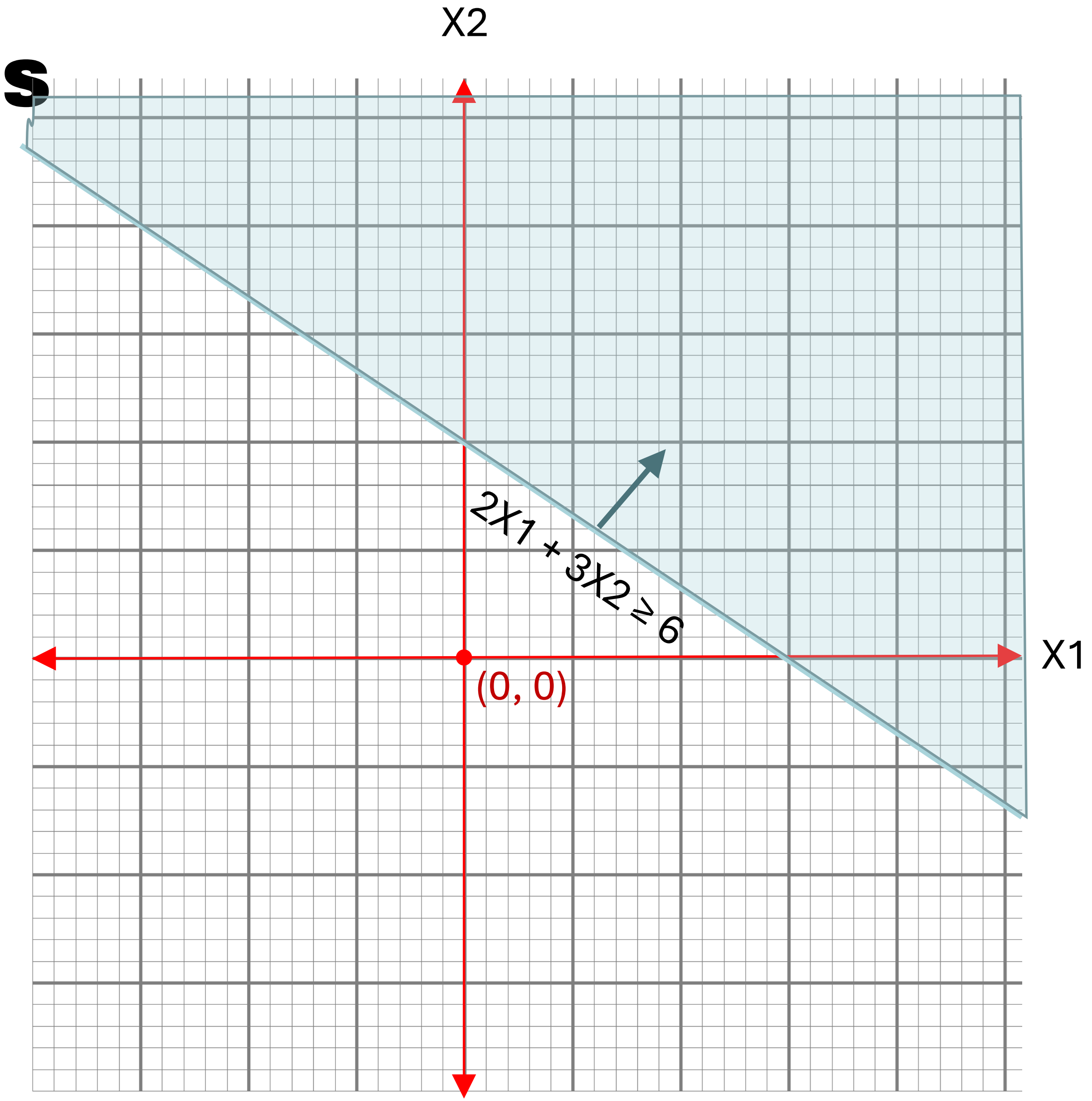
$$2(0) + 3(0) \geq 6,$$

$$0 \geq 6 \text{ NO SE CUMPLE.}$$

Cualquier punto en la recta $2X1 + 3X2 = 6$ cumple las dos restricciones:

$$2X1 + 3X2 \geq 6$$

$$2X1 + 3X2 \leq 6$$



Rodolfo Mendoza PhD

Región factible

La región factible de un problema de optimización puede estar integrada por mas de una restricción, por ejemplo:

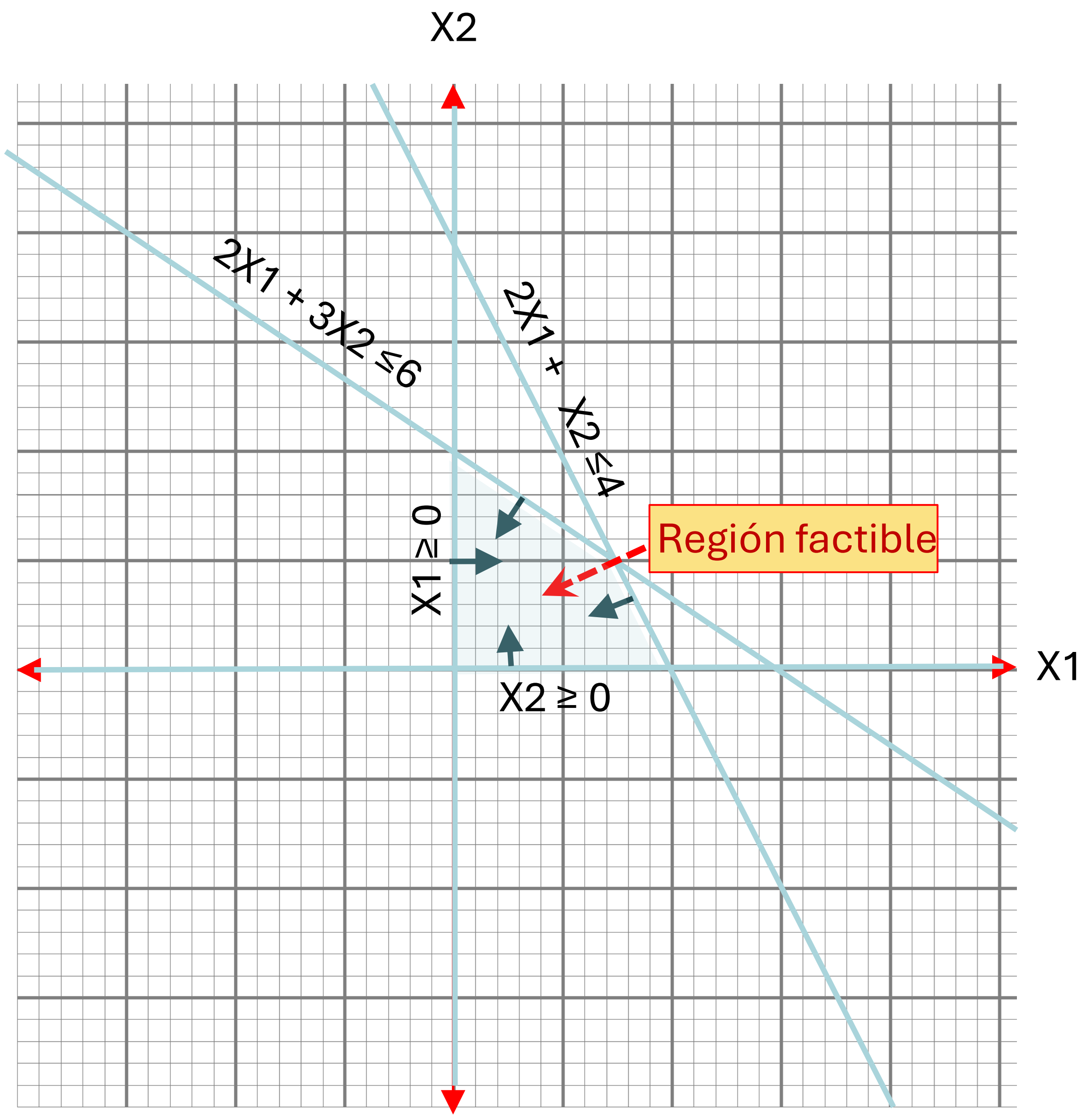
$$2X1 + 3X2 \leq 6$$

$$2X1 + X2 \leq 4$$

$$X1 \geq 0$$

$$X2 \geq 0$$

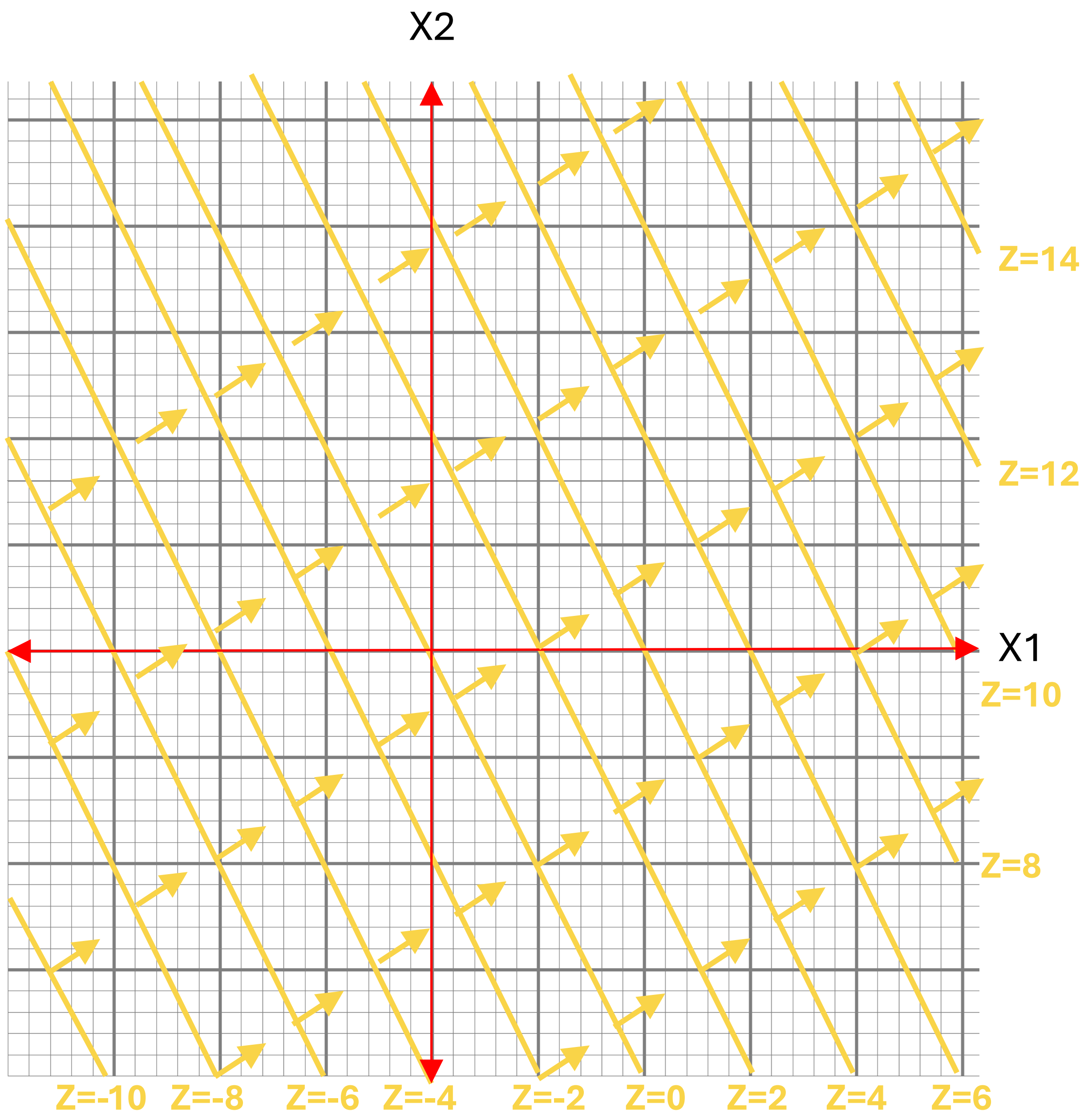
La región factible es la región donde todas las restricciones se cumplen, se le conoce como "poliedro".



Graficar función objetivo

Las rectas de la función objetivo para cada valor de Z se conocen como “isoutilidad” para problemas de maximización y como “isocostos” para un problema de minimización.

Función objetivo	Coordenadas
0	(0,0) y (-1, 2)
2	(0, 2) y (1, 0)
4	(0, 4) y (2, 0)
6	(0, 6) y (3, 0)
8	(0,8) y (4, 0)



Rodolfo Mendoza PhD

Graficar función objetivo

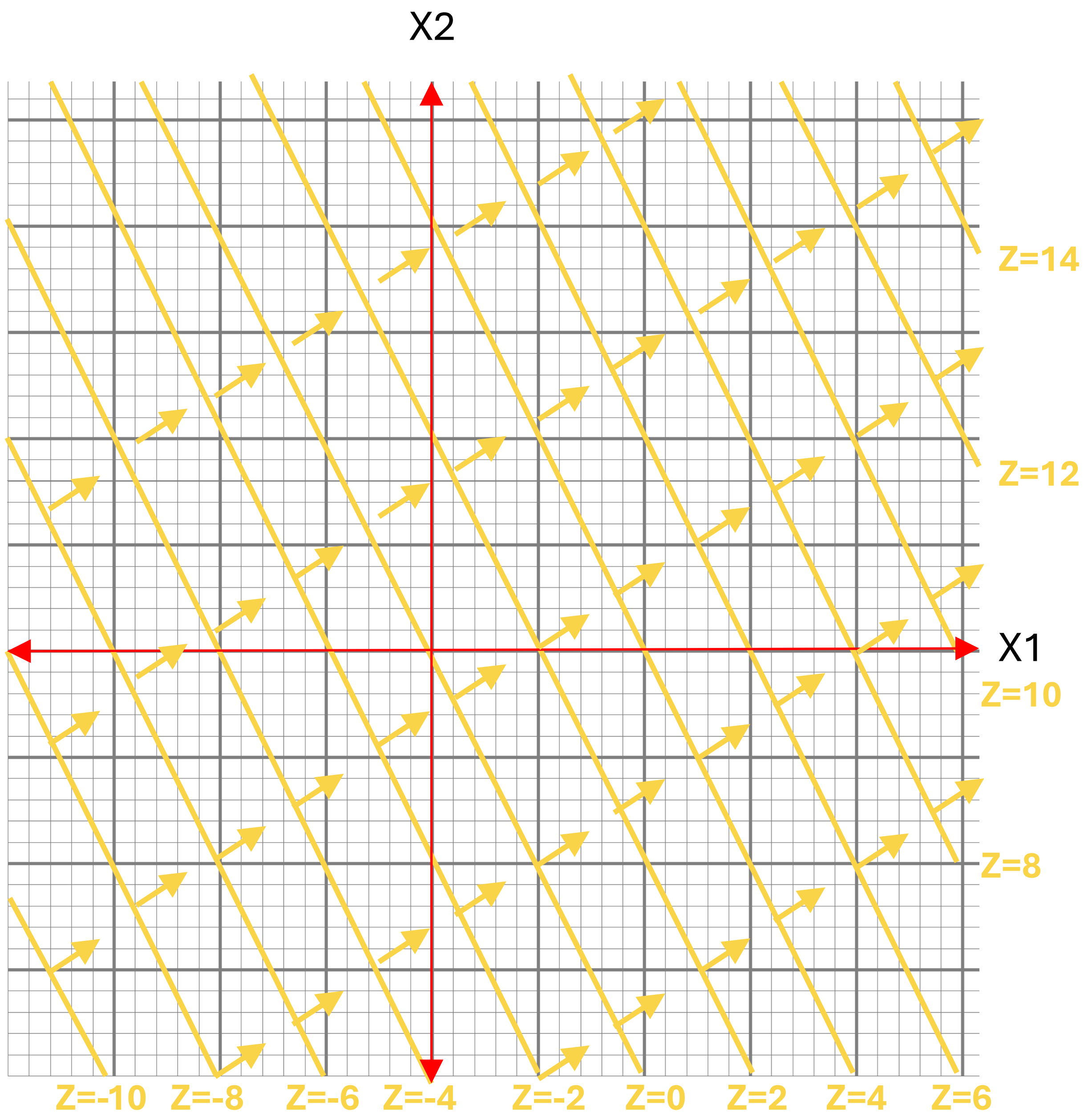
Suponiendo que la función objetivo es de "Maximizar", la función objetivo representa una dirección de optimalidad que puede tomar cualquier valor en el Plano.

Por ejemplo:

$$\text{Maximizar } Z=2X1 + X2$$

Se puede igualar la función objetivo a distintos valores y graficar las rectas obtenidas.

La dirección de optimalidad se determina identificado hacia que dirección se incrementa el valor de Z.



Graficar función objetivo

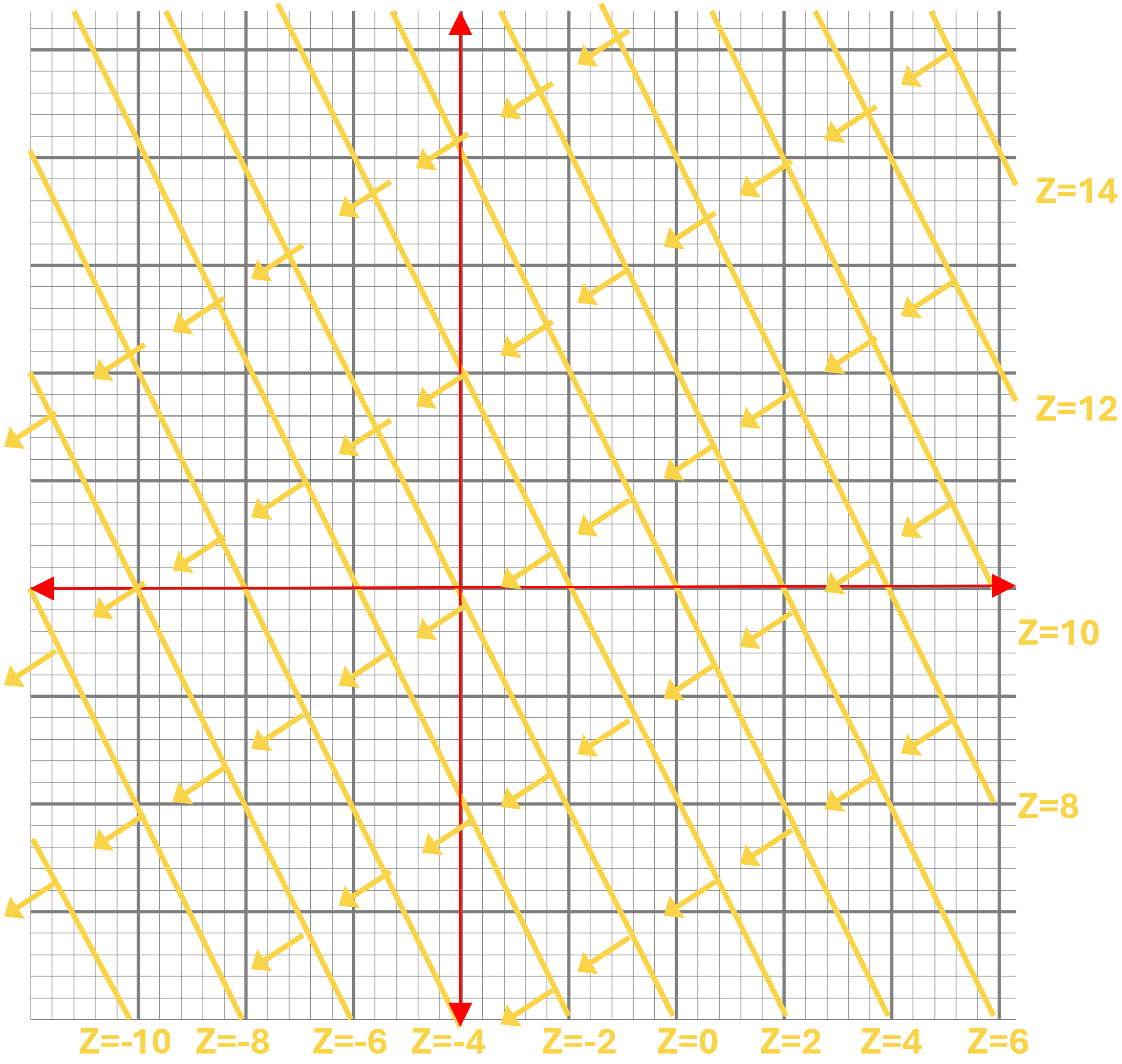
Suponiendo que ahora el problema es de "minimización".

Por ejemplo:

Minimizar $Z=2X1 + X2$

La rectas tienen la misma pendiente pero la optimalidad va en sentido contrario al problema de maximización.

No es necesario graficar todas las rectas, únicamente trazando una recta y determinando la dirección de optimalidad se puede encontrar la solución óptima de un problema.



Rodolfo Mendoza PhD

Problema PL

Considere el siguiente problema de PL:

Maximizar $Z=2X1 + X2$

$2X1 + 3X2 \leq 6$

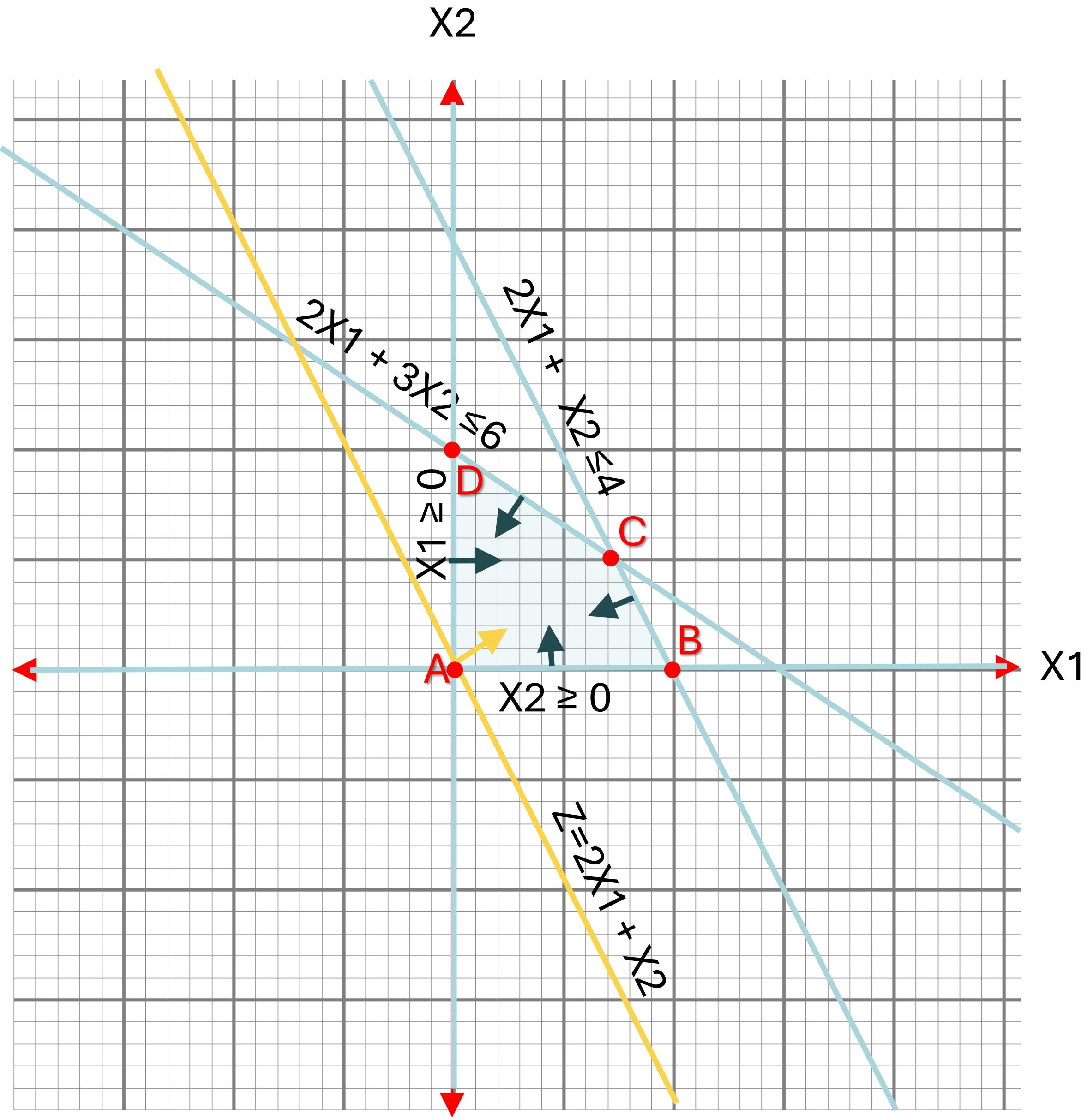
$2X1 + X2 \leq 4$

$X1 \geq 0$

$X2 \geq 0$

Grafiquemos la región factible

Luego la función objetivo y la dirección de optimización



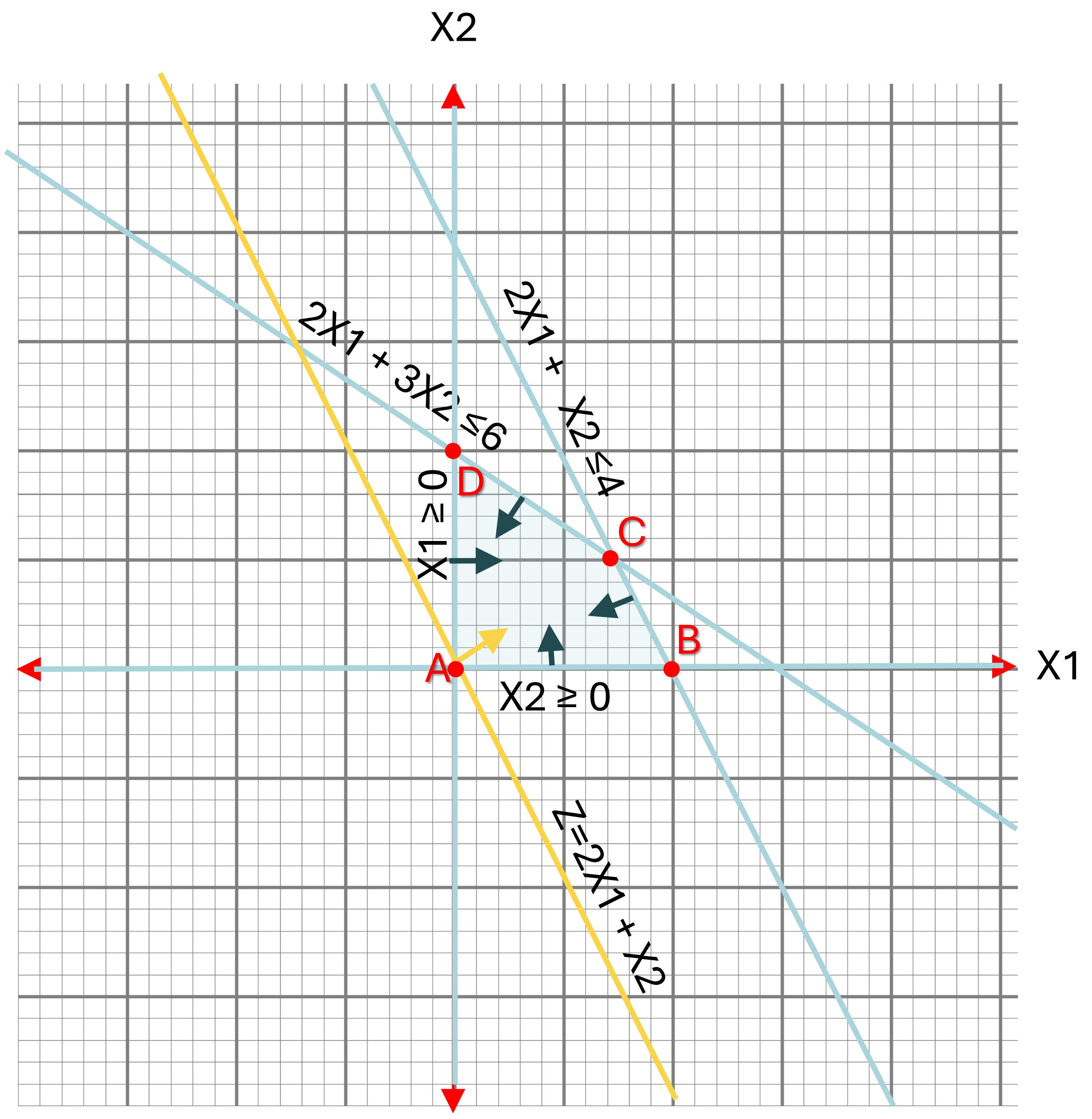
Problema PL

La solución del problema óptima se encuentra siempre en un punto extremo del poliedro formado por la intersección de 2 o más restricciones, por ello es necesario encontrar todos los puntos.

En este caso hay 4 puntos extremos: A, B, C y D

La solución óptima se encuentra en el último punto extremo que toca la recta de isotuilidad en su dirección de optimalidad.

En este ejemplo los puntos C y B son los posibles candidatos.



Problema PL

Se encuentran la coordenada de cada punto extremos y se sustituyen los valores de X1 y X2 correspondientes en la función objetivo.

A(0, 0) → Z=0, B(2,0) → Z=4, D(0, 2)→ Z=2

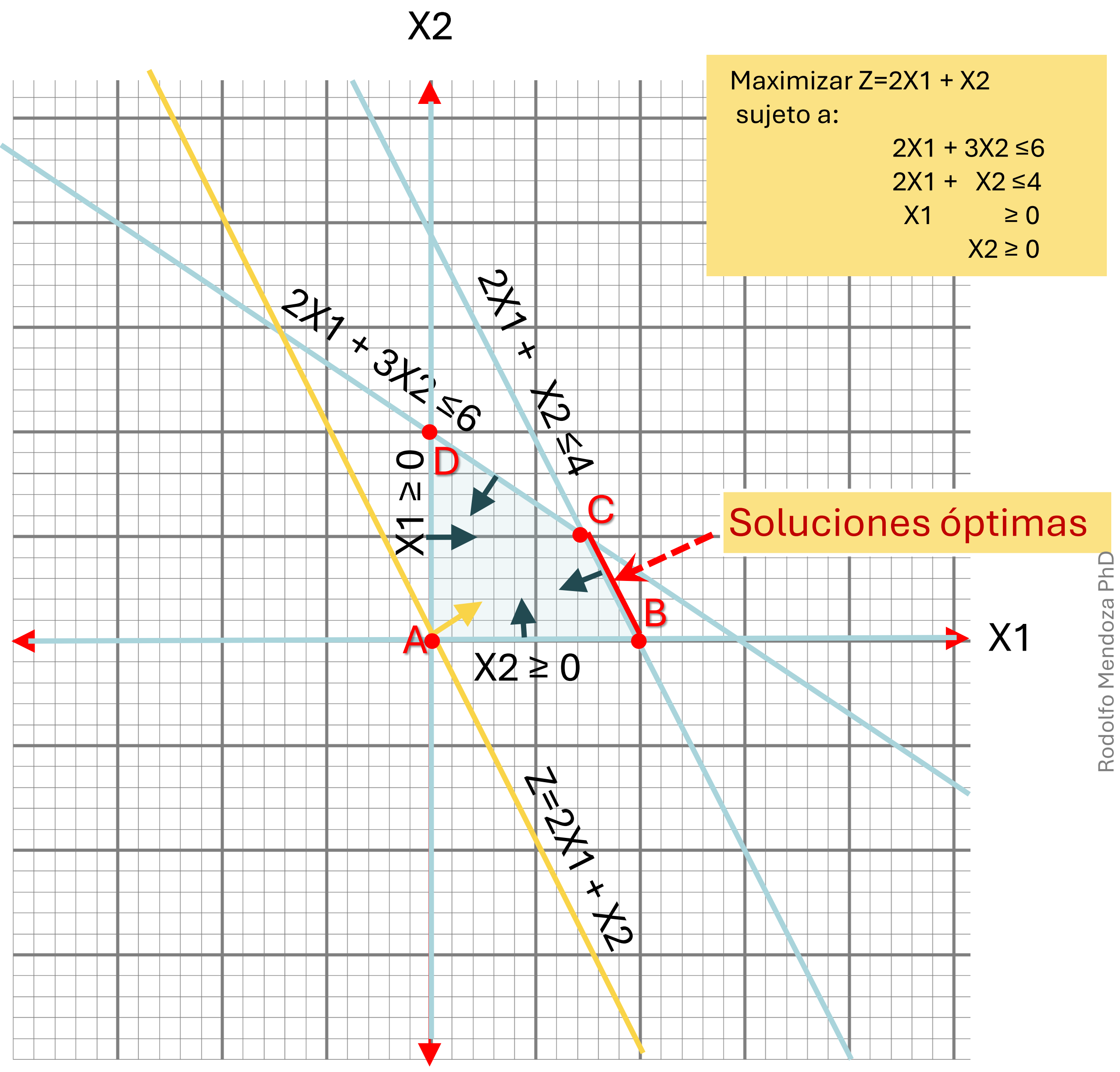
El punto C no se puede apreciar a simple vista en la gráfica pero se puede encontrar resolviendo el sistema de ecuaciones de las restricciones que se intersecta con singo de igualdad (=).

$$2X1 + 3X2 = 6$$

$$2X1 + X2 = 4$$

Al resolverlo se encuentra el punto C

C (3/2, 1) → Z= 4



Rodolfo Mendoza PhD

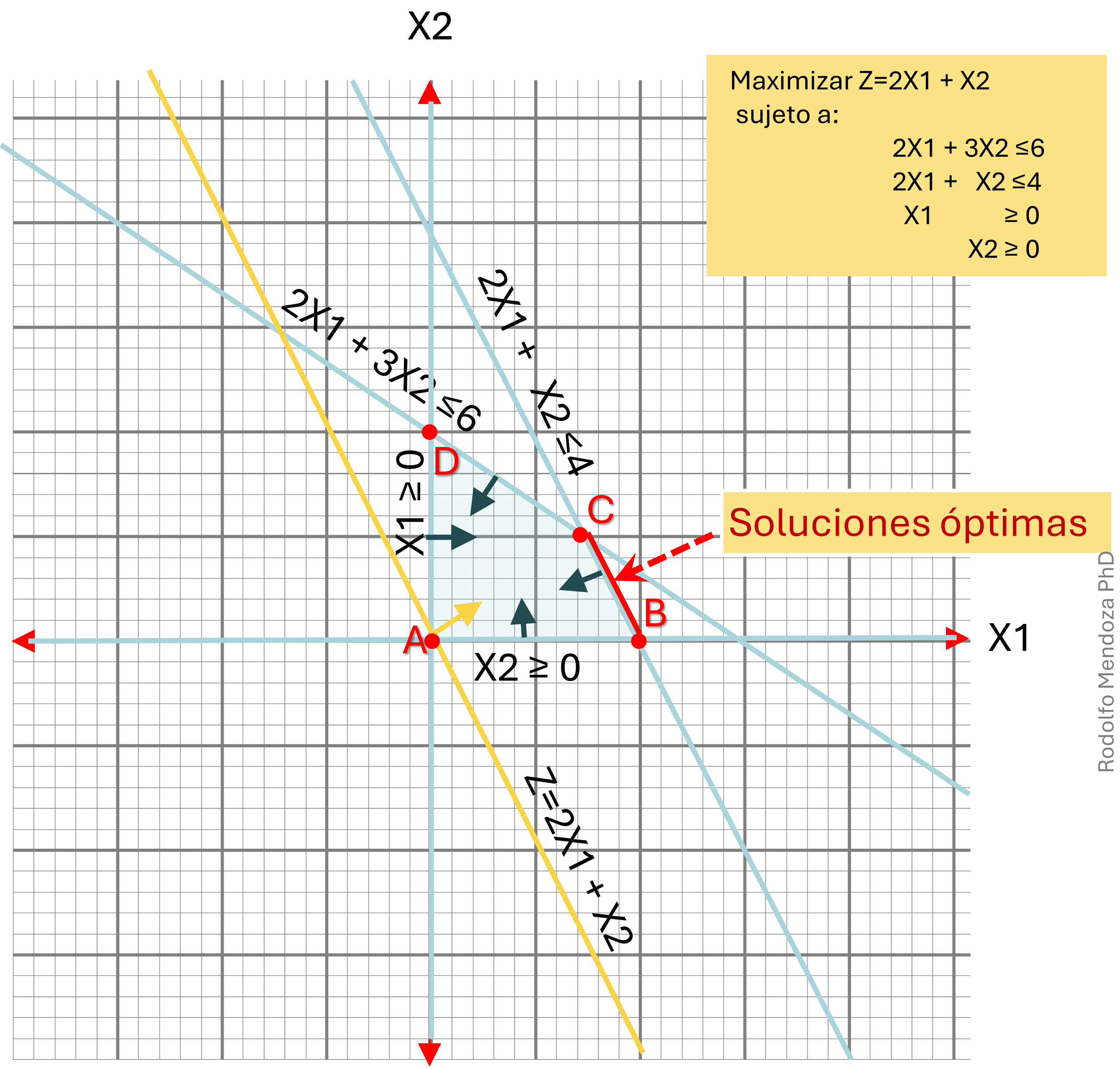
Problema PL

En este problema hay soluciones múltiples. Por ejemplo (2, 0) y (3/2, 1):

X1=2 y X2=0 → Z=4 ó

X1=3/2 y X2=1 → Z=4

En general, la solución se encuentra en cualquier punto entre C y B.



Ejercicio

- Dado el siguiente problema de Programación Lineal:

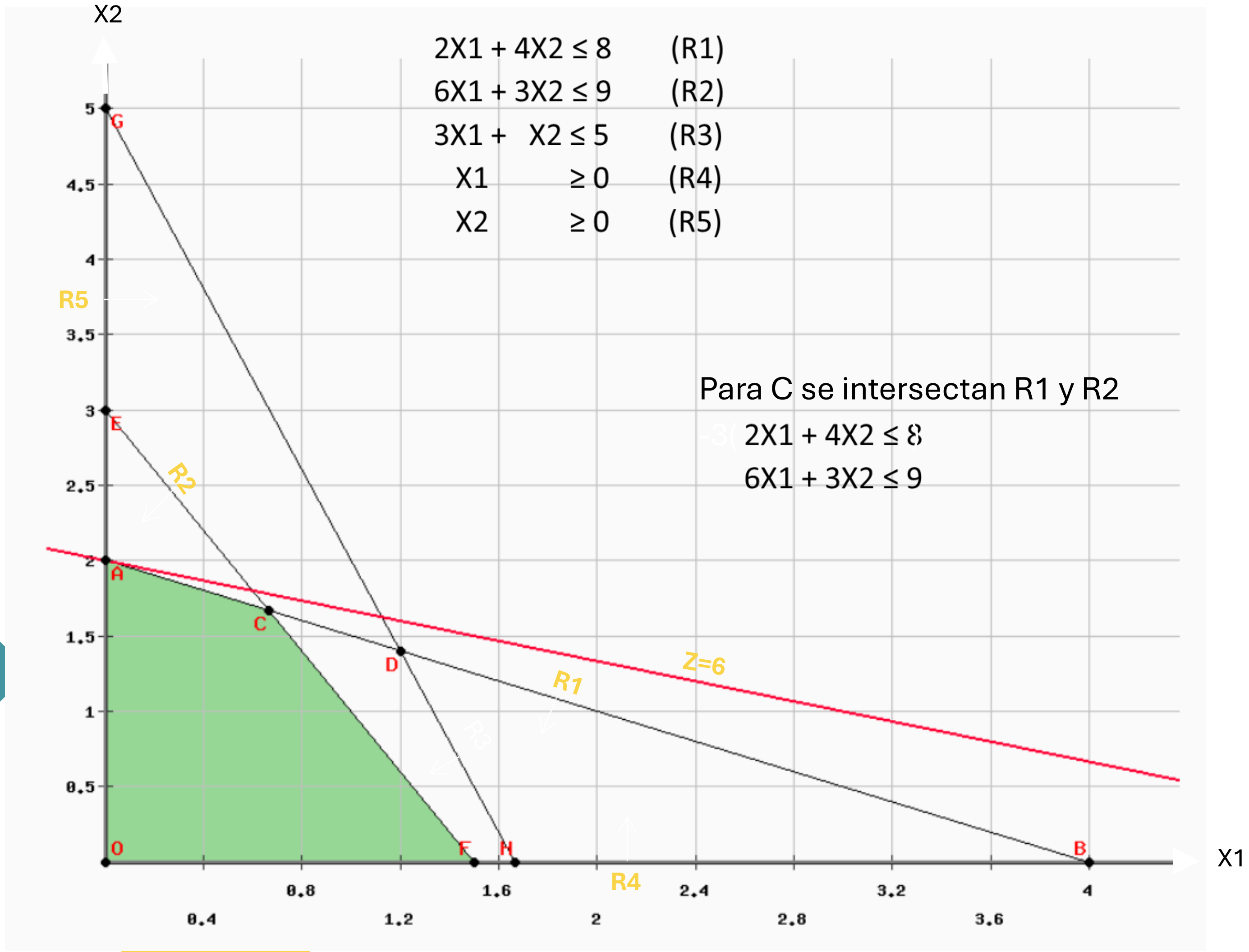
Max $Z = X1 + 3X2$ (F.O.)

s. a.

$$
\begin{array}{lll}
2X1 + 4X2 \leq 8 & & (R1) \\
6X1 + 3X2 \leq 9 & & (R2) \\
3X1 + X2 \leq 5 & & (R3) \\
X1 \geq 0 & & (R4) \\
X2 \geq 0 & & (R5)
\end{array}
$$

a) Dibujar la región factible
b) Determinar todos los puntos extremos.
c) Evaluar todos los puntos extremos en la función objetivo y encontrar la solución optima.
d) Dibujar la recta de isoutilidad que toca la solución optima

Solución



Punto	X1	X2	Valor de la función objetivo (Z)
O*	0	0	0
A*	**0**	**2**	**6**
B	4	0	4
C*	0.67	1.67	5.67
D	1.2	1.4	5.4
E	0	3	9
F*	1.5	0	1.5
G	0	5	15
H	1.67	0	1.67

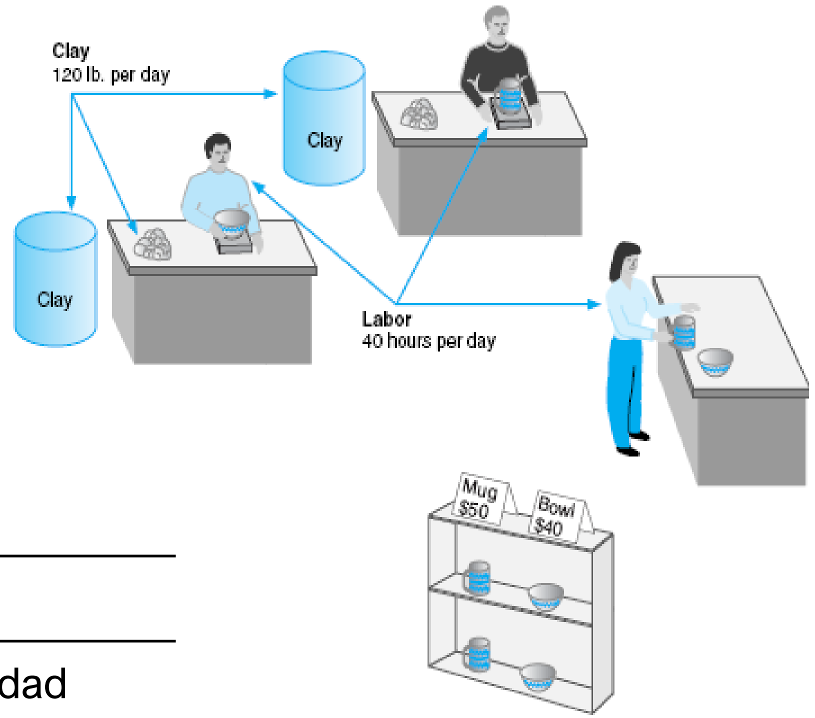
Otro ejemplo del método de solución gráfico

Problema de mezcla de producto – Compañía de Cerámica Beaver Creek

¿Cuántas tazas y tazones se deben producir por día para maximizar las ganancias, dadas las restricciones de mano de obra y materiales?

Requerimientos de recursos por producto y utilidad por unidad:

Figure 2.1
Beaver Creek Pottery Company



	Requerimientos de recursos		
Producto	Mano de obra (Hr. / Unidad)	Arcilla (Lb / Unidad)	Utilidad ($ / Unidad)
Tazón	1	4	40
Taza	2	3	50

Primero, modelemos el problema de Programación Lineal

Sea:

- $\boldsymbol{x_1}$ = número de tazones producidos cada día
- $\boldsymbol{x_2}$ = número de tazas producidas cada día
- $\boldsymbol{Z}$ = Ganancia total diaria ($)

$$\boldsymbol{Max\,Z = 40x_1 + 50x_2} \quad \text{(Función objetivo)}$$

Sujeto a:

$$1\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2} \leq 40 \quad \text{(Restricción de mano de obra)}$$

$$4\boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_2} \leq 120 \quad \text{(Restricción de material)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{(Restricción de no negatividad)}$$

Otro ejemplo del método de solución gráfico

Modelo matemático

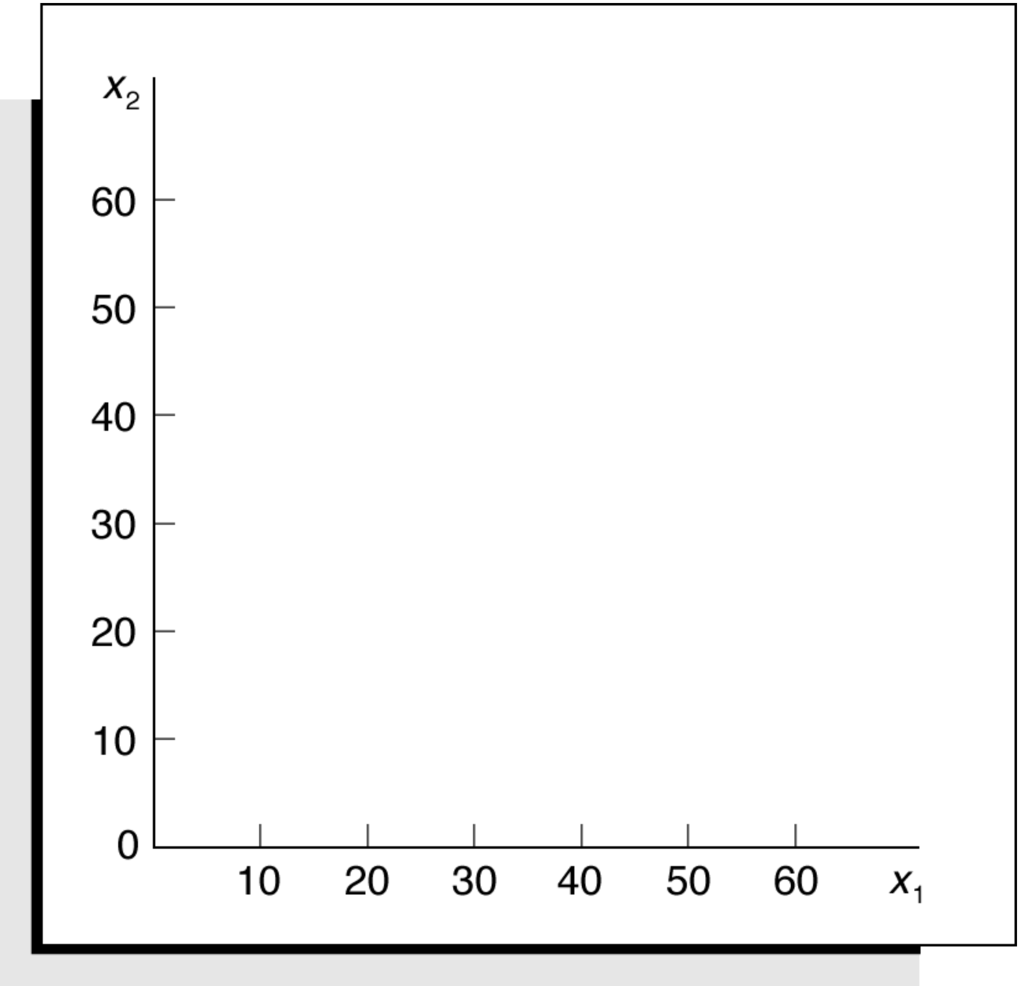
$$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

Las variables siempre son etiquetadas X_1 y X_2 y los ejes coordenados x_1 and x_2 respectivamente.



Coordenada para el análisis gráfico

Solución gráfica de PL

$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

- El área sombreada muestra los puntos factibles para cada restricción

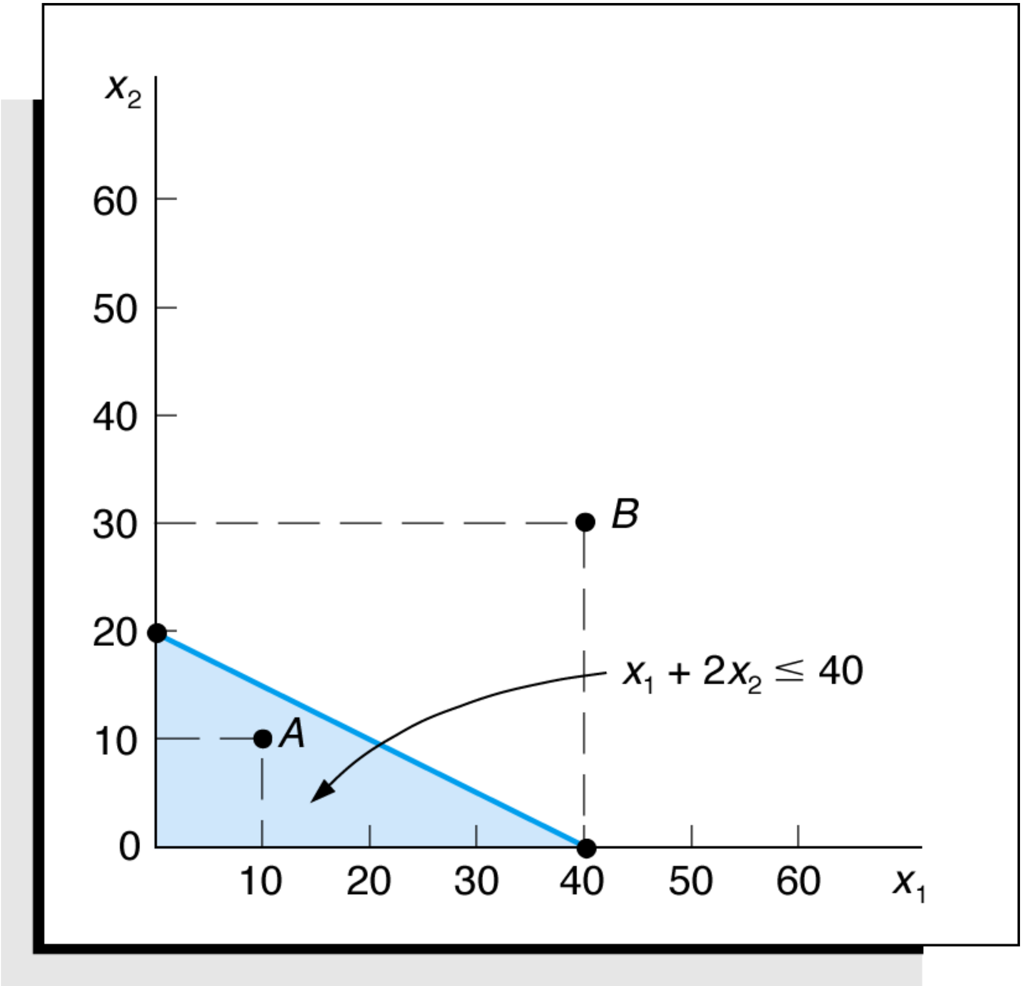


Gráfico de restricción de trabajo

Solución gráfica de PL

$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$

$\text{sujeto a: } 1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

- El área sombreada muestra los puntos factibles para cada restricción

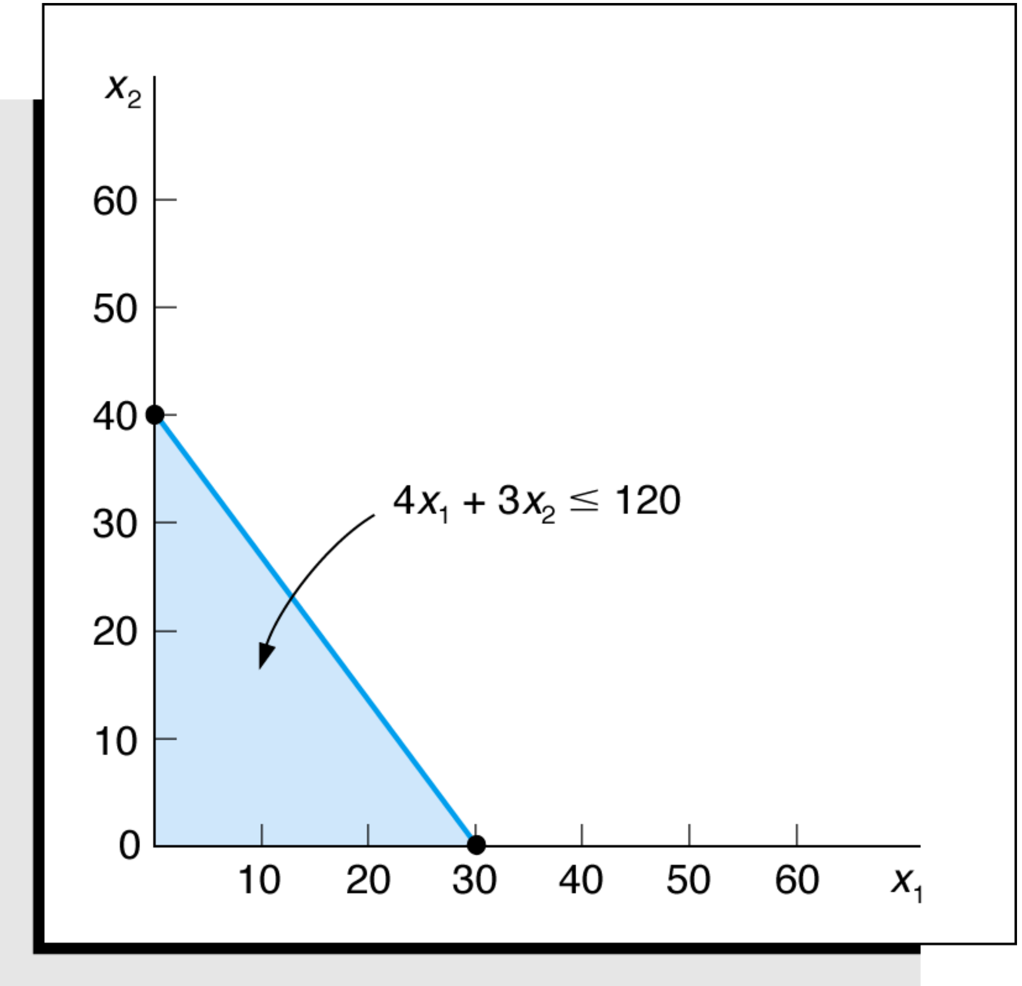


Gráfico de restricción de material

Solución gráfica de PL – Región factible

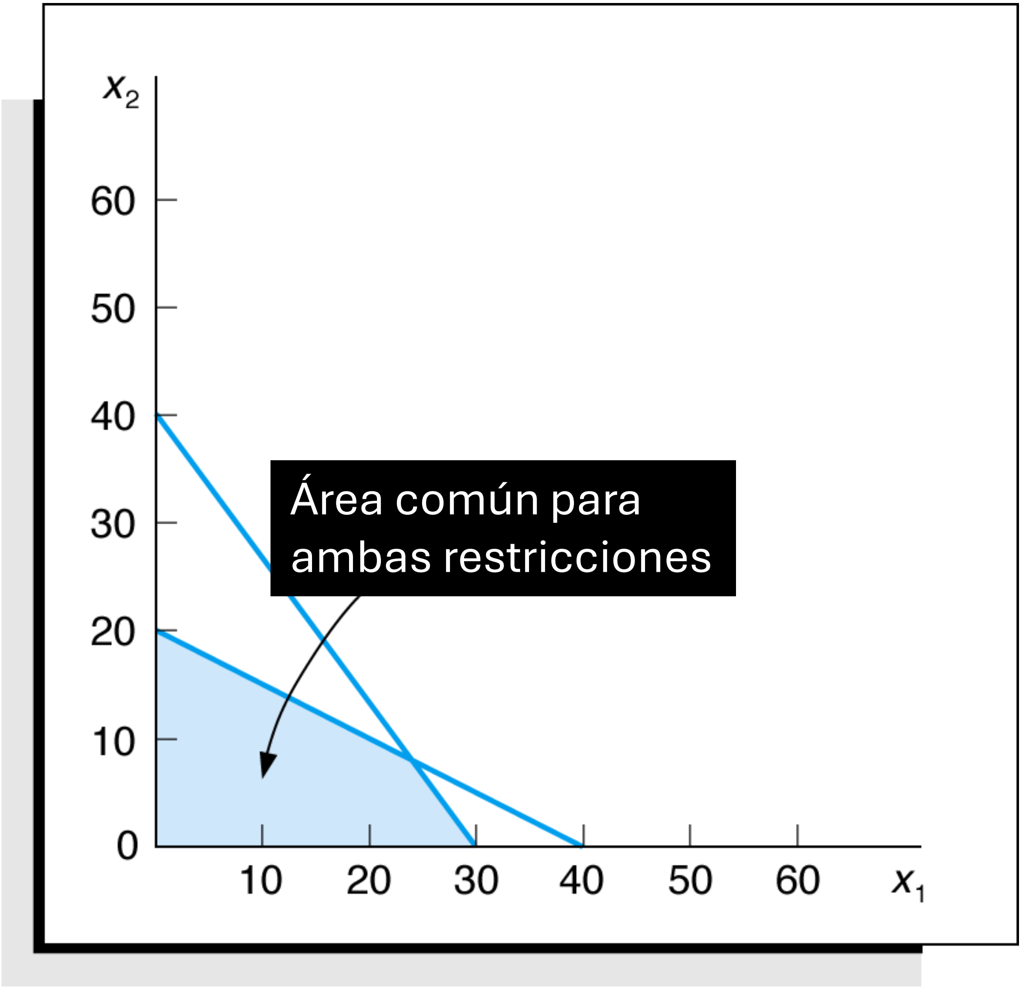
Max $Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$

- La **región factible** es el conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones del modelo
- El área factible está limitada por el polígono de cuatro lados ABCD, también conocido como **conjunto convexo.**



Espacio de soluciones factibles

Solución gráfica de PL – Solución óptima

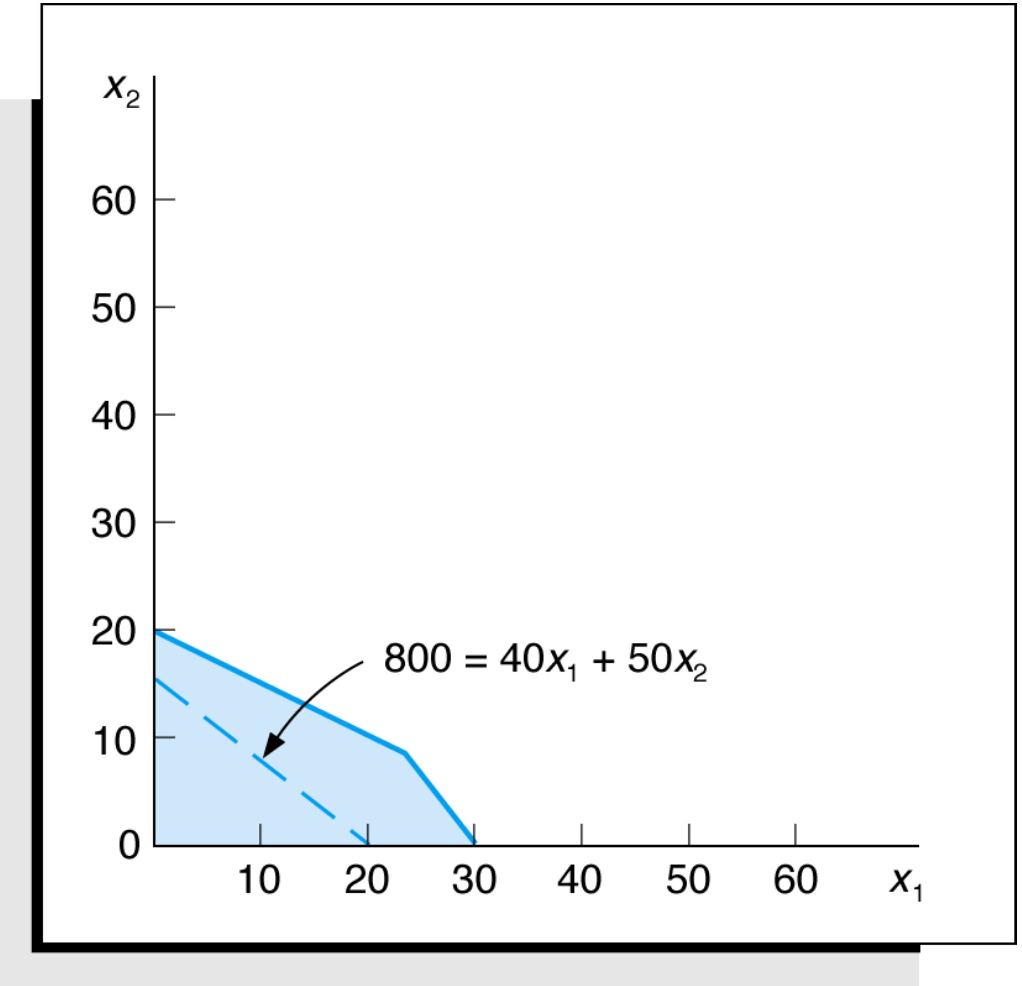
$$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$$

$$\text{sujeto a: } 1x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 120$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

- Una vez identificada la región factible puede comenzar la **búsqueda por la solución óptima**, que será el punto de la región factible con el **mayor valor de Z**.
- En un modelo de **minimización** se busca el el **menor valor de Z**.



Línea de función objetivo para Z = $800

Solución gráfica de PL – Solución óptima

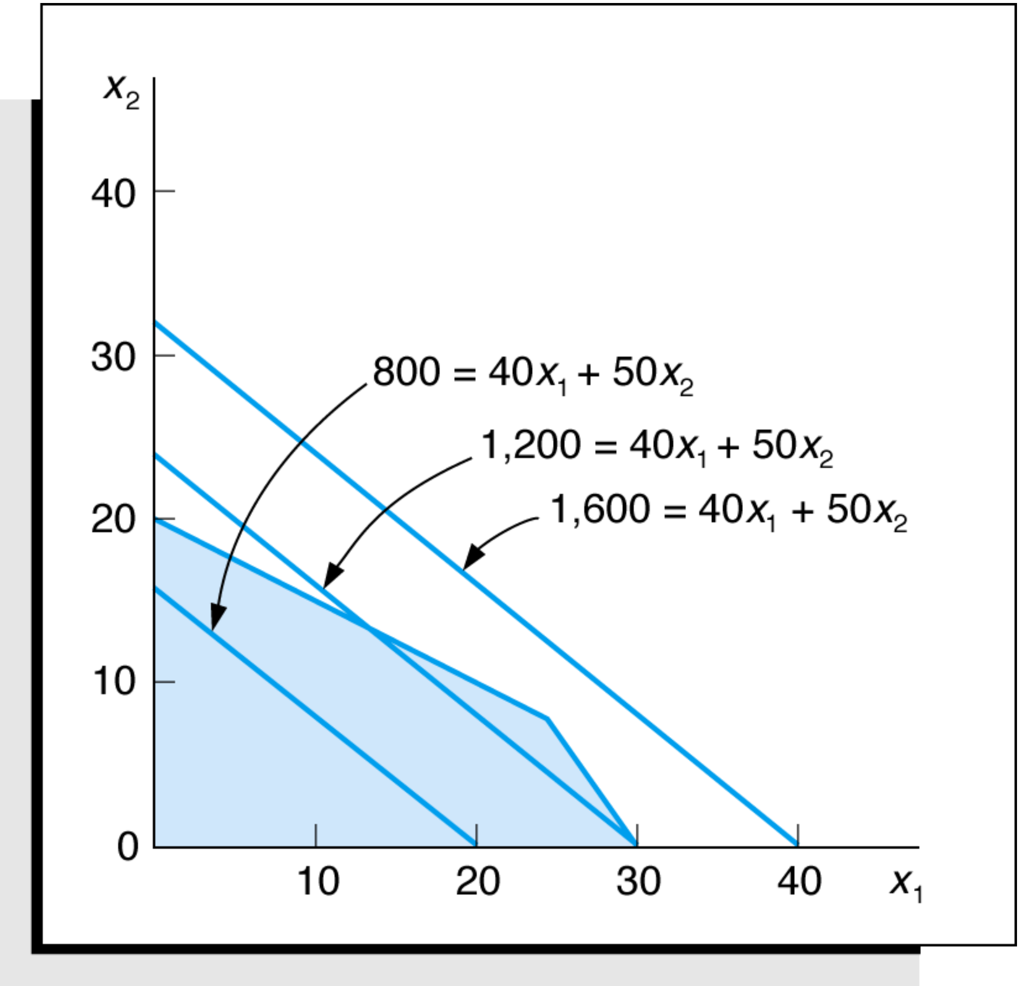
$$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$$

$$\text{sujeto a: } 1x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- **Para encontrar la solución óptima**, grafique la línea en el que los puntos tienen el mismo valor Z. En un problema de maximización, la línea se llama "***isoprofit***", mientras que en un problema de minimización, esta se llama "***isocost***".
- La figura muestra las líneas de Z=800, Z=1200, y Z = 1600



Líneas de función objetivo alternativas

Solución gráfica de PL – Solución óptima

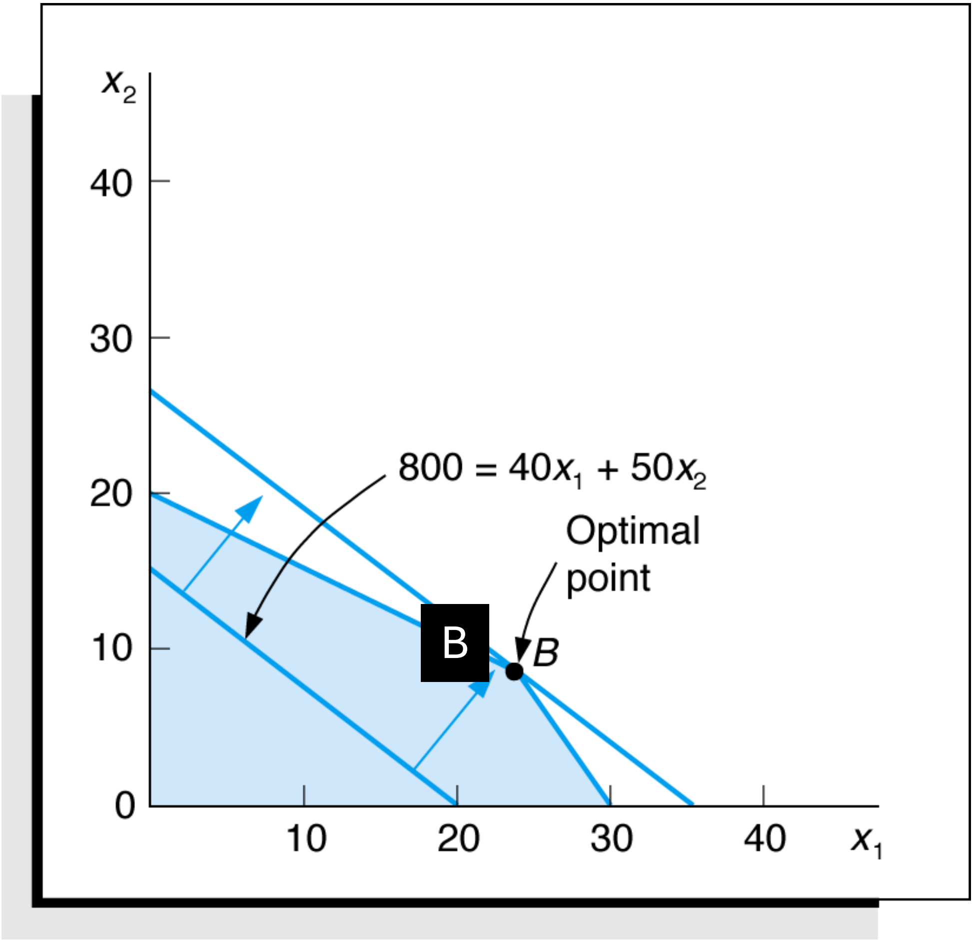
$$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2$$

$$\text{sujeto a: } 1x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Los puntos extremos a veces se llaman **puntos esquina**, porque si la región factible es un polígono, los puntos extremos serán los vértices o esquinas del polígono.
- Frecuentemente la solución óptima se encuentra en uno de estos puntos esquina



Líneas de función objetivo alternativas

Solución gráfica de PL – Solución óptima

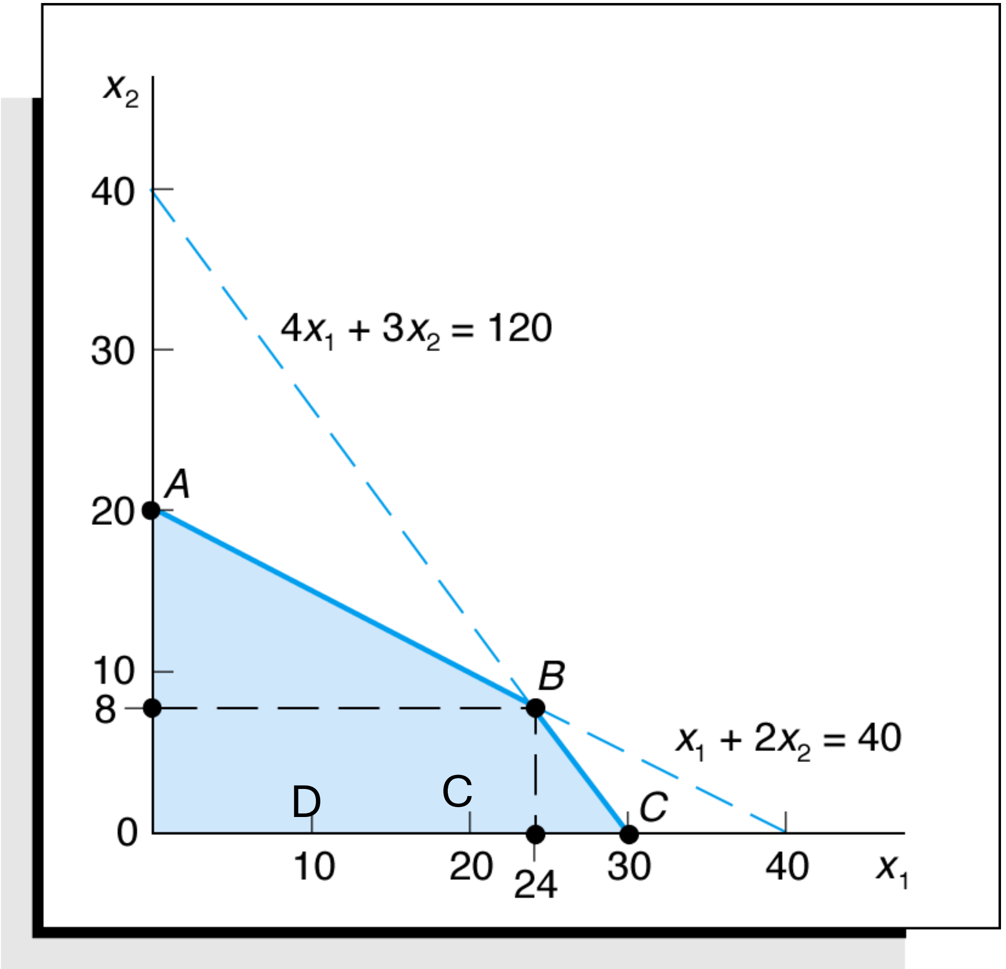
Max Z = $ 40x_1 + $ 50x_2$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

- Los puntos extremos a veces se llaman **puntos esquina**, porque si la región factible es un polígono, los puntos extremos serán los vértices o esquinas del polígono.
- Frecuentemente la solución óptima se encuentra en uno de estos puntos esquina



Coordenadas de solución óptima

Solución gráfica de PL – Solución óptima

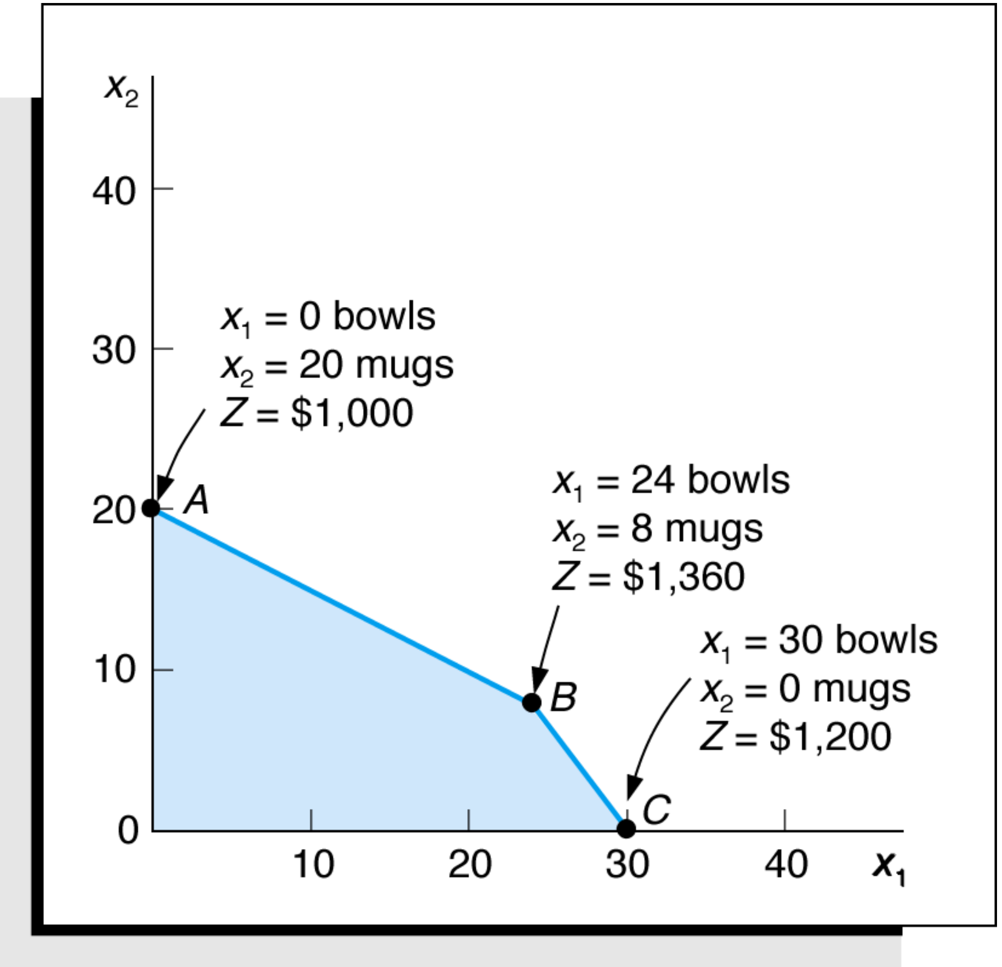
Max $Z = \$\ 40x_1 + \$\ 50x_2$

sujeto a: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

- Los puntos extremos a veces se llaman **puntos esquina**, porque si la región factible es un polígono, los puntos extremos serán los vértices o esquinas del polígono.
- Frecuentemente la solución óptima se encuentra en uno de estos puntos esquina



Soluciones en todos los puntos esquina

Solución gráfica de PL – Solución óptima

$\text{Max } Z = \$\,40x_1 + \$\,50x_2 + S_1 + S_2$

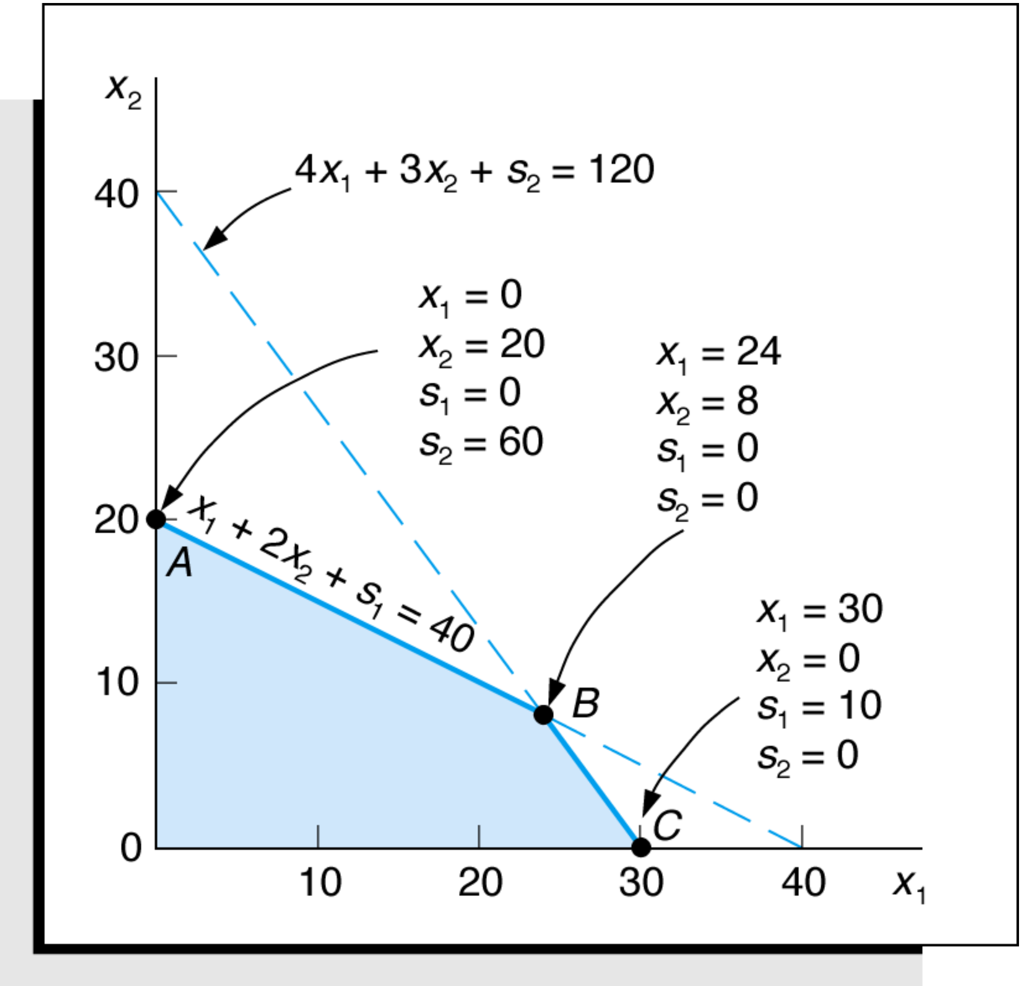
sujeto a:

$$1x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$
$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

X_1= Número de tazones

X_2= Número de tazas

S_1, S_2 son variables de holgura



Puntos de solución A, B y C con holgura

Método Gráfico (resumen)

Definición del espacio de soluciones

No negatividad: Primer cuadrante

Dibuja las ecuaciones asociadas a las restricciones (límites de restricciones)

Cómo??

Identifica el semi-espacio factible (dirección de factibilidad)

Cómo??

Método Gráfico (resumen) ...

Determinación de la solución óptima

Dibuja dos líneas de Z: Z1 y Z2

Identifica la dirección del vector normal a Z.

Mueve la línea de Z (paralelamente) en la dirección del vector normal (si max) hasta que toque el último punto (o línea)

Cómo??

Cómo??

Punto o línea?