

Método Simplex

Para la solución de problemas lineales

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido



Un sistema $Ax=b$ de ecuaciones lineales

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Solución Básica

- Propiedades
 - Una variable es básica o no básica.
 - Las variables no básicas valen cero.
 - El número de variables básicas = número de restricciones funcionales independiente = m
 - El valor de las variables básicas se obtiene de resolver el sistema ($m \times m$) de ecuaciones (restricciones funcionales).
 - El conjunto de variables básicas se llama: BASE
 - Si todas las variables básicas son ≥ 0 , entonces la solución básica es factible y se denomina: Solución Básica Factible (SBF).

Solución Básica Factible

- Considere un sistema $Ax = b$ de **m ecuaciones lineales** y **n variables, incluyendo variables de holgura** (donde $n \geq m$) .
- Una solución básica a $Ax = b$ se obtiene mediante el establecimiento de $n - m$ variables igual a 0 (**Variables No-Básicas**) y la solución de las $n - (n - m) = m$ variables restantes (**Variables Básicas**).
- **$n - m$** refleja la máxima dimensión del espacio factible.
- Esto supone que la fijación de los $n - m$ variables iguales a 0 se obtiene un valor único para las m variables restantes, o equivalentemente, las columnas correspondientes a las variables n restantes son linealmente independientes.
- Cualquier solución básica en la que todas las variables son no negativas se llama **solución básica factible** (o **SBF**).

Soluciones factibles adyacentes

- El método Simplex es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una SBF a otra SBF adyacente.
- Dos SBFs son adyacentes si comparten $(m-1)$ variables básicas y $(n-m-1)$ variables no básicas.
- Moverse de una SBF a una SBF adyacente implica que una variable básica pasa a ser no básica en la adyacente y una variable no básica pasa a ser básica en la SBF adyacente.
- Ejemplo:

$n=7$ variables

$m=3$ restricciones funcionales

$n-m=4$ variables no básicas

SBF 1

- $XB=\{s_1, s_2, s_3\}$
- $XN=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Una SBF Adyacente a SBF1

- $XB=\{s_1, x_2, s_3\}$
- $XN=\{x_1, s_2, x_3, x_4\}$

Ejemplo: Valley Wine

La compañía Valley Wine produce dos tipos de vino: Valley Nectar y Valley Red. Los vinos serán producidos con 64 tons. de uva que la compañía ha comprado esta temporada.

Un lote de 1000 galones de Nectar requiere de 4 tons. de uva, y un lote de Red 8 tons. Sin embargo, la producción está limitada por la disponibilidad de solo 50 yd^3 de espacio para añejamiento y 120 horas de tiempo de procesamiento. Un lote de cada tipo de vino requiere de 5 yd^3 de espacio. El tiempo de proceso para un lote de Nectar es de 15 hrs. y para Red es de 8 hrs. La demanda para cada tipo de vino está limitada a siete lotes.

La utilidad por un lote de Nectar es de \$9,000 y por un lote de Red es de \$12000. La compañía quiere determinar el número de lotes de 1000 galones de Nectar y Red que producirá la mayor utilidad.

...Ejemplo: Valley Wine

- **Variables de decisión**

X_1 = Número de lotes de 1000 galones de Valley Nectar

X_2 = Número de lotes de 1000 galones de Valley Red

- **Función objetivo**

Maximizar $Z = 9,000 x_1 + 12,000 x_2$

- **Sujeto a:**

$$4 x_1 + 8 x_2 \leq 64 \text{ tons. de uva disponibles}$$

$$5 x_1 + 5 x_2 \leq 50 \text{ yd.}^3 \text{ de almacenamiento disponible}$$

$$15 x_1 + 8 x_2 \leq 120 \text{ hrs. de procesamiento disponible}$$

$$x_1 \leq 7 \text{ lotes de demanda para V. Nectar}$$

$$x_2 \leq 7 \text{ lotes de demanda para V. Red}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

...Ejemplo: Soluciones Básicas Factibles

1

<u>Max Z = 9,000 X1 + 12,000 X2</u>
Región factible
$4 X1 + 8 X2 \leq 64$ tons. de uva disponible
$5 X1 + 5 X2 \leq 50$ yd almacenamiento disponible
$15 X1 + 8 X2 \leq 120$ hrs. procesamiento disponible
$X1 \leq 7$ Demanda máxima de Nectar
$X2 \leq 7$ Demanda máxima de Red

A B

Punto óptimo: C

X₁=4, X₂=6

Z= \$108,000

E Función Objetivo

VB – Todas las variables con valores positivos diferentes de cero son Variables Básicas y constituyen una Solución Básica Factible

Variable No-Básica (VNB)

$n - m = 7 - 5 = 2$ (máxima dimensión de la región factible)

A	X₁=	0	B	X₁=	2	C	X₁=	4			
	X₂=	7		X₂=	7		X₂=	6			
	S₁=	8		S₁=	0		S₁=	0			
	S₂=	15		S₂=	5		S₂=	0			
	S₃=	64		S₃=	34		S₃=	12			
	S₄=	7		S₄=	5		S₄=	3			
	S₅=	0		S₅=	0		S₅=	1			
D	X₁=	5.71	E	X₁=	7	F	X₁=	7	G	X₁=	0
	X₂=	4.29		X₂=	1.875		X₂=	0		X₂=	0
	S₁=	6.86		S₁=	21		S₁=	36		S₁=	64
	S₂=	0		S₂=	5.625		S₂=	15		S₂=	50
	S₃=	0		S₃=	0		S₃=	15		S₃=	120
	S₄=	1.29		S₄=	0		S₄=	0		S₄=	7
	S₅=	2.71		S₅=	5.125		S₅=	7		S₅=	7

Factibilidad de un PPL

Un PPL es factible cuando:

1. $n \geq m$
2. Existe un conjunto de solución X que satisfice:

Región Factible $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

3. Existe un subconjunto de X con elementos no negativos

$$\begin{aligned} & \max Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{st} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Región Factible

- La **región factible** para cualquier problema de programación lineal es un **conjunto convexo**.
- Si un PPL tiene una solución óptima, debe haber un punto extremo de la región factible que es óptima.
- Si un PPL tiene una solución óptima, ésta corresponde a una SBF.
- Un PPL tiene finitas SBFs. El número de SBFs está acotado por $\binom{n}{m}$
- Un vértice o intersección geométrica representa una SBF.

Solución Óptima Global

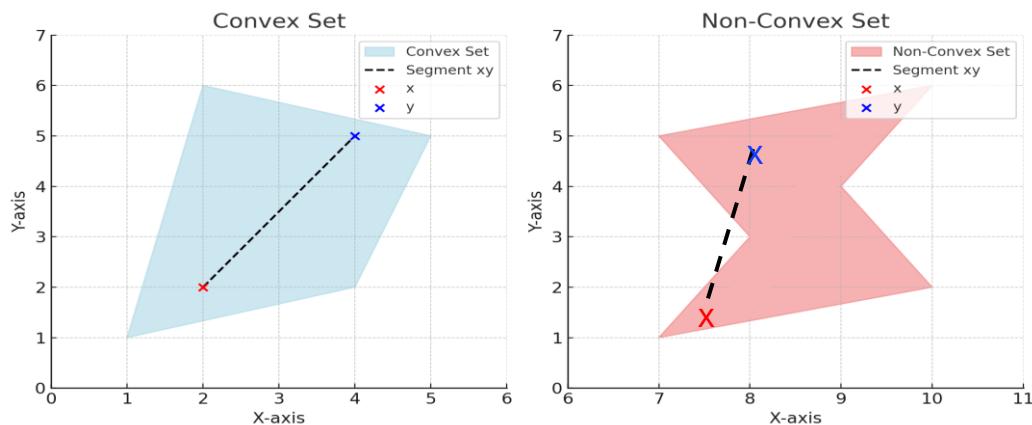
Sea el problema de optimización:

$$\min f(x) \text{ sujeto a } (x) \in S \text{ donde } S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es el conjunto factible y } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

El problema tiene una **solución óptima global** si:

S es un conjunto convexo y no vacío (existe al menos una solución factible),
 $f(x)$ es coerciva y es una solución convexa en S , es decir:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$



$f(x)$ es coerciva si $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$

Teorema de Existencia de Óptimos

Si S es un conjunto convexo, cerrado y acotado en \mathbb{R}^n y $f(x)$ es convexa y continua en S , entonces **existe al menos una solución óptima global** $x^* \in S$ tal que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$

Si además, $f(x)$ es estrictamente convexa, la solución óptima global es única.

Soluciones factibles adyacentes

- El método simplex es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una sbf a otra sbf adyacente.
- El número máximo de iteraciones posibles en este proceso es el resultado de
- Regularmente, el método simplex puede encontrar la solución óptima después de examinar menos de $3m$ sbf

$$\binom{n}{m}$$

Grafica el siguiente PPL

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

st

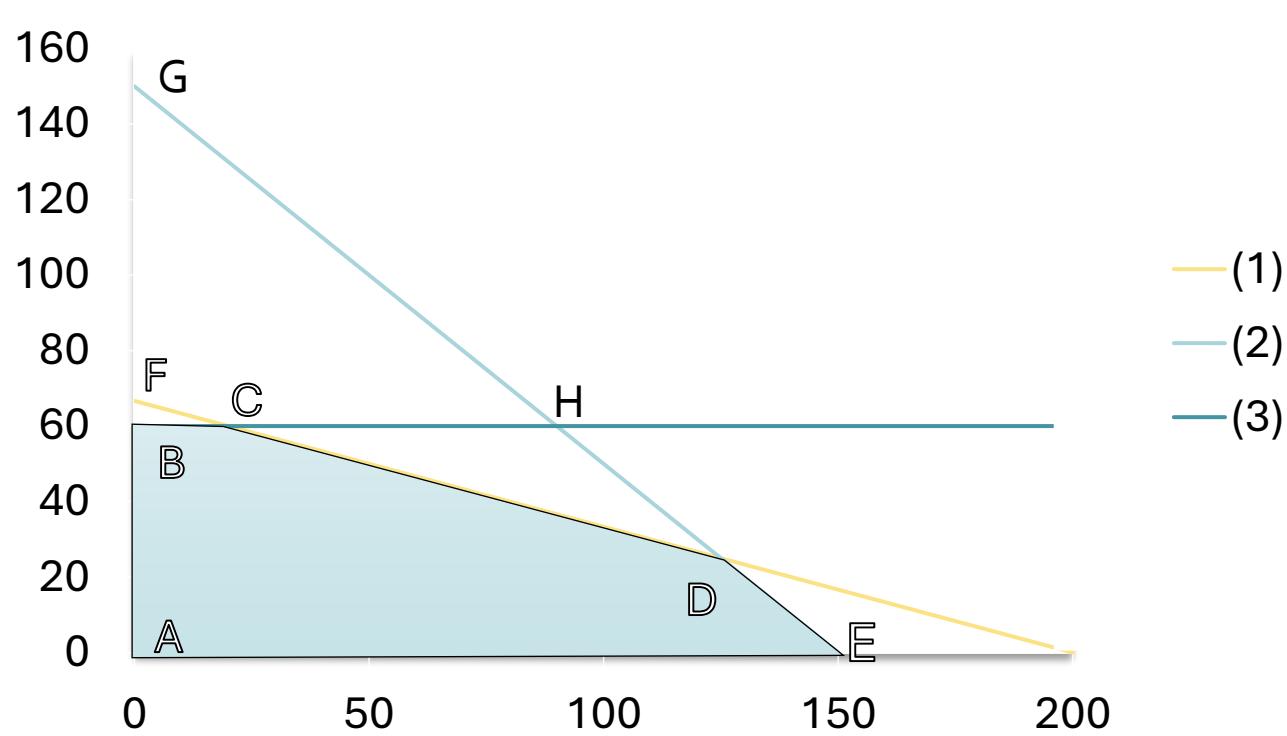
$$x_1 + 3x_2 \leq 200 \quad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 300 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 60 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$



Identifica todas las SBFs



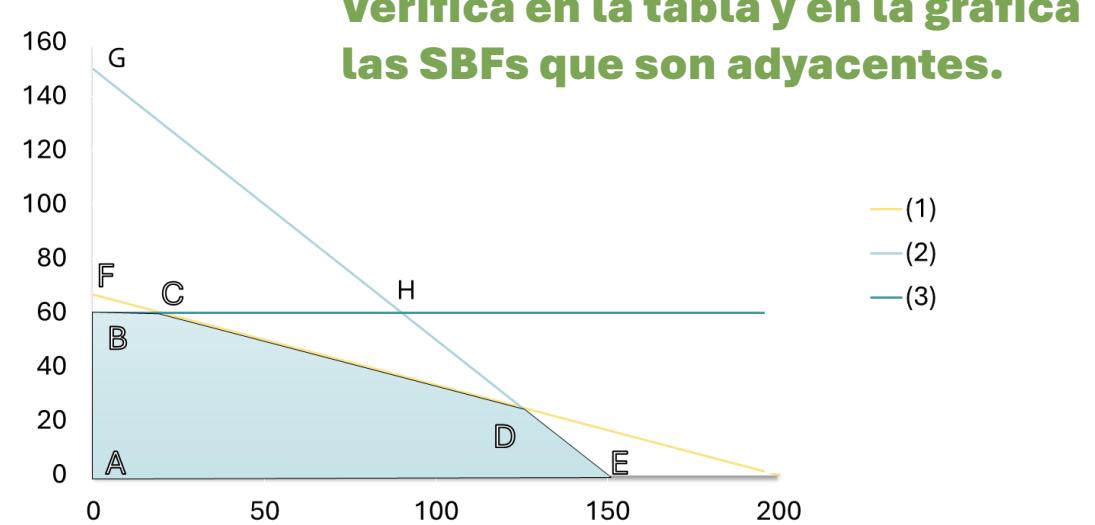
Resuelve los 10 sistemas de ecuaciones

No básicas	x1	x2	s1	s2	s3	SBF o vértice	Factible
x1 x2							
x1 s1							
x1 s2							
x1 s3							
x2 s1							
x2 s2							
s1 s2							
s1 s3							
s2 s3							



¿Por qué 10 SBFs máximo?

¿Por qué x2 y s3 no pueden ser no básicas al mismo tiempo?



El Método Simplex

- Desarrollado por [George Dantzig](#) en 1947
- El PPL debe estar en su forma estándar.
- Se inicia con una SBF dada.
 - Generalmente, se inicia con el origen si éste es factible.
- Es un **proceso iterativo** que hace una búsqueda eficiente brincando de una SBF a otra SBF adyacente con mejor valor objetivo (mejor Z)
- Mantiene la factibilidad y busca la optimalidad
 - Factibilidad: Variables no básicas igual a cero y variables básicas satisfacen $Ax=b$, $x \geq 0$.
- La base de la nueva SBF contiene las mismas variables básicas, excepto por una.
 - Por lo tanto, tiene las mismas variables no básicas, excepto por una.

Proceso iterativo: Procedimiento sistemático que repite una serie de pasos (iteración) hasta que se obtiene el resultado esperado.

$$\begin{aligned} & \max Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{st} \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

El Método Simplex ...

- ¡La terminación está garantizada!
- Cuando encuentra una SBF óptima (x^*) y un valor finito de Z .
 $Z^* < \infty$
- Cuando determina que el problema es infeccible
 - Esto significa que la region factible es vacía. $S = \{\emptyset\}$
- Cuando identifica que el valor óptimo Z es infinito. $Z^* = \infty$
 - Por lo tanto, no se puede identificar una solución óptima

Un PPL en forma matricial

$$\begin{aligned} \max Z &= \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{st} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} : n \times 1$$

$$\mathbf{A} : m \times n$$

$$\mathbf{c} : 1 \times n$$

$$\mathbf{b} : m \times 1$$

$$\mathbf{B} : m \times m$$

$$\mathbf{N} : (m \times (n - m))$$

$$\mathbf{0} : n \times 1$$

When the LPP is in standard form:

- **n variables**
- **m functional constraints**

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Ejercicio

- Identifique los vectores y matrices correspondientes si:
 - $\mathbf{X}_B = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$
 - $\mathbf{X}_B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

st

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 300 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 60 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Un tablero Simplex

	Costo reducido	
Z	$\bar{c}' = c'_B B^{-1}A - c'$	$c_B B^{-1}b$
x_B	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
Z	$\bar{c}' = [y'N - c_N', 0]$	$c_B \bar{b}$
x_B	$B^{-1}[N, B] = [B^{-1}N, I]$	\bar{b}

Problema de maximización

Valor de Z

Valor de las variables básicas

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$A = [N, B]$$

Submatriz de variables no básicas

Submatriz de variables básicas:
Matriz Base

$$y' = c'_B B^{-1}$$

Valor de las variables duales

Condición de factibilidad

$$\bar{b} \geq 0$$

Siempre en una iteración Simplex

Condición de optimalidad

$$\bar{c}' \geq 0$$

En el óptimo

Una iteración de Simplex

(Problemas de maximización)

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

Dada una SBF con:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

1. Resuelva $Bx_B = b$, $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$ $x_B = \bar{b}$ $x_N = 0$ $z = c_B B^{-1}b = c_B x_B$

Si es SBF: $\bar{b} \geq 0$ (condición de factibilidad)

1. Resuelva $wB = c_B$, $w = c_B B^{-1}$ $z_j - c_j = \bar{c}_j = (c_B B^{-1})A_j - c_j$ $j \in J$: índices de variables no básicas
2. Sea x_k la variable entrante, donde $k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\}$
3. Si $\bar{c}_j = z_k - c_k > 0$. Pare. La SBF actual es óptima.
4. Calcule $By_k = a_k$ donde $y_k = B^{-1}a_k$ Si $y_k \leq 0$. Pare. La solución óptima es no acotada.
5. De otra forma, x_k entra a la base. Sea x_{Br} la variable saliente, donde $\frac{b_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
6. Actualice la base B, donde a_k reemplaza a_{Br} . Actualice el conjunto de índices J y vaya al paso 1.

Operaciones básicas de una iteración (Matlab)

- basicas = [...]
- J=[...]
- B=A(:,basicas)
- cb=c(:,basicas)
- cn=c(:,J)
- AN=A(:,J)
- invB=inv(B)
- bbar= invB*b
- z= cb*bbar
- w=cb*invB
- cbar=w*AN-cn
- k= ? posición entrante
- Yk=invB*AN(:,k)
- bbar./yk
- r=? Posición saliente

Reemplaza:

basicas = [en posición r poner k]
J= [en posición r poner XBr]

Ejercicio

- Realice una iteración del método Simplex iniciando con la siguiente SBF:
- $X_B = \{s_1, s_2, s_3\}$
- $X_N = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Confirme que la SB es factible:

$$B^{-1}b = \bar{b} \geq 0$$

$$\max Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

st

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 40 \quad (1)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8 \quad (2)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_B\}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_B] = [\mathbf{N}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_B\}$$

Practica en casa, resolviendo completamente este ejercicio con el método Simplex.

Ejercicio

- Resuelva el siguiente ejercicio de minimización

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

st

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 300 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 60 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

Equivalent to

$$\max -Z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\max -Z + x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

Un problema de minimización se convierte en maximización multiplicando por (-1) la función objetivo

$$\min Z = \max -Z$$

Método Simplex – Minimización

- Método 1: Multiplicar Z por (-1) y maximizar
- Método 2 – Modificar el algoritmo simplex para resolver problemas de minimización directamente.

...

2. Sea x_k la variable entrante, donde $k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$

3. Si $\bar{c}_j = z_k - c_k < 0$. Pare. La SBF actual es óptima.

...

El Algoritmo Simplex (resumen)

- **Paso 1** Convertir el LP al formato estándar
- **Paso 2** Obtener una SBF (si es posible) a partir del formato estándar
- **Paso 3** Determinar si la SBF actual es óptima
- **Paso 4** Si la SBF actual no es óptima, determinar que variable no-básica debe convertirse en una variable básica y la variable básica que debe convertirse en una variable no básica para encontrar una SBF con un mejor valor de la función objetivo.
- **Paso 5** Actualizar la base (Utilizar Operaciones Elementales de Renglón) para encontrar una nueva SBF con un mejor valor de la función objetivo. Volver al paso 3.