Método Simplex
Soluciones especiales detectadas por el método

Profesor name
Optimización de Procesos Industriales
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Métodos de Solución - Contenido

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

- **Notación**
  - Algebraica
  - Matricial
- **Solución**
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- **Método Gráfico**
  - Para problemas pequeños (2 var)
- **Método de B&B**
  - Para problemas enteros
- **Métodos Simplex**
  - Estructura de una iteración
  - Complejidad matemática
  - Casos especiales

Casos Especiales

- Degeneracin
- Soluciones óptimas multiples
- Soluciones no acotadas
- Problemas infactibles (solución inexistente)

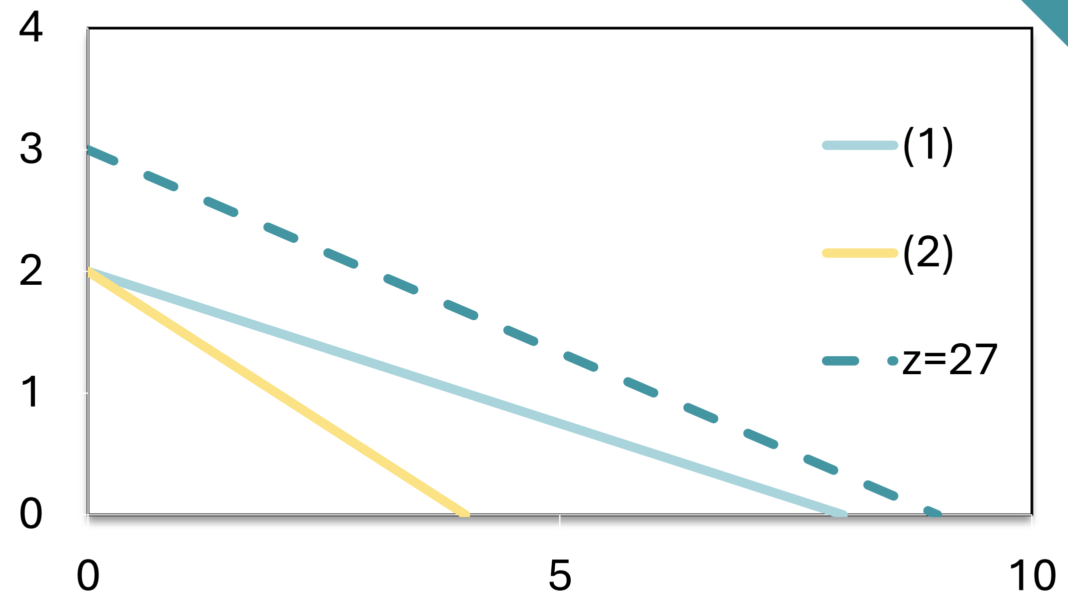
Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

Degeneración (Solución óptima degenerada)

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 9x_2 \\
st&: \\
x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Degeneración (Solución óptima degenerada)

$$\max z = 3x_1 + 9x_2$$
$$st:$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



- Gráficamente (en 2 dimensiones)
  - Una SBF (vértice) se forma por la intersección de dos o más líneas.
- En el tablero:
  - Una variable básica es igual a cero
- Matricialmente:
  - El vector $\underline{\mathrm{b}}$ tiene un valor igual a cero.

Degeneración (Solución óptima degenerada)...

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

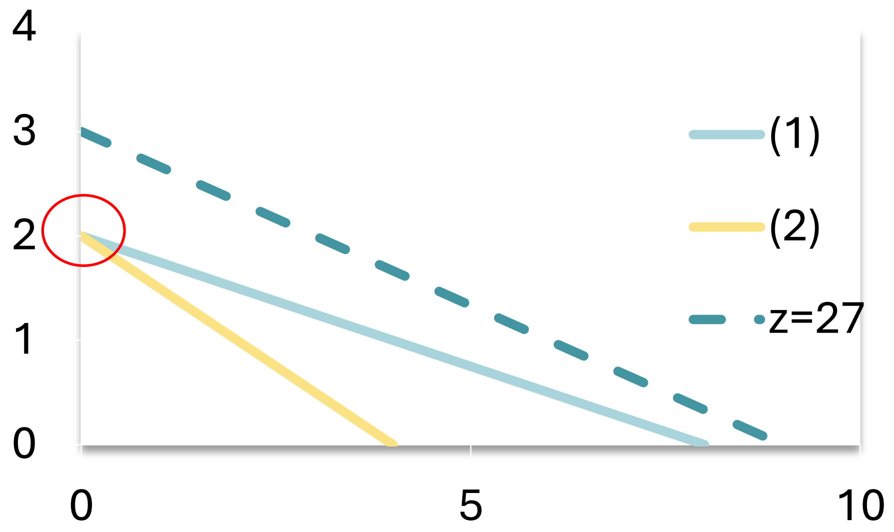
$$\max z = 3x_1 + 9x_2$$

$$st:$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



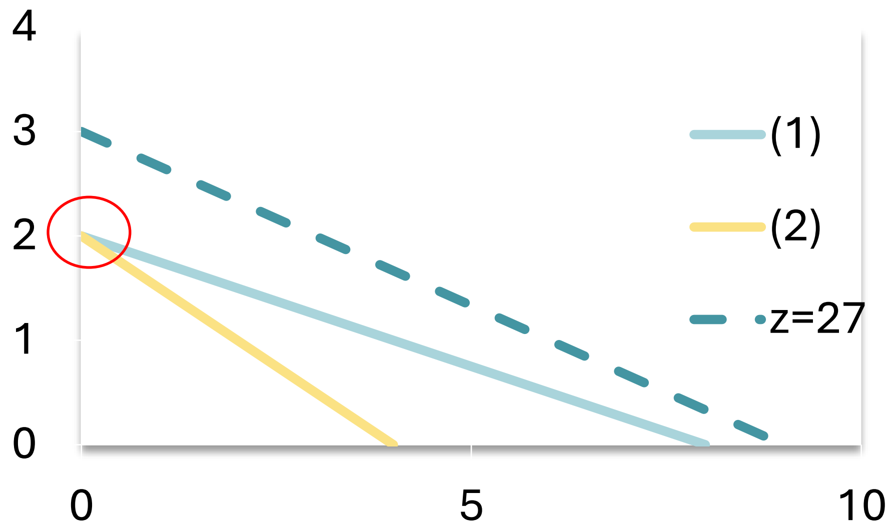
$\bar{b} = [2\ 0]$

Tablero final

Variables básicas	Z	x1	x2	s1	s2	LD
Z	**1**	**0**	**0**	**3/2**	**3/2**	**18**
x2	0	0	1	½	-1/2	2
x1	0	1	0	-1	2	0

Degeneración (Solución óptima degenerada)…

Tres rectas cruzan el punto óptimo. Se dice que el punto esta *sobredeterminado*, ya que sólo necesitamos dos rectas para identificarlo. Por este motivo, concluimos que una de las restricciones es redundante. Desafortunadamente no existen técnicas confiables para identificar restricciones redundantes directamente a partir de la tabla.



Considere los siguientes hechos:

- Si (valor de la variable entrante en la nueva SBF)> 0, → (Valor de Z para nuevo SBF) > (Valor de Z para SBF actual).
- Si (valor de la variable entrante en la nueva SBF) = 0, → (Valor de Z para nuevo SBF) = (Valor de Z para SBF actual).

En una iteración que visite un punto degenerado, es posible que Z no mejore (se mantiene igual).

Aquí el algoritmo se puede ciclar (encuentra en dos iteraciones diferentes la misma SBF), por lo que existen reglas adicionales para evitarlo.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

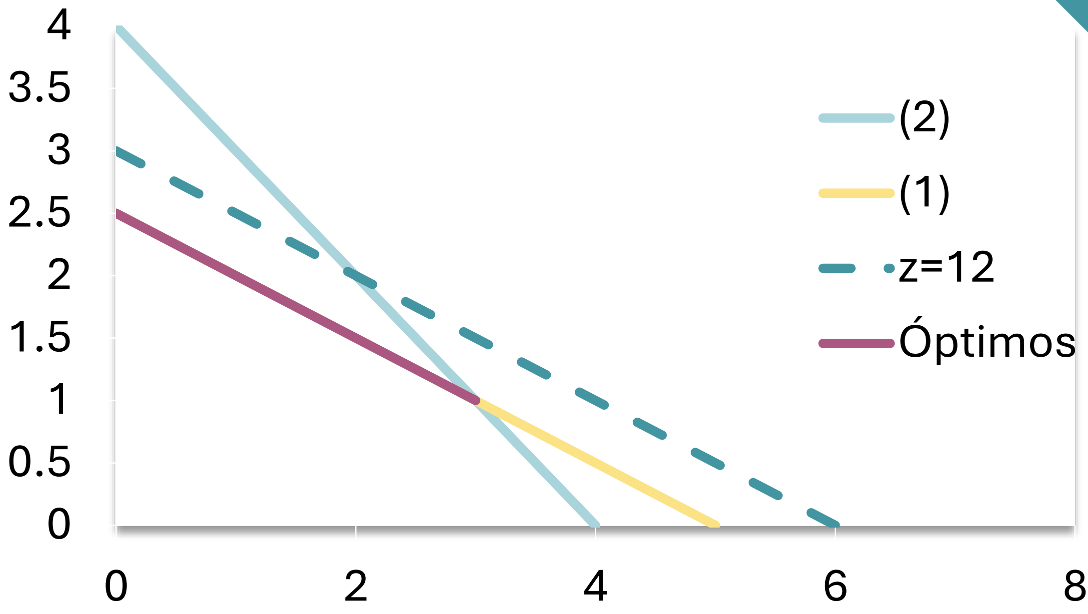
Soluciones óptimas múltiples (infinitas)

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 4x_2 \\
st&: \\
x_1 + 2x_2 &\le 5 \\
x_1 + \quad x_2 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Soluciones óptimas múltiples (infinitas)

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 4x_2 \\
st &: \\
x_1 + 2x_2 &\le 5 \\
x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



- Gráficamente (en dos dimensiones):
  - La línea z es paralela a una de las restricciones (condición necesaria pero no suficiente)
- En el tablero final (fila cero):
  - El vector de costo reducido tiene valores de cero en columnas de variables no básicas.
- Existe más de un tablero óptimo final

Soluciones óptimas múltiples (infinitas)

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

Tablero final

Variables básicas	Z	x1	x2	s1	s2	LD
Z	**1**	**0**	**0**	**2**	**0**	**10**
x2	0	0	1	1	-1	1
x1	0	1	0	-1	2	3

Tablero final

Variables básicas	Z	x1	x2	s1	s2	LD
Z	**1**	**0**	**0**	**2**	**0**	**10**
x2	0	½	1	½	0	5/2
s2	0	½	0	-½	1	3/2

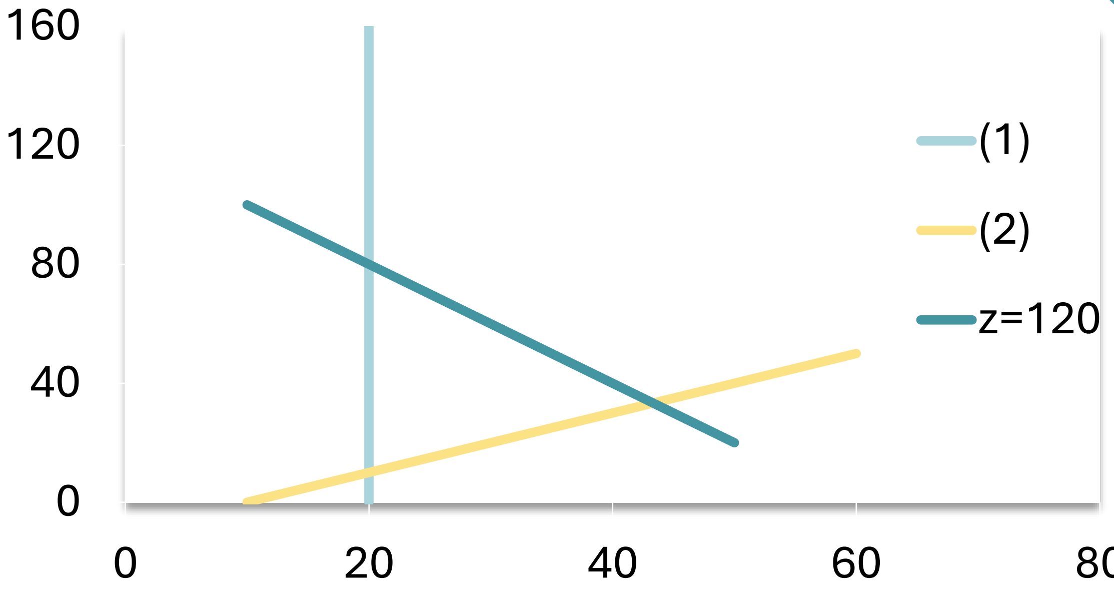
Solución no acotada

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + x_2 \\
&st: \\
&\quad x_1 - x_2 \le 10 \\
&\quad 2x_1 \qquad \le 40 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Solución no acotada

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$st:$$
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \qquad \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



- Gráficamente (en dos dimensiones):
  - La línea Z se puede mover en la dirección de optimalidad infinitamente.
  - No hay restricciones que limitan en la dirección de optimización
- En el tablero:
  - No hay coeficientes positivos en la columna entrante (pivote)
  - No hay variable básica entrante. No se puede hacer la división porque no hay valores positivos.

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

Solución no acotada …

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

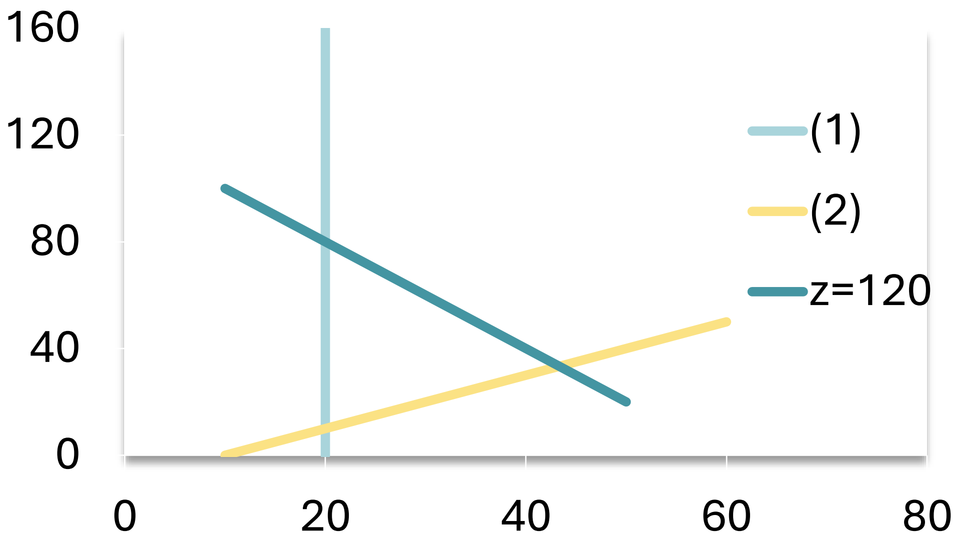
$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$st:$$

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \qquad \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Variables básicas	Z	x1	x2	s1	s2	LD
Z	**1**	**-2**	**-1**	**0**	**0**	**0**
s1	0	1	-1	1	0	10
s2	0	2	0	0	1	40

Problema infactible

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$st:$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Victor Villegas

Problema infactible

Jenny Díaz, Rodolfo Mendoza, Víctor Villegas

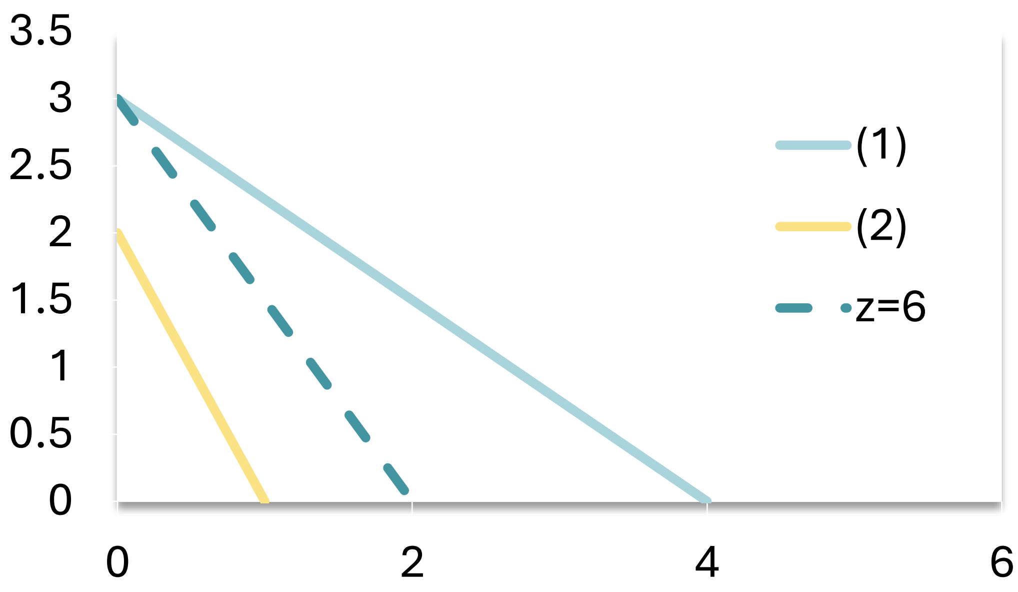
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st:$$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



- Gráficamente (en dos dimensiones):
  - Las áreas de factibilidad de cada restricción no se intersectan
- En el tablero:
  - Las variables de holgura no forman una SBF inicial.
  - Por el método de la gran M: Al menos una de las variables artificiales termina básica, en el óptimo y positiva.
  - Por el método de las dos fases: El valor óptimo de la fase 1 es positivo.