Solución de un Problema de Programación Lineal

Professor name
Optimización de Procesos Industriales
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey

Jenny Díaz Ramírez PhD

“

- **Un modelo**

  Es una representación idealizada de un sistema de la vida real.
  Es un patrón, plan, representación (especialmente en miniatura) o descripción diseñada para mostrar la estructura o el funcionamiento de un objeto, sistema o concepto.

- **Un modelo matemático**

  Es un modelo abstracto que usa lenguaje matemático.

Jenny Díaz Ramírez PhD

Un modelo matemático lineal

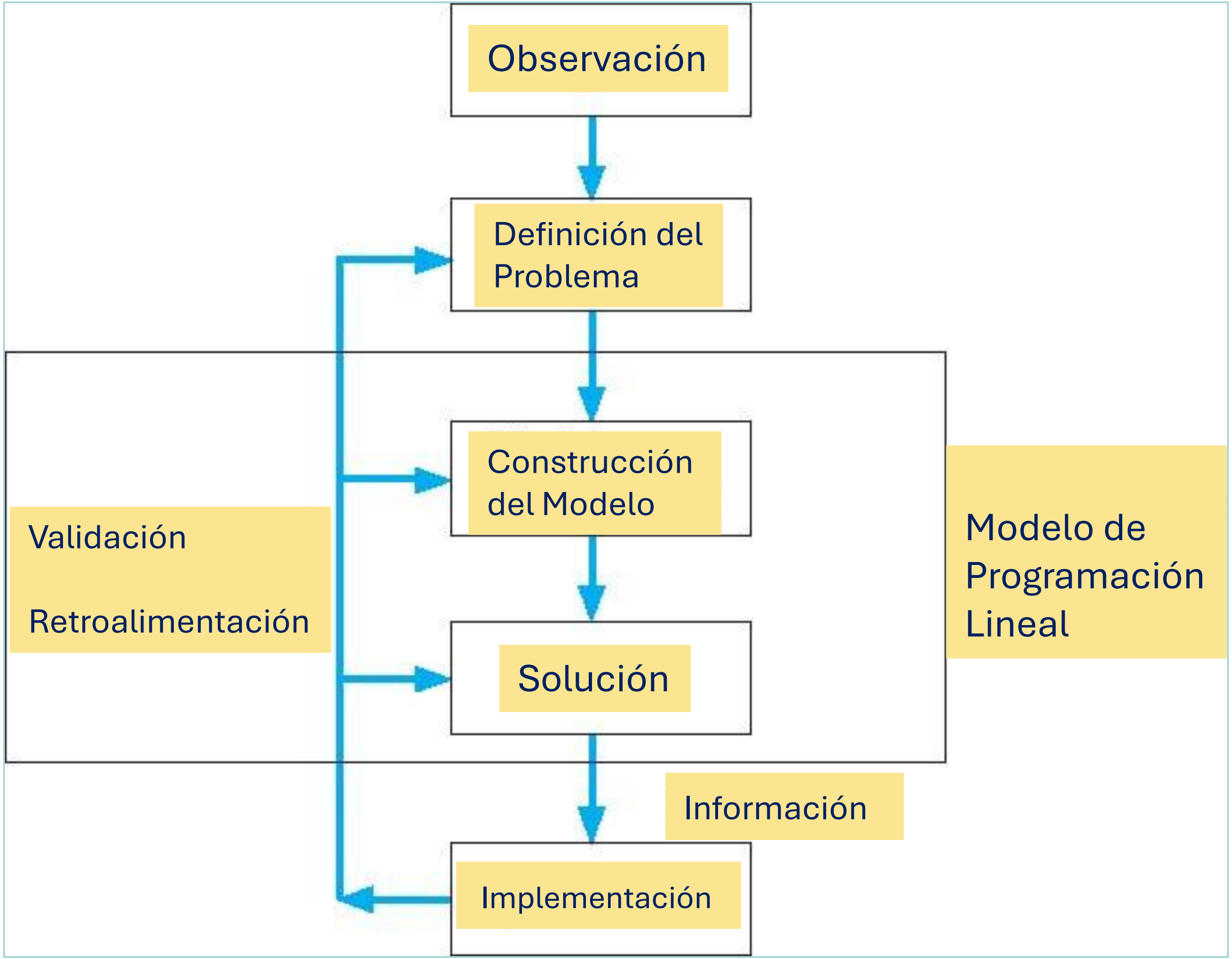
- Función objetivo lineal
- Restricciones lineales
- Variables continuas

Programación lineal:
Usa un modelo matemático lineal para describer el problema.

Un problema que puede representarse como un modelo matemático lineal es un Problema de Programación Lineal (LPP).

Jenny Díaz Ramírez PhD

Modelando en programación lineal



Un modelo de programación lineal

FUNCIÓN OBJETIVO: max/min

- Una función lineal
- Su valor se asigna a una nueva variable de decisión, usualmente “Z”, pero se puede usar cualquier nombre.

Variables de Decisión

- Significado: objeto, acción y unidades.
- Dominio, continuidad
- No negatividad
- Se pueden agrupar usando un índice: cuando el mismo tipo de decision se aplica a un conjunto (o subconjunto) de elementos.
- El número de variables es finito.

Restricciones

- Ecuaciones o desigualdades (=, ≥, ≤)
- Lado Izquierdo (Left-hand side (LHS)): una expression lineal.
- Lado derecho (Right-hand side (RHS)): Un parámetro.

Jenny Díaz Ramírez PhD

Un modelo de programación lineal

FUNCIÓN OBJETIVO:
max/min

$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Subject to:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

VARIABLES DE DECISIÓN

RESTRICCIONES Funcionales

RESTRICCIONES de dominio

Jenny Díaz Ramírez PhD

Principios (o supuestos) de un PPL

Proporcionalidad

- Único exponent permitido en las variables: 1

Additividad

- Las variables sólo se pueden sumar o restar

Divisibilidad

- Las variables son continuas

Certidumbre

- Los parámetros son conocidos y fijos

Jenny Díaz Ramírez PhD

Ejemplo:

El granjero mágico

Un agricultor necesita un fertilizante especial que contenga al menos 10, 12 y 12 unidades de nutrientes de Nitrógeno, Hierro y Potasio, respectivamente.

En el mercado encuentra un producto líquido que contiene 5, 2 y 1 unidades de Nitrógeno, Hierro y Potasio por galón, respectivamente, con un costo de $6000/galón. También encuentra un producto sólido que contiene 1, 2 y 4 unidades de Nitrógeno, Hierro y Potasio por kilogramo, respectivamente, con un costo de $4000/kg.

¿Qué cantidades de cada producto debe comprar el agricultor para minimizar el costo del fertilizante que satisfaga los requisitos mencionados?

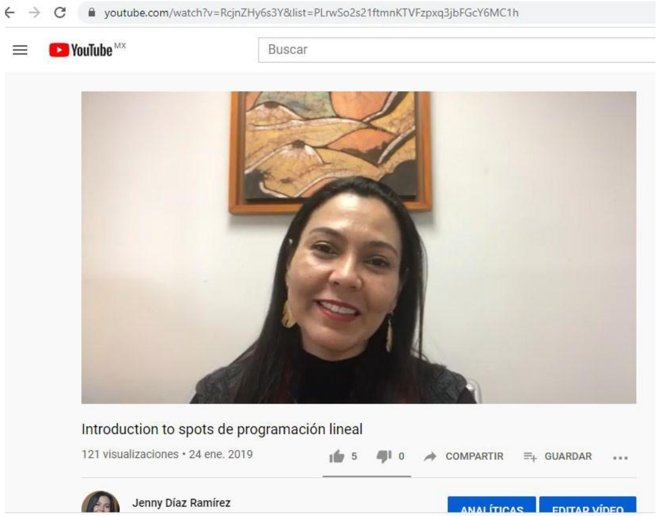
Jenny Díaz Ramírez PhD

Responda las siguientes preguntas

Elementos? Contables, finitos	**(índices)**
¿Qué sé de cada elemento?	**(parámetros)**
¿Qué no sé (y quiero saber) de cada elemento?	**(variables de decisión)**
¿Qué quiero?	**(función objetivo)**
¿Qué condiciones debo satisfacer?	**(restricciones)**
¿Cuál es el rango de las posibles soluciones? (dominio de las variables)	**(valores no negativos)**
¿Cuál es la solución de este problema?	**Esa es la idea! Averiguar cuánto valen las variables**

Apoyos Visuales para Modelar

https://www.youtube.com/playlist?list=PLrwSo2s21ftmnKTVFzpxq3jbFGcY6MC1h



Jenny Díaz Ramírez PhD

Organice the information

- Organice the information
  - Use tablas
  - Procese los datos existentes
  - Obtenga nuevos datos

Jenny Díaz Ramírez PhD

Organice the information

El granjero mágico

Producto	Contentido por unidad			Precio unitario
	N	Fe	K	
Líquido	5	2	1	($/galón) 6000
Sólido	1	2	4	($/kg) 4000
Requerimientos mínimos	10	12	12	

Jenny Díaz Ramírez PhD

Construcción de un modelo de PL

- Organice the information ☑
- Identifique los elementos

Jenny Díaz Ramírez PhD

Un modelo matemático

- **Elementos**
  - Función objetivo (FO)
    - Criterio para evaluar las alternativas (variables) de decision
    - Función matemática a optimizarse (max/min)
    - FO: verbo, objeto, horizonte, unidades.
  - Variables de decisión
    - Sus valores son controlables
    - Representan las alternativas de decisión
  - Restricciones
    - Disponibilidad de recursos
    - Conditiones que restringen los valores de las variables

Variables de decisión
- **Alternatives**
- **Valores desconocidos** (Incógnitas)
- Or just **Variables**

All the same

Objetivo:
Encontrar los valores de las variables de decision que optimicen el valor de la FO.

Jenny Díaz Ramírez PhD

El granjero mágico

- **Declaración de las variables de decisión**
  - Cantidad de galones de producto líquido a comprar
  - Cantidad de galones de producto sólido a comprar

- **Declaración de la función objetivo**
  - MINIMIZAR el costo para el granjero de satisfacer los requerimientos establecidos.

El granjero mágico

- **Contraints declaration**

  - Requirement of minimum amount of nutrient A: N
  - Requirement of minimum amount of nutrient B: Fe
  - Requirement of minimum amount of nutrient C: K
  - Quantities to be purchased must be greater or equal to zero.

Construction of a LP Model

- Organice la información ☑
- Identifique los elementos ☑
- Escriba las expresiones matemáticas

$$\min Z = \mathbb{c}'\mathbb{x}$$

Subject to:

$$\mathbb{A}\mathbb{x} \geq \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x} \geq 0$$

En álgebra:

- $\mathbb{A}$ matrix [m X n]
- $\mathbb{b}$ vector [m X 1]
- $\mathbb{c}$ vector [1 x n]
- $\mathbb{x}$ vector [1 x n]
- 0 vector [1 x n]

El granjero mágico

El modelo matemático de PL

Minimizar $C = 6000x1 + 4000x2$

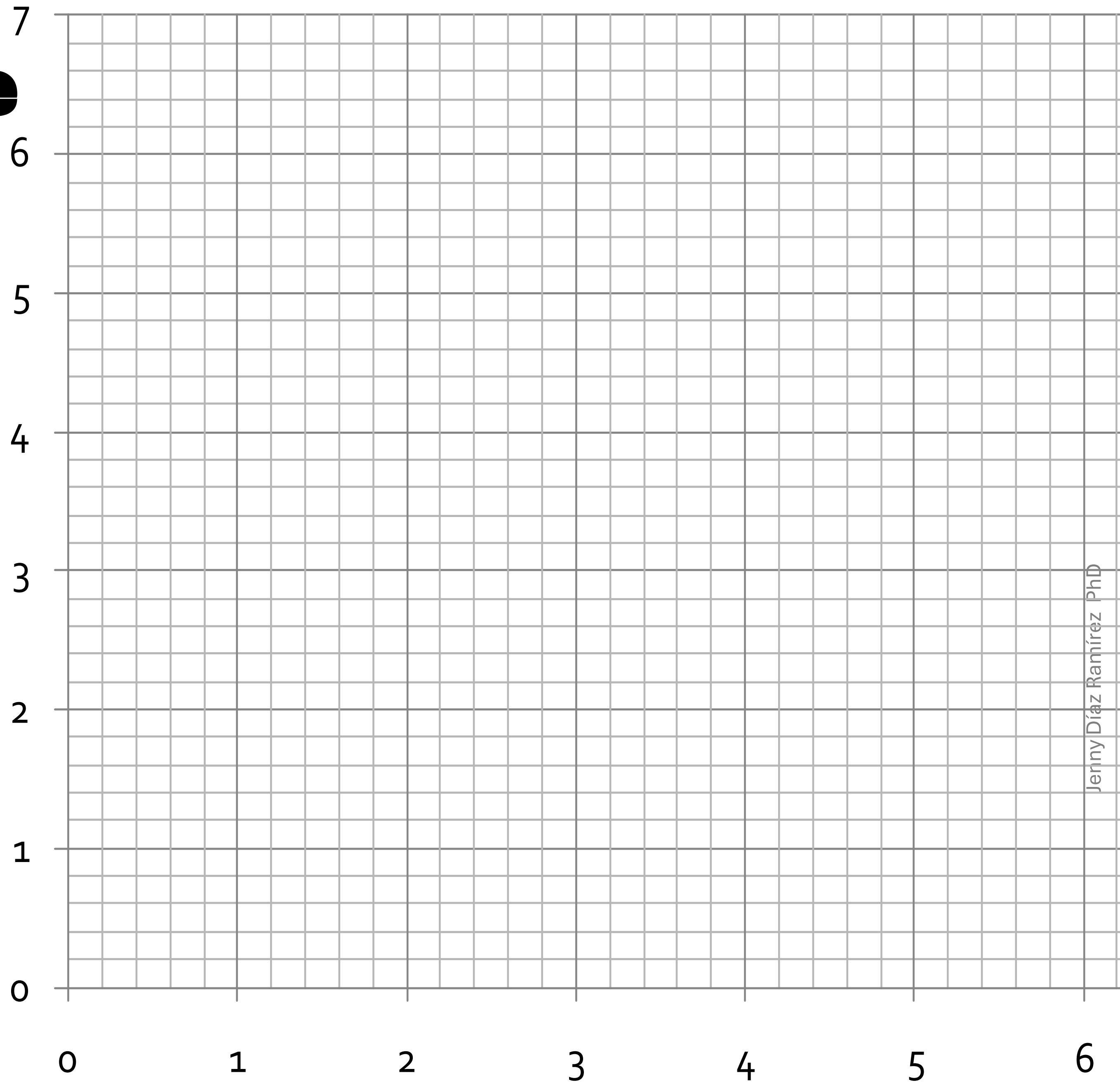
Sujeto a:

$$\begin{aligned} 5x1 + x2 &\geq 10 \\ 2x1 + 2x2 &\geq 12 \\ x1 + 4x2 &\geq 12 \\ x1, x2 &\geq 0 \end{aligned}$$

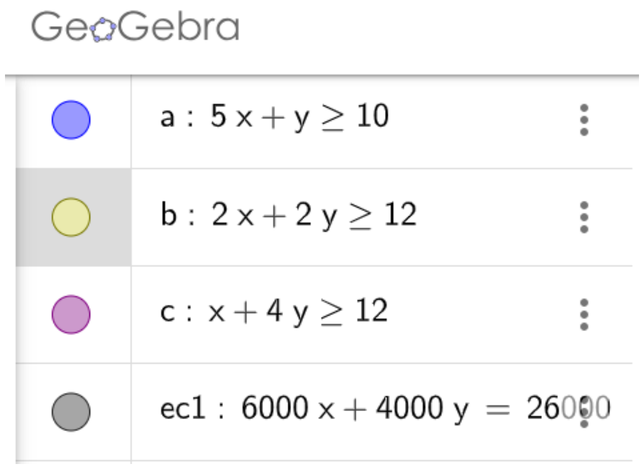
Jenny Díaz Ramírez PhD

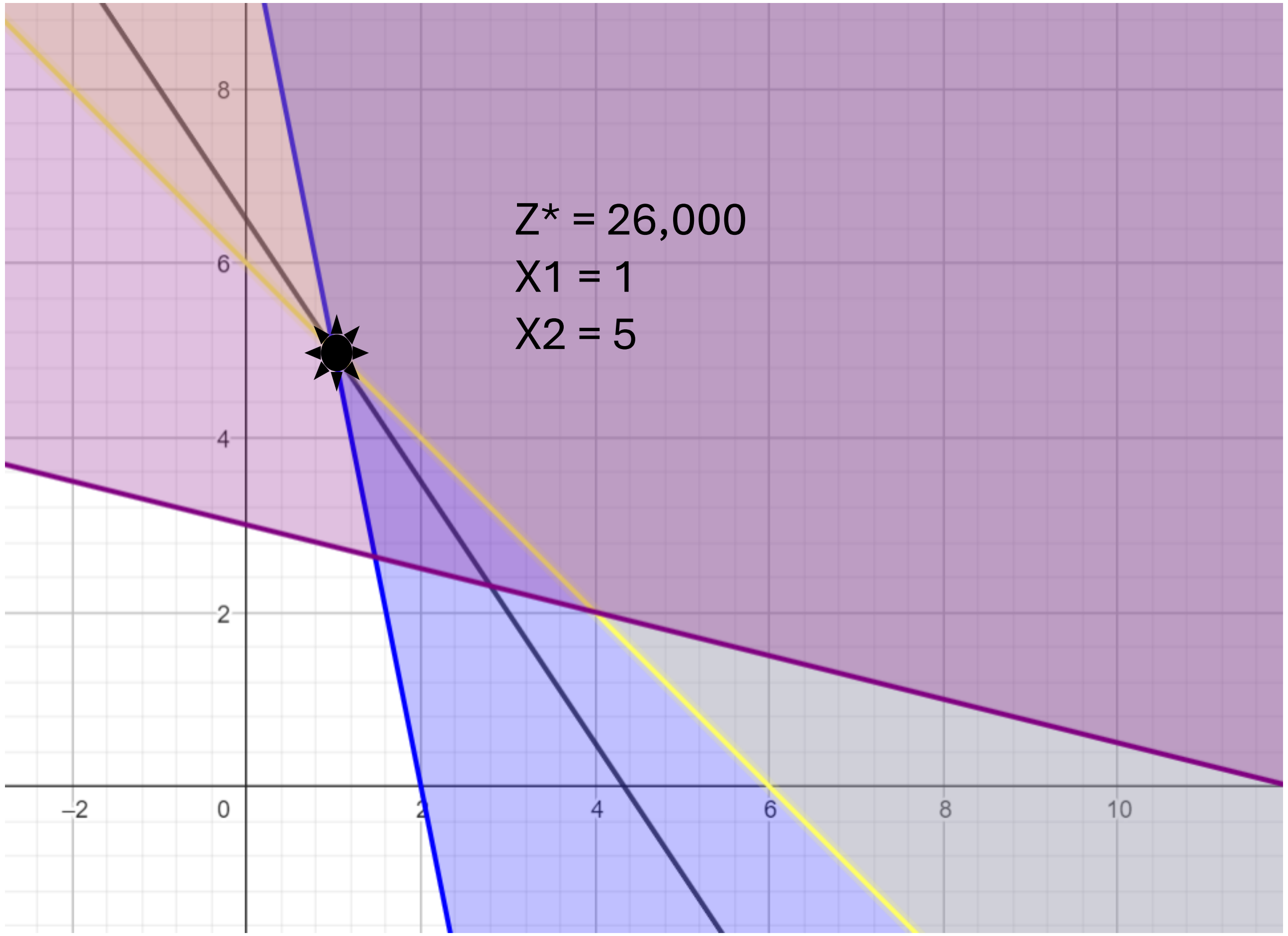
Espacio Factible de Solución

Grafiquemos la región factible.

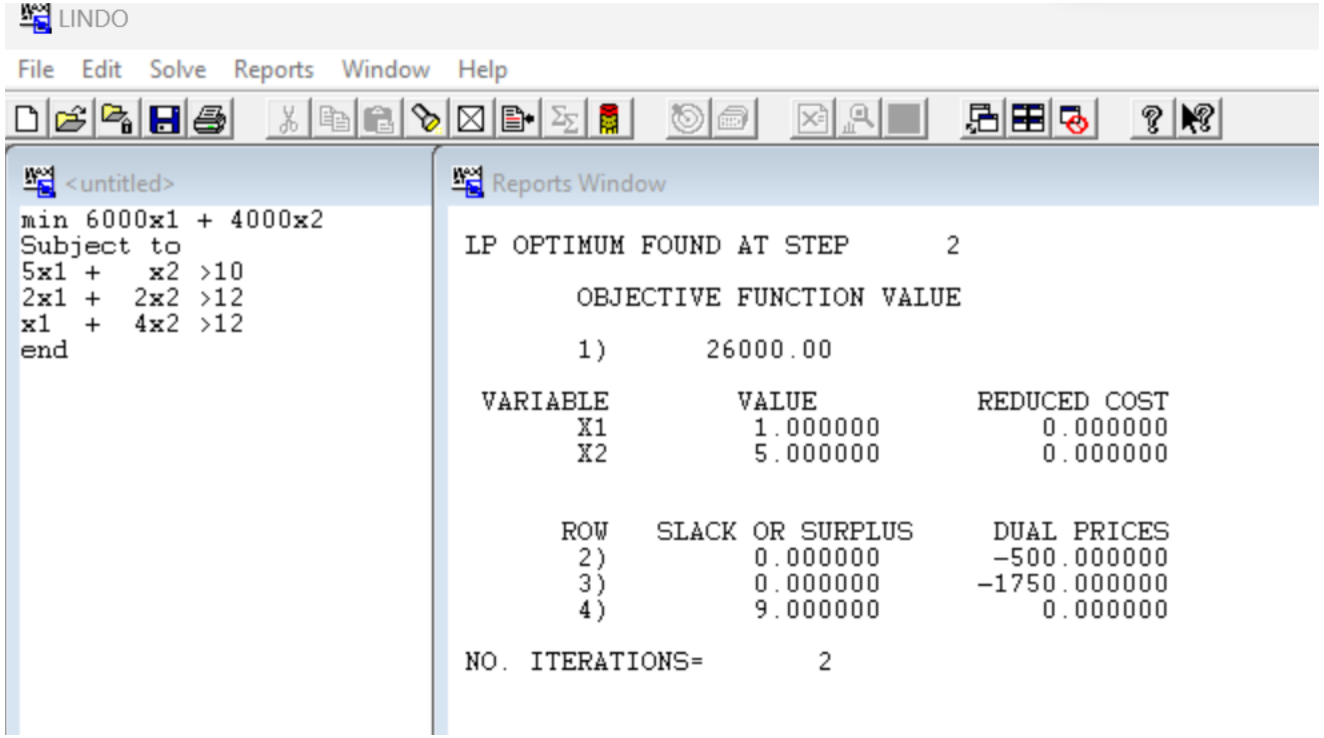


Solución Gráfica





Solución en Lindo



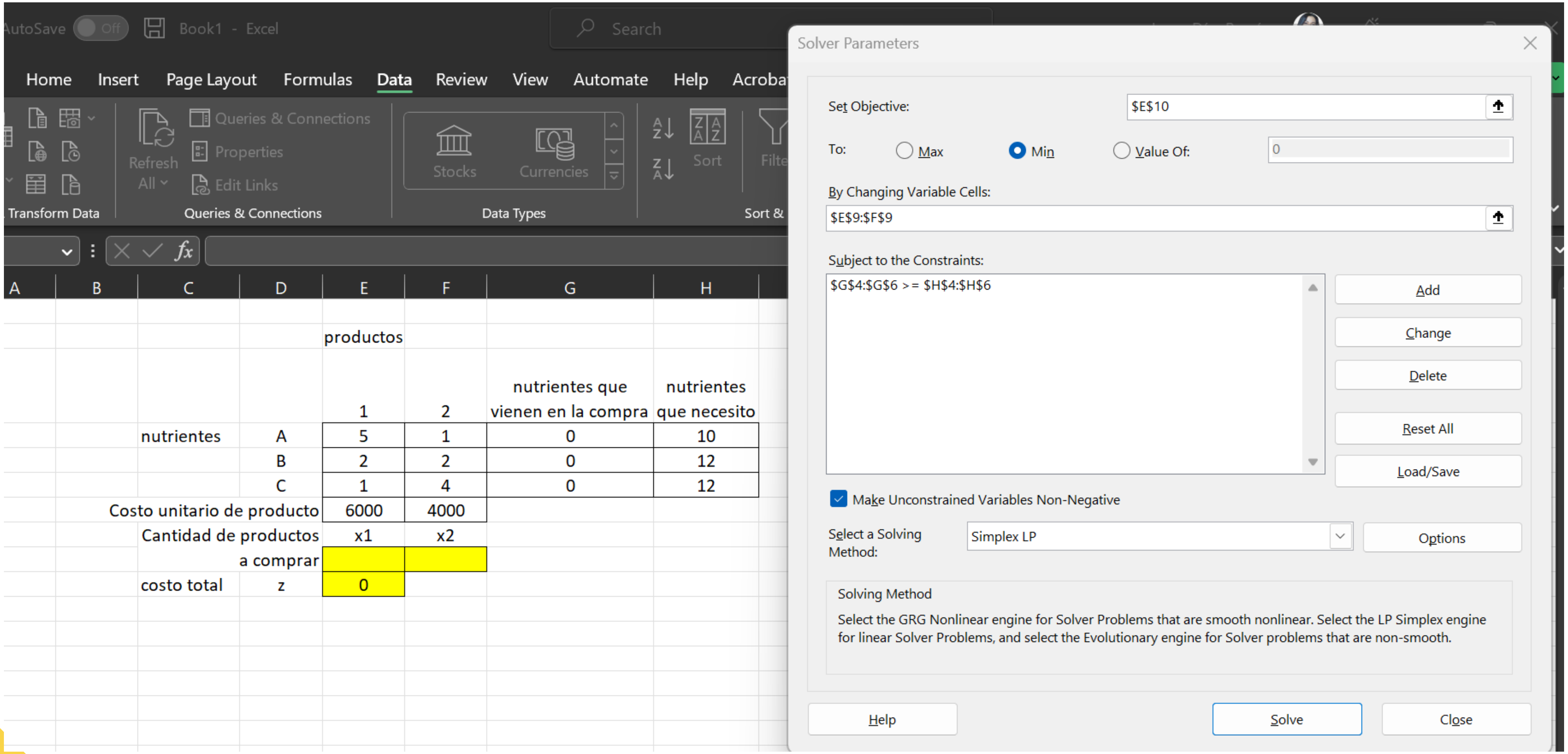
$Z^* = 26{,}000$

$X1^* = 1$

$X2^* = 5$

Jenny Díaz Ramírez PhD

Solución en Excel



Jenny Díaz Ramírez PhD

Otro Ejemplo

Una pequeña ciudad de 15,000 habitantes consume un promedio de 1,200,000 litros de agua al día. La ciudad se abastece de una central donde el agua es purificada por métodos convencionales de filtración y clorohidratación. Adicionalmente, dos compuestos químicos: suavizante y purificador, son necesarios para el agua como elementos salubres. La planta purificadora está considerando a dos proveedores de estos productos químicos. El proveedor PA ofrece paquetes de 4 kg de suavizante y 1.5 kg de purificador por $80. El proveedor PB ofrece paquetes de 2kg de suavizante y 4.5 kg de purificador por $100.

Para mantener el agua a un nivel mínimo de suavidad y protección minima de pureza, se requieren 75 kg de suavizante y 50 kg de purificador.

¿Qué combinación de productos se debe adquirir?

Jenny Díaz Ramírez PhD

Modelo Matemático

x_j = Cantidad de paquetes a comprar al proveedor j. $j \in J = \{1: A, 2: B\}$

Z = Costo total de la compra

$$\min \quad Z = 80x_1 + 100x_2$$

Sujeto a:

Suavizante) $4x_1 + 2x_2 \geq 75$

Purificador) $1.5x_1 + 4.5x_2 \geq 50$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix}; \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 75 \\ 50 \end{bmatrix}; \mathbb{c} = [80 \quad 100]; \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, el problema se puede escribir así:

$$\min Z = \mathbb{c}'\mathbb{x}$$

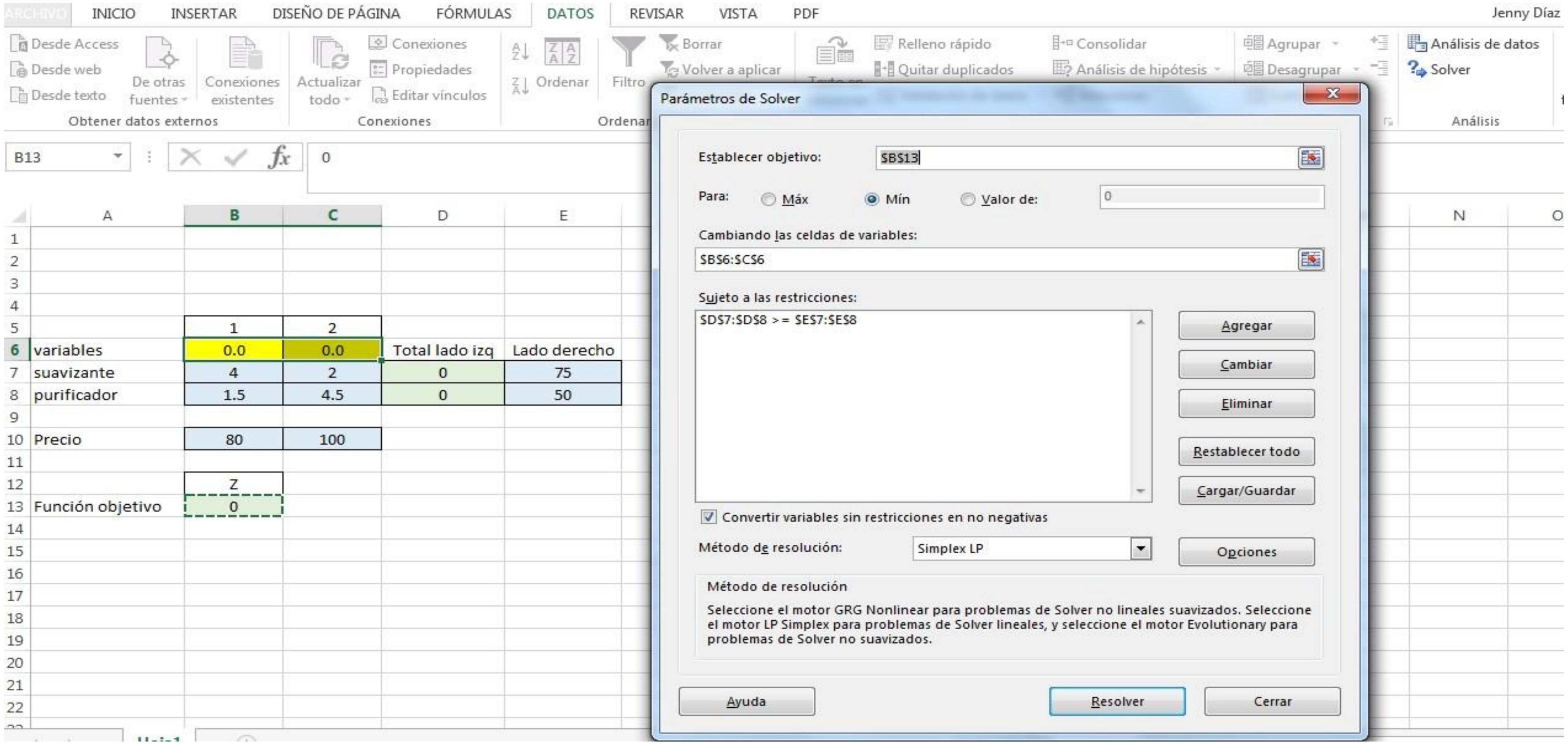
Sujeto a:

$$\mathbb{A}\mathbb{x} \geq \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x} \geq 0$$

Jenny Díaz Ramírez PhD

Solución en Excel



Jenny Díaz Ramírez PhD

Interpretación de la solución

		1	2	Lo que compro	Lo que necesito (lado derecho)
ingredientes	suavizante	4	2	75	75
	purificador	1.5	4.5	50	50
Costo unitario de producto		80	100		
		[illegible]	[illegible]		
	variables	15.83333	5.833333		
costo total	z	1850			

x_j = Cantidad de paquetes a comprar al proveedor j. $j \in J = \{1: A, 2: B\}$

Z = Costo total de la compra

Compro 15.833 paquetes al proveedor A y 5.833 paquetes al proveedor B, con un costo total de $1,850.

¿Paquetes con fracciones?

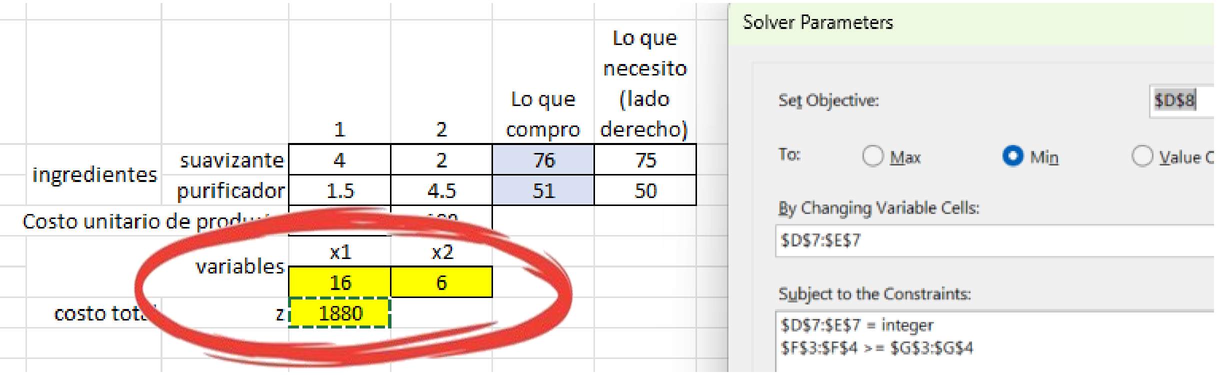
Jenny Díaz Ramírez PhD

Interpretación de la solución

¿Se necesita la solución entera?

Opción 1. Redondear. Cuando los valores de las variables son grandes y/o el modelo se resuelve periódicamente.
Opción 2. Agregar una restricción nueva de dominio de las variables: Ya no continuas sino enteras:

$$x_1, x_2 \geq 0, enteras$$



Compro 16 paquetes al proveedor A y 6 paquetes al proveedor B, con un costo total de $1,880.

Jenny Díaz Ramírez PhD

Implementación del Modelo en GAMS

C:\Users\jenny.diaz\Documents\gamsdir\projdir\M9. modelo_ejemplo_b

Abono2.gms | Abono2.lst | CAR 110718sb8c.gms | clase_modelo.lst | dual.lst

```
sets
j proveedores /A, B/
i componentes /suavizante, purificador/;

table a(i,j)
                A          B
suavizante      4          2
purificador 1.5          4.5     ;

parameters
b(i)   requisitos por componente   en (kg)
/   suavizante 75   ,  purificador 100 /
c(j)   precio de paquetes ($ por paq)
/   A 80  , B 100/;

VARIABLES z;
POSITIVE VARIABLES x(j);
EQUATIONS costo, requisitos(i);
costo..  Z=E=sum(j,c(j)*x(j));
requisitos(i)..   sum(j,a(i,j)*x(j))=g=b(i);
MODEL PLbb /ALL/;

OPTION
lp=cplex;
PLbb.Optfile = 1;

SOLVE PLbb using LP minimizing Z;
display x.l
```

Jenny Díaz Ramírez PhD

Implementación del Modelo en R

```r
# ejemplo base de PL
#install.packages("lpsolve")

library(lpSolve)
library(ggplot2)
A2<-rbind(c(4,2),c(1.5, 4.5))
# o también
# A2 <-matrix(c(4, 2, 1.5, 4.5),nrow = 2, ncol = 2,byrow = TRUE)
b2<-c(75,50)
a<-c(80,100)
Dir_Res <- c(">=", ">=")

Dir_Res
Sol_lp <- lp(direction = "min",
              objective.in = a,
              const.mat = A2,
              const.dir = Dir_Res,
              const.rhs = b2,
              compute.sens=TRUE)
Sol_lp
Sol<-c(Sol_lp$objval, Sol_lp$solution)
Sol
#si compute.sens=TRUE:..
#sensibilidad: coef restr y OF
Sol_lp$sens.coef.from
Sol_lp$sens.coef.to
#duales
Sol_lp$duals
```

Jenny Díaz Ramírez PhD