Solución de un Problema de Programación Lineal – Forma Estándar –

Profesor name

Optimización de Procesos Industriales

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Tecnológico de Monterrey

Métodos de Solución - Contenido

- **Notación**
  - Algebraica
  - Matricial
- **Solución**
  - Espacios de solución
  - Tipos de solución
- **Método Gráfico**
  - Para problemas pequeños (2 var)
- **Método de B&B**
  - Para problemas enteros
- **Métodos Simplex**
  - Preparación: forma estándar
  - Estructura de una iteración
  - Complejidad matemática

Estandarización

Antes de emplear el Método Simplex para resolver un LP, el problema debe ser convertido la **forma estándar** del LP. En el cual todas las restricciones tienen signo de igualdad y las variables son no negativas.

Forma Estándar

Condiciones para que un PPL esté en su forma estándar

- Restricciones funcionales (o tecnológicas) → ecuaciones
- Lados derechos → parámetros no negativos
- Variables → no negativas

Por convención:

- n: número de variables
- m: número de restricciones funcionales

$$\boxed{\begin{aligned} &\max \quad Z = \mathbf{cx} \\ &\text{st} \\ &\qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}}$$

Forma Estándar

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- Sistema de ecuaciones
  - *Si n=m**
    Si existe, hay una única solución
  - *Si n<m*
    Hay restricciones redundantes o el sistema no tiene solución
  - Si n>m
    Soluciones múltiples
    - *n-m**
      Grados de Libertad o número de variables libres. A *(n-m)* variables se les da un valor arbitrario, típicamente cero y las otras *m* variables se encuentran resolviendo el Sistema de ecuaciones *(mxm)*.

*m: número de ecuaciones linealmente independientes

Modelo General de PL

Coeficientes de la función objetivo

Maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

Recursos

Coeficientes Tecnológicos

Estandarización

Conversión de desigualdades a ecuaciones

- Las restricciones ≤ se convierten en igualdad sumando una **variable de holgura** h_i en la restricción y agregando una restricción de no negatividad $h_i \geq 0$.
- Las restricciones ≥ se convierten en igualdad restando una **variable de exceso** e_i y agregando una restricción de no negatividad $e_i \geq 0$.

En una restricción de recursos, donde el lado derecho representa la capacidad de un recurso (restricción con ≥) :
h_i representa la cantidad de recurso no utilizado.

En una restricción donde el lado derecho representa un nivel de actividad mínima (restricción con ≥) :
e_i representa la cantidad de de actividad adicional realizada.

Estandarización

Conversión de lados derechos no negativos

- Si es una ecuación → Se multiplica toda la ecuación por (-1).
- Si es una desigualdad → Se multiplica la desigualdad por (-1) sin olvidar el cambio de signo de la desigualdad:

Ejemplos:

$$3x_1 - 2x_3 \leq -10 \quad \times (-1) \quad = -3x_1 + 2x_3 \geq 10$$

Maximizar $X_1 + X_2$
s.a.
$$-X_1 + 2X_2 \geq -8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Maximizar $X_1 + X_2$
s.a.
$$X_1 - 2X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Maximizar $X_1 + X_2$
s.a.
$$X_1 - 2X_2 + h_1 = 10$$
$$X_1, X_2, h_1 \geq 0$$

Ejemplo 1:

- Convertir el siguiente modelo a su forma estándar.

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + h_1 = 50$$

$$x_1 + x_2 - e_1 = 25$$

$$x_1, x_2, h_1, e_1 \geq 0$$

Ejemplo 2: Forma estándar

Minimizar $z = 2x_1 - 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar $z = -2x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + h_1 = 4$$

$$x_1 - x_2 + h_2 = 6$$

$$x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0$$

Estandarización

Conversión variables a no negativas

- Cuando una variable es irrestricta (que puede tener signo positivo o negativo) se puede transformar como la diferencia entre dos variables positivas. X → (X⁺ – X⁻)

Ejemplo: Pasar a forma estándar el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } X_1 + X_2$$

s. a.

$$X_1 + 10X_2 \leq 8$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 = (X_2^+ - X_2^-)$$
$$X_2^+, X_2^- \geq 0$$

Transformación de X_2

Restricción tácita:
X_2 irrestricta

$$\text{Maximizar } X_1 + (X_2^+ - X_2^-)$$

s. a.

$$X_1 + 10(X_2^+ - X_2^-) + h_1 = 8$$

$$3X_1 + 2(X_2^+ - X_2^-) - e_1 = 10$$

$$X_1, X_2^+, X_2^-, h_1, e_1 \geq 0$$

Ejercicios de práctica

$$\min\ x1 + x2 - x3$$
$$-x1 + 3x2 - x3 \leq 300 \quad (1)$$
$$x1 - x2 + x3 \leq -100 \quad (2)$$
$$-x1 + x3 \geq -60 \quad (3)$$
$$-x1 - x2 - x3 \geq 0 \quad (4)$$
$$x1, x2 \geq 0 \quad (5)$$
$$x3 \text{ irrestricta}$$

Este problema tiene:

- Desigualdades
- Variables irrestrictas
- Lados derechos negativos

Estandarización

Restricciones con valor absoluto en el lado izquierdo

- Si una restricción tiene valor absoluto en el lado derecho ($|f(x)| \leq b$), esta se puede transformar como dos desigualdades una con signo positivo del lado derecho ($f(x) \leq b$) y otra con signo negativo ($-f(x) \leq b$) .
- Ejemplo:

$$X_1 + X_2$$

$$|X_1 + 2X_2| \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Maximizar $X_1 + X_2$

s.a.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ -X_1 - 2X_2 &\leq 10 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximizar $X_1 + X_2$

s.a.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + h_1 \quad &= 10 \\ -X_1 - 2X_2 \quad + h_2 &= 10 \\ X_1, X_2, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Operaciones con matrices

- La matriz dimensión de una matriz se identifica como $r\ x\ c$, donde r es el número de renglones y c el número de columnas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -7 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & -8 & 2 & 7 \end{pmatrix}_{3x4}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

Repaso de Algebra Lineal: Operaciones matriciales

Sumas y restas

- Para sumar y restar dos matrices, deben tener la misma dimensión

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 \\ -1+2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dimensiones: 2x2 2x2 2x2 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3-3 \\ -1-2 & 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & +5 \end{pmatrix}$$

2x2 2x2 2x2 2x2

Multiplicación de matrices

- Para multiplicar dos matrices o vectores, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda.
- El resultado obtenido de la operación genera una matriz con dimensiones iguales al número de renglones de la primera matriz por el número de columnas de la segunda.

Sea:

$A\ [m \times n],$

$B\ [n \times p]\ y$

$C[p \times m]$

$AB\ es\ [m \times p]$

$BA\ no\ está\ definida$

$CA\ es\ [p \times m]$

Multiplicación de vectores y matrices

Para multiplicar un vector y una matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$$

1x2 2x1 1x1

Para multiplicar un vector y una matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + be & ad + bf \end{bmatrix}$$

1x2 2x2 1x2

Para multiplicar dos matices:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

2x2 2x2 2x2

Ejercicios

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 22 \\ 31 & 23 \end{bmatrix}$$