# الفصل الثاني: السلاسل الزمنية

## أولا:التنبؤ

تعريف: تنتمي السلاسل الزمنية إلى عائلة المتغيرات العشوائي:

$$(X_t, t\epsilon\Theta)$$

حيث يمثل $\Theta$ فضاء الزمن، يمكن لهذا الزمن أن يكون منقطع $(\Theta\epsilon N)$ أو مستمر $(\Theta)$،

من أجل كل $t$ قد يكون $X$ أحادي البعد $(X_t\epsilon R)$ أو متعدد الأبعاد $(X_t\epsilon R^d \text{ , } d > 1)$.

وهي عبارة عن متتالية أو تتابع لمشاهدات **منتظمة**[1] في فضاء الزمن:

$$X_1, X_2, X_3, \dots X_t, X_{t+1} \dots X_T$$

قد يكون فضاء الزمن عبارة عن سنة، فصل، شهر، الأسبوع أو اليوم.....

## وصف السلاسل الزمنية:

تعتبر السلسلة الزمنية $(X_t, t\epsilon T)$ توليفة لمركبات أساسية مختلفة وهي :

- مركبة الاتجاه العام $(Z_t)$:تمثل التوجه أو التطور للسلسلة على المدى الطويل، والذي يمثل التغير المتوسط للسلسلة؛
- الموسمية $(S_t)$:تمثل ظواهر تتكرر على فترات منتظمة من الزمن (دورية)، على سبيل المثال الفصول الأربعة للسنة)؛
- الباقي $(\varepsilon_t)$: الضجيج أو الصخب وهي عبارة عن تذبذبات أو تقلبات غير منتظمة ضعيفة الشدة ذات طبيعة عشوائية لذا تسمى أيضا بالعشوائي؛
- الحوادث العرضية: مثل الظروف الجوية الاستثنائية، الإضرابات والانهيارات المالية؛
- المركبات الدورية: لها صلة بالمناخ والاقتصاد مثل مراحل الانكماش أو الانتعاش الاقتصادي وهي ظواهر تتكرر على فترات غير متساوية وأطول على خلاف المركبة الموسمية ،ومن دون معلومات واضحة لا نستطيع أن نفرق بينها وبين مركبة الاتجاه العام.

نجد أن أغلب الطرق المستخدمة تركز على ثلاثة مركبات أساسية وهي $S_t$ ,$Z_t$, $\varepsilon_t$ ،حيث تكون المركبة العرضية ضمن المركبة العشوائية والمركبة الدورية ضمن مركبة الاتجاه العام.

يكون المغزى من استخدام السلاسل الزمنية:

- تحليل ،وصف أو شرح الظاهرة؛
- أداة مراقبة (مثال: تسيير المخزون)؛

[1] السلاسل الزمنية المكونة من مشاهدات غير منتظمة في الزمن تخضع لطرق معقدة تخرج عن اطار هذا الفصل.

- التنبؤ: نحاول معرفة السلوك القادم أو المستقبلي لـ$y_{t+h}$ حيث $h=1, 2,...H$، ويسمى $h$ بأفق التنبؤ ؛
- الكشف عن التمزقات أي التغيير في السياسة الاقتصادية؛

## عملية التنبؤ:

يحتاج الأنسان لمعرفة المستقبل حتى ينظم نفسه أو لكي يتفادى الوقوع في مشكلة ما، فعلى سبيل المثال:

- ماذا سيرتدي إذا علم بحالة طقس اليوم الآتي؛
- كم يشتري من الخبز لمواجهة الاستهلاك المحتمل للعائلة؛
- ما هو عدد العمال الذي يجب أن توظفهم مؤسسة ما لمواجهة الطلب على منتوجاتها؛
- ما هي كمية المواد الأولية الواجب اقتناؤها لتلبية حاجيات العملية الإنتاجية؛
- التنبؤ بأسعار البترول لإعداد الميزانية المالية.

تجدر الإشارة أن هذه التنبؤات يمكن أن تكون كيفية؛ سيكون الطقس غدا باردا أو سترتفع مبيعات الشركة في الشهر القادم، أو كمية ستصل درجة الحرارة 30° أو سترتفع مبيعات الشركة بـ% 10.

## أفاق التنبؤ:

يحدد أفق التنبؤ $h$ البعد الزمني لفترة التنبؤ ،على سبيل المثال معرفة درجة الحرارة ليوم الغد أو مبيعات مؤسسة خلال الشهر القادم يمثل تنبؤات على المدى القصير ،في المقابل عند محاولة معرفة الطلب خلال السنوات الخمسة القادمة (لتحديد قرارات الاستثمار مثلا) ،فهذا يمثل تنبؤات على المدى الطويل وهناك تنبؤات متوسطة المدى تحدد فتراتها بين السنة والسنتين.

## أنواع طرق التنبؤ:

هناك نوعين من طرق التنبؤ وهما:

- الطرق الداخلية: أو الطرق التفسيرية نستخدم في هذه الحالة على غرار $y$ ،متغير $x$ أو أكثر ،على سبيل المثال نموذج لعدد المطريات المباعة مرتبط بسعر البيع $x_1$ وكمية الأمطار $x_2$.[2]
- الطرق الخارجية: أو الطرق الاستقرائية والتي تعتمد فقط على ماضي المتغير $y$ ،ونذكر على سبيل المثال نماذج $ARMA$ والتمهيد بطريقة المتوسطات المتحركة ومنحنيات النمو....
  - منحنيات النمو: وتنقسم بدورها إلى عدة أشكال نذكر:
    - المدى العام الخطي من الشكل $Z = \alpha + \beta t + \epsilon$، يمثل $t$ متغير الزمن ويلعب دور المتغير المفسر ،أما $\alpha$ و $\beta$ فيمثلان معالم النموذج التي يجب تقديرها وليس

---

[2] في حالة متغير مفسر واحد فيسمى بنموذج الانحدار البسيط والذي تم التطرق له في الفصل الأول، أما نموذج بمتغيرين مفسرين أو أكثر فيمثل النموذج المتعدد.

حسابها و $\varepsilon$ يمثل متغير عشوائي غير ملاحظ (غير قابل للقياس) ،يدرج في النموذج بسبب الطبيعة العشوائية لهذا الأخير.

نحدد الاطار النظري المتمثل في نظرية التقدير[3]،القيمة المتوقعة (التنبؤ) لـ$y$ في الزمن $t+1$ ترتكز على استقراء هذا المدى تحت فرضية ثبات قيم $\alpha$ و $\beta$:

$$\hat{Z}_{T+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(t+1)$$

قد يكون المدى العام غير خطي:

أسي: $Z = \alpha\beta^t + \epsilon$

تربيعي: $Z = \alpha + \beta t + \delta t^2 + \epsilon$

**<u>مفهوم النموذج والنمذجة:</u>** يعتبر النموذج صورة مبسطة لحقيقة جد معقدة ،يهدف إلى ترجمة ميكانزيم عمل الظاهرة المدروسة ومن ثم فهمها، ويمكن أن يكون نموذج أحسن من غيره من حيث قدرته على وصف الواقع، لهذا يطرح سؤال كيف يمكن قياس هذه النوعية وكيف يمكن تشخيص النموذج. نميز بين نوعين من النماذج، النماذج الجبرية (الحتمية) والنماذج العشوائي.

- ❖ **<u>النماذج الجبرية:</u>** تنتمي النماذج الجبرية إلى طرق الإحصاء الوصفي والتي لا تستخدم الحسابات الاحتمالية بشكل رئيسي بل تفترض أن قيمة السلسلة في اللحظة $t$ تعطى بدلالة الزمن $t$ و متغير ممركز $\varepsilon_t$ يمثل أخطاء الفرق بين الواقع والنموذج المقترح.

$$X_t = f(t, \varepsilon_t)$$

$\varepsilon_t$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع ونكتب $iid$ ،وهناك نموذجين مستخدمين هما:

- **<u>النموذج التجميعي:</u>**

يمثل "النموذج الكلاسيكي للتفكيك" في النماذج المتكيفة (Modèles d'ajustements) ،تكتب المتغير $X_t$ في شكل مجموع ثلاثة حدود وهي:

$$\mathrm{X}_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t$$

تمثل $Z_t$ مركبة الاتجاه العام (جبرية)، تمثل $S_t$ المركبة الموسمية (جبرية)، $\varepsilon_t$ مركبات عشوائية (أخطاء في النموذج).

- **<u>النموذج الجدائي:</u>**

$$\mathrm{X}_t = C_t(1 + S_t)(1 + \varepsilon_t)$$

ويستخدم هذا التعديل في نماذج $ARCH$.

- ❖ **<u>النماذج العشوائية:</u>** تشبه إلى حد ما النماذج الجبرية إلا أن الأخطاء $\varepsilon_t$ ليست $iid$ ولكن لها هيكل ارتباط غير معدوم ويعطى بدلالة القيم السابقة وحد الخطأ $\eta_t$:

$$\varepsilon_t = g(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots \eta_t)$$

$\eta_t$ متغير عشوائي ذو متوسط معدوم وغير مرتبطة يسمى ضجيج أبيض ،ونذكر بعض الأمثلة عن هذه النماذج (*SARIMA, ARIMA, ARMA, MA, AR,…..*).

---

[3] نظرية التقدير تمثل الأساس النظري لجل الطرق الإحصائية ،كالمقدرات ،خصائص المقدرات ،التقدير النقطي ،التقدير المجالي ،القوانين الاحتمالية ....الخ.

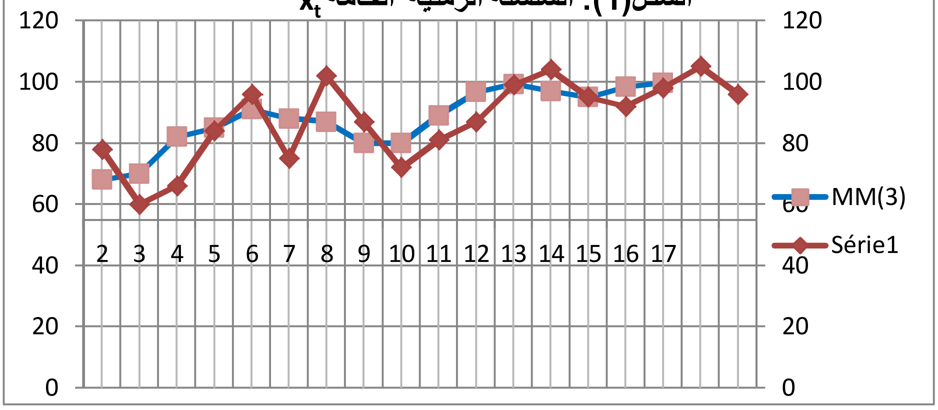
تطرقنا في الفصل السابق ولو بشكل مختصر إلى طريقة الانحدار البسيط (نوع من الطرق التفسيرية)، وسنعتمد في هذا الفصل على بعض أنواع الطرق الاستقرائية مثل المتوسطات المتحركة والتمهيد الأسي.

➢ **المتوسطات المتحركة:** نرمز للمتوسطات المتحركة بالرمز *MM(k)* حيث تمثل *k* درجة المتوسطات المتحركة، نستطيع اختيار قيمة *k* دون قيود مسبقة، لكن كما سنبينه في هذا المثال أن قيمة هذا الأخير مرتبطة بالفاصل الزمني.

يمثل الجدول التالي مبيعات مؤسسة اقتصادية ما خلال فترات زمنية منتظمة (قد تكون هذه الفترات عبارة عن يوم، شهر، فصل...)

| الزمن $(t)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_t$ | 78 | 60 | 66 | 84 | 96 | 75 | 102 | 87 | 72 |
| الزمن $(t)$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| $X_t$ | 81 | 87 | 99 | 104 | 95 | 92 | 98 | 105 | 96 |

**جدول(1): معطيات وهمية لمبيعات مؤسسة ما**



**الشكل(1): السلسلة الزمنية الخامة $x_t$**

- متوسطات متحركة من الدرجة الثانية MM(2)

$$x'_? = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{78 + 60}{2} = 69$$
$$x'_? = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = \frac{60 + 66}{2} = 63$$

- متوسطات متحركة من الدرجة الثالثة MM(3)

$$x'_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{78 + 60 + 66}{3} = 68$$
$$x'_3 = \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4) = \frac{60 + 66 + 84}{3} = 70$$

الحد العام لـMM(3) هو: $x' = \frac{1}{3}(x_{t-1} + x_t + x_{t+1})$ ............(1)

- متوسطات متحركة من الدرجة الرابعة MM(4)

$$x'_? = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{78 + 60 + 66 + 84}{4} = 72$$
$$x'_? = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{60 + 66 + 84 + 96}{4} = 76.5$$

- متوسطات متحركة من الدرجة الخامسة MM(5)

$$x'_3=\frac{1}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=\frac{78+60+66+84+96}{5}=76.8$$
$$x'_4=\frac{1}{5}(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=\frac{60+66+84+96+75}{5}=76.2$$

الحد العام لـ$MM(5)$ هو:

$$(2)..........\ x'_t=\frac{1}{5}(x_{t-2}+x_{t-1}+x_t+x_{t+1}+x_{t+2})$$

<table>
<tr><th>T</th><th>X<sub>t</sub></th><th>MM(2)</th><th>MM(2)</th><th>MM(3)</th><th>MM(4)</th><th>MM(2)</th><th>MM(5)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>78</td><td rowspan="18">69<br>63<br>75<br>90<br>85.5<br>88.5<br>94.5<br>79.5<br>76.5<br>84<br>93<br>101.5<br>99.5<br>93.5<br>95<br>101.5<br>101.5</td><td>--</td><td>--</td><td rowspan="18">72<br>76.5<br>80.25<br>89.25<br>90<br>84<br>85.5<br>81.75<br>84.75<br>92.75<br>96.25<br>97.5<br>97.25<br>97.5<br>97.75</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td>2</td><td>60</td><td>66</td><td>68</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td>3</td><td>66</td><td>69</td><td>70</td><td>74.25</td><td>76.8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>84</td><td>82.5</td><td>82</td><td>78.375</td><td>76.2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>96</td><td>87.75</td><td>85</td><td>84.75</td><td>84.6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>75</td><td>87</td><td>91</td><td>89.625</td><td>88.8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>102</td><td>91.5</td><td>88</td><td>87</td><td>86.4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>87</td><td>87</td><td>87</td><td>84.75</td><td>83.4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>72</td><td>78</td><td>80</td><td>83.625</td><td>85.8</td></tr>
<tr><td>10</td><td>81</td><td>80.25</td><td>80</td><td>83.25</td><td>85.2</td></tr>
<tr><td>11</td><td>87</td><td>88.5</td><td>89</td><td>88.75</td><td>88.6</td></tr>
<tr><td>12</td><td>99</td><td>97.25</td><td>96.667</td><td>94.5</td><td>93.2</td></tr>
<tr><td>13</td><td>104</td><td>100.5</td><td>99.333</td><td>96.875</td><td>95.4</td></tr>
<tr><td>14</td><td>95</td><td>96.5</td><td>97</td><td>97.375</td><td>97.6</td></tr>
<tr><td>15</td><td>92</td><td>94.25</td><td>95</td><td>97.375</td><td>98.8</td></tr>
<tr><td>16</td><td>98</td><td>98.25</td><td>98.333</td><td>97.625</td><td>97.2</td></tr>
<tr><td>17</td><td>105</td><td>101</td><td>99.667</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td>18</td><td>96</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td></tr>
</table>

**جدول(*2*): المتوسطات المتحركة**

- ماذا يجب أن نلاحظ: هناك ملاحظة عامة أنه مهما كانت قيمة $k$ فإن المتوسطات المتحركة تؤدي دوما إلى فقدان $k$-1 مشاهدة ،حيث انطلقنا من سلسلة خامة مكونة من 18 مشاهدة ،عند تطبيق MM(2) تبقى لدينا فقط 17 مشاهدة ($k$=2) ، عند تطبيق MM(3) تبقى لدينا فقط 16 مشاهدة ($k$=3) واحدة في الأعلى والثانية في الأسفل وهكذا....،أنظر الجدول(1)؛
- إذا كان $k$ فردي يكون الأمر أسهل، توزع المشاهدات المفقودة بالتناظر من الأسفل والأعلى (MM(5) نفقد مشاهدتين من الأعلى ومشاهدتين من الأسفل)؛
- إذا كان $k$ فردي نضع أول قيمة للمتوسطات المتحركة في الرتبة $x_{(k+1)/2}$ (MM(5) بدأنا بالقيمة $x_3$ لأن 2/(5+1)=3)؛

زوجي، يطرح مشكل في موقع قيمة المتوسطات المتحركة $k$هناك مفارقة عندما يكون تقع وسط القيمتين 78 و60 وهذا غير ممكن ولم MM(2) في ($x_?$=69)،فمثلا القيمة الأولى *6 و606* تقع وسط القيمتين MM(4) في ($x_?$=72)نعطيها أي ترتيب ،وأيضا القيمة الأولى ،وحتى نتجاوز هذا المشكل فيجب (?) وهذا غير ممكن ولم نعطيها أيضا أي ترتيب وذلك لتصحيح موقع MM(k)تطبيق متوسطات متحركة من الدرجة الثانية على السلسلة القيم السابقة ،وننبه إلى أن هذه العملية الإضافية تكلف فقدان مشاهدة إضافية بسبب

وهي $MM_c(k)$ الإضافية. تسمى في هذه الحالة متوسطات متحركة ممركزة ونرمز MM(2) متوسطات متحركة من الدرجة الثانية مطبقة على متوسطات متحركة من الدرجة $k$.

ملاحظة: هناك معادلة تلخص المرحلتين السابقتين معا في حالة MM(4):

$$(3)\ldots\ldots\ldots x'_t = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\ x_{t-2}\right) + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\ x_{t+2}\right)\right]$$

$$t = (k-1)\,, \ldots\ldots T - \left(\frac{k}{2}\right) \qquad /\ T = 18$$

مثال القيمة $x_7$ عند حساب المتوسطات المتحركة MM(4) نجد:

$$x'_7 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\ x_{7-2}\right) + x_{7-1} + x_7 + x_{7+1} + \left(\frac{1}{2}\ x_{7+2}\right)\right]$$

$$x'_7 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\ 96\right) + 75 + 102 + 87 + \left(\frac{1}{2}\ 72\right)\right] = 87$$

أما في حالة MM(12):

$$x'_t = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{2}\ x_{t-6}\right) + x_{t-5} + x_{t-4} + x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + x_{t+3} + x_{t+4} + x_{t+5} + \left(\frac{1}{2}\ x_{t+6}\right)\right]$$

في حالة $k=2m$ أي $k$ زوجي فإن MM(k)

$$x'_t = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{2}\ x_{t-m}\right) + x_{t-m+1} + \cdots + x_t + \cdots + x_{t+m-1} + \left(\frac{1}{2}\ x_{t+m}\right)\right]$$

في حالة $k=2m+1$ أي $k$ فردي فإن MM(k)

$$x'_t = \frac{1}{k}\left[x_{t-m} + x_{t-m+1} + \cdots + x_t + \cdots + x_{t+m-1} + x_{t+m}\right]$$

## ما دور المتوسطات المتحركة ؟

تصنف طريقة المتوسطات المتحركة ضمن طرق تمهيد السلاسل الزمنية ،فيمكن أن نلاحظ في الشكل(1): السلسلة الزمنية الخامة $x_t$ وهذا بالنسبة لكل السلاسل الزمنية ،أن هذه الأخيرة تكون في شكل قمم ومنخفضات وتشبه رسم نبضات القلب ،فباختيار قيمة ملائمة لـ$k$ يمكن حذف تلك القمم والمنخفضات للحصول على سلسلة ممهدة أي حذف المركبة الموسمية ،كما تؤدي إلى التقليل من حدة المتغيرات العرضية.

ونحصل على سلسلت جديدة لا تحتوي على مركبات موسمية وتكون المتغيرة العشوائية ضعيفة الشدة كما هو مبين في الشكل(1) المنحى باللون بالأزرق.

ملاحظة: نأخذ قيمة $k$ تساوي 4 بالنسبة للمعطيات الفصلية و 12 بالنسبة للمعطيات الشهرية.

## طريقة تفكيك السلاسل الزمنية:

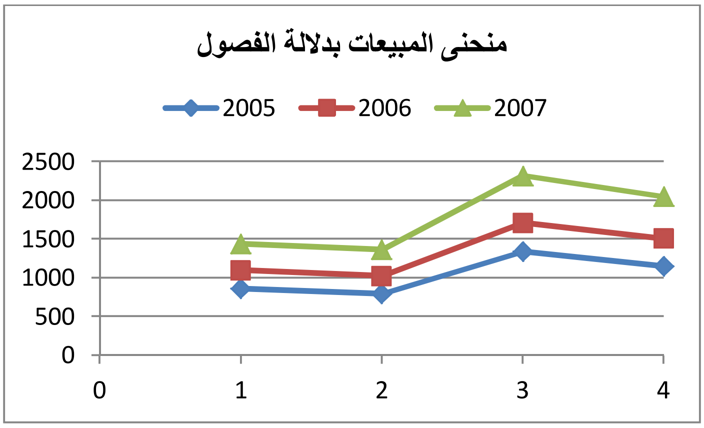
قبل البدء في تفكيك السلسلة يجب تشخيص نوعية النموذج ثم نقوم بعزل مركبات السلسلة بشكل فردي وذلك باتباع المراحل التالية ومن خلال المثال التالي سنبين كل مرحلة.

1. **تحديد نوع النموذج:** قبل أي عملية نحاول معرفة إذا كانت التغيرات الموسمية تضاف إلى متغيرة الاتجاه العام (نموذج تجميعي) أم تكون متناسبة طرديا معها (نموذج جدائي) ،من أجل معرفة ذلك نستند إما على الطريقة البيانية أو الطريقة التحليلية.

| السنة | رقم الفصل | المبيعات |
|---|---|---|
| 2005 | I | 860 |
| | II | 794 |
| | III | 1338 |
| | VI | 1148 |
| 2006 | I | 1096 |
| | II | 1021 |
| | III | 1705 |
| | VI | 1505 |
| 2007 | I | 1436 |
| | II | 1363 |
| | III | 2319 |
| | VI | 2047 |

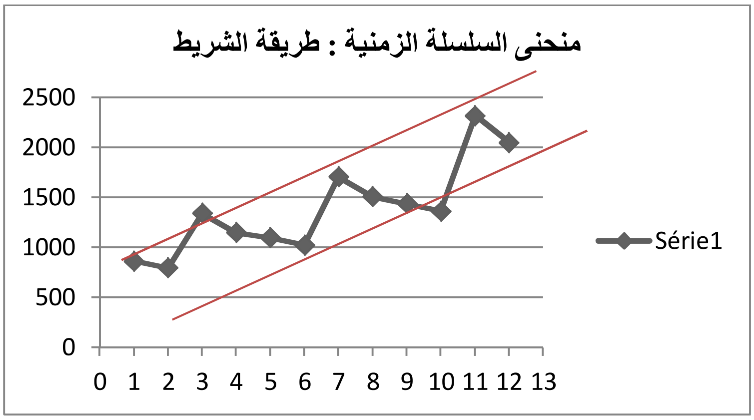
2. **تحديد نوع النموذج:** قبل أي عملية نحاول معرفة إذا كانت التغيرات الموسمية تضاف إلى متغيرة الاتجاه العام (نموذج تجميعي) أم تكون متناسبة طرديا معها (نموذج جدائي) ،من أجل معرفة ذلك نستند إما على الطريقة البيانية أو الطريقة التحليلية.

- الطريقة البيانية: نقوم برسم على نفس المنحني مختلف المواسم (الفصول أو الأشهر...)، إذا كانت هذه المنحنيات متوازية فهو نموذج تجميعي وإن لم تكن متوازية فهو نموذج جدائي؛




نلاحظ أن المنحنيات متوازية فهو نموذج تجميعي (يمكن الاعتماد على هذا المنحنى لإثبات أن السلسلة تحتوي على مركبات موسمية.

- طريقة الشريط: هي أيضا طريقة بيانية، بعد تمثيل المشاهدات في رسم بياني على كامل الفترة ،نرسم خط مستقيم يمر على التوالي على الحدود الدنيا والعظمى للمنحنى والتي تمثل المواسم ،فإذا كان الشريطين متوازيين فالنموذج تجميعي وإن لم يكن متوازي فهو نموذج جدائي؛




- الطريقة التحليلية: نحسب المتوسطات $\bar{X}$ والانحرافات المعيارية $\delta$ لكل موسم ثم نحسب معادلة الانحدار $\delta = a\bar{X} + b$ بطريقة المربعات الصغرى إذا كانت $a=0$ فهو نموذج تجميعي وإذا لم يكن يساوي الصفر فهو نموذج جدائي.

| الفترة | $\bar{X}$ | $\delta$ | $\delta.\bar{X}$ | $\bar{X}^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2005 | 1035 | 219.82 | 227513.7 | 1071225 |
| 2006 | 1331.75 | 283.49 | 377537.8 | 1773558.063 |
| 2007 | 1791.25 | 404.21 | 724041.2 | 3208576.563 |
| المجموع | 4158 | 907.52 | 1329092.67 | 6053359.625 |

$$\hat{a} = \frac{\sum \delta\bar{X} - n\bar{\delta}\bar{\bar{X}}}{\sum \bar{X}^2 - n\bar{\bar{X}}^2} = \frac{1329092.67 - 3\left(\frac{907.52}{3}\right)\left(\frac{4158}{3}\right)}{6053359.625 - 3\left(\frac{4158}{3}\right)^2} = 0.245 \sim 0$$

3. تمهيد السلسلة الزمنية باختيار متوسطات متحركة ذات درجة ملاءمة (حسب دورة السلسلة كانت شهرية أم فصلية) لنحصل على سلسلة زمنية طولها $T\text{-}2m$ (تفقد $04$ مشاهدات).
4. تقدير المركبة الموسمية وذلك باتباع المراحل التالية:

نحذف $MM_c(4)$ من السلسلة الخامة في حالة نموذج تجميعي $S_t = X_t - MMc(4)$

نقسم السلسلة الخامة على $MM_c(4)$ حالة نموذج جدائي $S_t = X_t / MMc(4)$

ثم نقدر المعاملات الموسمية $\tilde{c}_j$.

المركبات الموسمية عبارة عن ظاهرة تتكرر على فترات زمنية متعاقبة، مدى هذه الفترات ثابت ويسمى بالدورة ونرمز له بـ $P$، نفترض أيضا أن المركبات الموسمية ثابتة على كل دورة أي $\forall t$, $S_{t+P}=S_t$ ($S_1=S_5$) للموسمية $P$ معامل يكون أثرها في المتوسط معدوم(مبدأ المحافظة على المسافات) $\sum_{i=1}^{P} c_i = 0$.

| $T$ | $X_t$ | $MM_c(4)$ | $S_t= X_t- MM_c(4)$ | $\hat{S}_j$ | $X_{Cvs}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 860 | -- | -- | -97.453 | 957.453 |
| 2 | 794 | -- | -- | -288.953 | 1082.953 |
| 3 | 1338 | 1064.5 | 273.5 | 326.484 | 1011.516 |
| 4 | 1148 | 1122.375 | 25.625 | 59.921875 | 1088.07813 |
| 5 | 1096 | 1196.625 | -100.625 | -97.453 | 1193.453 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1021 | 1287.125 | -266.125 | -288.953 | 1309.953 |
| 7 | 1705 | 1374.25 | 330.75 | 326.484 | 1378.516 |
| 8 | 1505 | 1459.5 | 45.5 | 59.921875 | 1445.07813 |
| 9 | 1436 | 1579 | -143 | -97.453 | 1533.453 |
| 10 | 1363 | 1723.5 | -360.5 | -288.953 | 1651.953 |
| 11 | 2319 | -- | -- | 326.484 | 1992.516 |
| 12 | 2047 | -- | -- | 59.921875 | 1987.07813 |

يستحسن صياغة الجدول السابق في شكل أفقي، ثم نحسب المتوسط الحسابي بالنسبة للفترات (تمثل الفترة في أغلب الأحيان السنة) ثم نقوم بعملية التصحيح.

| | *I* | *II* | *III* | *IV* | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2005 | --- | --- | 273.5 | 25.625 | |
| 2006 | -100.625 | -266.125 | 330.75 | 45.5 | |
| 2007 | -143 | -360.5 | --- | --- | |
| $\hat{c}_j$ | -121.8125 | -313.3125 | 302.125 | 35.5625 | $c=\Sigma$=-97.4375 |
| $S_j(final)=\hat{\hat{c}}_j$ | -97.453125 | -288.953125 | 326.484375 | 59.921875 | $c$=0 |

$$\hat{c}_1=\frac{-100.625+-143}{2}=-121.8125\ ;\ldots\ldots\hat{c}_3=\frac{273.5+45.5}{2}=35.5625$$

$$\sum_{j=1}^{P}\tilde{c}_j=-97.4375\neq 0$$

ملاحظة: في حالة نموذج جدائي ينص مبدأ المحافظة على المساحات أن مجموع المعاملات الموسمية يساوي 4 لما $P=4$ وتساوي 12لما تساوي $P=12$ وإذ لم يتحقق هذا نصحح حسب الحالة:

نموذج جدائي: $\hat{\hat{c}}_j=\tilde{c}_j/\left(\frac{\sum_{j=1}^{P}\tilde{c}_j}{P}\right)$      نموذج تجميعي: $\hat{\hat{c}}_j=\tilde{c}_j-\frac{\sum_{j=1}^{P}\tilde{c}_j}{P}$,

### 5. تقدير مركبة الاتجاه العام:

- نقوم بحساب السلسلة المصححة من المركبات الموسمية $X_{cvs}$ من خلال حذف المعاملات الموسمية من السلسلة الخامة في حالة نموذج تجميعي أو قسمة السلسلة الخامة على المركبات الموسمية في حالة نموذج جدائي.

نموذج جدائي $X_{cvs}=X_t/\hat{S}_j$      نموذج تجميعي $X_{cvs}=X_t-\hat{S}_j$

- نقوم بتقدير مركبات الاتجاه العام باستخدام طريقة المربعات الصغرى التي تم التطرق لها في الفصل السابق وذلك بتقدير معالم النموذج التالي:

$$X_t=\alpha+\beta t+\varepsilon_t$$

| *T* | $X_{Cvs}$ | $X_{Cvs}.t$ | $T^2$ | $X_{Cvs}^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 957.453 | 957.453 | 1 | 916716.247 |
| 2 | 1082.953 | 2165.906 | 4 | 1172787.2 |
| 3 | 1011.516 | 3034.548 | 9 | 1023164.62 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1088.07813 | 4352.31252 | 16 | 1183914.02 |
| 5 | 1193.453 | 5967.265 | 25 | 1424330.06 |
| 6 | 1309.953 | 7859.718 | 36 | 1715976.86 |
| 7 | 1378.516 | 9649.612 | 49 | 1900306.36 |
| 8 | 1445.07813 | 11560.625 | 64 | 2088250.8 |
| 9 | 1533.453 | 13801.077 | 81 | 2351478.1 |
| 10 | 1651.953 | 16519.53 | 100 | 2728948.71 |
| 11 | 1992.516 | 21917.676 | 121 | 3970120.01 |
| 12 | 1987.07813 | 23844.9376 | 144 | 3948479.49 |
| المجموع | | | | |
| 78 | 16632.0004 | 121630.66 | 650 | 24424472.5 |

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(X_{cvs})(t)-n\overline{X_{cvs}}\bar{t}}{\sum t^2-n(\bar{t})^2}=\frac{121630.66-12.\left(\frac{16632.0004}{12}\right).\left(\frac{78}{12}\right)}{650-12.\left(\frac{650}{12}\right)^2}=\frac{13522.66}{143}=94.564$$

$$\hat{\alpha}=\overline{X_{cvs}}-\hat{\beta}\bar{t}=\left(\frac{16632.0004}{12}\right)-94.564\left(\frac{78}{12}\right)=771.334$$

$$\hat{X}_T(h)=771.334+94.564t$$

حساب معامل الارتباط للتعرف على قيمة النموذج المقدر:

$$r_{X_{CVS},t}=\frac{cov(X_{cvs},t)}{\delta_{X_{cvs}}\delta_t}=\hat{\beta}\sqrt{\frac{\sum t^2-n\bar{t}^2}{\sum {X_{cvs}}^2-n\overline{X}_{cvs}^{\,2}}}=94.564\sqrt{\frac{143}{1372519.414}}=0.9652$$

$$R^2=\left(r_{X_{CVS},t}\right)^2=(0.9652)^2=0.9317$$

بما أن الانحدار جيد فنستطيع القيام بعملية التنبؤ

**6. التنبؤ بالقيم المستقبلية:**

$\hat{X}_T(1)=(771.334+94.564t)+\hat{S}_j$ نموذج تجميعي

$\hat{X}_T(1)=(771.334+94.564t).\hat{S}_j$ نموذج جدائي

مثال: القيمة المستقبلية للفصل الأول من سنة 2008:

$$\hat{X}_{13}(1)=\left(771.334+94.564.(13)\right)+\hat{S}_1=1903.21$$

التمثيل البياني: