



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Departamento de Computação

Métodos Numéricos II

Relatório do Projeto

Resolução de Problemas de Valores Iniciais

Bruno Henrique- 344072

Caio Viktor- 354042

Lucas Falcão- 354059

Matheus Mayron- 354084

Fortaleza, 6 de Junho de 2015

ÍNDICE

1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

1.1. MÉTODOS PROPOSTOS

1.2. DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA

2. ATIVIDADE DOS MEMBROS

3. RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1. RESULTADOS

3.1.1 Resultado para o método de Euler

3.1.2 Resultado para método de Runge-Kutta

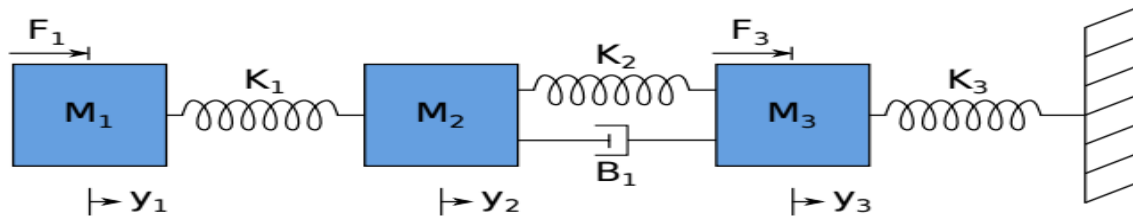
3.1.3 Resultado para método Preditor-Corretor de Adams de Terceira Ordem

3.1.4 Resultado para método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem

3.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema proposto consiste em um sistema massa-mola composto por três massas iguais ilustrado na figura abaixo. Os deslocamentos das três massas satisfazem as equações dadas:



Sistema massa-mola.

$$\begin{aligned} M_1 y_1'' + K_1 y_1 - K_1 y_2 &= F_1(t) \\ -K_1 y_1 + M_2 y_2'' + B_1 y_2' + (K_1 + K_2) y_2 - B_1 y_3' - K_2 y_3 &= 0 \\ -K_2 y_2 - B_1 y_2' + M_3 y_3'' + B_1 y_3' + (K_2 + K_3) y_3 &= F_3(t). \end{aligned}$$

As constantes e as condições iniciais são:

$$\begin{aligned} K_1 = K_2 = K_3 = 2 & \quad (\text{constantes das molas, } kgm/s^2) \\ M_1 = M_2 = M_3 = 2 & \quad (\text{massas, } Kg) \\ F_1(t) = 2, F_3(t) = 1 & \quad (\text{forças, } N) \\ B_1 = 0.5 & \quad (\text{coeficiente de amortecimento, } kg/s) \\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = y_3(0) = y_3'(0) = 0 & \quad (\text{condições iniciais}) \end{aligned}$$

O problema consiste em resolver as equações anteriores usando os métodos numéricos propostos para $0 \leq t \leq 20$ s.

1.1. MÉTODOS PROPOSTOS

Para resolver o problema de valor inicial, são propostos os seguintes Métodos Numéricos a serem implementados:

- Método Forward Euler;
- Método de Euler Modificado;
- Método Backward Euler;
- Método de Runge-Kutta de segunda ordem;
- Método de Runge-Kutta de terceira ordem;
- Método de Runge-Kutta de quarta ordem;
- Método Preditor-Corretor de Adams de Terceira Ordem;
- Método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem.

1.2. DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA

Para facilitar a visualização, iremos chamar a derivada de y_1 de z , a derivada de y_2 de w e a derivada de y_3 de x ; ou seja:

- $y_1' = z \Rightarrow y_1'' = z'$;
- $y_2' = w \Rightarrow y_2'' = w'$;
- $y_3' = x \Rightarrow y_3'' = x'$.

Nas equações dadas pelo problema, podemos isolar y_1'' , y_2'' e y_3'' e seus coeficientes, como mostrado a seguir:

- $M_1 y_1'' = F_1(t) - K_1 y_1 + K_1 y_1 + K_1 y_2$;
- $M_2 y_2'' = K_1 y_1 - B_1 y_2' - (K_1 + K_2) y_2 + B_1 y_3' + K_2 y_3$;
- $M_3 y_3'' = F_3(t) + K_2 y_2 + B_1 y_2' - B_1 y_3' - (K_2 + K_3) y_3$.

Passando os coeficientes de y_1'' , y_2'' e y_3'' dividindo, temos:

- $y_1'' = (F_1(t) - K_1 y_1 + K_1 y_1 + K_1 y_2)/M_1$;
- $y_2'' = (K_1 y_1 - B_1 y_2' - (K_1 + K_2) y_2 + B_1 y_3' + K_2 y_3)/M_2$;
- $y_3'' = (F_3(t) + K_2 y_2 + B_1 y_2' - B_1 y_3' - (K_2 + K_3) y_3)/M_3$. (II)

Substituindo as constantes das molas, massas, forças e coeficiente de amortecimento nas equações de (II), temos:

- $y_1'' = y_1 + y_2 - 1$;
- $y_2'' = y_1 - 0.25 y_2' - 2 y_2 + 0.25 y_3 + y_3$;
- $y_3'' = 0.5 + y_2 + 0.25 y_2' - 0.25 y_3' - 2 y_3$. (III)

Substituindo as equações de (I) nas equações de (III), temos:

- $z' = y_1 + y_2 - 1$;
- $w' = y_1 - 0.25w - 2y_2 + 0.25x + y_3$;
- $x' = 0.5 + y_2 + 0.25w - 0.25x - 2y_3$. (IV)

Dessa forma, temos em III equações que dão as derivadas segundas de y_1 , y_2 e y_3 .

2. ATIVIDADE DOS MEMBROS

- Bruno Henrique:
 - Método Preditor-Corretor de Adams de Terceira Ordem;
 - Método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem;
- Caio Viktor:
 - Método Forward Euler;
 - Método Backward Euler;
 - Animação;
 - Interface;
- Lucas Falcão
 - Método de Runge-Kutta de Terceira Ordem;
 - Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem;
- Matheus Mayron:
 - Método de Euler Modificado;
 - Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem;

3. RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

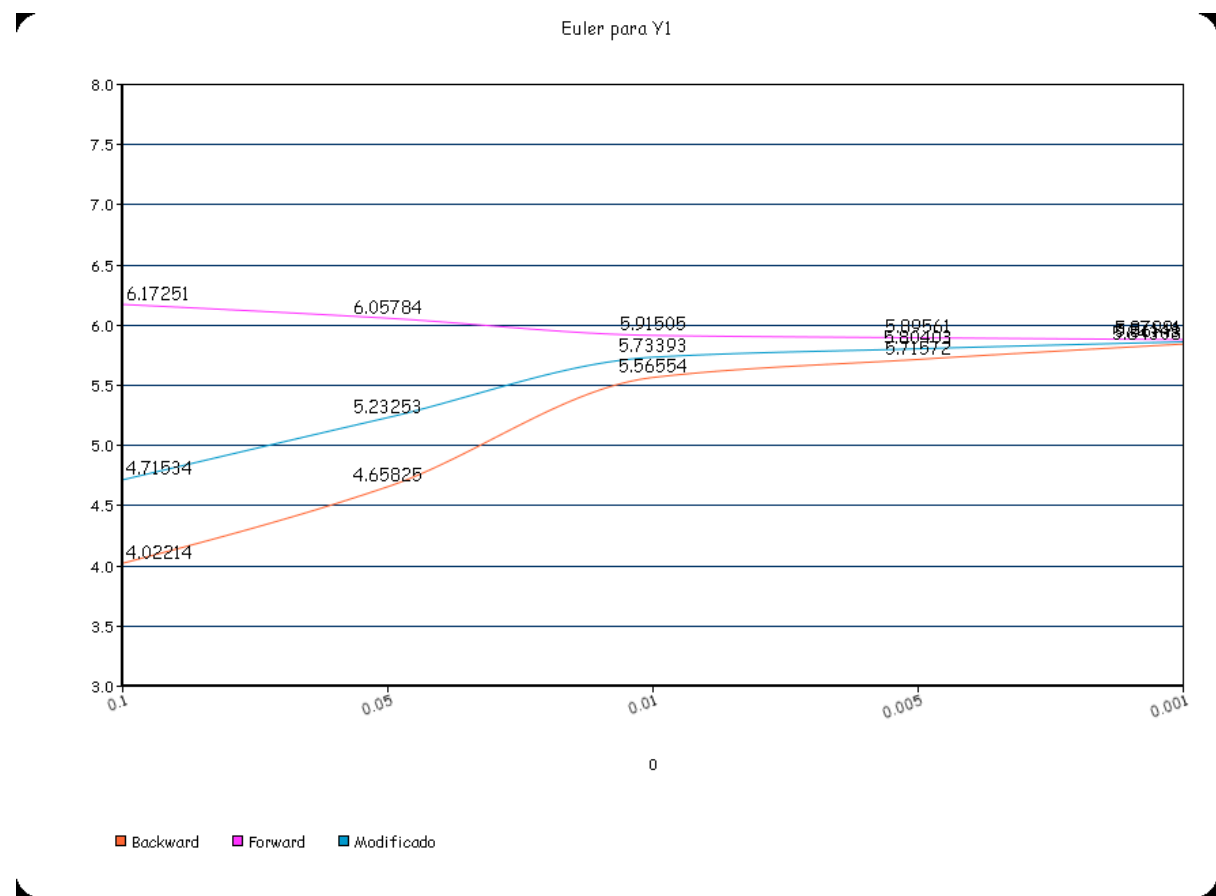
Utilizamos alguns valores diferentes de dt para analisar os métodos. Os valores utilizados para dt foram: 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001. Para cada método geramos um gráfico dos valores relacionados a apenas y_1 , isso porque a variação nos valores de y_2 e y_3 foi bem similar.

Euler					
Backward:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.84308	y2: 4.45437	y3: 2.68376	Tempo de execucao: 0.006 secs
Forward:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87991	y2: 4.48544	y3: 2.70264	Tempo de execucao: 0.005 secs
Modified:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.86143	y2: 4.46985	y3: 2.69317	Tempo de execucao: 0.01 secs
Runge-Kutta					
SegundaOrdem:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.85926	y2: 4.46751	y3: 2.69137	Tempo de execucao: 0.006 secs
TerceiraOrdem:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.85926	y2: 4.46751	y3: 2.69137	Tempo de execucao: 0.01 secs
QuartaOrdem:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.86065	y2: 4.46861	y3: 2.69203	Tempo de execucao: 0.013 secs
Preditor Terceira Ordem					
FORWARD_EULER:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.01 secs
BACKWARD_EULER:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.009 secs
EULER_MODIFY:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.008 secs
RUNGEKUTTA_2ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.01 secs
RUNGEKUTTA_3ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.01 secs
RUNGEKUTTA_4ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.008 secs
Preditor Quarta Ordem					
FORWARD_EULER:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48095	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.009 secs
BACKWARD_EULER:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48095	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.01 secs
EULER_MODIFY:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48095	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.009 secs
RUNGEKUTTA_2ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.009 secs
RUNGEKUTTA_3ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.008 secs
RUNGEKUTTA_4ORDEN:					
Rodadas: 20000	Tempo: 20	y1: 5.87596	y2: 4.48094	y3: 2.69908	Tempo de execucao: 0.009 secs

Estes são os resultados obtidos para $dt = 0.001$

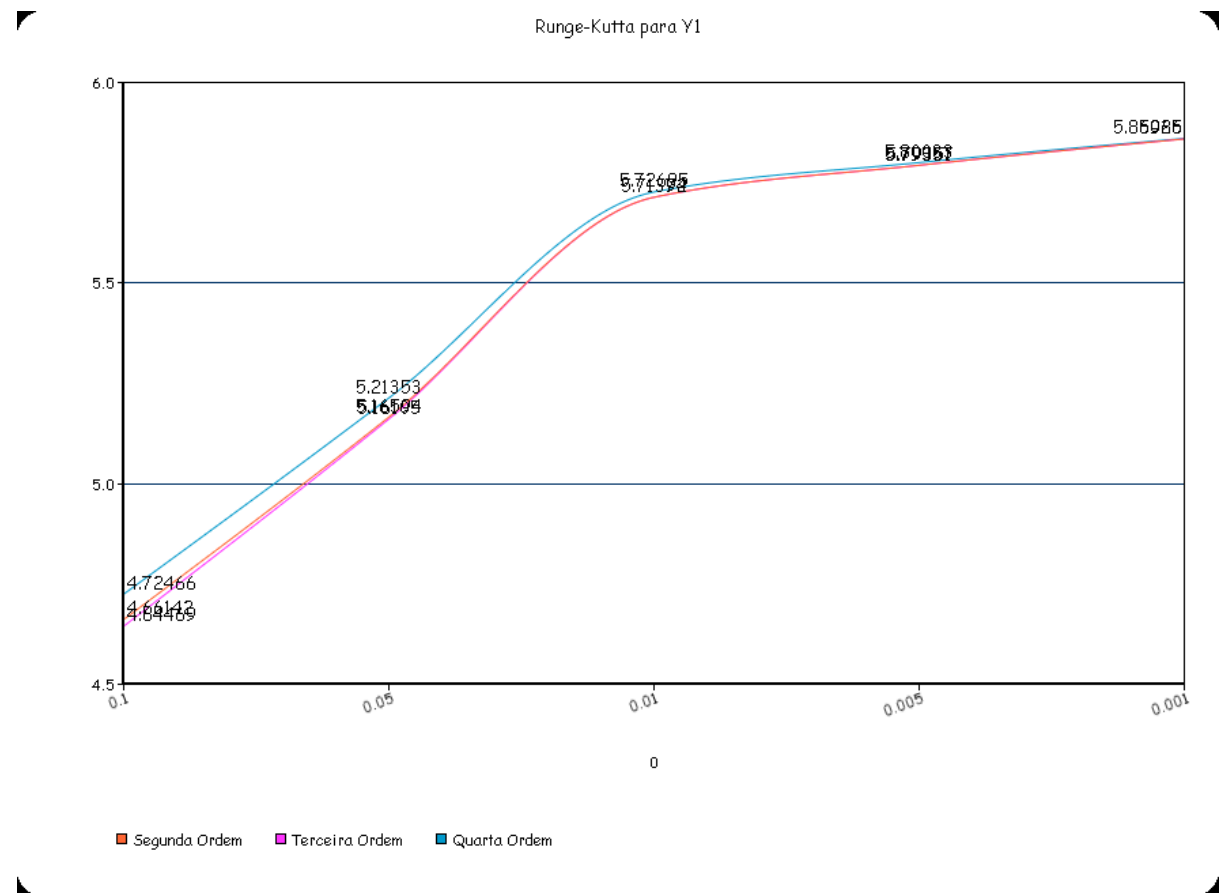
3.1. RESULTADOS

3.1.1 Resultado para o método de Euler

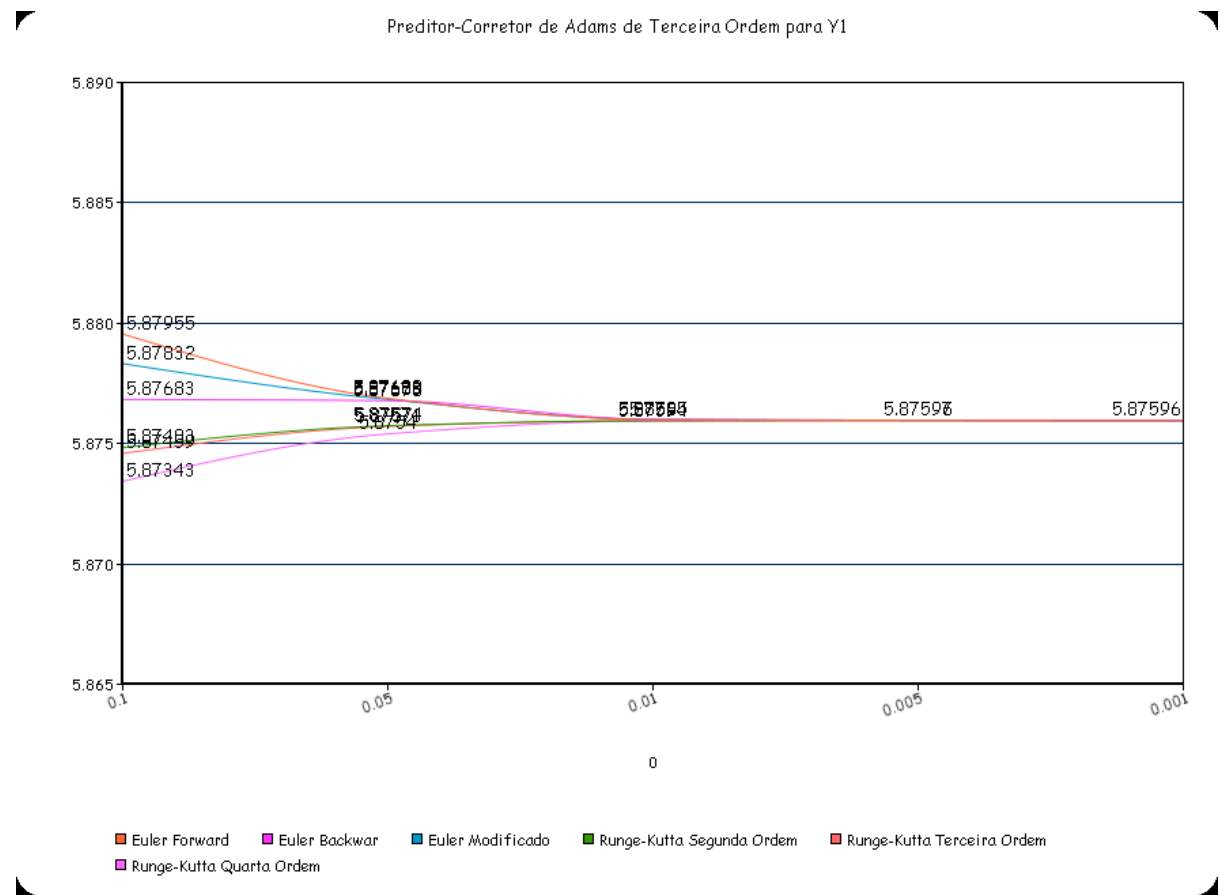


OBS: A precisão utilizada nos métodos Euler Backward e Euler Modificado foi 0.1.

3.1.2 Resultado para método de Runge-Kutta

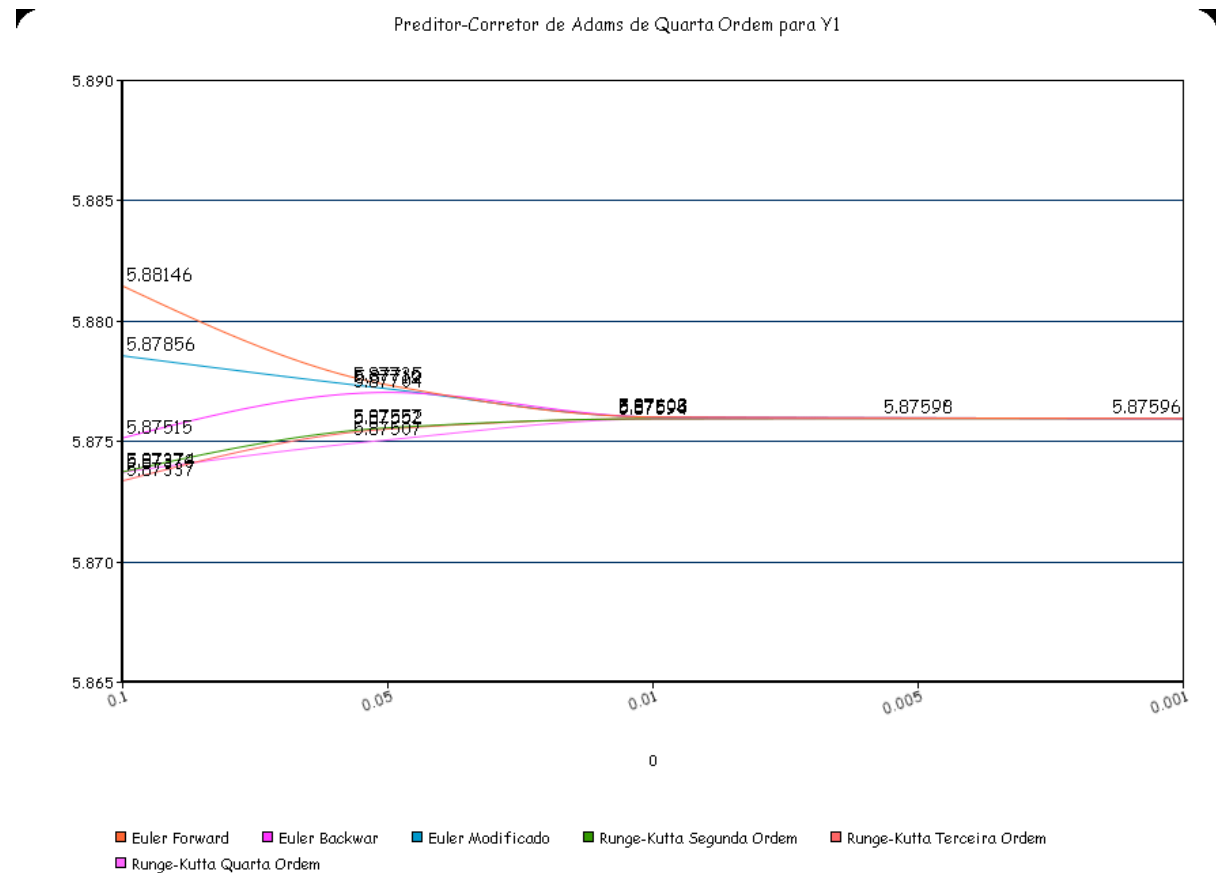


3.1.3 Resultado para método Preditor-Corretor de Adams de Terceira Ordem



OBS: A precisão utilizada nos métodos Euler Backward e Euler Modificado foi 0.01.

3.1.4 Resultado para método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem



OBS: A precisão utilizada nos métodos Euler Backward e Euler Modificado foi 0.01.

3.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

No primeiro gráfico referente ao método de Euler, verificamos que quanto maior o dt utilizado, mais próximo os valores de Forward, Backward e Modificado se aproximam. Isto indica que o resultado obtido está convergindo para o valor correto.

No segundo gráfico referente ao método de Runge Kutta verificamos mais uma vez que quanto maior o dt utilizado, mais próximo os valores de Segunda, Terceira e Quarta Ordem se aproximam, com uma leve vantagem no crescimento da curva da função para a Quarta Ordem. Porém é importante ressaltar que comparado aos métodos anteriores de Euler, Runge Kutta possui uma diferença: os resultados das variações deste método são acometidos por uma discrepância muito pequena, mesmo utilizando dt 's relativamente grandes.

Observando os gráficos dos métodos Preditor-Corretor de Adams de Terceira e Quarta Ordem, podemos dizer que os resultados são um tanto notáveis. Com um dt relativamente grande, no caso, 0.01, já conseguimos resultados excelentes se comparados aos outros métodos.

Apesar dos tempos de execução não terem sido incluídos nos gráficos, eles são inseridos no programa.

Analisando os tempos para $dt = 0.001$, verificamos que o método Forward de Euler tem um tempo de execução de 0.005 segundos, assim, dentre os métodos de Euler, ele foi o mais rápido e obteve maiores valores de y_1 , y_2 e y_3 que convergiram mais rapidamente para o resultado correto. O mais lento foi o Euler modificado. A diferença do mais rápido para o mais lento foi de 5 milissegundos.

No Runge Kutta, o método de segunda ordem foi mais rápido, tendo estabelecido um tempo de 0.006 segundos. Porém verificamos que em comparação com o de quarta ordem, que foi o mais lento, a precisão de y_1, y_2, y_3 diminuiu, o que torna mais ameno, gradativamente, chegar ao valor desejado. A diferença do mais rápido para o mais lento foi de 4 milissegundos. 1 milissegundo a menos que o anterior.

Quanto ao método preditor-corretor de terceira ordem, inicializado por todos os métodos anteriormente propostos, observou-se que os valores de y_1, y_2 e y_3 são os mesmos para todos os tratamentos. Os métodos de Euler modificado e Runge Kutta de quarta ordem foram os mais rápidos, com 0.008 segundos cada. Forward Euler, Runge Kutta segunda e

terceira ordem foram os mais lentos. Uma diferença de 2 milissegundos dos mais rápidos para os mais lentos. Por fim o método preditor-corretor de quarta ordem, inicializado por todos os métodos anteriormente propostos, continua com os mesmos valores para y_1 e y_3 , entretanto para y_2 os valores possuem um pequeno aumento relativo aos métodos de Euler. O método mais rápido foi o de Runge Kutta de terceira ordem com 0.008 segundos e o mais lento foi o de Backward Euler com 0.01 segundos, o que gera uma diferença de 2 milissegundos. A mesma variação do método preditor-corretor anterior.

Concluimos que o método mais rápido em tempo de execução observado foi o Forward Euler com 0.005 segundos. O método inicializador do preditor-corretor de terceira ordem que gerou tempo de resposta mais rápido foi Euler Modificado e o Runge Kutta quarta ordem, que geraram os mesmos valores. No preditor-corretor de quarta ordem foi o Runge Kutta de terceira ordem. Nos métodos de Runge Kutta tivemos uma menor diferença de tempo em relação aos de Euler, e nos métodos preditor-corretor tivemos uma mesma variação de tempo de execução tomando todas as abordagens utilizadas para a inicialização do mesmo. Porém vale ressaltar que o método preditor corretor de quarta ordem possui um tempo mais estável em torno dos 0.009 segundos, conforme observado pelos tempos de execução de todos os métodos inicializadores.