引入问题

我曾提了一个问题：为什么在**各个**“振动问题”中，能量都是和“振幅的平方”有关?

在机械问题中，振幅的含义是小质量块偏移平衡的位置，有位移的量纲；在光学问题中，振幅的含义是电磁场的振幅，有电场强度的量纲；在电路原理问题中，振幅的含义是电流的幅值，有电流的量纲……振幅各有各的物理含义，彼此不同

为了推导出能流正比于振幅的平方，在机械中用的是机械的动能与势能的公式，在光学中用的是电磁波的坡印廷矢量公式，在电学中又用的是焦耳定律（虽然也能用坡印廷）……推导中用的定律含义各不相同，互相无关，但最后竟然都得到“能流$\propto$幅值平方”这一结果，是不是巧合?

我现在提出一种解释：我们得意识到“能量”是最被大自然宠爱的物理量，大自然一定会把最好的数学结构安排给能量，保证能量守恒的成立。如果知道了大自然的这点心思，就可以解释上面这个问题

在振动相关的问题中，用的数学都是Fourier级数，考虑这个数学工具中什么结构是最好的（能够描述能量守恒上）？答案就是“展开系数的平方和绝对收敛到原函数的模方”这一性质

对连续函数而言，把Parseval等式$\|f\|_2=\sum c_k^2$解释成总能量等于各个分能量的加和，正好符合能量相加的结构$E_{\text{total}}=\sum E_i$，且“模”不随基的变更而改变，能够反映“守恒”的本质，这正合了大自然的心意。因此，如振动问题这样使用Fourier级数描述的问题中，

能量都会坐稳“用平方表示”（理解成模的平方）这个位置，因为这个数学结构来描述之太适合不过了。如果采用别的方法表示，哪来这么好的收敛性（保证能量不发散）以及这么好的不变性（体现能量与基的选取无关）？

Fourier 基本公式与性质

> *注意：工科不讲求数学的严谨，如Fourier展开我是不会采用$\simeq$写法的，而是直接写$=$。而且，为了处理冲激信号之类的“函数”，一定得放开手脚，抛弃数学*

周期信号的Fourier级数展开：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)$$

$$a_n:=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\cos n\omega_0 t\quad;\quad b_n:=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

或写为复系数的形式（**更重要**）：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{in\omega_0 t}\quad;\quad X(n\omega_0):=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

此外，回顾Fourier变换的性质，均假设$\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$：

1. 线性

2. 奇偶性 $\mathscr{F}[x^*(t)]=X^*(-\omega)$

3. 对偶性 $\mathscr{F}[X(t)]=2\pi x(-\omega)$
4. 尺度变换 $\mathscr{F}[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5. 频移
6. 时移
7. 微分 $\mathscr{F}[x^{(n)}(t)]=(i\omega)^n X(\omega)$
8. 积分 $\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau]=\frac{1}{i\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
9. Parseval定理 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$
10. 卷积

例1---周期函数的Fourier变换

对于一个周期函数（周期为T_0），实际上也可以看看其Fourier变换是什么，先把它表示成Fourier级数的形式，再对其求变换：

$$X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\mathscr{F}[e^{in\omega_0 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

比如有一个冲激串$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$，其Fourier变换是什么呢?

> *解:*
>
> $$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-in\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}$$
>
> *因此结果即为*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0}\delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0\delta(\omega - n\omega_0)$$

例2---矩形信号与采样函数

具体来说，高E，宽τ，周期T_0的周期矩形信号其Fourier复系数为：

$$X(n\omega_0) = \frac{E\tau}{T_0} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

高E，宽τ，单一的矩形信号的Fourier变换是采样函数：

$$X(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Laplace 新花样

此处Laplace变换定义是（注意上下限）：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

上下限是$0 \to \infty$的是单边Laplace变换
强调收敛域的重要性，变换后的表达式相同，却可能有完全不同的收敛域

收敛域的边界一定是s的复平面上平行于虚轴的直线

同理，如果只有Laplace变换后的表达式，没有收敛域的信息，无法求出逆变换

单边Laplace变换的初值和终值定理（将单边Laplace变换的定义式两侧同乘s并且分部积分即可）：

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \qquad x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

由于在$s = i\omega$时Laplace就退化为Fourier变换，因此，若已知信号的Laplace变换，且虚轴包含在Laplace变换的收敛域内的话，便可以通过$s = i\omega$的方法求出其Fourier变换！

若只有Laplace变换的零极点图也可以做（此处默认奇点类型都是单极点，即有理分式单根的形式），由于收敛域的假设（以及假设讨论的是右边信号），这些单极点都在虚轴左边，将某一个极点和虚轴上的$i\omega$用箭头相连（末端是极点a，首端是$i\omega$），这个向量本身代表一个小单元（$\frac{1}{s-a}$），而实际的变换就是这些小单元的乘积（把零点也加进去就是$\frac{\prod s-z_j}{\prod s-a_i}$），再把$s$换为$i\omega$即可得到Fourier变换，此外，这个小单元向量也隐含了幅角和模长的信息

走向离散

先来看核心的信号转换特性图：

时域	变换	频域
连续、周期	FS	离散、非周期
连续、非周期	FT	连续、非周期
离散、周期	DFS	离散、周期
离散、非周期	DTFT	连续、周期

神奇的是，“连续”和“非周期”是一对关联的特性，“离散”和“周期”是一对关联的特性

时域采样定理

考虑连续信号$x(t)$的理想化采样（认为是和采样周期为T_s的冲激串的乘积）：

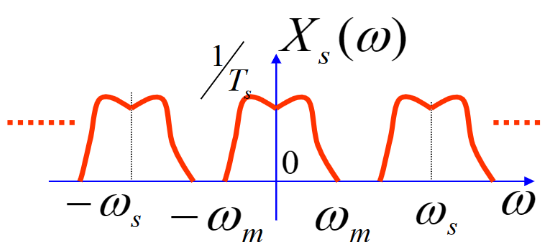
$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

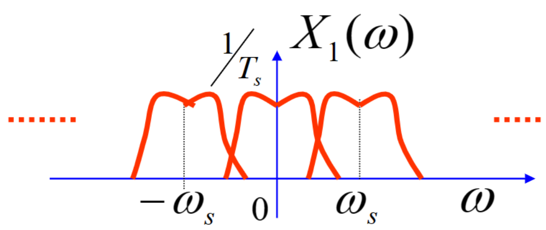
再把这个整体用FT变换到频域去，用到卷积性质（时域相乘变换后为$\frac{1}{2\pi}$倍的频域相卷），回忆例一的结果，得到:

$$X_s(\omega)=\mathscr{F}[x_s(t)]=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

这个求和代表原来的频谱函数$X(\omega)$先平移$n\omega_s$后，再叠加的结果（scaling为$1/T_s$倍）。有意思的是，如果原来的$X(\omega)$的支集是有界的，那只要平移的够远，对应于不同n的$X(\omega-n\omega_s)$，其支集互不相交，这样叠加的时候互不干扰。

在图形上来看，读$X_s(\omega)$的图的一个部分就能看出$X(\omega)$， 这样就能无失真复原$x(t)$，非常好！（下图中上面一个为不重合无失真，下面一个为重合干扰）





那么究竟要平移多远呢？一般记$X(\omega)$的支集为$[-\omega_m,\omega_m]$，其中ω_m还有物理含义，那就是频谱中的最大频率。

因此，相邻两个支集为$[-\omega_m+k\omega_s,\omega_m+k\omega_s]$与$[-\omega_m+(k+1)\omega_s,\omega_m+(k+1)\omega_s]$，两者不相交自然有要求$\omega_s>2\omega_m$（看图可以更快看出）。

因此，最低允许的采样频率就是$2\omega_m$，这称为**Nyquist频率**

回到主线，恢复$x(t)$需要把$X(\omega)$找到，从不重合的那种$X_s(\omega)$的频谱中找出$X(\omega)$只用拿一个窗函数去截图就行了

$$G(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|\le\frac{\omega_s}{2}\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

因此$X(\omega)=X_s(\omega)G(\omega)$，再逆变换得到$x(t)$

DFS

对于离散情况中的**周期**信号而言（离散这里的周期要小心！π那种要判断有理无理，一眼看上去是周期函数实际上并不是），使用DFS

所以实际上考虑的只有那些从连续的周期为T_0的信号中，以遵循$NT=T_0$的方法采样出来的离散信号为对象，其中T是采样频率

首先，数字信号定义一个“基本数字频率”为$\Omega_0:=\frac{2\pi}{T_0}T=\omega_0T$

引入

Fourier的精神无非是用一系列的基本频率的叠加去表达原来的函数，离散这里基本单元也

就是$e^{ik\Omega_0 n}$（其中k待遍历）。假设真可以这么做，有：

$$x(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{ik\Omega_0 m}$$

注意之所以求和是$0 \to N-1$是因为，$e^{ik\Omega_0 n} = e^{i(k+N)\Omega_0 n}$（该式看$\Omega_0$和$N$的定义秒懂）。如果求和写成无穷的，实际上加了很多遍一模一样的东西，更关键的是，“正交性”就不能用了：之前之所以能求出系数，用的就是正交性，把看中的系数挑出来，现在如果都线性相关了（实际还相等），用不了正交性！

但是，一旦$0 \to N-1$，就可以用正交性了，因为对于任何**非零**的$\Delta k \in \mathbb{N}$，均有$\sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\Delta k\Omega_0 m} = 0$，为什么呢？一方面可以直接用等比数列求和验证，或者回顾一下$\Omega_0 = \omega_0 T = \omega_0 \frac{T_0}{N}$发现就是$N$等分了一个单位圆，现在把这$N$个均匀分布的力（单位根）都累加起来，合力自然为零。亦即：在离散的情况下，正交性不再是无限个分频的积分，而是替换成有限项分频的加和！

知道了这一点，我们用新的正交性挑出系数X_k（$\frac{1}{N}$是来源于有N个会留下来）

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{k'=0}^{N-1} X_{k'} e^{ik'\Omega_0 m}\right)e^{-ik\Omega_0 m} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT)e^{-ik\Omega_0 m}$$

DFS及其性质

上面只是引入，真正要用的是下面两个（记号的含义和上面有所不同，但是为了写着方便，只用下面的就行了）：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n} \quad ; \quad X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-ik\Omega_0 n}$$

比连续的情况更好的一点是，这都是有限项加和，因此不需要担心收不收敛！上面的两个式子是自洽的，这回写的等号是真的等号。（自洽体现在，把右边的求和式代入左边的求和式，可以严格等于$x(n)$）

定义周期卷积（前提是两个对象都是周期为N的序列）：$x(n) \circledast h(n) := \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k)$，则有性质：

$$x(n) \circledast h(n) \leftrightarrow X(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$$

$$x(n)h(n) \leftrightarrow \frac{1}{N}X(k\Omega_0) \circledast H(k\Omega_0)$$

DTFT

DTFT引入

在DFS的基础上，把周期$N \to \infty$，这时Ω_0很小，各个$k\Omega_0$挨得很近，演化为连续的频谱（记$\Omega = k\Omega_0$），因此只能用“密度”来描述之：

$$x(n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} NX(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}\frac{1}{N}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\lim_{N\to\infty} NX(\Omega)\right)e^{i\Omega n}\frac{d\Omega}{2\pi}$$

（虽然先验地认为最后一个等式能够写成这样的形式）这样的话，把其中的部分提出来定义为正变换即可：

$$X'(\Omega) := \lim_{N\to\infty} NX(\Omega) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-ik\Omega_0 n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\Omega n}$$

DTFT及其性质

上面只是引入，实际上写为下面的形式比较好（下面的X实际上是上面的X'，为了方便做此替换）：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega \quad ; \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\Omega n}$$

走向计算

DFT

处理（非周期的）**有限**的离散信号，它们的频谱本来是由DTFT给出的连续函数，这不大好。想要离散处理它们，就有DFT如下：

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad ; \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$$

注意：这里的$X(k)$含义是不明的，不代表频谱（频谱是DTFT得出的连续频谱），可以认为，$X(k)$这部分是借鉴了DFS的形式，受启发写出来的，其实并没有什么坚固的来源。而从$X(k)$到$x(n)$的逆变换这一形式，恰好在数学上是对的，所以就得到这样两个式子了。可以说按照这个游戏规则，上式规定的两个$x(n)$与$X(k)$成为一种变换对，这个规则在逻辑上**自成一派**，不用和之前的DTFT、DFS、FS、FT进行关联

验证一下上面两个式子是自洽的，将右式代入左式：

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x(0) + x(1)e^{-ik\frac{2\pi}{N}} + \cdots + x(N-1)e^{-ik\frac{2\pi}{N}(N-1)}\right)e^{ik\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n)e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}e^{ik\frac{2\pi}{N}n} = x(n)$$

注意第二个等号又使用了这种“筛选性”：单位元上均匀分布的矢量加和为零，仅有恒为1的那一项加和非零保留下来

总之，我们证明了上面两个式子确实是自洽的。那么，不妨抛开DFS、DTFT等等绕来绕去干扰你的东西，在逻辑上我们直接认同上面两个式子，它们就是DFT的定义，从这里开始往后发展就行了

FFT

将$e^{-i\frac{2\pi}{N}}$记为W_N，改写DFT为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

这就是线性组合的形式，权重是W_N的幂次

W_N^{nk}具有什么性质?

1. 周期性：当n变为$n+N$或者k变为$k+N$时，值都不变
2. 对称性：当指数加$\frac{N}{2}$后，值取负

3. 消去性：N与指数nk同乘或同除一个数，值不变

若$N=2^{\nu}$，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_N^{2lk}+\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_N^{(2l+1)k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_{\frac{N}{2}}^{lk}+W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_{\frac{N}{2}}^{lk}=G(k)+W_N^kH(k)$$

上式的G与H都是采样点数为$\frac{N}{2}$的DFT，我们先算$G(k),H(k),W_N^k$，再用这个公式算$X(k)$

但为什么要写成这个形式呢？因为可以利用周期性进行简化，对于长度为$\frac{N}{2}$的序列使用周期性：

$$G(k+\frac{N}{2})=G(k)\quad;\quad H(k+\frac{N}{2})=H(k)$$

这样，当求出一些$X(k)$之后，再想求$X(k+\frac{N}{2})$，可以用：

$$X(k+\frac{N}{2})=G(K+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}H(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^kH(k)$$

这样刚才算过的三个数据$G(k),H(k),W_N^k$直接拿来用就行了！

还有更好的，由于$\frac{N}{2}$还是偶数，把$G(k), H(k)$分别当成刚才的$X(k)$，故技重施分成奇偶两部分