走向离散

先来看核心的信号转换特性图:

时域	变换	频域
连续、周期	FS	离散、非周期
连续、非周期	FT	连续、非周期
离散、周期	DFS	离散、周期
离散、非周期	DTFT	连续、周期

神奇的是,“连续”和“非周期”是一对关联的特性,“离散”和“周期”是一对关联的特性

理想采样与采样定理

考虑连续信号$x(t)$的**理想采样**（理想采样：认为是$x(t)$和采样周期为T_s的冲激串的乘积）：

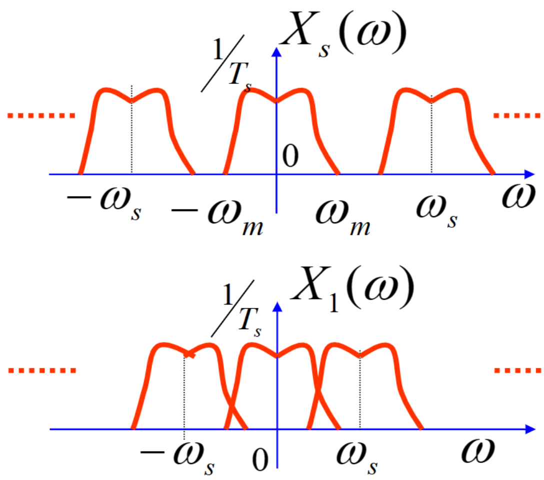
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

再把这个整体用FT变换到频域去，用到卷积性质（时域相乘变换后为$\frac{1}{2\pi}$倍的频域相卷），回忆例一的结果，得到:

$$X_s(\omega) = \mathscr{F}[x_s(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_s \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

这个求和代表原来的频谱函数$X(\omega)$先平移$n\omega_s$后，再叠加的结果（scaling为$1/T_s$倍）。有意思的是，如果原来的$X(\omega)$的支集是有界的，那只要平移的够远，对应于不同n的$X(\omega - n\omega_s)$，其支集互不相交，这样叠加的时候互不干扰。

在图形上来看，读$X_s(\omega)$的图的一个部分就能看出$X(\omega)$， 这样就能无失真复原$x(t)$，非常好！（下图中上面一个为不重合无失真，下面一个为重合干扰）



那么究竟要平移多远呢？一般记$X(\omega)$的支集为$[-\omega_m, \omega_m]$，其中ω_m还有物理含义，那就是频谱中的最大频率。

因此，相邻两个支集为$[-\omega_m + k\omega_s, \omega_m + k\omega_s]$与$[-\omega_m + (k+1)\omega_s, \omega_m + (k+1)\omega_s]$，两者不相交自然有要求$\omega_s > 2\omega_m$（看图可以更快看出）。

因此，最低允许的采样频率就是$2\omega_m$，这称为**Nyquist频率**

回到主线，恢复$x(t)$需要把$X(\omega)$找到，从不重合的那种$X_s(\omega)$的频谱中找出$X(\omega)$只用

拿一个窗函数去截图就行了

$$G(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|\le\frac{\omega_s}{2}\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

因此$X(\omega)=X_s(\omega)G(\omega)$，再逆变换得到$x(t)$

总之：当理想采样频率在**Nyquist频率以上时**，能够**完美复原**原来的信号！

理想与现实

有意思的是，我们真正处理的离散信号根本不是理想采样得到的那个和冲激串相乘的信号（理想采样后幅值都是无限了！没法处理），现实中对$x(t)$的采样都是$x(nT_s)$，即，直接取采样时刻的那个值，得到一个序列

所以，理想采样貌似是没有价值的。但是，我们又会在各个现实的采样中都套用采样定理，但明明采样定理是用理想采样推出来的呀，这是否是定理滥用？

你可能会说，那照搬理想采样，推导一个现实采样版本的采样定理不就行了嘛！听起来容易，实际上根本做不了，因为按照$x(nT_s)$这种方法得到的是一个序列，测度为零，做积分运算后直接丧失所有信息，所以用现有的工具变换到频域，什么也分析不了

因此得用新的工具，比如DTFT，才能把采样定理应用到一般现实中的那些采样上

> *the conversion from the impulse train sequence of samples to the discrete-time sequence of samples can be thought of as a normalization in time*

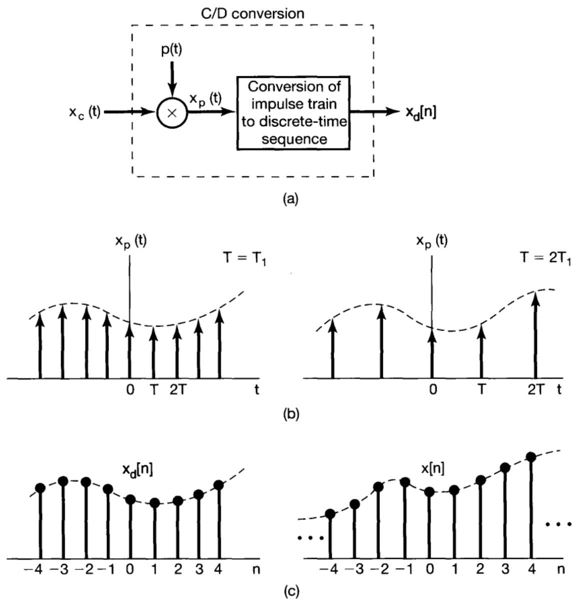


Figure 7.21 Sampling with a periodic impulse train followed by conversion to a discrete-time sequence: (a) overall system; (b) $x_p(t)$ for two sampling rates. The dashed envelope represents $x_c(t)$; (c) the output sequence for the two different sampling rates.

以下，记原始连续序列相关下标为c，理想采样相关含下标p，下标d记为**映射**后的序列，这个映射指把理想采样后的结果归一化，相当于“除以δ函数”这一操作

$$x_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

因此傅里叶变换后为（利用线性性）：

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)e^{-i\omega nT_s}$$

而对于映射后的那些能正常处理的信号序列$x_d(n)$，求其DTFT（参见后文）：

$$X_d(\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-i\Omega n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)e^{-i\Omega n}$$

对比一下，这样就挺像了！对应的替换是$X_d(\omega T_s) = X_p(\omega)$，这个替换可以视为“除以$\delta$函数”归一化带来的效果，按这样替换之前理想采样的那个频域式子$X_p(\omega) =$

$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(\omega-k\omega_s)$，就有：

$$X_d(\omega T_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(\omega-k\omega_s)$$

做换元$\Omega=\omega T_s$即可得：

$$X_d(\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left((\Omega-2\pi k)/T_s\right)$$

此即适用于$x_d(n)$的采样定理！由于是直接从理想采样平行推过来的，发生频谱混叠的采样频率临界值不会改变，只不过横坐标的字母换了一下含义而已，这样，采样定理就推广到了一般情形

> *Note 理想采样就是连续与离散之间的桥梁，它本身有着离散的形式，但是又可以视为连续的函数趋于极限的情况。离散的序列信号，其测度是零，这样用积分变换没有意义，但冲激信号"在一个点上具有非零测度"的特性把这一问题解决了*

DFS

对于离散情况中的**周期**信号而言（离散这里的周期要小心！π那种要判断有理无理，一眼看上去是周期函数实际上并不是），使用DFS

所以实际上考虑的只有那些从连续的周期为T_0的信号中，以遵循$NT=T_0$的方法采样出来的离散信号为对象，其中T是采样频率

首先，数字信号定义一个"基本数字频率"为$\Omega_0:=\frac{2\pi}{T_0}T=\omega_0T$

引入

Fourier的精神无非是用一系列的基本频率的叠加去表达原来的函数，离散这里基本单元也就是$e^{ik\Omega_0 n}$（其中k待遍历）。假设真可以这么做，有：

$$x(mT)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{ik\Omega_0 m}$$

注意之所以求和是$0\rightarrow N-1$是因为，$e^{ik\Omega_0 n}=e^{i(k+N)\Omega_0 n}$（该式看$\Omega_0$和$N$的定义秒懂）。如果求和写成无穷的，实际上加了很多遍一模一样的东西，更关键的是，“正交性”就不能用了：之前之所以能求出系数，用的就是正交性，把看中的系数挑出来，现在如果都线性相关了（实际还相等），用不了正交性！

但是，一旦$0\rightarrow N-1$，就可以用正交性了，因为对于任何**非零**的$\Delta k\in\mathbb{N}$，均有$\sum_{m=0}^{N-1}e^{-i\Delta k\Omega_0 m}=0$，为什么呢？一方面可以直接用等比数列求和验证，或者回顾一下$\Omega_0=\omega_0 T=\omega_0\frac{T_0}{N}$发现就是$N$等分了一个单位圆，现在把这$N$个均匀分布的力（单位根）都累加起来，合力自然为零。亦即：在离散的情况下，正交性不再是无限个分频的积分，而是替换成有限项分频的加和！

知道了这一点，我们用新的正交性挑出系数X_k（$\frac{1}{N}$是来源于有N个会留下来）

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{k'=0}^{N-1}X_{k'}e^{ik'\Omega_0 m}\right)e^{-ik\Omega_0 m}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x(mT)e^{-ik\Omega_0 m}$$

DFS及其性质

上面只是引入，真正要用的是下面两个（记号的含义和上面有所不同，但是为了写着方便，只用下面的就行了）：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}\quad;\quad X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-ik\Omega_0 n}$$

比连续的情况更好的一点是，这都是有限项加和，因此不需要担心式子没有意义或者不收敛！上面的两个式子是自洽的，这回写的等号是真的等号。（自洽体现在，把右边的求和式代入左边的求和式，可以严格等于$x(n)$）

定义周期卷积（前提是两个对象都是周期为N的序列）：$x(n)\circledast h(n):=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)h(n-k)$，则有性质：

$$x(n)\circledast h(n)\leftrightarrow X(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$$

$$x(n)h(n)\leftrightarrow\frac{1}{N}X(k\Omega_0)\circledast H(k\Omega_0)$$

DTFT

DTFT引入

考虑一个支集有界的离散时域函数$x(n)$（自然是非周期的），把它延拓成周期的$\tilde{x}(n)$，（注意，没说从支集的边界开始延拓，$\tilde{x}(n)$的最小单元可以远远大于支集，这也正是我们想要的），其主成分部分（i.e.作为基准用来延拓的的那一个小单元）记为$[-N_1,N_2]$，是包含$x(n)$的支集的。

这样就能对于$\tilde{x}(n)$使用DFS，下两式（我称这两个式子为“原始式”）**严格成立**：（其中N是周期，亦即$-N_1\rightarrow N_2$一共含有的样点数，Ω_0遵循之前的约定是$\frac{2\pi}{N}$）

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-N_1}^{N_2}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}\quad;\quad\tilde{X}(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\tilde{x}(n)e^{-ik\Omega_0 n}$$

因为$x(n)$和$\tilde{x}(n)$在$-N_1\rightarrow N_2$是一样的，而$x(n)$在这个区间之外，本来就为0，没有贡献。因此，第二个“原始式”可严格改写成：

$$\tilde{X}(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-ik\Omega_0 n}$$

现在令：

$$X(\Omega):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i\Omega n}$$

因此（当然，这一步实际上只是换个写法）：

$$\tilde{X}(k\Omega_0)=\frac{1}{N}X(k\Omega_0)$$

这样第一个“原始式”可以严格写为：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N_1}^{N_2}X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N_1}^{N_2}X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}\Omega_0$$

再对这个式子左右同时取$\lim_{N\rightarrow\infty}$（就是$\lim_{N_1\rightarrow\infty}$以及$\lim_{N_2\rightarrow\infty}$）。左边，在任意一个有限大的区间内，都与$x(n)$严格相等；右边，根据Riemann积分的定义，得到积分式。因此有：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega$$

DTFT及其性质

DTFT如下：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega \quad ; \quad X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i\Omega n}$$

可以发现，根据“完全严格取等”的DFS得来的DTFT也是比较严格的，（对于有限的非周期信号而言）只要是可积的，就可以写出来。之前连续的那些，本源是FS，收敛性不大好，因此FS和FT其实都不大严格，这样对比，DFS和DTFT是非常好的。

走向计算

DFT

处理（非周期的）**有限**的离散信号，它们的频谱是由DTFT给出的连续函数，这连续又不大好了。想要离散处理它们，就有DFT如下：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{ik\frac{2\pi}{N}n} \quad ; \quad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}$$

注意：这里的$X(k)$含义是不明的，不代表频谱（频谱是DTFT得出的连续频谱），可以认为，$X(k)$这部分是借鉴了DFS的形式，受启发写出来的，其实并没有什么坚固的来源。而从$X(k)$到$x(n)$的逆变换这一形式，恰好在数学上是对的，所以就得到这样两个式

子了。可以说按照这个游戏规则，上式规定的两个$x(n)$与$X(k)$成为一种变换对，这个规则在逻辑上**自成一派**，不用和之前的DTFT、DFS、FS、FT进行关联

验证一下上面两个式子是自洽的，将右式代入左式：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x(0)+x(1)e^{-ik\frac{2\pi}{N}}+\cdots+x(N-1)e^{-ik\frac{2\pi}{N}(N-1)}\right)e^{ik\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(n)e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}e^{ik\frac{2\pi}{N}n}=x(n)$$

注意第二个等号又使用了这种"筛选性"：单位元上均匀分布的矢量加和为零，仅有恒为1的那一项求和后非零，保留下来

总之，我们证明了上面两个式子确实是自洽的。那么，不妨抛开DFS、DTFT等等绕来绕去干扰你的东西，在逻辑上我们直接认同上面两个式子，它们就是DFT的定义，从这里开始往后发展就行了

FFT

将$e^{-i\frac{2\pi}{N}}$记为W_N，改写DFT为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

这就是线性组合的形式，权重是W_N的幂次

W_N^{nk}具有什么性质？

1. 周期性：当n变为$n+N$或者k变为$k+N$时，值都不变

2. 对称性：当指数加$\frac{N}{2}$后，值取负

3. 消去性：N与指数nk同乘或同除一个数，值不变

若$N=2^{\nu}$，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_N^{2lk}+\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_N^{(2l+1)k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l)W_{\frac{N}{2}}^{lk}+W_N^k\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2l+1)W_{\frac{N}{2}}^{lk}=G(k)+W_N^kH(k)$$

上式的G与H都是采样点数为$\frac{N}{2}$的DFT，我们先算$G(k),H(k),W_N^k$，再用这个公式算$X(k)$

但为什么要写成这个形式呢？因为可以利用周期性进行简化，对于长度为$\frac{N}{2}$的序列使用周期性：

$$G(k+\frac{N}{2})=G(k)\quad;\quad H(k+\frac{N}{2})=H(k)$$

这样，当求出一些$X(k)$之后，再想求$X(k+\frac{N}{2})$，可以用：

$$X(k+\frac{N}{2})=G(K+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}H(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^kH(k)$$

这样刚才算过的三个数据$G(k), H(k), W_N^k$直接拿来用就行了！

还有更好的，由于$\frac{N}{2}$还是偶数，把$G(k), H(k)$分别当成刚才的$X(k)$，故技重施分成奇偶两部分

Z变换

Z变换引入

由于DTFT对于那些支集无界的信号，可能会有级数发散问题，因此从给原来的信号乘上一个衰减的信号，再进行DTFT，这就是Z变换：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-i\Omega n} = \sum_{-\infty}^{\infty}x(n)(re^{i\Omega})^{-n}$$

一旦把$z := re^{i\Omega}$，便有了很好的形式，上式记为$X(z)$，反变换为：

$$x(n)r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(z)e^{i\Omega n}d\Omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(z)(re^{i\Omega})^n d\Omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}X(z)z^{n-1}dz$$

Z变换及其性质

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}X(z)z^{n-1}dz$$

Z变换的收敛域很重要，在复平面中粗略的讲：右边序列收敛域是某个圆周之外，左边序列则是某个圆周之内

称$x(n)u(n)$的Z变换为$x(n)$的单边Z变换

Z变换与其他变换

显然，Z变换和拉普拉斯变换很像，不过更加具体的讲，一个是针对连续函数的，一个是针对离散函数的，想要架桥，就用理想采样

理想采样后的信号为：

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

对其进行Laplace变换：

$$X_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-nsT}$$

只用令$z=e^{sT}$，就把$x(n)$的Z变换$X(z)$变成了$x_s(t)$的laplace变换：

$$X_s(s)=X(z)|_{z=e^{sT}}$$

还有更神奇的，与DFT之间的关系，因为考察的是有限长的序列，Z变换就是：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

一旦做替换：$z=e^{ik\frac{2\pi}{N}}$，就变成了$X(k)$，因此：

$$X(k)=X(z)|_{z=e^{ik\frac{2\pi}{N}}}$$