滤波器

参考 *Microelectronic Circuits*

线性时不变系统

回顾自动控制原理，若一个系统的传递函数为$G(s)$，则输入一个$r(t)$后，输出的Laplace变换就等于该传递函数**乘**到输入的Laplace变换$R(s)$上，这是使用频域法，我们都在用“乘法”运算的原因

基本

其传递函数(transfer function)记为输出电压与输入电压之比

$$T(s) := \frac{V_o}{V_i}$$

而频域特性（transmission）为$T(j\omega)$，一般处理成：

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

含义讨论：

在Laplace变换中让$s = j\omega$，即转化为Fourier变换，因此$T(j\omega)$就是频谱特性，是在频域中的“振幅”。

当一个输入信号经过这个滤波器系统，输出就是$T(s)R(s)$，因此输出对应的频谱也是$T(j\omega)R(j\omega)$，这样，输出和输入的频谱相比，就是放大了$|T(j\omega)|$倍，相位偏移了$\phi(\omega)$那么多。

所以，我们研究的核心，就是频谱的变化，即$|T(j\omega)|$和$\phi(\omega)$。一般通过取对数的手法，将相乘转化为相加

分类

如下图分类，中文名即：低通、高通、带通、带阻。当然下图是**理想示意图**，因为实际电路达不到该曲线

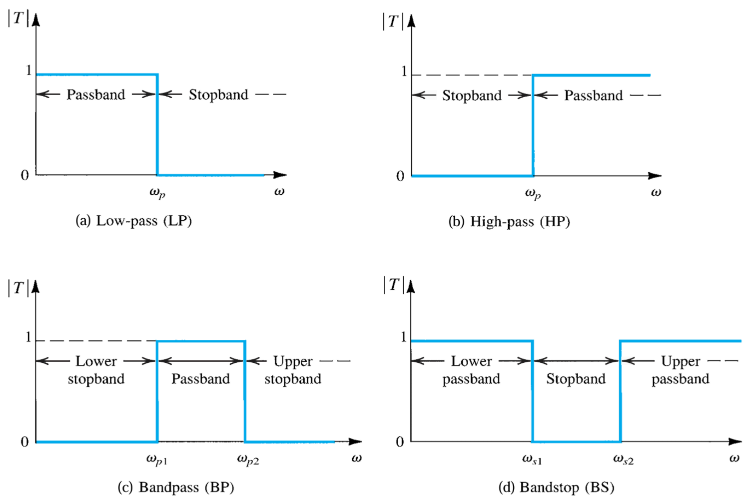


Figure 16.2 Ideal transmission characteristics of the four major filter types: **(a)** low-pass (LP), **(b)** high-pass (HP), **(c)** bandpass (BP), and **(d)** bandstop (BS).

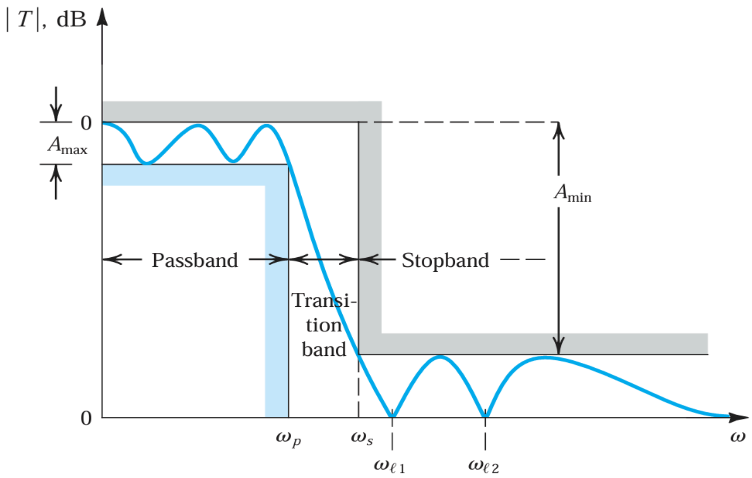
因为达不到，所以允许有一些偏差，因此产生一些标签

考虑低通，在实际的通带（passband）中的transmission并不是严格的0分贝，而是在附近

有所偏移，这就是实际滤波器的一个特征（标签），称之为$A_{\max}(\mathrm{dB})$，即**最大衰减**

同样，在实际阻带中，滤掉的频率也不是完全没法通过的，这些本该滤除的频率中，保留最多的那个，到0分贝的距离，即为**最小衰减**，记为$A_{\min}(\mathrm{dB})$

同时，由于实际不能陡然减小，因此有通带的边缘和阻带的边缘，分别记为ω_p以及ω_s，是pass和stop的缩写，它们中间的部分就是过渡带（transition band），可定义选择比（selectivity ratio）为ω_s/ω_p，越接近1，就越陡峭



分析

按照自动控制原理中的经典手法，将传递函数因式分解：

$$T(s)=\frac{k(s-z_1)\dots(s-z_M)}{(z-p_1)\dots(z-p_N)}$$

因此，如果想要让某一频率完全不通过（$-\infty\mathrm{dB}$）就得让传递函数拥有一个纯虚零点，这样在该频率处，才有$|T(j\omega)|=0$，对应上图中ω_{l1}和ω_{l2}

Butterworth 滤波器

Butterworth滤波器特性

其幅频特性为

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

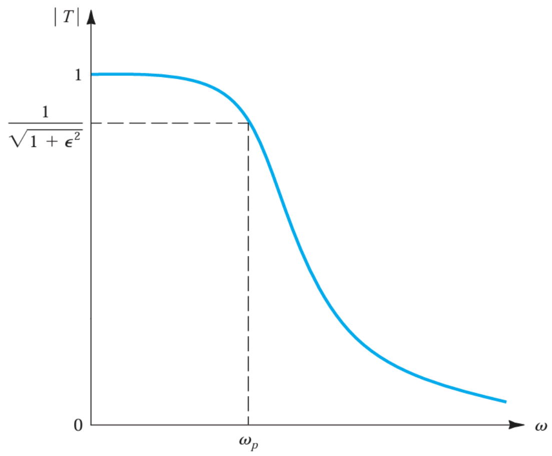


Figure 16.8 The magnitude response of a Butterworth filter.

因此，其单调特性决定了，其**最大衰减**处，就是通带边缘处ω_p，此时，衰减就是$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$，往往取$\varepsilon = 1$，这样就是$-3\text{dB}$处为通带边缘，也有$A_{\max} = 3\text{dB}$。同理，其阻带最小衰减也出现在边缘，即$\omega_s$处

由于Butterworth滤波器在$\omega = 0$处$2N - 1$阶导数都为0，因此很平缓，也叫最大平坦幅值滤波器

设计Butterworth滤波器

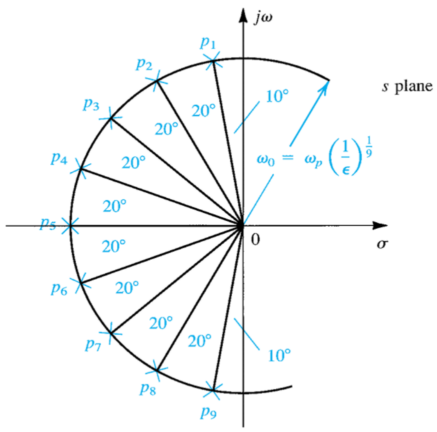
如果已知要用的是Butterworth滤波器，那么先根据$A_{\max}$的需求定出ε，然后根据$A_{\min}$的需求定出N的下界。在N确定后，我们想再知道传递函数的极点：先可以让分母等于0，这样得到解为

$$\omega=\omega_p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2N}}$$

而之前的替换里$s=j\omega$，因此对应的极点为

$$p_i=j\omega=\omega_p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}e^{j\left[\frac{(2k+1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right]}$$

可见，极点两两之间相差$\frac{\pi}{N}$的角度，且如果N为奇数，可以取$k=\frac{N-1}{2}$，使得e指数这一项成为-1这一实数。这样，可以得到极点图，比如$N=9$，那么就有：



就可以得知$T(s)$的所有极点p_i（要取左半平面的），所以传递函数形如：

$$T(s)=\frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)}$$

再附加条件，即静态放大倍数为1，即$|T(j0)|=1$，那么，$K=|p_i|^N$（别忘了p_i的表达式，所有p_i模都一样长），故：

$$T(s)=\frac{\omega_p^N/\varepsilon}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

Chebyshev滤波器

Chebyshev滤波器特性

通带内等波动，通带外单调衰减，零点仍然仅存在于无穷处，换言之，在传递函数表达式里，分子就是个常数，是“极点型”的（all poles）

表达式：

$$|T(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}}$$

其中，$T_n(x)$是n阶Chebyshev多项式（“鸡立鹤群”的最佳逼近多项式）

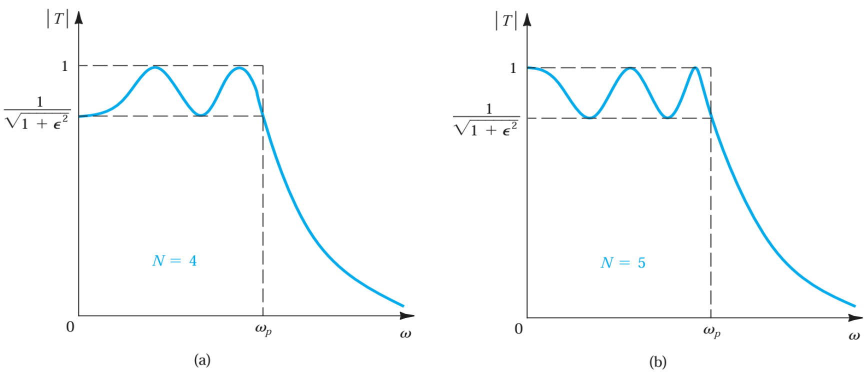


Figure 16.12 Sketches of the transmission characteristics of representative **(a)** even-order and **(b)** odd-order Chebyshev filters.

在通带边界，ω_p处时，都有（正是因为$T_n(1)=1$对各个n都成立）：

$$|T(j\omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

这也正是最大衰减$A_{\max}$

为了求阻带最小衰减，用“在通带外单减”的性质，因此，最小衰减就在边缘处取到，即：$A_{\min}$恰为$-20\log|T(j\omega_s)|$

下求极点分布，令分母为0，且注意到$s=j\omega$，故解：

$$1+\varepsilon^2 T_n^2(\frac{s}{j\omega_p}) = 0$$

解为$s=\sigma_k + j\omega_k$，有：

$$\frac{\sigma_k^2}{(a\omega_p)^2} + \frac{\omega_k^2}{(b\omega_p)^2} = 1$$

其中：

$$\begin{cases} a = \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ b = \cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \end{cases}$$