PROJET 1 TELECOMMUNIVATION ET TRAITEMENT DU SIGNAL

Introduction à l'égalisation

Impact d'un canal de propagation sélectif en fréquence et méthodes d'égalisation

Première année - Département Sciences du numérique

2024-2025

1 Introduction

Soit la chaine de transmission présentée dans la figure 1. Elle réprésente la chaine passe-bas équivalente associée à une transmission BPSK : $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse, $h_c(t)$ représente la réponse impulsionnelle du canal passe-bas équivalent et $n_e(t)$ l'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de propagation.

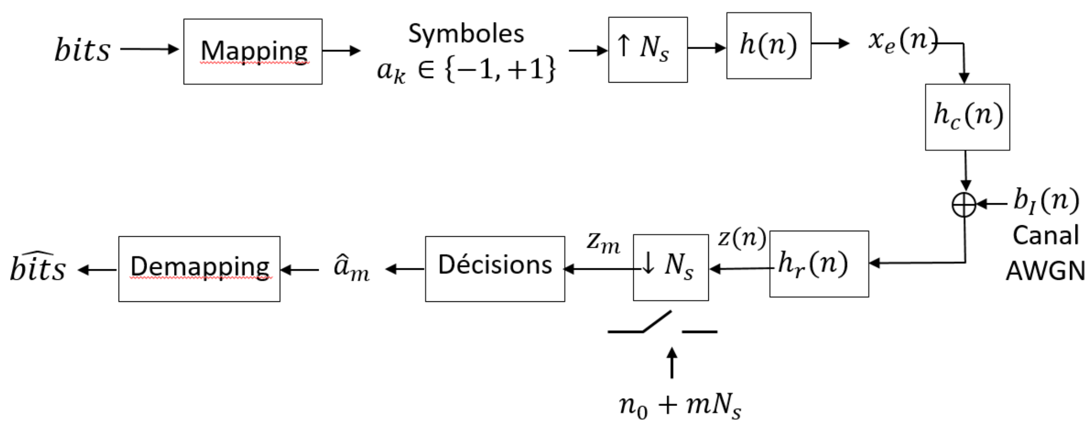

Figure 1: Chaîne de transmission passe-bas équivalente à une chaine de transmission BPSK.

Il est possible de trouver des instants d'échantillonnage, $t_0 + mT_s$, sans interférences entre symboles si la chaine de transmission présente une réponse impulsionnelle globale $g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$ qui permette de respecter le critère de Nyquist.

Sur canal à bruit additif blanc et Gaussien (canal AWGN ou non sélectif en fréquence), il est simple de trouver des filtres d'émission et de réception qui permettent de respecter ce critère : par exemple deux filtres de réponse impulsionnelles rectangulaires de même durée T_s ou bien deux deux filtres de réponse impulsionnelles en racine de cosinus surélevé de même roll off.

C'est le cas, par exemple, pour une transmission satellite fixe (figure 2).

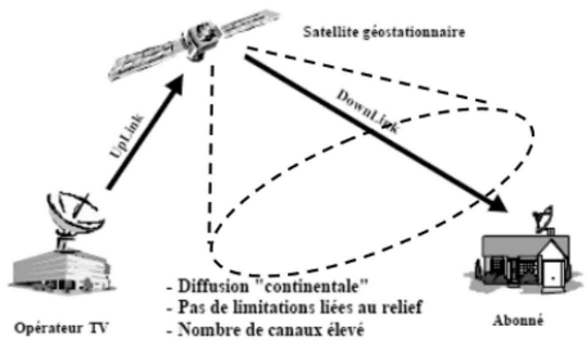

Figure 2: Exemple de transmission en ligne de vue directe (canal non sélectif en fréquence) : transmission fixe de la TV numérique par satellite.

Il peut néanmoins arriver que l'hypothèse de non sélectivité en fréquence du canal ne soit plus vérifiée, par exemple lors de transmissions à trajets multiples : transmissions WiFi, TNT, transmissions avec les mobiles, communications acoustiques sous marine.

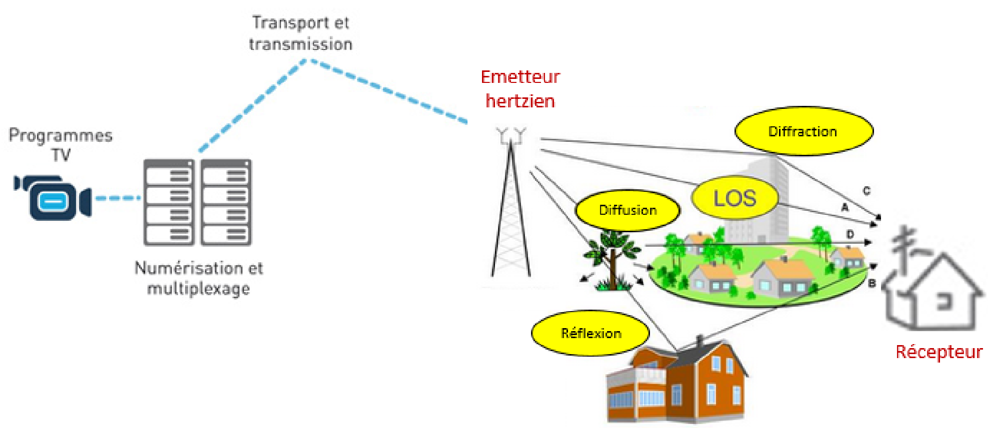

Figure 3: Exemple de transmission avec multitrajets (canal sélectif en fréquence) : transmission de la TV numérique par voie terrestre.

Dans un tel contexte, une solution possible pour supprimer les interférences introduites par le canal de propagation, est de placer un filtre supplémentaire au niveau du récepteur appelé égaliseur : voir figure 4. Le critère de Nyquist reste respecté entre $h(t)$ et $h_r(t)$, tandis que l'égaliseur est là pour corriger les imperfections introduites par le canal de propagation.

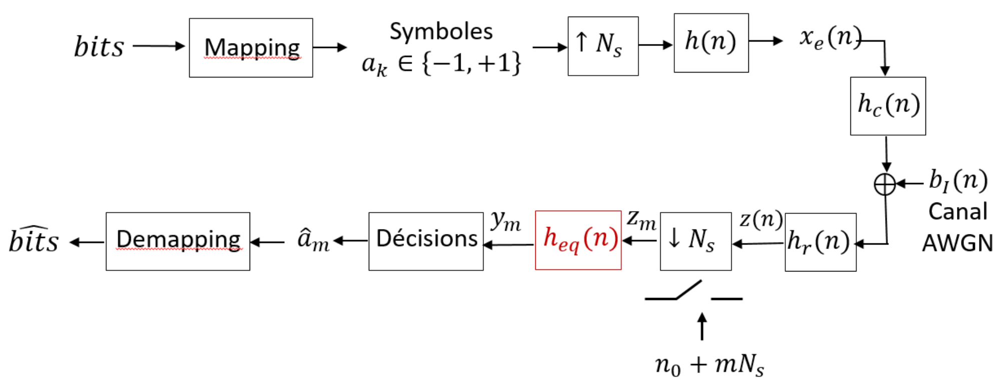

Figure 4: chaîne de transmission avec égalisation.

L'objectif de ce projet n'est pas de développer complètement la théorie de l'égalisation, bien entendu, mais d'en introduire quelques concepts. Après avoir étudié l'impact d'un canal multitrajet dans la chaine de transmission, nous allons vous proposer d' ajouter deux type d'égaliseurs fixes (pour canal stationnaire) sous la forme de filtres RIF (filtres à réponse impulsionnelle finie) implantés au rythme symbole :

- L'égaliseur ZFE (Zero Forcing Equalizer), qui propose de déterminer les coefficients définissant le filtre égaliseur de manière à ce que la chaine de transmission permettent de continuer à respecter le critère de Nyquist en présence du canal sélectif en fréquence. Cet égaliseur ne se préoccupe que de l'interférence, il ne prend pas en compte le bruit et pourra donc venir l'amplifier sur certaines fréquences.
- L'égaliseur de type MMSE (Minimum Mean Square equalizer), qui va prendre en compte l'interférence et le bruit en minimisant l'erreur quadratique moyenne, sur une séquence d'apprentissage, entre la séquence émise et la séquence reçue en sortie de l'égaliseur. La minimisation de l'erreur quadratique moyenne n'est cependant pas le critère idéal. En effet, ce que l'on souhaite minimiser est le taux d'erreur binaire et il n'y a pas de lien direct entre les deux.

D'autres types d'égaliseurs plus performants existent, bien entendu, fixes ou adaptatifs, selon que le canal est stationnaire ou pas. Ils font l'objet d'un cours de deuxième année (parcours télécommunication et réseaux).

2 Impact d'un canal de propagation multitrajets

Soit le chaine de transmission de la figure 1. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : fonction porte de largeur T_s et de hauteur égale à 1. Le canal passe-bas équivalent, de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ est donné par la figure 5, où $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal émis, $y_e(t)$ l'enveloppe complexe associée au signal reçu, α_0 le coefficient d'atténuation sur la ligne de vue directe, α_1 le coefficient d'atténuation sur le trajet réfléchi, τ_0 le retard sur la ligne de vue directe, τ_1 le retard sur le trajet réfléchi. L'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de transmission, $n_e(t)$, est ici réelle avec une densité spectrale de puissance égale à N_0 quelle que soit la fréquence.

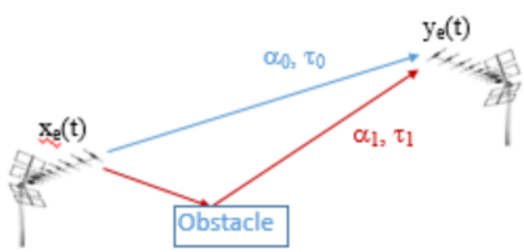

Figure 5: Canal multi trajets

2.1 Étude théorique

1. Ecrire $y_e(t)$ en fonction de $x_e(t)$ et des paramètres du canal (retards et coefficients d'atténuation).
2. En déduire la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ du canal passe-bas équivalent.
3. On prendra $\tau_0 = 0$ (ligne de vue directe), $\tau_1 = \tau_0 + T_s$ (trajet réfléchi), $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0,5$. Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 011001.
4. Tracer le diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$. Est-il possible de respecter le critère de Nyquist sur cette chaine de transmission ?
5. En supposant que l'on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$ et que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions avec un seuil à 0 (chaîne de transmission pour canal AWGN), calculer le TEB de la liaison en fonction de T_s et σ_w, σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
6. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_w^2 en fonction de N_0 et de T_s.
7. Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s, en fonction de T_s.
8. Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0, rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaine étudiée.

2.2 Implantation sous Matlab

1. Paramètres : la chaine de transmission sera implantée avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 24000$ Hz, pour transmettre un débit binaire $R_b = 3000$ bits par seconde.

2. Implantez la chaine de transmission sans canal et vérifiez que le TEB de la liaison est bien nul.

3. Implantez la chaine de transmission avec la partie filtrage réalisée par le canal de propagation mais sans introduction de bruit, en prenant, comme dans l'étude théorique, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau_0 + T_s$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0,5$.
   Notons qu'en numérique $T_s = N_s T_e$, où T_e représente la période d'échantillonnage et N_s le facteur de suréchantillonage.
   A partir de la chaine implantée :

   (a) Vérifiez que vous retrouvez bien les résultats obtenus dans votre étude théorique : forme du signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire 011001, diagramme de l'oeil.

   (b) Visualisez la constellation obtenue en réception. Est-elle conforme à ce que vous attendiez ?

   (c) Mesurez le TEB et expliquez la valeur obtenue.

4. Implanter la chaine de transmission complète avec le filtrage canal et l'ajout de bruit. Tracer le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels allant de 0 à 7 dB.

   (a) Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaine de transmission.

   (b) Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB de la chaine de transmission implantée et le TEB obtenu pour la même chaine de transmission sans filtrage canal (canal AWGN).

3 Égalisation ZFE

3.1 Présentation de l'égalisation ZFE

Le principe consiste à déterminer les coefficients définissant le filtre égaliseur (voir figure 4) de manière à ce que la chaine de transmission permettent de respecter le critère de Nyquist.
La sortie de l'égaliseur peut être écrite de la manière suivante :

$$y(n_0 + mN_s) = \sum_{k=0}^{N} c_k z(n_0 + (m-k)N_s)$$

pour un ordre N, en fonction de son entrée z et des coefficients c_k le définissant en numérique (filtre à réponse impulsionnelle finie : $C = [c_0\ c_1\ ...c_N]$, avec $c_k = h_{eg}(kN_s)$).

En plaçant un dirac à l'entrée de la chaine de transmission nous allons obtenir, en sortie de l'égaliseur,

$$y(n) = g(n) = h(n) * h_c(n) * h_r(n) * h_{eg}(n), \text{ échantillonné à } n_0 + mN_s$$

Nous souhaitons donc trouver les coefficients c_k de l'égaliseur tels que sa sortie, y, pour un Dirac en entrée de la chaine soit telle que $y(n_0) \neq 0$ et $y(n_0 + pN_s) = 0$, $\forall p \in Z^*$ (critère de Nyquist).

Nous avons donc à résoudre le système suivant :

$y(n_0) = c_0 z(n_0) + c_1 z(n_0 - N_s) + c_2 z(n_0 - 2N_s) + ... + c_N z(n_0 - NN_s) \neq 0\ (= 1)$
$y(n_0 + N_s) = c_0 z(n_0 + N_s) + c_1 z(n_0) + c_2 z(n_0 - N_s) + ... + c_N z(n_0 + (1 - N)N_s) = 0$
...
$y(n_0 + NN_s) = c_0 z(n_0 + NN_s) + c_1 z(n_0 + (N - 1)N_s) + c_2 z(n_0 + (N - 2)N_s) + ... + c_N z(n_0) = 0$
...
$y(n_0 + KN_s) = c_0 z(n_0 + KN_s) + c_1 z(n_0 + (K - 1)N_s) + c_2 z(n_0 + (K - 2)N_s) + ... + c_N z(n_0 + (K - N)N_s) = 0$

Soit avec une écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z(n_0) & z(n_0-N_s) & z(n_0-2N_s) & ... & z(n_0-NN_s)\\ z(n_0+N_s) & z(n_0) & z(n_0-N_s) & ... & z(n_0+(1-N)N_s)\\ z(n_0+2N_s) & z(n_0+N_s) & z(n_0) & ... & z(n_0+(2-N)N_s)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ z(n_0+NN_s) & z(n_0+(N-1)N_s) & z(n_0+(N-2)N_s) & ... & z(n_0)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ z(n_0+KN_s) & z(n_0+(K-1)N_s) & z(n_0+(K-2)N_s) & ... & z(n_0+(K-N)N_s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\.\\.\\.\\c_N\end{pmatrix}$$

En considérant $z(n_0-lN_s)=0$ pour $l>0$, on peut encore écrire :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z(n_0) & 0 & 0 & ... & 0\\ z(n_0+N_s) & z(n_0) & 0 & ... & 0\\ z(n_0+2N_s) & z(n_0+N_s) & z(n_0) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ z(n_0+NN_s) & z(n_0+(N-1)N_s) & z(n_0+(N-2)) & ... & z(n_0)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ z(n_0+KN_s) & z(n_0+(K-1)N_s) & z(n_0+(K-2)N_s) & ... & z(n_0+(K-N)N_s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\.\\.\\.\\c_N\end{pmatrix}$$

Deux cas se présentent alors selon les valeurs respectives de K et N :

- si $K=N$ alors $[Z]$ est une matrice de Toeplitz inversible et les coefficients de l'égaliseur sont donnés par :

$$\boxed{C=[c_0\ c_1\ ...c_N]=[Z]^{-1}\,Y_0}$$

 où $[Z]=toeplitz\,(Z)$, avec Z le vecteur échantillonné à n_0+mN_s à l'entrée de l'égaliseur, obtenu pour un Dirac placé à l'entrée de la chaine ($Z=[z(n_0)\ z(n_0+N_s)\ ...\ z(n_0+NN_s)]$) et $Y_0=[1\ 0\ 0...\ 0]$.

- si $K\neq N$ alors $[Z]$ est une matrice avec N colonnes et K lignes et les coefficients de l'égaliseur sont donnés par (utilisation de la pseudo inverse pour résoudre le système surdimensionné, ^{t} signifie transpose) :

$$\boxed{C=[c_0\ c_1\ ...c_N]=\left([Z]^t\,[Z]\right)^{-1}[Z]^t\,Y_0}$$

3.2 Étude à réaliser

1. Déterminer les coefficients de l'égaliseur à implanter pour égaliser le canal multitrajet considéré précédemment (figure 5 avec $\tau_0=0$, $\tau_1=\tau_0+T_s$, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0,5$).
2. Implanter la chaine avec égalisation sous Matlab.
   (a) Sans bruit :
      i. Déterminer, par simulation, les coefficients de l'égaliseur en plaçant un Dirac à l'entrée de la chaine (phase d'apprentissage du canal de propagation). Ils pourront être comparés à ceux calculés précédemment.
      ii. Tracer la réponse en fréquence du canal de propagation, la réponse en fréquence de l'égaliseur, le produit des deux. Que peut-on conclure ?
      iii. Tracer la réponse impulsionnelle de la chaine de transmission échantillonnée à N_s avec et sans égalisation. Que peut-on conclure ?
      iv. Générer une information binaire à transmettre dans la chaine avec égalisation. Comparer les constellations obtenues avant et après égalisation.
   (b) Avec bruit : ajouter le bruit dans la chaine de transmission, tracer le TEB obtenu avec égalisation et le comparer à celui obtenu sans égalisation.

4 Égalisation MMSE

4.1 Présentation de l'égalisation MMSE

L'égaliseur ZFE ne se préoccupe que de l'interférence en essayant de faire respecter le critère de Nyquist à la chaine de transmission, il ne prend pas du tout en compte le bruit. L'égaliseur MMSE va prendre en compte l'interférence et le bruit en minimisant l'erreur quadratique moyenne, sur une séquence d'apprentissage, entre la séquence émise et la séquence reçue en sortie de l'égaliseur.
L'erreur à l'instant $n_0 + mN_s$ est donnée par

$$e(m) = y_m - a_m$$

si a_m réprésente le mième symbole émis (à l'instant mN_s), et y_m la sortie de l'égaliseur à l'instant $n_0 + mN_s$ ($y_m \equiv y(n_0 + mN_s)$).

En notant $C = [c_0\ c_1\ ...c_N]$ le vecteur des coefficients définissant l'égaliseur, nous avons

$$y(n_0 + mN_s) = \sum_{k=0}^{N} c_k z(n_0 + (m-k)N_s)$$

si $z(n_0 + mT_s)$ représente l'échantillon de signal reçu à l'entrée de l'égaliseur à l'instant $n_0 + mN_s$.

En notant $\underline{Z}(m) = [z(n_0 + mN_s)\ z(n_0 + (m-1)N_s)\ ...\ z(n_0 + (m-N)N_s)]$, on peut écrire :

$$y(n_0 + mN_s) = C^t \underline{Z}(m)$$

et donc

$$e(m) = C^t \underline{Z}(m) - a_m$$

On en déduit l'erreur quadratique

$$e^2(m) = \left(C^t \underline{Z}(m) - a_m\right)\left(C^t \underline{Z}(m) - a_m\right) = C^t \underline{Z}(m)\underline{Z}(m)^t C - 2C^t a_m \underline{Z}(m) + a_m^2$$

et sa valeur moyenne :

$$E\left[e^2(m)\right] = C^t E\left[\underline{Z}(m)\underline{Z}(m)^t\right] C - 2C^t E\left[a_m \underline{Z}(m)\right] + E\left[a_m^2\right]$$

soit

$$grad_C\left(E\left[e^2(m)\right]\right) = 2E\left[\underline{Z}(m)\underline{Z}(m)^t\right] C - 2E\left[a_m \underline{Z}(m)\right]$$

qui donne quand on le prend égal à 0 :

$$E\left[\underline{Z}(m)\underline{Z}(m)^t\right] C_{opt} = E\left[a_m \underline{Z}(m)\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_{zz}(0) & r_{zz}(1) & ... & r_{zz}(N) & \\ r_{zz}(1) & r_{zz}(0) & ... & r_{zz}(N-1) & \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ r_{zz}(N) & r_{zz}(N-1) & ... & r_{zz}(0) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{za}(0) \\ r_{za}(1) \\ ... \\ r_{za}(N) \end{pmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$[R_{zz}]\, C_{opt} = R_{za}$$

où $R_{zz} = toeplitz\,(r_{zz})$, si r_{zz} représente l'autocorrélation de $\underline{Z}$, et R_{za} est l'intercorrélation entre $\underline{Z}$ et le vecteur $[a_N ... a_0]$. Nous arrivons donc à

$$\boxed{C_{opt} = R_{zz}^{-1} R_{za}}$$

4.2 Etude à réaliser

Implanter la chaine avec égalisation sous Matlab.

1. Sans bruit :
   (a) Déterminer, par simulation, les coefficients de l'égaliseur en plaçant une séquence d'apprentissage à l'entrée de la chaine.

(b) Tracer la réponse en fréquence du canal de propagation, la réponse en fréquence de l'égaliseur, le produit des deux. Que peut-on conclure ?

(c) Tracer la réponse impulsionnelle de la chaine de transmission échantillonnée à N_s avec et sans égalisation. Que peut-on conclure ?

(d) Générer une information binaire à transmettre dans la chaine avec égalisation. Comparer les constellations obtenues avant et après égalisation.

2. Avec bruit : ajouter le bruit dans la chaine de transmission, tracer le TEB obtenu avec égalisation et le comparer à celui obtenu sans égalisation.