APUNTE

DE

INTRODUCCIÓN

A LA

FÍSICA

Alberto E. Wolfenson

Entiendo que uno de los inconvenientes de la materia Introducción a la Física es que no hay textos cuyo contenido se ajuste al temario contemplado en el plan de estudios de la FaMAF. Esto me motivó para la escritura de un apunte que cubra el temario de la materia Introducción a la Física del plan de estudio de las carreras de las Licenciaturas en Física, Matemática y Astronomía y del Profesorado en Física.

La escritura de este apunte se ha basado en mi experiencia docente en la materia y notas de clase, las cuales, a su vez, fueron inspiradas en las notas de clase del Prof. Oscar Villagra, las cuales fueron inspiradas en las notas de clase de anteriores responsables de la materia. Se ha tratado de hacer un desarrollo conciso de los temas, seleccionando las demostraciones que se consideran más simples para la comprensión de los estudiantes y se han incorporado muchas ilustraciones que intentan clarificar lo expresado en el texto. Este apunte incluye no sólo temas específicos de Física, sino también se incluyen temas de matemática que son necesarios para el adecuado desarrollo de los conceptos de Física a desarrollar.

Agradezco a los Dres. Olga Nasello, Cecilia González, Laura Buteler, Enrique Coleoni, Clemar Schurrer y Jorge Trincavelli por la lectura de la primera y/o segunda versión de los apuntes habiendo aportando sugerencias que fueron muy importantes para que este material sea lo más claro posible para los estudiantes.

En esta segunda versión se han incorporado modificaciones en el orden de los temas, se han mejorado algunas demostraciones y principalmente se han agregado más ejemplos para una mejor comprensión de los temas.

Índice:

Capítulo 1

Consideraciones generales

No es simple dar una definición de que es la Física y en la literatura existen muchos intentos de definición, por ejemplo:

- Física es la ciencia que se ocupa de la estructura de la materia y las interacciones entre los constituyentes fundamentales del universo observable. En el sentido más amplio, la Física se ocupa de todos los aspectos de la naturaleza, tanto en los niveles macro y submicroscópico.
- La Física es una ciencia que tiene como objetivo medir y relacionar los resultados de estas medidas entre sí y con otras magnitudes que no son directamente medibles, y deducir de estas relaciones leyes cuantitativas que puedan ser comprobadas posteriormente mediante nuevas medidas.
- Ciencia que estudia las propiedades de la materia y de la energía, que pueden ser medidas, y de las leyes que no modifican la estructura íntima de los cuerpos.

Nosotros sólo diremos que la Física es la ciencia que estudia, analiza y describe eventos que ocurren en la naturaleza y no involucran los procesos de la vida.

La Física es una ciencia experimental, es decir que toda afirmación que se haga en Física debe estar verificada por la experiencia. De la experimentación nacen las leyes de la Física. Estas leyes sintetizan los resultados de las experiencias pues han sido deducidas de estos mismos experimentos. Las leyes además permiten predecir nuevos eventos físicos que también deben ser verificados experimentalmente.

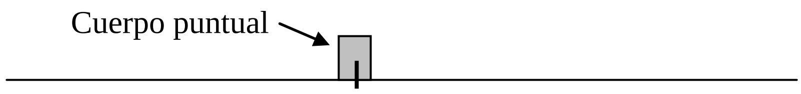
Si deseamos estudiar Física, o sea realizar una descripción de la naturaleza, lo podemos hacer de una manera cualitativa. Sin embargo, para hacer una descripción más precisa, es decir si deseamos cuantificar esta descripción, vamos a necesitar de un idioma que represente los conceptos con la precisión requerida. El idioma de la Física es la matemática. Los conceptos de la Física son representados mediante expresiones matemáticas. Por esta razón iremos desarrollando la matemática que necesitamos para expresar los conceptos de la Física.

En este curso de Física iniciaremos el estudio de lo que se denomina *Mecánica Elemental*, y en particular comenzaremos estudiando la *cinemática*. Por cinemática entendemos el estudio del movimiento de los cuerpos respondiendo a la pregunta *¿cómo se mueven?*, sin interesarnos la causa por la cuál se mueven. El análisis sobre qué hace que los cuerpos se muevan de determinada forma lo abordaremos más adelante cuando estudiemos la *dinámica* de los cuerpos. Comenzaremos estudiando el movimiento de cuerpos, es decir trataremos de describir qué posiciones del espacio van ocupando a medida que transcurre el tiempo.

Para simplificar esta descripción inicialmente consideraremos a estos cuerpos como puntos materiales (cuerpos puntuales, sin dimensiones). Por lo tanto sólo analizaremos sus movimientos de traslación sin considerar rotaciones alrededor de ejes propios. Por ejemplo, la tierra para nosotros es un punto que gira alrededor del sol y no tendremos en cuenta la rotación que tiene alrededor de su propio eje.

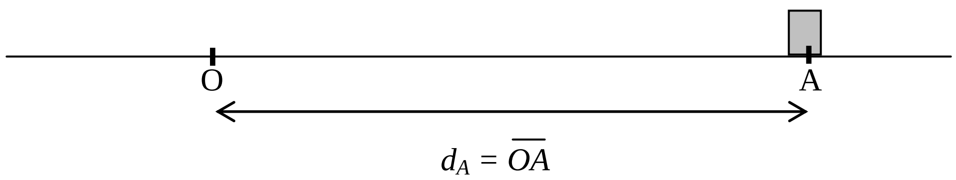
Movimiento de un cuerpo en la recta

Para abordar el estudio del movimiento de traslación de un cuerpo comenzaremos analizando los casos más sencillos. Por esta razón inicialmente estudiaremos el movimiento de cuerpos que se mueven sobre una recta. En este tipo de movimiento la recta es el universo para el cuerpo y en ella se mueve. Toda vez que la posición de un cuerpo se pueda describir por medio de un punto diremos que ese cuerpo es un cuerpo puntual.

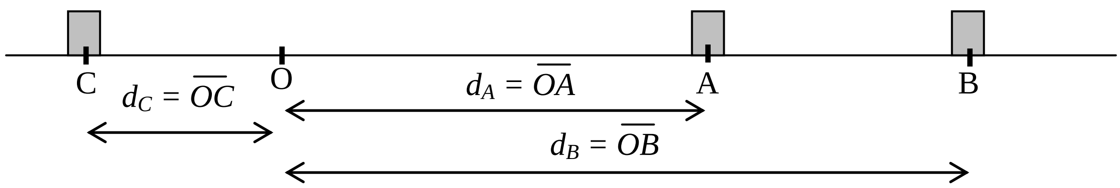


Como nuestro objetivo es analizar el movimiento del cuerpo necesitamos poder determinar la ubicación o posición del cuerpo sobre la recta. Para ello fijamos un punto sobre la recta, respecto del cual referiremos la posición del cuerpo. A ese punto lo llamaremos origen.

Una posibilidad para determinar la posición del cuerpo es dar la distancia que existe entre el cuerpo y el origen, es decir dar la longitud del segmento de recta que se extiende desde el punto elegido como origen y el punto que corresponde a la posición del cuerpo. Lo que debemos analizar es si de esa manera queda identificada de manera unívoca la posición del cuerpo.



El problema es que con esta manera de definir la posición del cuerpo se nos presenta una ambigüedad. Si damos la posición del cuerpo mediante la distancia d_A estamos ante dos posibilidades, una es que esté a la derecha de O y la otra es que esté a la izquierda de O. Entonces vemos que de esta forma no podemos definir de manera unívoca la posición del cuerpo y por lo tanto debemos encontrar un modo de eliminar esta dualidad. La forma más simple y directa es agregar si el cuerpo está a la derecha o a la izquierda del origen.



Para indicar la posición de estos cuerpos, utilizando la modificación en la definición, nosotros diríamos:

A está a una distancia d_A y a la derecha de O
B está a una distancia d_B y a la derecha de O
C está a una distancia d_C y a la izquierda de O

Lamentablemente esta manera de expresar la ubicación de los puntos tiene dos inconvenientes: a) la noción de derecha o izquierda de la recta no está unívocamente determinada, pues depende desde qué lado de la recta se está observando. b) Esta forma de especificar la posición de un cuerpo es complicada, muy extensa, no es operativa pues debería ser definida mediante un número.

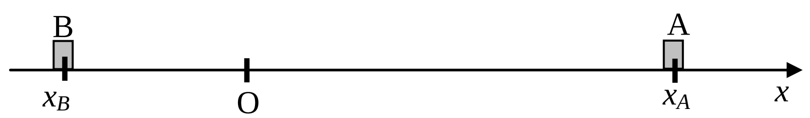
Sistema de coordenadas

Para poder expresar de manera precisa la ubicación de los puntos (o cuerpos puntuales) en nuestro universo (recta) definimos dos entes:

1) Sistema de coordenadas unidimensional.
2) Las coordenadas que estarán referidas al sistema definido en el punto 1).

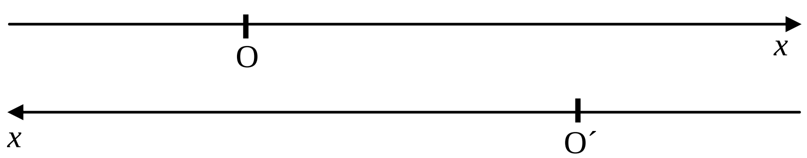
1) El sistema de coordenadas unidimensional se define mediante:
   a) Una recta sobre la que se desplaza el cuerpo cuyo movimiento queremos describir.
   b) Un punto arbitrario elegido como origen de coordenadas.
   c) Una unidad de medida de longitudes.
   d) Una, y sólo una, punta de flecha que indica hacia dónde crecen las coordenadas.

2) La coordenada se define por medio de:
   a) Un número que es la distancia desde el origen de coordenadas al punto
   b) Un signo que indica si el punto se encuentra desde el origen hacia la flecha (+) o en sentido opuesto (-)



$x_B = -\overline{OB}$ $\qquad$ $x_A = +\overline{OA}$

Entonces, cuando deseamos describir el movimiento de un cuerpo que se desplaza sobre una recta debemos colocar el sistema de coordenadas sobre dicha recta. *El origen de coordenadas "O" y el sentido positivo es totalmente arbitrario.*



En la figura de arriba, podemos observar dos sistemas de coordenadas diferentes y podemos expresar las coordenadas del cuerpo en cualquiera de ellos. Lo importante es que, elegido uno de ellos, éste se mantenga mientras estemos efectuando la descripción del movimiento del cuerpo.

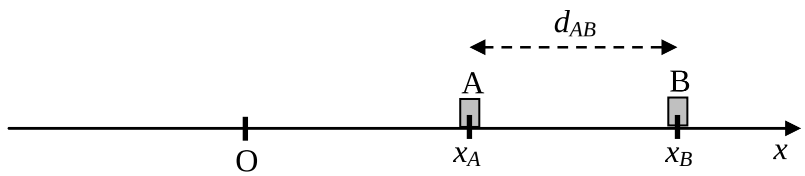
Por lo tanto la utilización de un sistema de coordenadas y de la coordenada del cuerpo en dicho sistema es la forma matemática de describir la posición del cuerpo en el espacio.

Distancia entre dos puntos

En el espacio usual, también denominado espacio euclidiano, la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une. Es decir la distancia que hay que recorrer para ir directamente de un punto al otro. Por supuesto que la distancia, que es la longitud de un segmento de recta, es positiva (d > 0).

Veamos ahora cómo podemos calcular la distancia entre dos puntos en función de las coordenadas de ambos puntos.

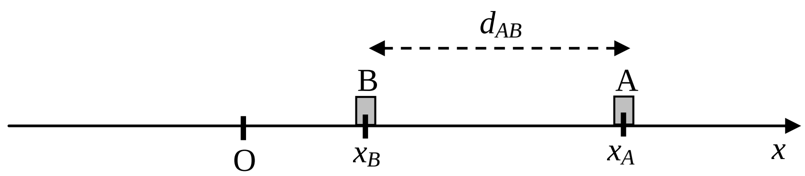
a)



$$x_A = \overline{O}\overline{A} \qquad\qquad x_B = \overline{O}\overline{B}$$

$$d_{AB} = \overline{O}\overline{B} - \overline{O}\overline{A} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

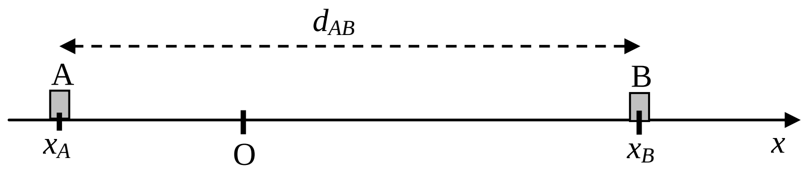
b)



$$x_A = \overline{O}\overline{A} \qquad\qquad x_B = \overline{O}\overline{B}$$

$$d_{AB} = \overline{O}\overline{A} - \overline{O}\overline{B} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_A - x_B$$

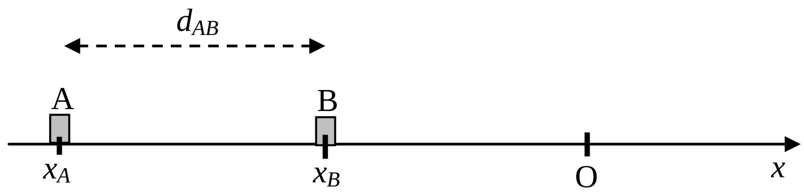
c)



$$x_A = -\overline{OA} \qquad\qquad x_B = \overline{OB}$$

$$d_{AB} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = -x_A + x_B \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

d)



$$x_A = -\overline{OA} \qquad\qquad x_B = -\overline{OB}$$

$$d_{AB} = \overline{OA} - \overline{OB} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = -x_A + x_B \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = x_B - x_A$$

De los casos analizados anteriormente vemos que la distancia depende de las coordenadas de los cuerpos *A* y *B* en el sistema de coordenadas. En ciertos casos la distancia es x_A-x_B y en otras x_B-x_A. Para no tener que analizar en cada caso en particular qué diferencia es la que debemos hacer, y teniendo en cuenta que la distancia es un número positivo, definimos

$$d_{AB} = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

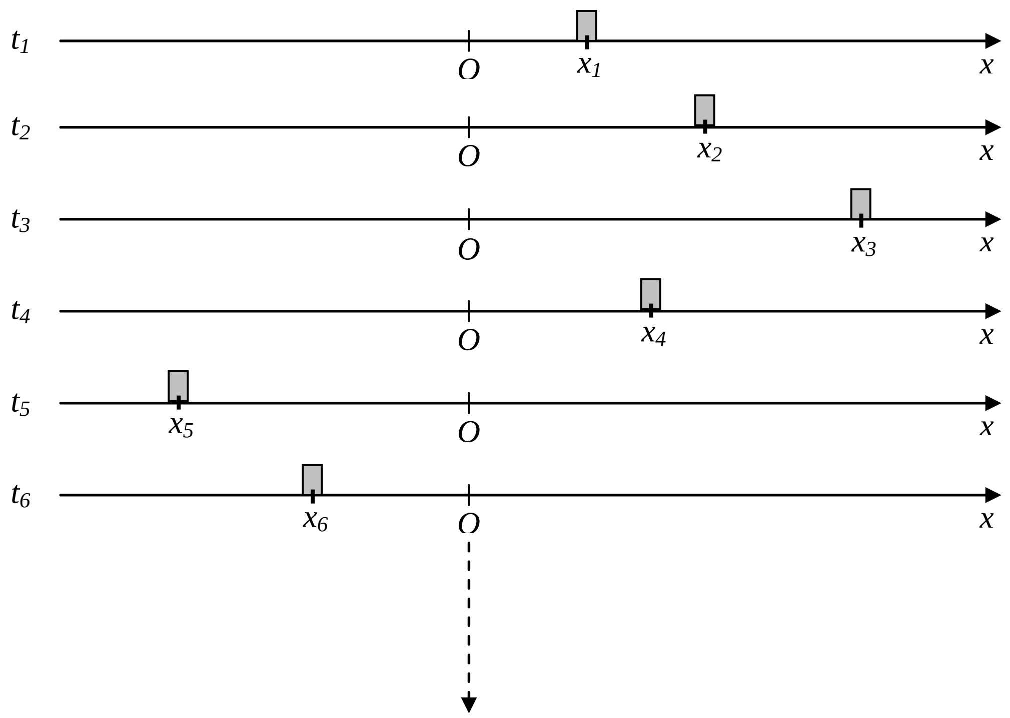
Es decir que en nuestro universo la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de ambos puntos.

Capítulo 2:

Relación entre posición y tiempo

Hemos dicho que vamos a describir el movimiento de los cuerpos que se mueven sobre una trayectoria rectilínea. Hasta ahora hemos desarrollado los elementos necesarios para dar su posición (sistema de coordenadas y coordenadas de los cuerpos) en la recta. Decir que estudiaremos cómo se mueven significa analizar cómo se modifica su posición a medida que transcurre el tiempo. Si bien el concepto de tiempo es algo difícil de definir, pensemos por ahora que el tiempo es simplemente aquello que medimos con un reloj y siempre aumenta.

Supongamos que tenemos un cuerpo que se desplaza sobre una recta. A esa recta le adosamos un sistema de coordenadas para poder dar su posición de manera precisa. Ahora saquemos fotos del sistema a distintos tiempos.



Entonces tenemos que las coordenadas son sucesivamente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, …… correspondientes a los instantes de tiempo t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, ……que son sucesivos y crecientes ($t_1<t_2<t_3<t_4<t_5$.....). Con estos valores de x y t podemos confeccionar una tabla

t	x
t_1	x_1
t_2	x_2
t_3	x_3
t_4	x_4
t_5	x_5
:	:

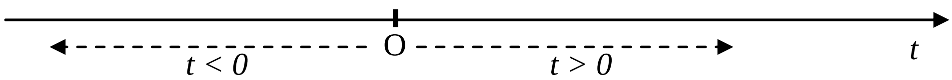
A las coordenadas x_i sabemos cómo medirlas, analicemos ahora cómo hacer con los valores de tiempo (t_i). Podríamos tomar para t la "hora civil" por ejemplo

t_1 = las 12 hs 35 m 48,3 s del 9 de marzo de 2007
t_1 = las 9 hs 28 m 15,2 s del 10 de octubre de 1993

Al hacer esto estamos aceptando una convención, pues estamos asignando a t el tiempo transcurrido a partir de cierto momento histórico que arbitrariamente se asignó como cero. En los ejemplos, el origen de la medición de los tiempos coincide con el nacimiento de Jesús y esto es lo que generalmente se tomó como eje temporal para narrar la historia de la humanidad en el hemisferio occidental. Y se toma como tiempos negativos a los que corresponden a instantes previos al tomado como cero (p.e. -59 años corresponde a 59 años AC). Este origen de los tiempos es arbitrario y puede ser significativo para los cristianos pero no para otras civilizaciones. Nosotros podemos hacer lo mismo que ya hemos hecho con el origen del sistema de coordenadas y elegir arbitrariamente el origen del tiempo que sea más conveniente para nuestra descripción del movimiento. Mantendremos las unidades (h,m,s) y el sentido será creciente hacia el futuro. Por lo tanto, elegimos el origen de los t en la tabla de manera que sea más cómodo y consideraremos que:

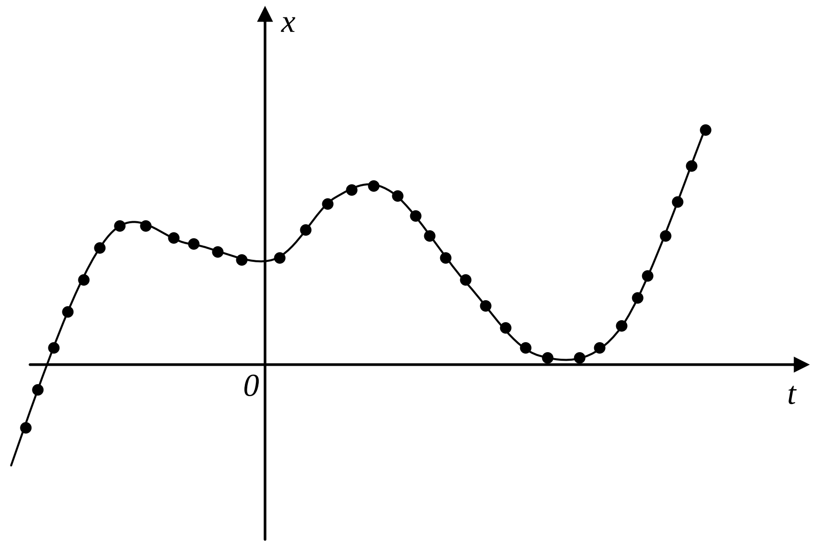
- El tiempo del origen es igual a 0
- Tiempos posteriores al origen son positivos ($t > 0$)
- Tiempos anteriores al origen son negativos ($t < 0$)

Con estos elementos podemos representar los valores de tiempo de manera similar a lo que hicimos con los de espacio. Es decir que tendremos un sistema de coordenadas temporales donde cada punto de la recta representa un instante de tiempo. La distancia entre dos puntos de este eje se denomina intervalo de tiempo.



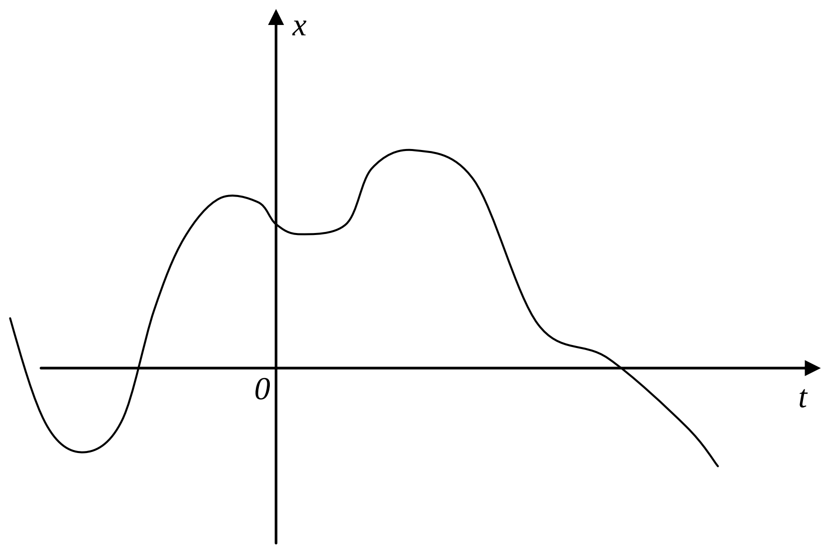
Función de movimiento

Para describir el movimiento de los cuerpos tendremos coordenadas espaciales x y temporales t relacionadas. La relación está presente en la tabla que hemos confeccionado con los valores de t_i y x_i donde queda explícito para qué valores de tiempos conocemos con certeza donde estaba el cuerpo pues lo hemos observado (medido). Sin embargo, para todos los instantes de tiempo entre los tiempos t_i medidos desconocemos cual es la posición del cuerpo. Podemos realizar nuevos experimentos tomando mayor cantidad de datos experimentales (x_i, t_i), pero nunca podremos conocer experimentalmente la posición del cuerpo para todos los tiempos. Si graficamos los valores de la tabla colocando en el eje de las abscisas los valores de t y en el de las ordenadas, los correspondientes de x este conjunto de puntos muestra la información experimental que disponemos sobre el movimiento del cuerpo. Con esta información podríamos, eventualmente, encontrar una función matemática $x = f(t)$ la cual, si la evaluamos en los instantes de tiempo de nuestra tabla, su valor nos da la coordenada del cuerpo en ese instante. Esta función *x(t)* se llama *función de movimiento del cuerpo* y es la descripción matemática del movimiento del cuerpo. Nosotros supondremos, hasta tener evidencia experimental en contrario, que esta función evaluada en cualquier valor de t nos da cual es la coordenada del cuerpo. Si realizamos nuevas mediciones experimentales y esta función de movimiento no logra describir alguna o algunas de las nuevas mediciones deberemos buscar una nueva función de movimiento *x(t)* que describa la totalidad de la información experimental que tengamos sobre el movimiento del cuerpo.



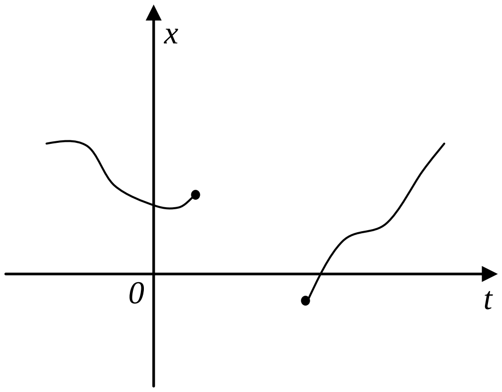
Veamos ahora cómo pueden ser las gráficas de las funciones de movimiento de un cuerpo:

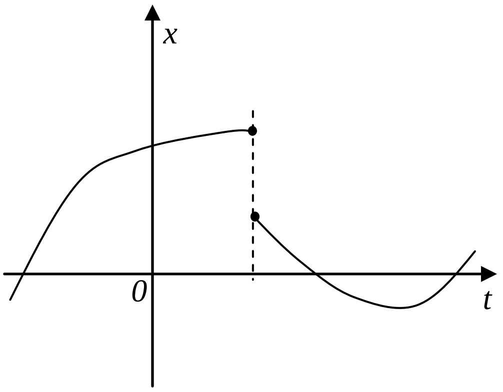
a)



En la figura se muestra una posible función de movimiento de un cuerpo, para cada instante de tiempo está determinada la posición del mismo, es decir su coordenada *x*.

b)

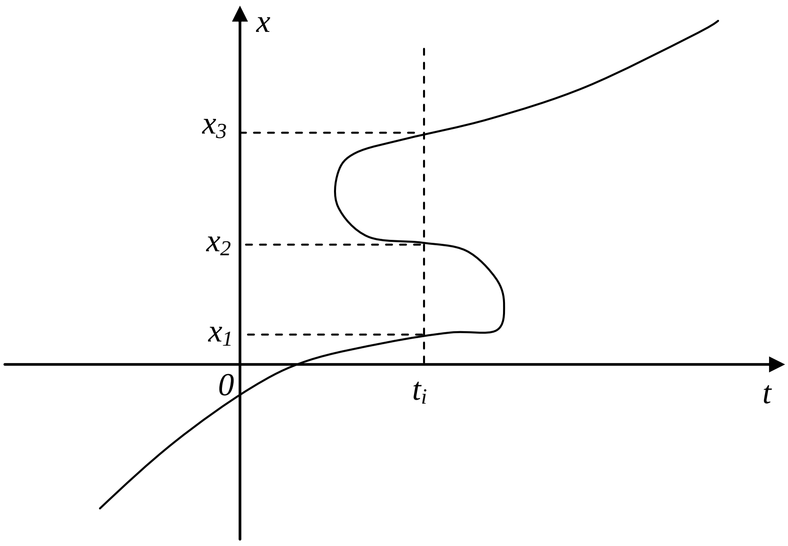




En la figura de arriba se muestran dos gráficos que corresponden a funciones del tiempo; sin embargo estos no pueden representar a funciones de movimiento ya que describirían situaciones absurdas.

El gráfico de la izquierda nos describiría el movimiento de un cuerpo que está en una determinada posición en un instante de tiempo y luego, durante un cierto intervalo de tiempo, no está definida su posición. Este comportamiento podría explicarse suponiendo que el cuerpo pasó a un universo paralelo y luego regresó; pero como de esto no existe evidencia experimental no es una descripción Física admisible. En el gráfico de la derecha se describiría la posición de un cuerpo que en un determinado instante de tiempo está en un lugar e inmediatamente después está en otra posición diferente sin haber pasado por todas las otras posiciones que unen dichos puntos. Por lo tanto las funciones que describen el movimiento de cuerpos deben ser funciones continuas.

c)



Este gráfico no corresponde a una función y tampoco puede representar a la función de movimiento de un cuerpo pues para determinados instantes, por ejemplo t_i, el cuerpo se encuentra en varias posiciones diferentes simultáneamente.

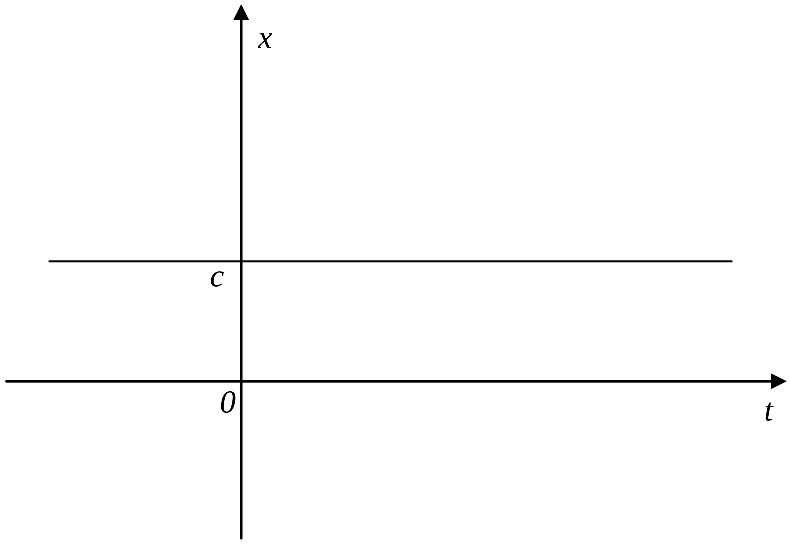
En resumen, la relación entre los valores de las coordenadas (x_i) y los tiempos (t_i) para que representan el movimiento de un cuerpo debe ser una función continua (es decir que su gráfica no puede tener saltos) y además debe estar definida en todo el intervalo de interés. Más adelante veremos si es necesario imponer mayores condiciones a una función para que pueda representar a la función de movimiento de un cuerpo.

Ejemplos de funciones de movimiento

A continuación vamos a analizar algunas funciones matemáticas que pueden representar funciones de movimiento. El análisis de estas funciones se realizará de manera muy sucinta pues este tema ha sido estudiado en el curso de nivelación.

Función constante

$x = c \quad \forall t$ y $c \in \Re$ (veamos el caso particular en que $c > 0$)

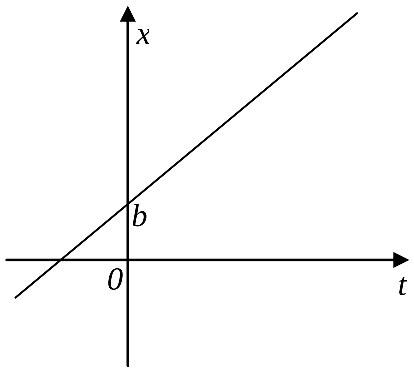


Este gráfico representa la función de movimiento de un cuerpo que está en reposo, para todo tiempo el cuerpo se encuentra en la misma posición.

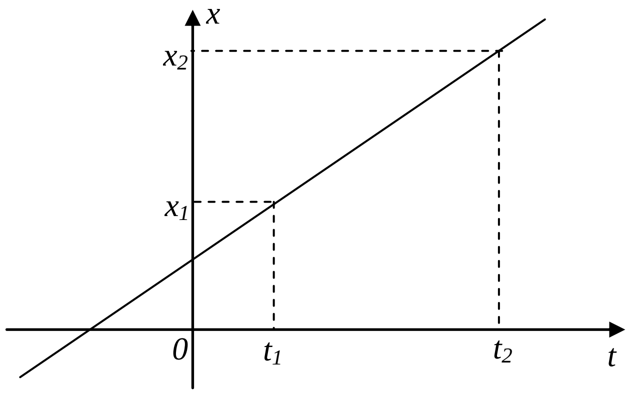
Función lineal

$x = a\,t + b \quad \forall t$ y a y $b \in \Re$

Sabemos que el gráfico de esta función es una recta y que la constante a es la pendiente y b la ordenada al origen. Al movimiento que es representado por esta función se lo denomina "Movimiento Rectilíneo Uniforme" (MRU). Ya veremos más adelante a qué se debe esta denominación.



Si nos plantean que un cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, y que en el instante de tiempo t_1 se encuentra en la posición x_1 y en otro instante de tiempo t_2 está en la posición x_2, fácilmente podemos determinar cuál es su función de movimiento. Saber que el cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme nos indica que la función de movimiento será una función lineal [$x(t)= a\ t + b$] cuya gráfica es una línea recta. Además sabemos que los pares ordenados (t_1 , x_1) y (t_2 , x_2) pertenecen a dicha recta. Por lo tanto el problema de encontrar la función de movimiento se reduce a resolver el problema matemático de encontrar la ecuación de la recta que pasa por los dos pares ordenados indicados.



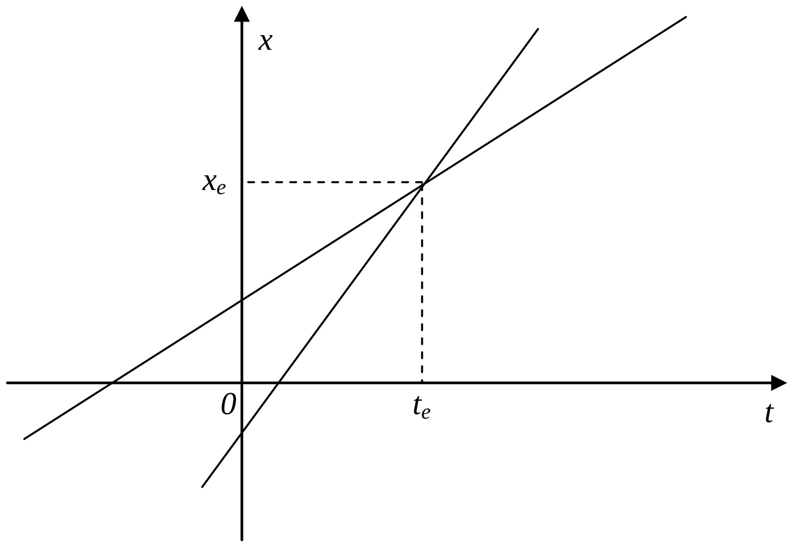
Con la información proporcionada podemos escribir las ecuaciones

$$x_1 = a\ t_1 + b$$
$$x_2 = a\ t_2 + b$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones podemos calcular los valores de las constantes *a* y *b* y de esta manera determinar la expresión de la función de movimiento.

Encuentro

Supongamos el caso particular de dos cuerpos (denominados *A* y *B*) que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, por lo tanto sus funciones de movimiento son descriptas por funciones lineales. Si las gráficas de estas funciones son rectas no paralelas entonces estas se cortarán en un punto. Físicamente entendemos esto como que en ese punto ambos cuerpos se encuentran, es decir los dos cuerpos están en la misma posición espacial en el mismo instante de tiempo.



Si las funciones de movimiento de los cuerpos *A* y *B* son

$x^A(t) = a_1\, t + b_1$
$x^B(t) = a_2\, t + b_2$

para determinar la coordenada *x* y el tiempo *t* de encuentro, que llamaremos t_e y x_e, debemos escribir la condición que satisfacen estas funciones en el punto de encuentro $x^A(t_e) = x^B(t_e) = x_e$

$x_e = a_1\, t_e + b_1$
$x_e = a_2\, t_e + b_2$

y resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas podemos determinar cuando y donde se encuentran los dos cuerpos.

En general decir que dos o más cuerpos se encuentran, cualesquiera sean las funciones que describan sus posiciones en función del tiempo, implica que se están en la misma posición (misma coordenada) al mismo tiempo. Si graficamos las funciones de movimiento de ambos cuerpos es posible visualizar el encuentro como el punto donde las gráficas se cortan.

Analicemos un par de ejemplos simples:

a) Supongamos que las funciones de movimiento de cuatro cuerpos son:

$$x^A(t) = 2\frac{m}{s^2}t^2 - 1\frac{m}{s}t - 2m$$

$$x^B(t) = 1\frac{m}{s}t + 2m$$

$$x^C(t) = 1\frac{m}{s}t - \frac{5}{2}m$$

$$x^D(t) = 1\frac{m}{s}t - 4m$$

La función de movimiento del cuerpo *A* es una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola, mientras que las funciones de movimiento de los otros tres cuerpos (*B*, *C* y *D*) son funciones lineales y sus gráficas serán rectas. Si analizamos estas tres funciones lineales veremos que tiene la misma pendiente y diferentes ordenadas al origen; es decir sus gráficos son rectas paralelas y por lo tanto no se cortarán en ningún punto. Físicamente esto implica que no habrá ningún encuentro simultáneo de los cuatro cuerpos ni entre los cuerpos *B*, *C* y *D*. Por lo tanto sólo analizaremos los posibles encuentros entre el cuerpo *A* con cada uno de los otros tres cuerpos.

Analicemos primero el problema de encuentro del móvil *A* con el *B*. Si se encuentran se debe verificar que

$$x_e = 2\frac{m}{s^2}t_e^2 - 1\frac{m}{s}t_e - 2m$$

$$x_e = 1\frac{m}{s}t_e + 2m$$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones vemos que existen dos valores de t_e (*-1s* y *2s*) que son solución del sistema de ecuaciones; esto implica que los cuerpos *A* y *B* se encontrarán dos veces. Reemplazando estos valores de tiempo en la ecuación de movimiento del cuerpo *A* o *B* podemos determinar la posición donde se produce el encuentro. Para $t = -1s$ se encontrarán en $x = 1m$; y cuando $t = 2s$ se los cuerpos se encontrarán en $x = 4m$.

Si ahora analizamos el encuentro de los cuerpos *A* y *C* las ecuaciones que planteamos son

$$x_e = 2\frac{m}{s^2}t_e^2 - 1\frac{m}{s}t_e - 2m$$

$$x_e = 1\frac{m}{s}t_e - \frac{5}{2}m$$

un único valor de t_e es solución de este sistema de ecuaciones y nos permite determinar que los cuerpos *A* y *C* se encontrarán en el instante de tiempo $t_e = 0{,}5s$ y en la posición $x_e = -2m$.

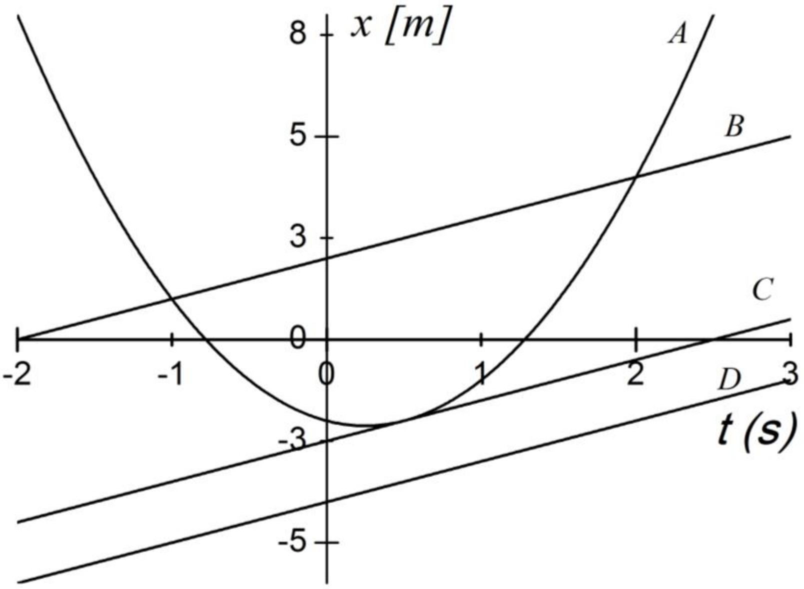
Finalmente, para estudiar el encuentro entre los cuerpos *A* y *D* planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = 2\frac{m}{s^2}t_e^2 - 1\frac{m}{s}t_e - 2m$$

$$x_e = 1\frac{m}{s}t_e - 4m$$

y podemos verificar que no existen ningún número t_e real que sea solución de este sistema. Físicamente esto significa que los cuerpos *A* y *D* no se encuentran nunca.

Las soluciones que hemos obtenido para el encuentro de los cuerpos *A*, *B*, *C* y *D* se corresponde con lo que se puede observar en la gráfica de las funciones de movimiento de estos cuerpos.



Supongamos ahora que deseamos determinar si dos cuerpos, llamados *A* y *B* se encuentran si sus funciones de movimiento

$$x^A(t) = -1\frac{m}{s}t + 2m$$

$$x^B(t) = \begin{cases} 1\frac{m}{s}t - 1m & t < 0s \\ 1\frac{m}{s^2}t^2 + 1\frac{m}{s}t - 1m & t \geq 0s \end{cases}$$

La función de movimiento del cuerpo *A* es una función lineal y describe la coordenada del cuerpo para todo tiempo. La coordenada del cuerpo *B* no puede ser descripta por una única función para todo tiempo y por ello está definida en dos tramos. Para tiempos menores a cero segundos la función de movimiento es lineal y para tiempos iguales o mayores a cero segundos por una función cuadrática. Para resolver el problema del encuentro entre estos cuerpos necesitamos analizar qué ocurre en cada uno de los intervalos de tiempo.

Para tiempos menores a cero segundos planteamos la condición de encuentro escribiendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = -1\frac{m}{s}t_e + 2m$$

$$x_e = 1\frac{m}{s}t_e - 1m$$

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos como solución que el tiempo de encuentro es $t_e = 1{,}5s$. Si bien este valor es solución para el sistema de ecuaciones no tiene sentido físico pues está fuera del intervalo de tiempos que estamos considerando. Por lo tanto no ocurre ningún encuentro para tiempos menores a cero segundos.

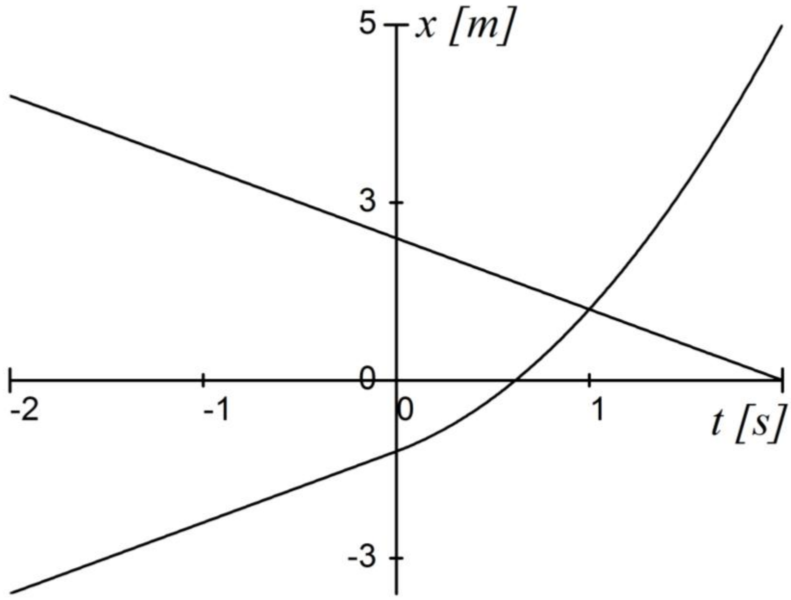
Para el intervalo de tiempos mayores a cero segundos la condición de encuentro la planteamos mediante el sistema de ecuaciones siguiente

$$x_e = -1\frac{m}{s}t_e + 2m$$

$$x_e = 1\frac{m}{s^2}t_e^2 + 1\frac{m}{s}t_e - 1m$$

Resolviendo el sistema de coordenadas obtenemos dos soluciones para el tiempo de encuentro siendo ellas $t_{e1} = -3s$ y $t_{e2} = 1s$. Aunque ambos valores satisfacen la ecuación sólo $t_{e2} = 1s$ está dentro del intervalo de tiempos que estamos considerando. Reemplazando este valor en cualquiera de las funciones de movimiento podemos calcular el valor de la coordenada en que se produce el encuentro ($x_e = 1m$).

Por lo tanto, los cuerpos *A* y *B* sólo se encontrarán una vez en $t = 1s$ y la coordenada del encuentro será $x = 1m$ que se corresponde con el punto donde se cortan los gráficos de las funciones de movimiento.



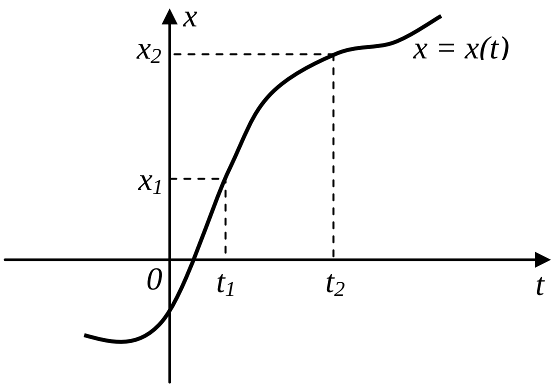
Distancia recorrida y desplazamiento

Si bien en el lenguaje cotidiano se suelen utilizar de manera indistinta las expresiones *"distancia recorrida"* y *"desplazamiento"* para nosotros tendrán dos significados totalmente diferentes.

Definimos como *distancia recorrida* a la longitud del camino que ha realizado el cuerpo en un determinado intervalo de tiempo. La *distancia recorrida* es siempre una magnitud positiva y, por ejemplo, en un automóvil sería lo que leemos en el cuentakilómetros. El *desplazamiento* de un cuerpo se define como cuánto se ha modificado su posición en un determinado intervalo de tiempo. Por lo tanto, si la función de movimiento de un cuerpo está dado por $x = x(t)$, su desplazamiento en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ será $x(t_2) – x(t_1)$.

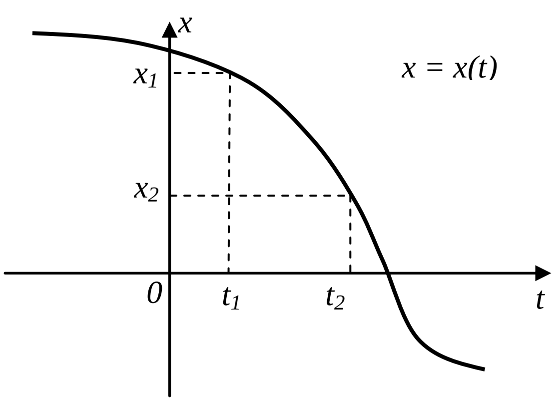
Para ejemplificar calculemos en desplazamiento que sufre un cuerpo en el intervalo tiempo $[t_1, t_2]$ para algunas funciones de movimiento particulares.

En la figura vemos la gráfica de la función de movimiento de un cuerpo.

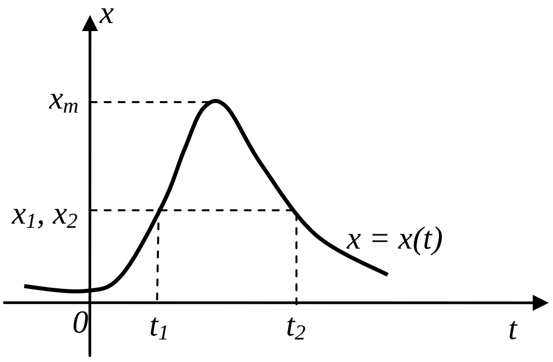


En este caso la distancia recorrida y el desplazamiento del cuerpo coinciden en sus valores y es $x_2 - x_1$

Supongamos ahora que la función de movimiento del cuerpo es la mostrada en la figura



El cuerpo cuya función de movimiento se grafica ha recorrido una distancia igual a $|x_2 – x_1|$ (> 0) y ha sufrido un desplazamiento igual a $x_2 – x_1$ (<0).



En este caso particular vemos que el cuerpo al final del intervalo se encuentra en la misma posición que al inicio del mismo ($x_1 = x_2$) por lo tanto el desplazamiento del cuerpo es $x_2 - x_1 = 0$ mientras la distancia que ha recorrido es $2(x_m - x_1)$.

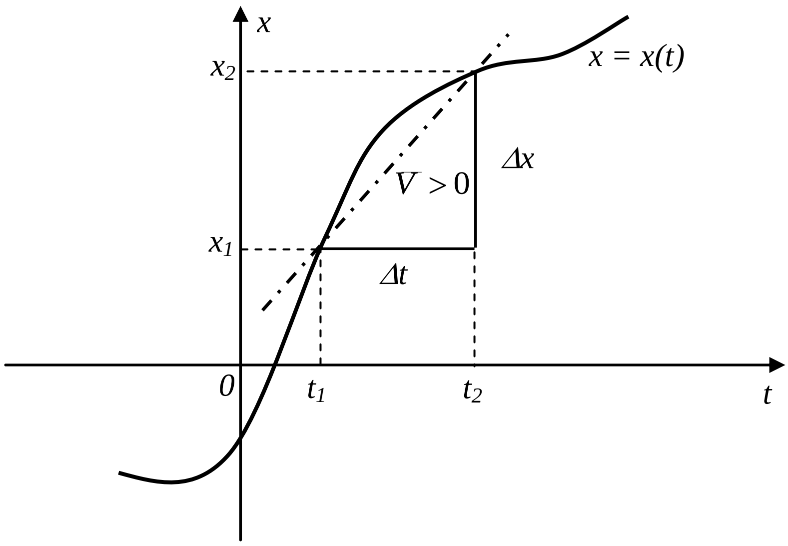
Capítulo 3:

Velocidad media

Con el propósito de describir el movimiento de un cuerpo que se mueve sobre una recta hemos ido incorporando algunos elementos esenciales para lograr dicho objetivo. En primer lugar definimos un sistema de coordenadas y las coordenadas; con ello quedó rigurosamente determinada la posición de los cuerpos en la recta. Luego definimos la función de movimiento del cuerpo ($x = f(t)$ ó $x = x(t)$) que nos permite determinar la coordenada del cuerpo en cada instante de tiempo.

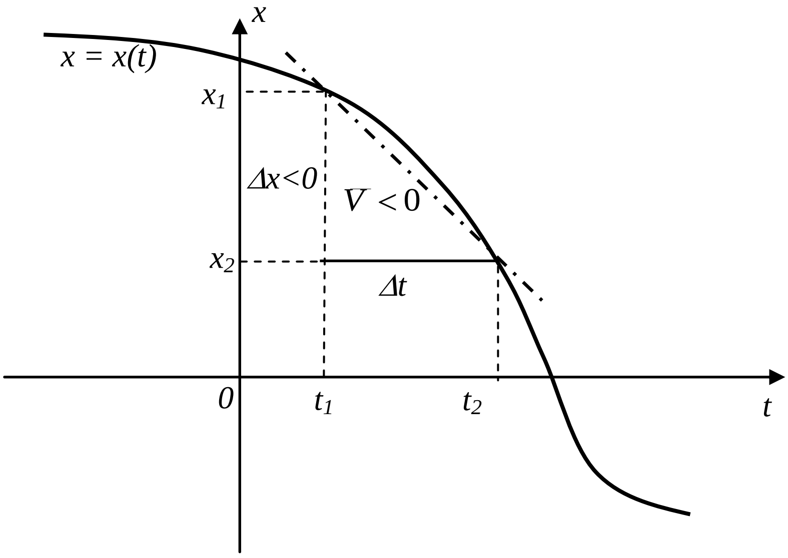
Sin embargo necesitamos definir otras magnitudes que nos permitan caracterizar mejor el movimiento de los cuerpos. Ahora definimos la *velocidad media* como el cociente entre el desplazamiento del móvil y el intervalo de tiempo en el cual lo ha realizado.

$$\bar{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textit{donde} \quad x_1 = x(t_1) \quad y \quad x_2 = x(t_2)$$

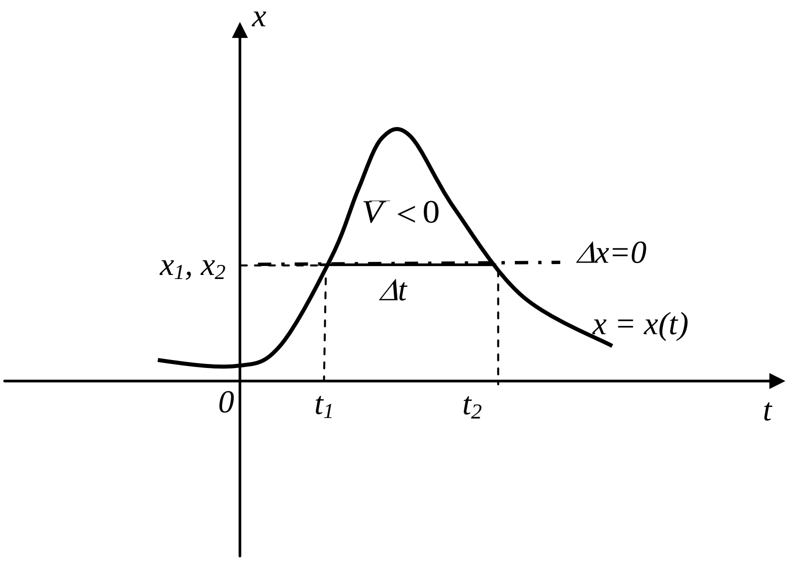


Esta magnitud nos da información acerca de la “rapidez” con que se desplaza el cuerpos, es decir cuán rápido modifica sus posición. Podemos ver, a partir del gráfico, que el valor de la velocidad media coincide con el valor de la pendiente de la recta secante a la curva $x(t)$ que pasa por los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

Cómo Δt es siempre positivo el signo de la *velocidad media* estará dado por el signo de Δx. En el gráfico de arriba la *velocidad media* es positiva y podemos ver en que en el intervalo de tiempo Δt el cuerpo se ha movido en el sentido de las coordenadas crecientes. En el gráfico de abajo la *velocidad media* es negativa y en este caso el cuerpo se ha movido en el sentido de las coordenadas decrecientes en el intervalo de tiempo considerado. El signo de la *velocidad media* depende del sistema de coordenadas al cual se refiera el movimiento del cuerpo. Si hubiéramos elegido un sentido diferente para las coordenadas crecientes los signos en la *velocidad media* cambiaría en ambos casos. Por lo tanto podemos decir que el valor absoluto de la velocidad media nos da información de cuán rápido se mueve el cuerpo que estamos observando y el signo nos dice hacia donde se mueve respecto al sistema de referencia utilizado para la descripción del movimiento.



Analicemos el caso particular en que el cuerpo haya ido modificando su posición con el tiempo pero, en el intervalo de tiempo considerado, la posición del cuerpo es la misma en el instante inicial y el final (ver gráfico de abajo). En este caso la velocidad media será igual a cero.



No debemos confundir nuestra definición de velocidad media con la definición de velocidad que traíamos del secundario según la cual $V = d/t$, donde d es la distancia recorrida por el cuerpo y t el tiempo utilizado para recorrer esa distancia. Esta última expresión es la definición de velocidad promedio. Por ejemplo cuando vemos una carrera (de autos, motos, bicicletas, etc.) el corredor partió del reposo y en el transcurso de la competencia su velocidad fue variando. Sin embargo los periodistas nos dan como información la velocidad promedio que tuvo, este dato de calcula como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo que demoró en hacerlo y nos sugiere con qué velocidad *constante* el corredor hubiese recorrido la misma distancia en el mismo tiempo que empleó. En contraste, de acuerdo a la definición que dimos de velocidad media en toda carrera, donde el punto de partida coincide con el de llegada, la velocidad media de los competidores será cero.

Como medimos las variaciones de posición en unidades de longitud ($[\Delta x]=L$ en cm, m, km, etc.) y los intervalos de tiempo en unidades de tiempo ($[\Delta t]=t$ en s, h, etc.) las unidades en que se mide la velocidad media son:

$$[\overline{V}]=\frac{[\Delta x]}{[\Delta t]}=\frac{L}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{cm}{s};\frac{m}{s};\frac{km}{h}\cdots$$

Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento

Analicemos ahora la velocidad media para algunas de las funciones de movimiento simples estudiadas en el capítulo 2. Antes de realizar este análisis definamos la notación que utilizaremos. Para calcular la velocidad media debemos realizar el siguiente cálculo:

$$\overline{V}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad donde \quad x_1=x(t_1) \quad y \quad x_2=x(t_2)$$

$$\Delta t=t_2-t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_2=t_1+\Delta t$$

$$\Delta x=x_2-x_1=x(t_2)-x(t_1)=x(t_1+\Delta t)-x(t_1)$$

Comencemos a calcular la velocidad media para algunos movimientos unidimensionales simples los cuales son descriptos por las funciones de movimiento analizadas previamente.

a) Función de movimiento constante: $x(t) = a_0$

$$x(t_1)=a_0 \quad y \quad x(t_2)=a_0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{V}=\frac{a_0-a_0}{t_2-t_1}=0 \quad \forall t$$

Vemos que independiente del intervalo de tiempo que tomemos la velocidad media es nula. Esto es compatible con el movimiento descrito por esta función de movimiento, la cual corresponde a un cuerpo en reposo.

b) Función de movimiento lineal: $x(t) = a_1\ t + a_0$

$$x(t_1) = a_1 t_1 + a_0 \quad y \quad x(t_2) = a_1 t_2 + a_0$$

$$\bar{V} = \frac{(a_1 t_2 + a_0) - (a_1 t_1 + a_0)}{t_2 - t_1} = \frac{a_1 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = cte \quad \forall t$$

Un cuerpo cuya función de movimiento es una función lineal tiene una velocidad media constante cuyo valor coincide con la pendiente de la recta. Ahora vemos que el movimiento descripto por esta función se denomina Movimiento Rectilíneo Uniforme pues el cuerpo se mueve sobre una recta y su velocidad media es constante independiente de los instantes t_1 y t_2 que elijamos para su cálculo.

En las dos funciones de movimiento en las cuales hemos calculado la velocidad media (función constante y función lineal) la velocidad media es constante, es decir independiente del intervalo de tiempo utilizado para su cálculo. En ambos casos la recta secante, que une los dos puntos tomados para el cálculo de la velocidad media, coincide con la función de movimiento.

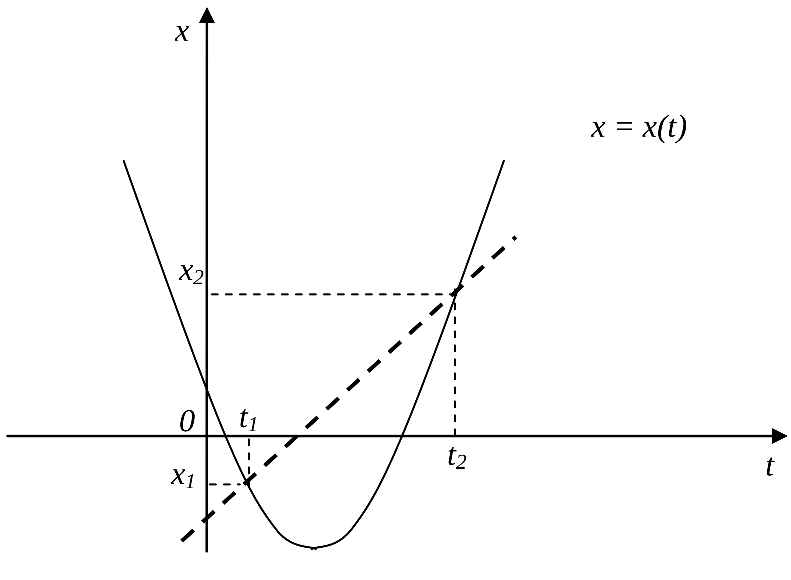
c) Función de movimiento parabólica: $x(t) = a_2\ t^2 + a_1\ t + a_0$

$$x(t_1) = a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0 \quad y \quad x(t_2) = a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0$$

$$\bar{V} = \frac{(a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0) - (a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0)}{t_2 - t_1}$$

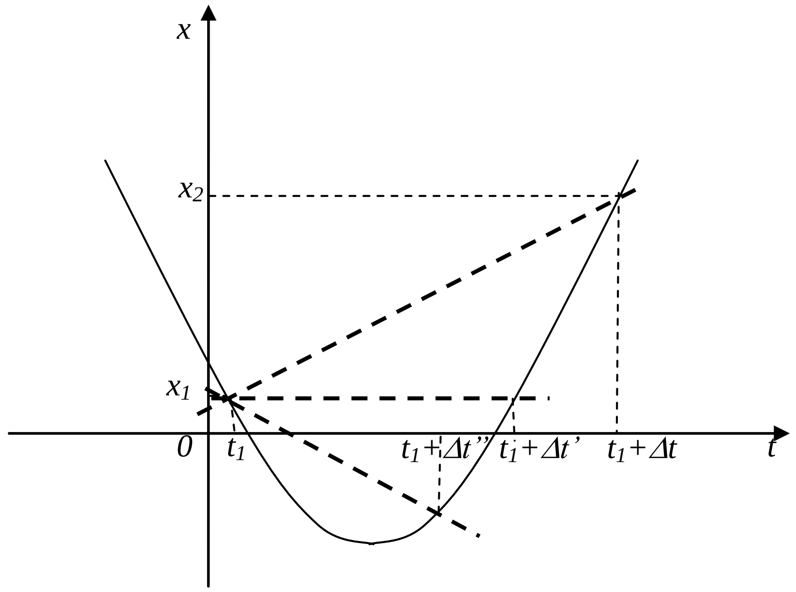
$$\bar{V} = \frac{a_2 (t_2^2 - t_1^2) + a_1 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{V} = a_2 (t_2 + t_1) + a_1 = a_2 (2t_1 + \Delta t) + a_1$$

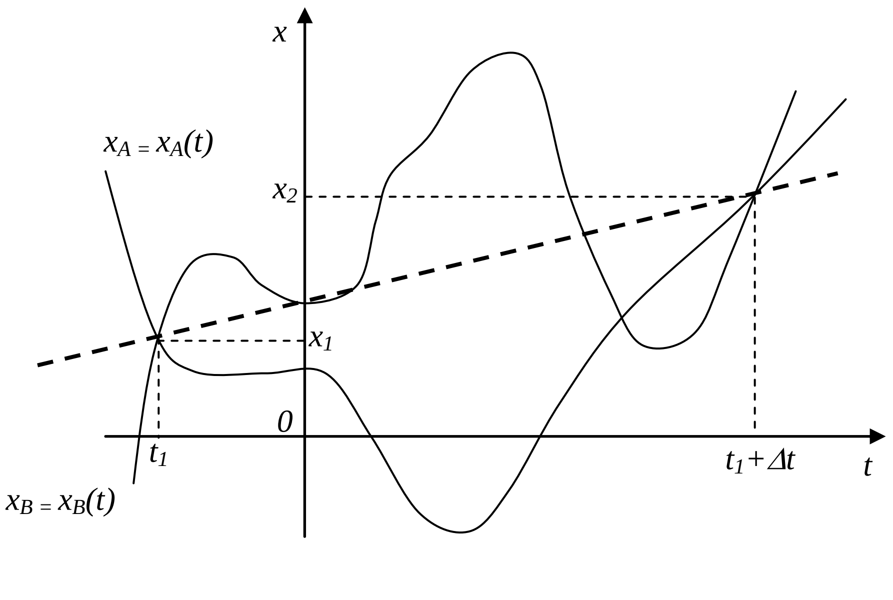


Como vemos, en el caso en que la función de movimiento del cuerpo sea un polinomio de segundo grado, la velocidad media ya no es constante y depende del valor de t_1 y del intervalo de tiempo Δt elegidos para su determinación. Es decir que aunque mantengamos t_1 constante la velocidad media variará al cambiar el Δt elegido, pudiendo llegar a ser cero.

Podríamos seguir analizando la velocidad media para otras funciones de movimiento tan o más complicadas que la anterior y encontraríamos que, salvo para la función lineal, en general la velocidad media depende de los valores elegidos para t_1 y Δt. Como vemos en el gráfico de abajo, dependiendo el intervalo tomado, la velocidad media para la misma función de movimiento puede ser positiva, nula o negativa. Esto significa que la velocidad media da una información relacionada a todo el intervalo y por lo tanto puede variar dependiendo del intervalo de tiempo que consideremos.

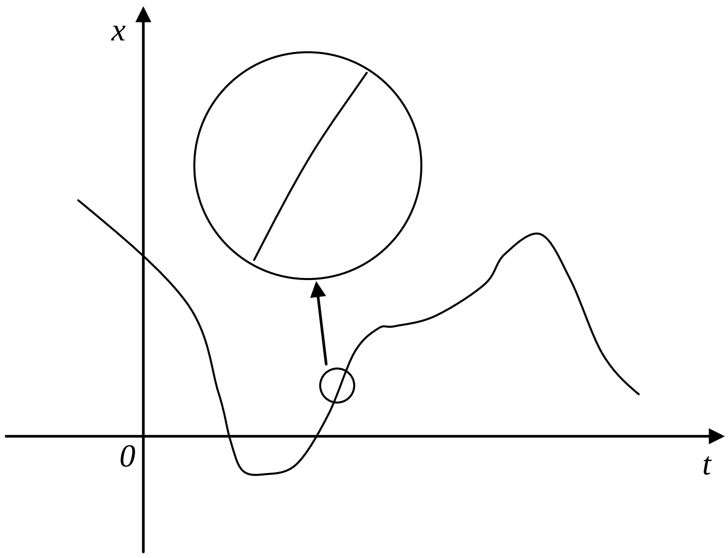


En particular podemos tener dos movimientos totalmente diferentes para los cuales la velocidad media sea la misma en el mismo intervalo de tiempo.



Como vemos, salvo cuando la función de movimiento es una función constante o una función lineal, el concepto de velocidad media no es un parámetro que permita caracterizar de manera completa el movimiento del cuerpo. Por lo tanto debemos ver cómo podemos definir la velocidad de un cuerpo con el propósito de obtener un parámetro que nos sea más útil en la caracterización del movimiento de un cuerpo.

Como la velocidad media caracteriza correctamente el movimiento rectilíneo uniforme (cuando la función de movimiento es lineal) lo que podemos hacer como primera opción es restringir el intervalo de tiempo en el cual vamos a calcular la velocidad media. Podemos elegir un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño de manera tal que en este intervalo el movimiento pueda ser considerado aproximadamente rectilíneo y uniforme.



Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo elegido para el cálculo de la velocidad media, el movimiento en dicho intervalo más se parecerá a un movimiento rectilíneo uniforme. La velocidad media que calculemos será constante en dicho intervalo y por lo tanto nos da información de cuán rápido varía la posición del cuerpo en un dado instante de tiempo y un entorno reducido del mismo. Sin embargo, depende del comportamiento de la función de movimiento cuán pequeño debe ser el intervalo de tiempo en el cual podemos considerar un comportamiento lineal. Para solucionar este problema lo que podemos hacer es tomar un intervalo de tiempo y luego analizar que ocurre con la velocidad media cuando hacemos a éste tan pequeño como queramos, es decir hacer tender el tamaño del intervalo de tiempo a cero ($\Delta t \to 0$). En el cálculo de la velocidad media estamos haciendo tender a cero el denominador; sin embargo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero también tiende a cero la variación de la posición del cuerpo ($\Delta x \to 0$) y por lo tanto es de esperar que el cociente $\Delta x/\Delta t$ tienda a un valor finito cuando $\Delta t \to 0$.

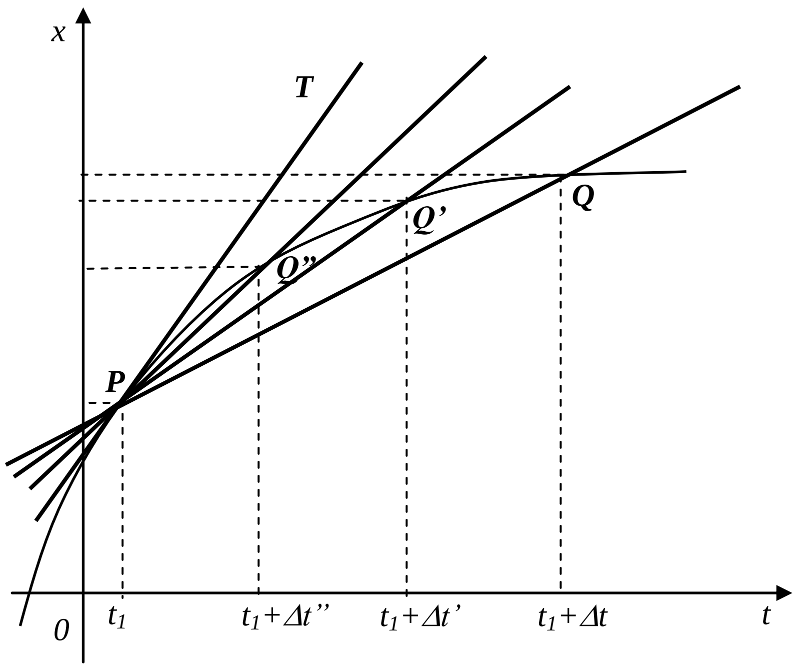
Si calculamos la velocidad media haciendo tender el intervalo de tiempo a cero ($\Delta t \to 0$) entonces la velocidad media ya no dependerá más del intervalo de tiempo sino del instante de tiempo en el cual estamos realizando el cálculo. Por lo tanto, estaremos obteniendo una información que es función de un determinado instante de tiempo (tal como es la función de movimiento), entonces este cálculo ya no nos dará la velocidad media del cuerpo sino la *velocidad instantánea*. Entonces definimos la función velocidad como el límite del cociente entre el desplazamiento que realiza el cuerpo en el intervalo de tiempo Δt y el tiempo en que lo realiza (Δt) cuando Δt tiende a cero:

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde:

$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)$
y
$\Delta t = t_2 - t_1 = (t_1 + \Delta t) - t_1$

Analicemos geométricamente que es lo que estamos haciendo en este proceso de tomar límite. Cuando evaluábamos la velocidad media estábamos calculando la pendiente de la recta secante que unía los dos puntos utilizados para el cálculo.



Cuando hacemos tender el intervalo de tiempo a cero ($\Delta t \to 0$, $\Delta t > \Delta t' > \Delta t'' ...$) para la determinación de la velocidad media vamos calculando la pendiente de las distintas rectas secantes ($\overline{PQ}, \overline{PQ'}, \overline{PQ''}, ...$). En el límite cuando $\Delta t \to 0$ las rectas secantes van tendiendo a la recta tangente (***T***) a la función de movimiento en el punto (t_1, $x(t_1)$). Por lo tanto, el valor de la velocidad instantánea del cuerpo para un determinado instante de tiempo es la pendiente de la recta tangente a la función de movimiento en dicho instante de tiempo.

Al hacer tender a cero el intervalo de tiempo en el cual calculamos la velocidad media estamos realizando el cálculo de lo que denominamos velocidad del cuerpo (o velocidad instantánea) y que está definida como:

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta es, desde el punto de vista matemático, la definición de la derivada de la función *x(t)* respecto a *t*; por lo tanto, como la función de movimiento es continua, nosotros determinamos la velocidad instantánea de un cuerpo realizando su derivada respecto al tiempo.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Definición de derivada

Por un momento dejaremos de lado el problema físico de definir la velocidad instantánea y nos concentraremos en desarrollar el concepto de la derivada de una función. Ya hemos visto el concepto geométrico de derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva. Supongamos que tenemos una función *y* de la variable independiente *x* (*y* = *y(x)*) de la cual queremos calcular su derivada. Para calcular la derivada de la función respecto a su variable independiente debemos hacer la siguiente operación

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pero este cálculo implica realizar el límite de una función, concepto que aún no hemos definido. Nosotros vamos a utilizar una definición muy simple y elemental del concepto de límite de una función. Vamos a decir que el límite de una función, cuando la variable independiente tiende a un determinado valor, es el valor al cual tiende la función, independiente de que la función esté definida o no en dicho punto. Analicemos algunos ejemplos simples.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty$$ (el símbolo a^- significa que *x* tiende a *a* por valores menores a *a*)

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty$$ (el símbolo a^+ significa que *x* tiende a *a* por valores mayores a *a*)

Una definición más formal de límite sería que el límite de una función *y(x)*, cuando *x* tiende a *a*, es L

$$\lim_{x \to a} y(x) = L$$

si se verifica que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad tal\ que\ si \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |y(x) - L| < \varepsilon$$

Reglas de derivación

Analicemos a continuación algunas reglas de la derivada.

a) Derivada de una función multiplicada por una constante:

Supongamos que tenemos una función *y(x) = C f(x)* cuya derivada deseamos calcular. Aplicando la definición de derivada tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C\frac{df}{dx}$$

Por lo tanto la derivada de una función multiplicada por una constante es la constante multiplicada por la derivada de la función.

b) Derivada de una suma de funciones:

Tenemos una función que es suma de dos funciones y deseamos calcular su derivada.

y(x) = f(x) + g(x)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Entonces la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

c) Derivada del producto de dos funciones:

Sea la función *y(x) = f(x) . g(x)*. Su derivada será:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

en el numerador sumo y resto *f(x).g(x+Δx)*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.

Derivadas de funciones simples

a) *y(x) = x*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

b) $y(x) = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

c) $y(x) = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

d) $y(x) = x^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + (n(n-1)/2) \cdot x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \left(nx^{n-1} + (n(n-1)/2) \cdot x^{n-2}\Delta x^1 + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + (n(n-1)/2) \cdot x^{n-2} \Delta x^{1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{n}}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

e) $y(x) = 1/x = x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} - \frac{1}{x \cdot (x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} - \frac{1}{(x^{2} + x \cdot \Delta x)} = -\frac{1}{x^{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2}$$

Basándonos en los resultados anteriores podemos generalizar diciendo que si

$$y(x) = x^{k} \quad k \in Z$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{k}}{dx} = k \cdot x^{k-1}$$

f) $y(x) = x^{n/m}$ con n y $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{n/m} - x^{n/m}}{\Delta x}$$

$$y = x^{n/m} \quad \Rightarrow \quad y^{m} = x^{n}$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \quad \Rightarrow \quad y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y = (x+\Delta x)^{n/m}$$

$$(y+\Delta y)^m = (x+\Delta x)^n$$

desarrollando el binomio en ambos miembros tenemos

$$y^m + m\cdot y^{m-1}\cdot\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}\cdot\Delta y^2 + \cdots + \Delta y^m =$$
$$x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

eliminando y^m con x^n y sacando factor común Δy y Δx respectivamente nos queda:

$$m\cdot y^{m-1}\cdot\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}\cdot\Delta y^2 + \cdots + \Delta y^m =$$
$$n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

$$\Delta y\cdot\left(m\cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}\cdot\Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}\right) =$$
$$\Delta x\cdot\left(n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)$$

Despejando el cociente $\Delta y/\Delta x$ obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}}{m\cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}\cdot\Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}}$$

tomando límite para $\Delta x \to 0$ en ambos miembros y recordando que cuando $\Delta x \to 0$ se verifica que $\Delta y \to 0$ queda:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}}{m\cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}\cdot\Delta y + \cdots + \Delta y^{m-1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n\cdot x^{n-1}}{m\cdot y^{m-1}}$$

$$y^{m-1} = \frac{y^m}{y} = \frac{x^n}{x^{\frac{n}{m}}} = x^{n-\frac{n}{m}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\frac{x^{n-1}}{x^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{n}{m}x^{n-1-n+\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^{\frac{n}{m}}}{dx}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

Por lo tanto podemos generalizar diciendo que

$$y(x)=x^k \quad k\in\Re$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^k}{dx}=k\cdot x^{k-1}$$

Derivada de una función compuesta

Sea una función $z(x) = z[y(x)]$

$$\frac{dz[y(x)]}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z[y(x+\Delta x)]-z[y(x)]}{\Delta x}$$

multiplico y divido por $\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)$

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z[y(x+\Delta x)]-z[y(x)]}{\Delta x}\cdot\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{y(x+\Delta x)-y(x)}$$

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z[y(x+\Delta x)]-z[y(x)]}{y(x+\Delta x)-y(x)}\cdot\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta z=z[y(x+\Delta x)]-z[y(x)]$$

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$$

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

sabemos que cuando $\Delta x \to 0$ se verifica que $\Delta y \to 0$ podemos escribir

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

podemos generalizar para el caso de que tengamos más de una composición de funciones, es decir supongamos que tenemos una función *f = f(g(h(j(…….(y(x))))))*, la derivada será

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dj}\cdots\cdots\frac{dy}{dx}$$

Esta regla de derivación se denomina regla de la cadena.

Para una mejor comprensión analicemos un caso particular. Sea *z[y(x)] = 1/y(x)*, ó $z(x) = [y(x)]^{-1}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Podemos utilizar este resultado para deducir cuál es la derivada de un cociente de funciones. Sea *y(x) = f(x)/g(x)*

$$y(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

utilizando la expresión para la derivada de un producto de funciones tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left[-\frac{1}{\left(g(x)\right)^2}\right]\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{dg}{dx}}{\left(g(x)\right)^2}$$

Entonces la derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada de la función del numerador por la función del denominador sin derivar menos la función del numerador sin derivar por la derivada de la función del denominador y a todo esto hay que dividirlo por el cuadrado de la función del denominador.

Continuemos analizando la derivada de algunas funciones simples, calculemos ahora la derivada de la función *y = sen(x)*

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{sen\left(x+\Delta x\right)-sen(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{sen(x)\cdot\cos(\Delta x)+\cos(x)\cdot\sin(\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}+sen(x)\cdot\frac{\left[\cos(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}\right]$$

utilizando la relación trigonométrica que relaciona el seno del ángulo mitad con el coseno del ángulo tenemos

$$1-\cos(\alpha)=2\cdot sen^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

entonces

$$\cos(\Delta x)-1=-2\cdot sen^{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

reemplazando nos queda

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-2\cdot\frac{sen(x)}{\Delta x}\cdot sen^{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$

multiplicando y dividiendo por $\Delta x/4$ el segundo término encerrado en el paréntesis no alteramos la expresión

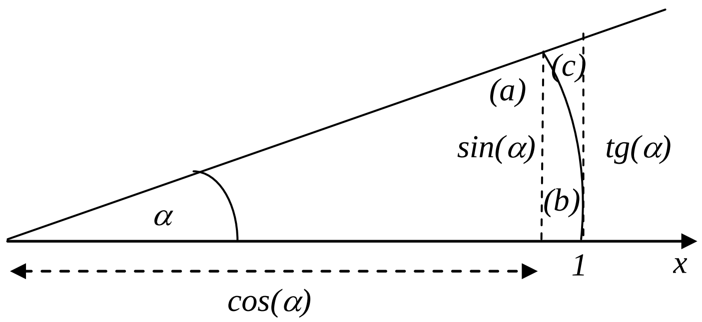
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-2\cdot\frac{sen(x)}{\Delta x}\cdot\frac{sen^{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{4}}\cdot\frac{\Delta x}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}-\frac{1}{2}\cdot sen(x)\cdot\frac{sen^{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{2}}\cdot\Delta x\right)$$

Para poder completar este cálculo debemos conocer a qué es igual el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right) \quad ó \quad \lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{sen(\alpha)}{\alpha}\right)$$

analicemos el comportamiento de $\frac{sen(\alpha)}{\alpha}$



En la figura podemos distinguir tres figuras geométricas con áreas crecientes ($A_{(a)}<A_{(b)}<A_{(c)}$):

(a) triángulo rectángulo cuyos catetos valen *cos(α)* y *sen(α)* cuya área es

$$A_{(a)} = \frac{\cos(\alpha).sen(\alpha)}{2}$$

(b) sector circular de radio *1* y apertura angular α y su área es

$$A_{(b)} = \frac{\alpha.r^2}{2}$$

(Nota: sabemos que el ángulo que subtiende un círculo es 2π y su área es $A=\pi.r^2$. Entonces el área que corresponde a un sector circular de apertura α será el área que corresponde a un grado ($A/2\pi$) multiplicada por el ángulo que subtiende el arco de círculo).

(c) triángulo rectángulo cuyos catetos valen *1* y *tg(α)* cuya área es

$$A_{(c)} = \frac{1.\tan(\alpha)}{2}$$

Escribiendo la relación entre las áreas nos queda:

$$\frac{\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha)}{2} < \frac{\alpha\cdot 1^2}{2} < \frac{1\cdot tg(\alpha)}{2}$$

multiplicando todo por 2 queda

$$\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha) < \alpha < tg(\alpha) \quad ó \quad \cos(\alpha)\cdot sen(\alpha) < \alpha < \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

como para ángulos pequeños *sen(α)* es positivo podemos dividir todo por *sen(α)* sin que se alteren las relaciones y nos queda

$$\cos(\alpha) < \frac{\alpha}{sen(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

como lo que necesitamos analizar es el cociente *sen(α)/α* cuando *α* tiende cero invertimos las expresiones y por lo tanto se invertirá las relaciones entre ellas

$$\frac{1}{\cos(\alpha)} > \frac{sen(\alpha)}{\alpha} > \cos(\alpha)$$

Analizando el comportamiento de las dos funciones que acotan a *sen(α)/α* cuando *α* tiende cero podemos observar que *cos(α)* tiende al valor 1 por valores menores a 1 y 1/*cos(α)* también tiende a 1 pero por valores mayores a 1.

$$si\ \alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) \to 1^{-} \ \ y \ \ \frac{1}{\cos(\alpha)} \to 1^{+}$$

por lo tanto, como *sen(α)/α* está acotado por estos valores tenemos

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{sen(\alpha)}{\alpha} \right) = 1$$

volviendo a nuestro cálculo de la derivada de la función *sen(x)* tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos(x) \cdot \frac{sen(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \cdot sen(x) \cdot \left(\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \right)^{2} \cdot \Delta x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(sen(x))}{dx} = \cos(x)$$

Ahora calculemos la derivada de la función *y(x) = cos(x)*; para esto podemos hacerlo de diversas maneras. Una de ellas es utilizar relaciones entre funciones trigonométricas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = \frac{d\left(sen\left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{dx} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -sen(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$$

otra forma es utilizar las propiedades de la derivada de funciones compuestas y las derivadas de las funciones simples que hemos estudiado hasta ahora.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = \frac{d\left(\left(1 - sen^2(x)\right)^{1/2}\right)}{dx}$$

analicemos la función compuesta *f(g(y(x)))* que tenemos

$$y(f(g(x))) = \left(1 - sen^2(x)\right)^{1/2}$$

$$identificando \quad y(f) = f^{1/2};\ donde\ f(g) = 1 - g^2;\ con\ g(x) = sen(x)$$

La derivada de esta función compuesta es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df} \cdot \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{dy}{df} = \frac{1}{2} \cdot f^{-1/2}\ ;\ \frac{df}{dg} = -2g\ ;\ \frac{dg}{dx} = \cos(x)$$

reemplazando obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (1 - sen^2(x))^{-1/2} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - sen^2(x))^{1/2}} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-2 \cdot sen(x)) \cdot \cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$$

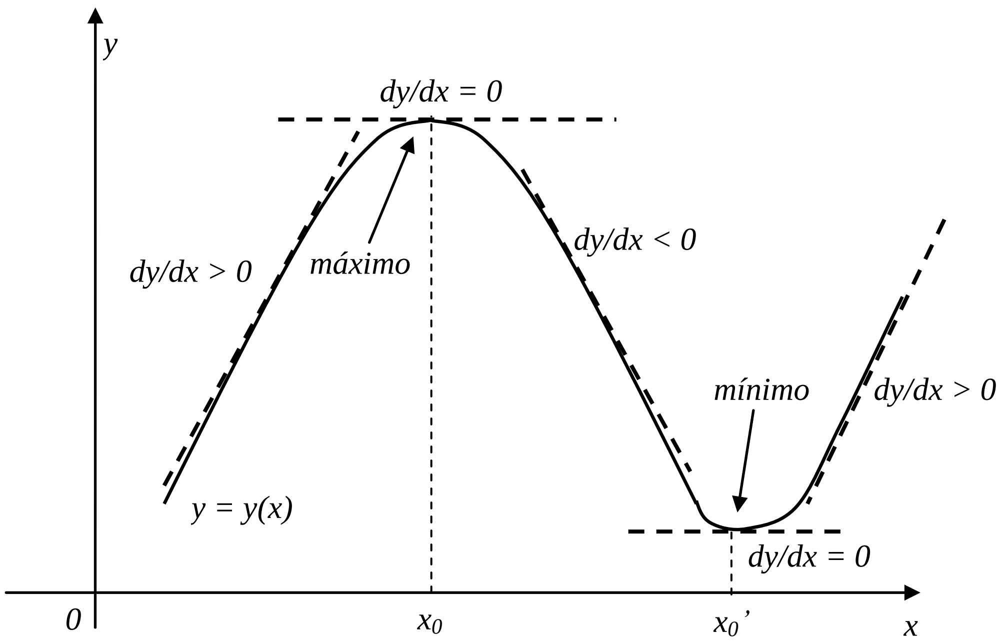
A este conjunto de derivadas de funciones simples podemos agregar las siguientes derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

Aplicación de la derivada para el análisis de funciones

Como se puede observar en la figura cuando en un intervalo la función es creciente el valor de la derivada de la función en dicho intervalo es positivo, cuando la función es decreciente en un dado intervalo la derivada es negativa en ese intervalo. Pero cuando la función tiene un máximo o un mínimo la pendiente de la recta tangente a dicho punto es nula. Los valores de la variable x en los cuales la derivada de la función se anula se denominan puntos críticos.



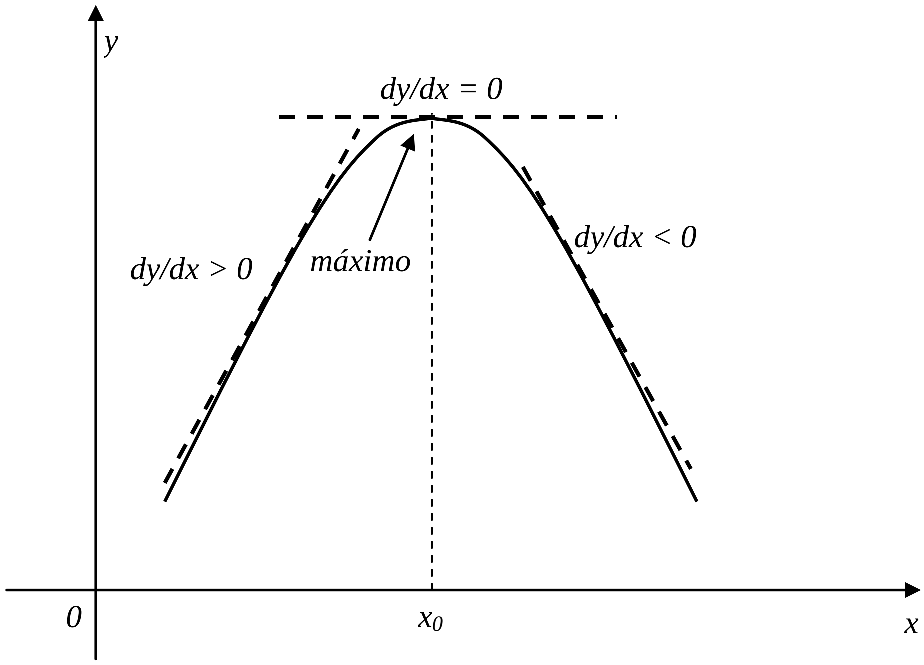
Los puntos críticos (x_0) pueden corresponder a las ordenadas de máximos ó mínimos de la función. Existen también otros puntos críticos donde la derivada de la función se anula y no corresponde a un máximo ó a un mínimo, son puntos donde la función cambia de curvatura y se denominan puntos de inflexión.

Por ahora sólo nos va a interesar determinar aquellos puntos críticos que corresponden a máximos y mínimos de funciones. Para determinar cuáles son los puntos críticos de una función debemos derivar la función y analizar cual/es son los valores de la variable independiente para los cuales se anula la derivada. Para determinar si corresponden a máximos o mínimos debemos analizar el comportamiento de la función derivada en un entorno del punto crítico x_0:

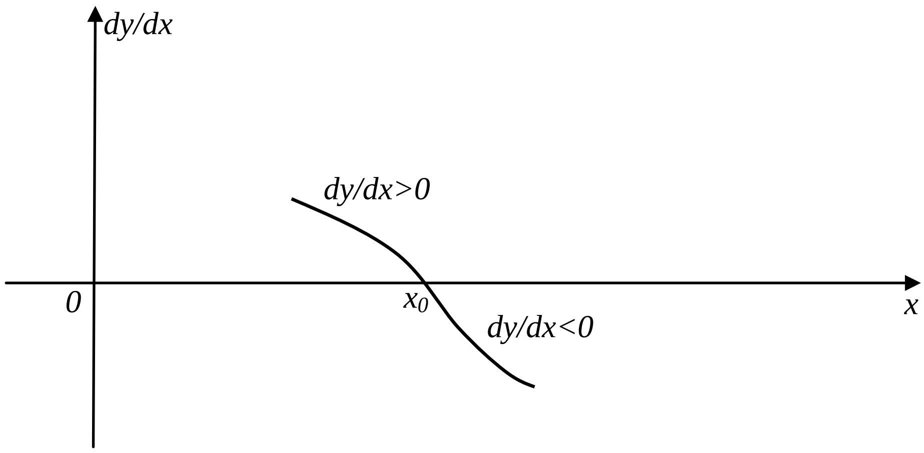
Si la derivada cambia de signo en el punto crítico x_0 y pasa de ser positiva para valores menores a x_0 a negativa para valores mayores a x_0 entonces dicho punto crítico corresponde a un máximo relativo
Si la derivada cambia de signo en x_0 y es negativa para valores menores a x_0 y positiva para valores mayores a x_0 entonces dicho punto crítico corresponde a un mínimo relativo. Si la derivada no cambia de signo en ambos lados del punto crítico x_0 entonces este punto crítico corresponde a un punto de inflexión.

Veamos otro método alternativo para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo.

Determinación de máximos: Si graficamos la función sólo en un entorno del punto que corresponde al máximo tendremos



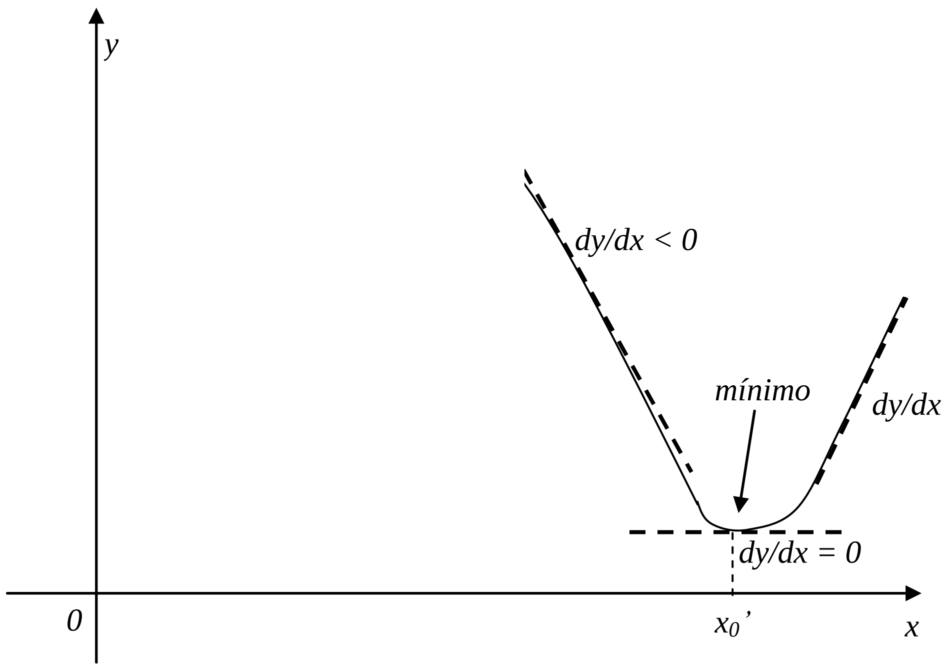
graficando la función derivada en un entorno del máximo de la función, vemos que toma valores positivos a la izquierda de x_0, vale cero en x_0 y toma valores negativos a la derecha del máximo.



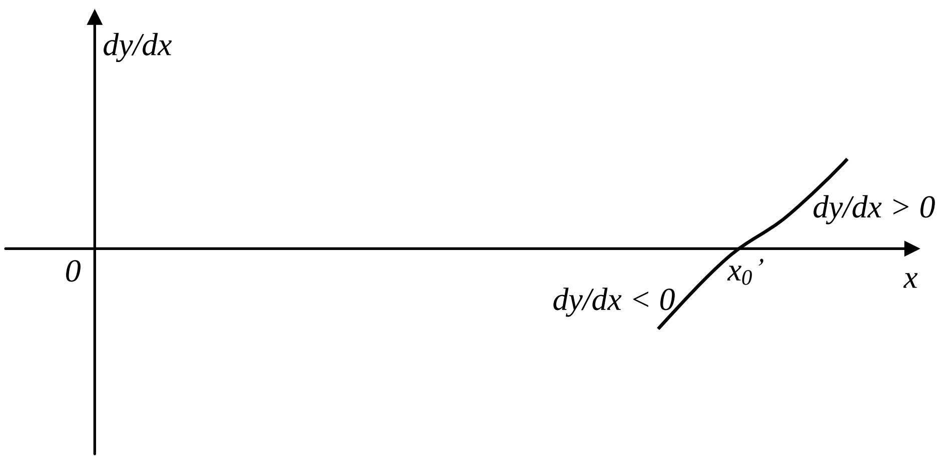
Si ahora analizamos el valor la derivada de la función derivada en el punto crítico (o sea la pendiente de la recta tangente de la función derivada en dicho punto) vemos que toma un valor es negativo. La derivada de la función derivada recibe el nombre de derivada segunda.

Por lo tanto si la derivada segunda de la función, evaluada en el punto crítico, es negativa dicho punto crítico corresponde a un máximo.

Determinación de mínimos: Ahora si graficamos la función sólo en un entorno del mínimo tendremos



Si analizamos el comportamiento de la derivada de la función en un entorno del punto crítico x_0' podemos observar que a la derecha del mismo es positiva, cero en x_0' y positiva a la derecha de x_0'.



por lo tanto la derivada segunda de la función evaluada en el punto crítico (o sea la pendiente de la recta tangente al grafico de la derivada de la función en el punto crítico) es positiva.

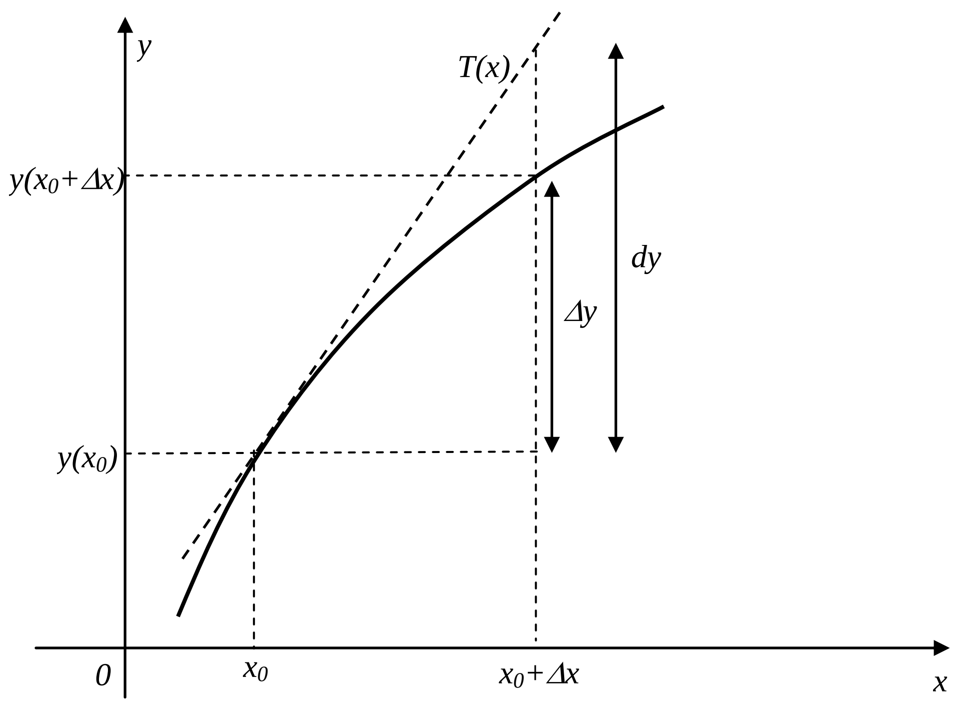
Entonces, si la derivada segunda de la función, evaluada en el punto crítico, es positiva dicho punto crítico corresponde a un mínimo.

Sin hacer ninguna demostración generalizaremos los conceptos discutidos previamente y diciendo:

- Todos aquellos valores de la variable para los cuales la derivada de la función se anula se denominan puntos críticos de la función.
- Si la derivada segunda de la función evaluada en un punto crítico es positiva dicho punto corresponderá a un mínimo; y si es negativa a un máximo.
- Si la derivada segunda evaluada en el punto crítico es nula deberemos seguir derivando hasta encontrar una derivada de la función que evaluada en el punto crítico sea distinta de cero. Se llama orden de derivación al número de veces que hemos derivado. Si la derivada distinta de cero es de orden par (o sea que hemos derivado dos, cuatro, seis, … veces) y evaluada en el punto crítico es positiva entonces es punto crítico corresponderá a un mínimo; y si es negativa a un máximo. Si la primera derivada evaluada en el punto crítico distinta de cero es de orden impar (o sea que hemos derivado tres, cinco, siete, … veces) entonces dicho punto crítico corresponderá a un punto de inflexión de la función.

Diferencial

Veamos otra aplicación de la derivada de una función. Supongamos que deseamos analizar cómo varían los valores que toma una función en el entorno de un determinado valor de la variable (por ejemplo $x=x_0$). Si la función es complicada puede resultar tedioso evaluarla reiteradamente para estudiar su comportamiento. Sin embargo si trazamos la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto podemos ver que en un cierto intervalo (cuya extensión depende del comportamiento de la función) los valores que toma la recta tangente son muy similares al que toma la función. Por lo tanto, si en vez de analizar el comportamiento de la función estudiamos el de la recta tangente estaremos introduciendo un cierto error pero simplificando notoriamente los cálculos. Mediante esta estrategia para ganar simplicidad pagamos el precio de perder exactitud en los cálculos.



En el gráfico de arriba vemos que si queremos ver cuánto modifica sus valores la función cuando la variable se modifica en Δx deberíamos calcular

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Para calcular cuánto varía la recta tangente *T(x)* en este intervalo primero debemos determinar su expresión. Al ser una función lineal esta será de la forma

$$T(x) = a\, x + b$$

y como esta recta es tangente a la función *y(x)* en el punto x_0 la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función en dicho punto

$$a = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

y la ordenada de origen la determinamos poniendo la condición que la función y la recta tangente tienen como punto en común aquel donde se tocan.

$$T(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} .x_0 + b = y(x_0)$$

$$b = y(x_0) - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} .x_0$$

entonces la ecuación de la recta tangente será

$$T(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} .(x - x_0) + y(x_0)$$

Cuando la variable x varíe entre x_0 y $x_0+\Delta x$ la recta tangente tendrá una variación igual a

$$\Delta T = T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)$$

$$\Delta T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} .\Delta x$$

Denominaremos *diferencial de la función (dy)* a la variación de la recta tangente (ΔT). Si lo que varía la función, cuando la variable x varía entre x_0 y $x_0+\Delta x$, es aproximadamente igual a lo que varía la recta tangente a la función en x_0 podemos escribir

$$\Delta y \approx dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} .\Delta x$$

Resumiendo decimos que, dada una función $y = y(x)$ se define como diferencial de la función (*dy*) para un dado valor de la variable independiente (x_0) al producto de la derivada de la función evaluada en x_0 (la cual debe existir) multiplicada por el incremento de la variable independiente (dx).

$$dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot dx$$

Analicemos un ejemplo particular que nos permitirá visualizar los conceptos vertidos más arriba sobre la aplicación del diferencial para la estimación de valores de una función. Analicemos el comportamiento de la función $y(x) = sen(x)$ en un entorno de $x = 0$ ($x_0 = 0$).

$$y(x) = sen(x)$$

$$y(x_0) = sen(0) = 0$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

entonces

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta y$$

Aplicando el concepto de diferencial

$$\Delta y \approx dy = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} . \Delta x$$

$$\left.\frac{d(sen(x))}{dx}\right|_{x=0} = \cos(0) = 1$$

$$y(0 + \Delta x) \cong y(0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} \cdot \Delta x$$

$$sen(0 + \Delta x) \cong 0 + 1 \cdot \Delta x$$

$$sen(\Delta x) \cong \Delta x$$

En nuestro caso particular se cumple que

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta x = x$$

Entonces, en nuestro caso particular podemos escribir

$$sen(x) \cong x$$

donde el ángulo x está expresado en radianes. En la tabla se muestra, para algunos valores del ángulo (expresado en radianes), la validez de esta aproximación.

x [º]	*x* [rad]	*sin(x)*	Error [%] (*)
0	0	0	-
1	0.0174533	0.0174524	-0.005
2	0.0349066	0.0348995	-0.020
3	0.0523599	0.0523360	-0.046
4	0.0698132	0.0697564	-0.081
5	0.0872665	0.0871557	-0.127
6	0.1047198	0.1045286	-0.183
7	0.1221731	0.1218693	-0.249
8	0.1396263	0.1391731	-0.325
9	0.1570796	0.1564345	-0.411
10	0.1745329	0.1736482	-0.507
12	0.2094395	0.2079117	-0.729
15	0.2617994	0.2588191	-1.138

(*) El error porcentual está calculado utilizando la expresión: *100 . (sin(x) – x)/sin(x)*

Como vemos, dependiendo de cuantos decimales deseamos utilizar, podemos utilizar sin inconvenientes el valor obtenido a partir del diferencial en lugar de los valores de la función. Con esta aplicación vemos que utilizando el concepto de diferencial se puede elegir una función muy sencilla (recta) para describir una función complicada en un rango acotado.

Capítulo 4:

Aceleración

En este capítulo definiremos la función aceleración, con lo que se completa la caracterización del movimiento de un cuerpo puntual. En primer lugar hemos definido la posición del cuerpo en el espacio mediante la utilización de un sistema de coordenadas. Referida a este sistema podemos tener la función de movimiento del cuerpo, la cual evaluada en un determinado instante de tiempo nos da la coordenada en dicho instante y por lo tanto nos permite conocer la ubicación espacial del cuerpo. Después definimos la velocidad del cuerpo que caracteriza cómo el cuerpo varía su posición con el tiempo. Hemos visto que la función velocidad se obtiene derivando la función de movimiento del cuerpo con respecto al tiempo. La función velocidad evaluada en un instante de tiempo nos dará información de cuán rápido cambia la coordenada del cuerpo y en qué dirección, en dicho instante.

Vamos ahora a definir un parámetro que caracteriza cómo un cuerpo varía su velocidad con el tiempo. Haciendo un análisis similar al realizado cuando queríamos definir la velocidad del cuerpo podemos definir la aceleración del cuerpo como la derivada de la función velocidad con respecto al tiempo.

$$a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Como sabemos que

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

entonces podemos expresar la aceleración como la derivada con respecto al tiempo de la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

es decir que la aceleración es la derivada segunda de la función de movimiento con respecto al tiempo dos veces.

La función aceleración es una función del tiempo y podríamos estudiar qué información nos da su derivada con respecto al tiempo y así seguir analizando otras derivadas de orden superior. Desde el punto de vista matemático podemos seguir derivando estas funciones mientras sus derivadas existan y estas derivadas nos darán información sobre el comportamiento de las funciones. Sin embargo desde el punto de vista físico sólo nos interesa hasta la derivada segunda de la función posición, es decir que sólo llegaremos hasta la aceleración. Cuando analicemos la dinámica del movimiento de los cuerpos veremos que las causas que determinan el movimiento de los cuerpos estarán relacionadas con la aceleración que adquiere el cuerpo.

Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración

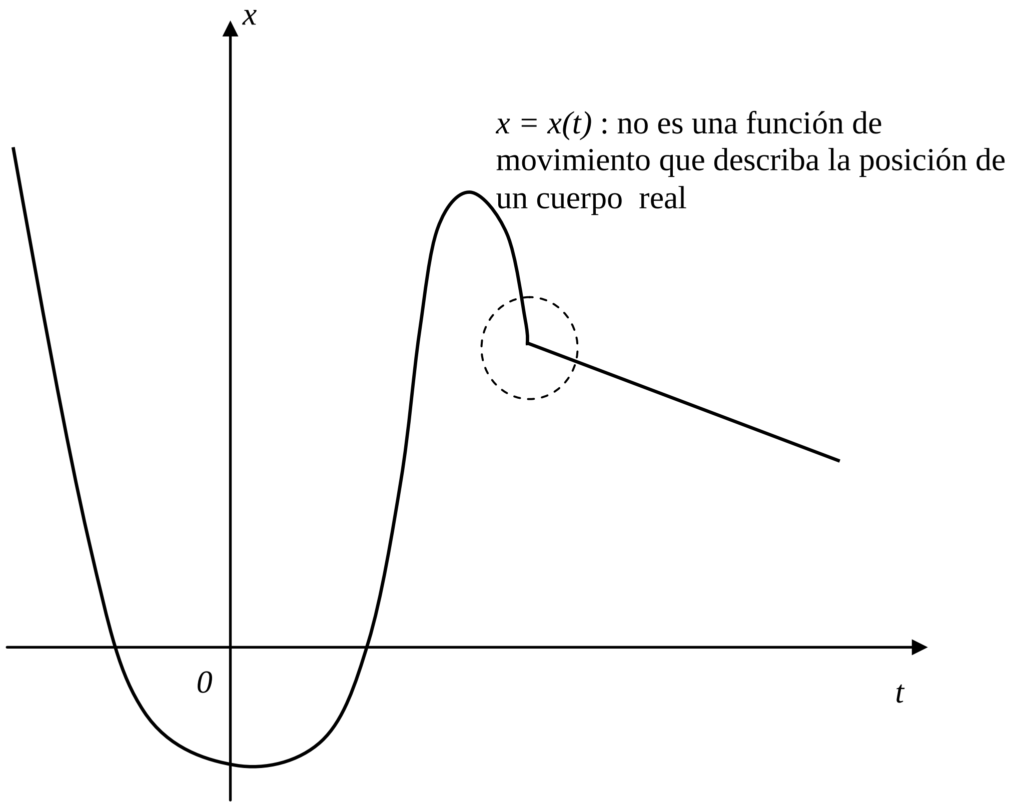
Basándonos en la información experimental que poseemos, habíamos visto que la función de movimiento debía ser una función continua. En base a esa misma información experimental se sabe que la función velocidad también debe ser continua. Sin embargo la función aceleración puede ser discontinua. Para comprender esto último analicemos la siguiente situación, supongamos que estamos en reposo y sostenemos un cuerpo con nuestra mano. En este caso el cuerpo tiene una posición constante, una velocidad constante e igual a cero y por lo tanto también una aceleración nula. Si de pronto soltamos el cuerpo veremos que súbitamente su aceleración pasa de ser igual a cero a tener un valor constante pero distinto de cero, que coincidirá con lo que denominamos aceleración de la gravedad.

Por lo tanto, podemos concluir que las funciones que caracterizan el movimiento de un cuerpo deben satisfacer las siguientes condiciones:

- *Función posición:* debe estar definida en todo el intervalo de interés, ser continua y de derivada continua. Esto implica que el gráfico de esta función no debe presentar ningún punto anguloso pues en dicho punto su derivada sería discontinua y por lo tanto lo sería su velocidad. En el gráfico de más abajo podemos ver un ejemplo de una función que no cumple con estas condiciones.

- *Función velocidad:* debe ser una función continua definida en todo el intervalo de interés.

- *Función aceleración:* debe estar definida en todo el intervalo de interés y puede ser discontinua.



Análisis de funciones de movimiento simples

a) Función de movimiento constante:

$$x(t) = a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$

Vemos que a esta función de movimiento, que describe un cuerpo en reposo, le corresponde una velocidad nula y una aceleración nula.

b) Función de movimiento lineal:

$$x(t) = a_1 t + a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a_1$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$

Una función lineal describe el movimiento de un cuerpo que se mueve con velocidad constante y aceleración nula. Este movimiento cuya velocidad es constante se denomina *movimiento rectilíneo uniforme*.

c) Función de movimiento parabólica (polinomio de segundo grado):

$$x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot a_2 \cdot t + a_1$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \cdot a_2$$

Un polinomio de segundo grado describe el movimiento de un cuerpo cuya aceleración es constante y diferente de cero. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado*.

Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento

Si conocemos la función de movimiento de un cuerpo tenemos toda la información posible sobre el movimiento mismo. A partir de la función de movimiento podemos calcular la velocidad y la aceleración del cuerpo.

$$x = x(t) \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} v = v(t) \xrightarrow{\frac{dv}{dt}} a = a(t)$$

Pero pocas veces la información que poseemos del sistema es su función de movimiento. En general vamos a conocer la función aceleración o en algunos casos la función velocidad y a partir de esta información deberemos obtener la función de movimiento.

Si por ejemplo nos dan como dato la función velocidad del cuerpo, *v = v(t)*, nosotros sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

por lo tanto, para poder determinar la función de movimiento del cuerpo debemos resolver esta ecuación, lo que implica encontrar una función del tiempo, *x(t)*, que cuando se derive con respecto al tiempo nos dé como resultado la función velocidad que es dato.

Para resolver esta ecuación debemos realizar la operación inversa a la derivación, la cual se denomina integración.

Integración de funciones simples

Por un momento dejemos de lado la Física y analicemos desde un punto de vista matemático muy elemental qué significa realizar la integral de una función. Dada una función *f* de una variable independiente *x*, se denomina realizar la integral de dicha función con respecto a la variable independiente, a encontrar una función *y = y(x)* que satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

la integral de la función *f(x)* se representa como

$$y(x) = \int f(x) \cdot dx$$

a la función *y(x)* se la denomina la primitiva de *f(x)*

Enumeremos algunas propiedades simples de la integración que se derivan de las propiedades de la derivación

1) La integral de una función multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

$$y(x) = \int C \cdot f(x) \cdot dx = C \cdot \int f(x) \cdot dx$$

2) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones.

$$y(x) = \int (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$$

Calculemos ahora la integral de algunas funciones simples:

a) $f(x) = x^k$

debemos encontrar una función y(x) que satisfaga la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^k$. Como sabemos que la derivada de la variable independiente elevada a una potencia nos da como resultado la variable independiente elevada a la potencia reducida en 1, proponemos como solución $y(x) = A\, x^p$. Determinemos cuánto debe valer A y p para que esta función $y(x)$ sea primitiva de $f(x)$

$$y(x) = A.x^p$$
$$\frac{dy}{dx} = A \cdot p \cdot x^{p-1} = x^k$$

Entonces para que esta función sea solución de la ecuación debe ser verificar que

$$p - 1 = k \;\Rightarrow\; p = k + 1$$

y

$$A \cdot p = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{k+1}$$

por lo tanto

$$y(x) = \int x^k \cdot dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}$$

b) $f(x) = \cos(x)$

$$y(x) = \int \cos(x) \cdot dx = sen(x)$$

pues

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[sen(x)]}{dx} = \cos(x)$$

c) $f(x) = \cos(x)$

$$y(x) = \int sen(x) \cdot dx = -\cos(x)$$

dado que $\frac{dy}{dx} = \frac{d[-\cos(x)]}{dx} = -[-sen(x)] = sen(x)$

A continuación detallaremos las integrales de algunas funciones simples, cuya validez ustedes pueden comprobar fácilmente:

d) $y(x) = \int \cos(kx) \cdot dx = \frac{1}{k} sen(kx)$

e) $y(x) = \int sen(kx) \cdot dx = -\frac{1}{k} \cos(kx)$

f) $y(x) = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(x)$

g) $y(x) = \int e^{kx} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{kx}$

Integración de las funciones de movimiento

Para tener una completa descripción del movimiento de un cuerpo es necesario conocer su función de movimiento. Ahora analizaremos como obtener la función de movimiento si conocemos la función velocidad o la función aceleración.

Si tenemos como dato la función velocidad del cuerpo, *v(t)*, y deseamos conocer la función de movimiento, *x(t)*, sabemos que entre ambas se verifica la relación

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

entonces la función de movimiento será la integral de la función velocidad.

$$x(t) = \int v(t) \cdot dt$$

sin embargo, si definimos otra función de movimiento que sea igual a la que obtenemos de la integral más una constante

$$x'(t) = x(t) + C \qquad C = cte$$

podemos ver que un cuerpo cuya función de movimiento esté descripta por *x'(t)* también tendrá la misma función velocidad.

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d(x(t)+C)}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

Es decir que cuando integramos la velocidad no podemos determinar de manera unívoca a qué función de movimiento corresponde, porque podemos encontrar infinitas funciones de movimiento, las cuales difieren una de otra en una constante, que satisfacen tener la misma velocidad.

Para determinar de manera unívoca cuál es la función de movimiento del cuerpo necesitamos que se nos provea de más información aparte de su función velocidad. Para ello necesitaremos que nos den como dato cuál es la posición del cuerpo para un determinado instante de tiempo y de esa manera podremos calcular el valor de la constante de nuestra función de movimiento. Analicemos el siguiente ejemplo:

$$sea \quad v(t) = 2\frac{m}{s^2}\cdot t + 3\frac{m}{s}$$

entonces

$$x(t) = \int\left(2\frac{m}{s^2}\cdot t + 3\frac{m}{s}\right)\cdot dt = 2\frac{m}{s^2}\cdot\int t\cdot dt + 3\frac{m}{s}\int dt$$

$$x(t) = 2\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}t^2 + 3\frac{m}{s}\cdot t + C$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 3\frac{m}{s}\cdot t + C$$

si sabemos que en $t = 1\ s$ el cuerpo se encontraba en la posición $x = -2\ m$ entonces debemos evaluar la función de movimiento para dicho tiempo y determinar qué valor debe tomar la constante C para que se verifique la condición dada

$$x(1s) = 1\frac{m}{s^2}\cdot(1s)^2 + 3\frac{m}{s}\cdot 1s + C = -2m$$

$$x(1s) = 1m + 3m + C = -2m$$

entonces podemos determinar que $C = -6m$ y la función de movimiento de nuestro cuerpo queda unívocamente determinada y es

$$x(t) = 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 3\frac{m}{s}\cdot t - 6m$$

Si nos dan como dato la función aceleración del cuerpo, *a(t)*, y deseamos conocer la función de movimiento, debemos primero realizar un cálculo intermedio. Es decir que, con la función aceleración dada, primero debemos calcular la función velocidad y luego calcular la función de movimiento como hicimos en el ejemplo anterior. Nosotros sabemos que se verifica la relación

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

por lo tanto, podemos determinar la función velocidad del cuerpo realizando la integral de la función aceleración.

$$v(t) = \int a(t) \cdot dt$$

de igual manera a lo que ocurría cuando calculábamos la función posición a partir de la función velocidad, si definimos otra función velocidad que sea igual a la que obtenemos de la integral más una constante

$$v'(t) = v(t) + C \qquad C = cte\,,$$

se puede ver que a las funciones velocidad *v(t)* y *v'(t)* les corresponde la misma función aceleración.

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d(v(t)+C)}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

Es decir que cuando integramos la función aceleración del cuerpo no podemos determinar de manera unívoca cuál es su función velocidad. Para poder determinar de manera unívoca cuál es la función velocidad de un cuerpo necesitamos que se nos dé más información aparte la función aceleración. Entonces, necesitaremos que nos den como dato cuál es la velocidad del cuerpo para un determinado instante de tiempo para calcular el valor de la constante de la función velocidad.

Una vez determinada la función velocidad podemos determinar la función de movimiento como se explicó antes.

Veamos mediante un ejemplo cómo calcular la función de movimiento a partir de la función aceleración del cuerpo.

$$sea \quad a(t) = 6\,\frac{m}{s^3} \cdot t - 2\,\frac{m}{s^2}$$

entonces

$$v(t) = \int \left(6\,\frac{m}{s^3} \cdot t - 2\,\frac{m}{s^2} \right) \cdot dt = 6\,\frac{m}{s^3} \cdot \int t \cdot dt - 2\,\frac{m}{s^2} \int dt$$

$$v(t) = 6\,\frac{m}{s^3} \cdot \frac{1}{2} t^2 - 2\,\frac{m}{s^2} \cdot t + C$$

$$v(t) = 3\,\frac{m}{s^3} \cdot t^2 - 2\,\frac{m}{s^2} \cdot t + C$$

si se tiene como dato que en $t = 0\ s$ el cuerpo tenía una velocidad $v = -2\ m/s$ entonces podemos determinar el valor de la constante de integración C

$$v(0s) = 3\frac{m}{s^2}\cdot(0s)^2 - 2\frac{m}{s}\cdot 0s + C = -2\frac{m}{s}$$

$$v(0s) = C = -2\frac{m}{s}$$

habiendo determinado que *C = -2m/s* sabemos que la función que describe la velocidad de nuestro cuerpo es

$$v(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t - 2\frac{m}{s}$$

Conociendo la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo.

$$x(t) = \int\left(3\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s^2}\cdot t - 2\frac{m}{s}\right)\cdot dt = 3\frac{m}{s^3}\cdot\int t^2\cdot dt - 2\frac{m}{s^2}\int t\cdot dt - 2\frac{m}{s}\int dt$$

$$x(t) = 3\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{3}t^3 - 2\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + C'$$

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + C'$$

si sabemos que en *t = 1 s* el cuerpo se encontraba en la posición *x = 3 m*, entonces podremos determinar el valor de *C'*

$$x(1s) = 1\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot(1s)^2 - 2\frac{m}{s}\cdot 1s + C' = 3m$$

$$x(0s) = C' = 5m$$

sabiendo que *C' = 5m* la función de movimiento de nuestro cuerpo es

$$x(t) = 1\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 2\frac{m}{s}\cdot t + 5m$$

Como vemos, si se tiene como dato la aceleración del cuerpo y deseamos determinar cuál es la función de movimiento del cuerpo es necesario realizar dos integraciones. La primera, integrando la función aceleración, nos permite obtener la función velocidad, y luego al integrar ésta función velocidad podemos determinar la función de movimiento. Como vimos, cada vez que integramos aparece una constante de integración y para determinar su valor necesitaremos información adicional sobre el movimiento del cuerpo. Esta información adicional puede ser la velocidad y la posición del cuerpo en el mismo instante de tiempo ó en instantes diferentes, como en el ejemplo que desarrollamos, o la posición del cuerpo para dos tiempos diferentes. En el caso en que conozcamos la posición en dos instantes de tiempo no podremos determinar el valor de la constante que se obtiene en la función velocidad en el primer paso, pero como sabemos que es una constante podemos realizar la integral para obtener la función de movimiento y luego determinar las dos constantes como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$sea \quad a(t) = 6\,\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\,\frac{m}{s^2}$$

entonces

$$v(t) = \int\left(6\,\frac{m}{s^3}\cdot t - 2\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot dt = 6\,\frac{m}{s^3}\cdot\int t\cdot dt - 2\,\frac{m}{s^2}\int dt$$

$$v(t) = 6\,\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{2}t^2 - 2\,\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

$$v(t) = 3\,\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\,\frac{m}{s^2}\cdot t + C$$

Conociendo la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo.

$$x(t) = \int\left(3\,\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\,\frac{m}{s^2}\cdot t - C\right)\cdot dt = 3\,\frac{m}{s^3}\cdot\int t^2\cdot dt - 2\,\frac{m}{s^2}\int t\cdot dt + C\int dt$$

$$x(t) = 3\,\frac{m}{s^3}\cdot\frac{1}{3}t^3 - 2\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}t^2 + C\cdot t + C'$$

$$x(t) = 1\,\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + C\cdot t + C'$$

si sabemos que en $t = 0\ s$ el cuerpo se encontraba en la posición $x = 3\ m$, y que en el instante $t = 1s$ la posición era $x = 1m$ entonces

$$x(0s) = 1\,\frac{m}{s^3}\cdot(0s)^3 - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot(0s)^2 + C\cdot 0s + C' = 3m$$

$$x(1s) = 1\,\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^3 - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot(1s)^2 + C\cdot 1s + C' = 1m$$

con estas condiciones iniciales conformamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$C' = 3m$$

$$C\cdot 1s + C' = 1m$$

cuya solución nos permite determinar el valor de las constantes *C* y *C'*.

$$C = -2\,\frac{m}{s}$$
$$C' = 3m$$

quedando determinadas unívocamente las funciones velocidad y de movimiento del cuerpo como:

$$v(t) = 3\,\frac{m}{s^3}\cdot t^2 - 2\,\frac{m}{s^2}\,t - 2\,\frac{m}{s}$$

$$x(t) = 1\,\frac{m}{s^3}\cdot t^3 - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 2\,\frac{m}{s}\cdot t + 3m$$

Otro caso de interés a resolver es cuando la información que tenemos sobre el sistema es la función aceleración, pero ésta no es una función continua sino que está definida a tramos, por ejemplo:

$$a(t) = \begin{cases} 0\,\frac{m}{s^2} & t \leq 1s \\ 3\,\frac{m}{s^3}\cdot t & 1s < t \end{cases}$$

además sabemos que para el instante $t = 0s$ la velocidad es $v(0) = 2\ m/s$ y la posición es $x(0) = 3\ m$. Integrando la función aceleración podemos obtener la función velocidad

$$v(t) = \begin{cases} C_1 & t \leq 1s \\ \frac{3}{2}\,\frac{m}{s^3}\cdot t^2 + C_1' & 1s < t \end{cases}$$

Como el dato sobre la velocidad es para $t = 0s$ podemos determinar el valor de la constante C_1 pues es la expresión que corresponde para la velocidad para ese instante de tiempo.

$$v(0s) = C_1 = 2\,\frac{m}{s}$$

Para determinar el valor de la constante C_1' hacemos uso de la continuidad de la función velocidad; es decir que, en este caso particular, que ambas expresiones deben dar el mismo valor cuando las evaluemos en $t=1s$

$$v(1s) = \frac{3}{2}\,\frac{m}{s^3}\cdot (1s)^2 + C_1' = 2\,\frac{m}{s}$$

$$C_1' = \frac{1}{2}\,\frac{m}{s}$$

La función velocidad resulta

$$v(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s} & t \le 1s \\ \frac{3}{2}\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{s} & 1s < t \end{cases}$$

Integrando esta función velocidad obtenemos la función de movimiento del cuerpo

$$x(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s} \cdot t + C_2 & t \le 1s \\ \frac{1}{2}\frac{m}{s^3} \cdot t^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s} t + C_2^{'} & 1s < t \end{cases}$$

Con la información de la posición del cuerpo en $t = 0s$ determinamos el valor de la constante C_2

$$x(0s) = C_2 = 3m$$

y haciendo uso de la continuidad de la función de movimiento podemos calcular el valor de la constante C_2'

$$x(1s) = \frac{1}{2}\frac{m}{s^3} \cdot (1s)^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s} 1s + C_2^{'} = 2\frac{m}{s} \cdot 1s + C_2$$

$$C_2^{'} = 4m$$

Siendo entonces la función de movimiento:

$$x(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s} \cdot t + 3m & t \le 1s \\ \frac{1}{2}\frac{m}{s^3} \cdot t^3 + \frac{1}{2}\frac{m}{s} t + 4m & 1s < t \end{cases}$$

Integrales indefinidas y definidas

En los ejemplos anteriores, para calcular la función velocidad integrábamos la función aceleración. Así la velocidad quedaba determinada a menos de una constante que debe determinarse utilizando las condiciones iniciales del problema. Lo mismo ocurre al calcular la función de movimiento a partir de la función velocidad.

Hemos definido la integral de una función $f(x)$ como

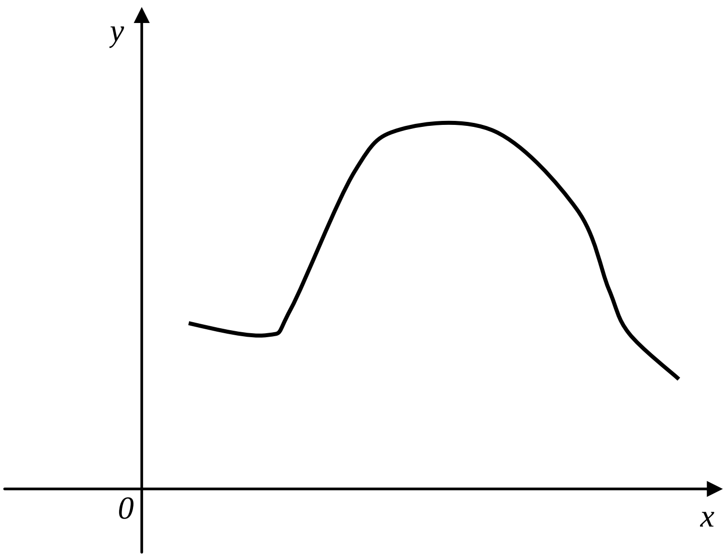
$$\int f(x) \cdot dx = y(x)$$

donde la función *y(x)* se denomina la primitiva de *f(x)* y satisface que

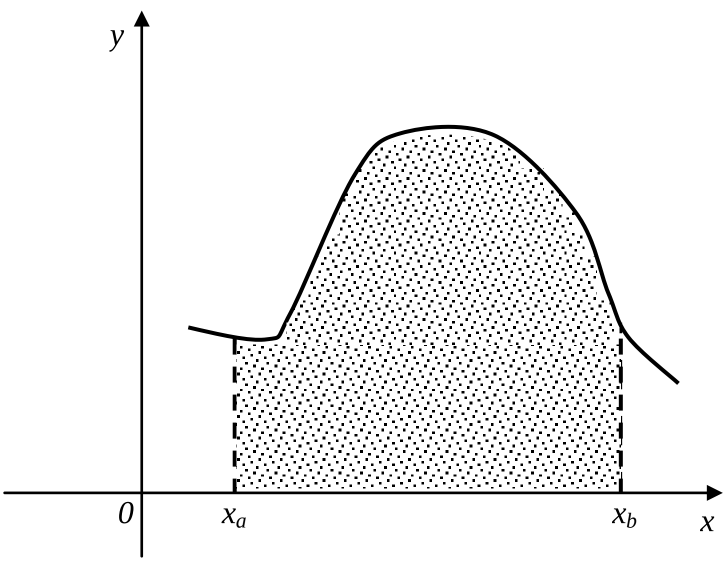
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Esta integral se denomina integral indefinida y su resultado es una función.

Veamos ahora otra aplicación del concepto de integral. Supongamos que tenemos una función *f(x)* cuyo gráfico se muestra en la figura

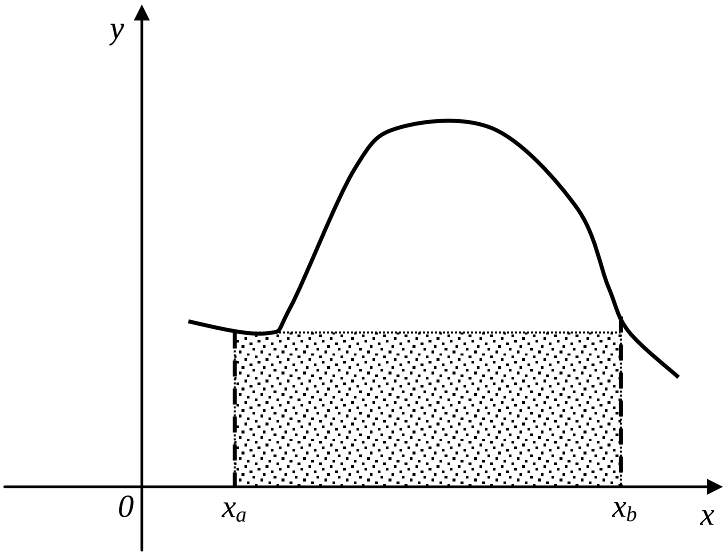


y deseamos calcular cuál es el área comprendida entre el gráfico y el eje *x* en el intervalo [x_a, x_b] que se muestra sombreada en la figura de abajo

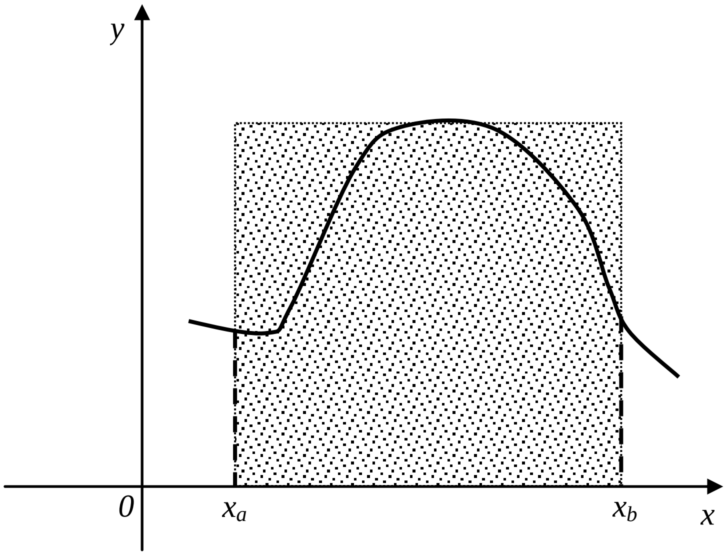


Esta no es una figura regular y por lo tanto no podemos utilizar ninguna de las expresiones conocidas para calcular el valor de área. Comencemos haciendo una estimación aproximada del valor del área, por ejemplo, vemos que el área deseada es claramente mayor que la del rectángulo sombreado en la figura (a) y también que el área que nos interesa es obviamente menor que la del rectángulo sombreado en la figura (b). Podríamos aproximar el valor del área bajo la curva por el área de alguno de los dos rectángulos que se muestran en las figuras de abajo.

a)

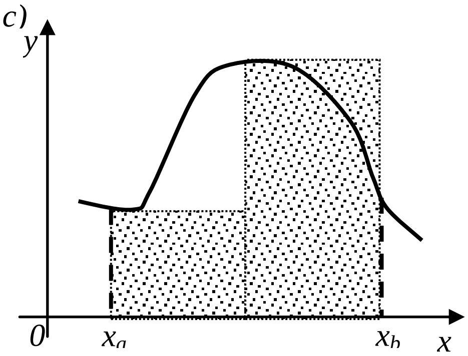


b)

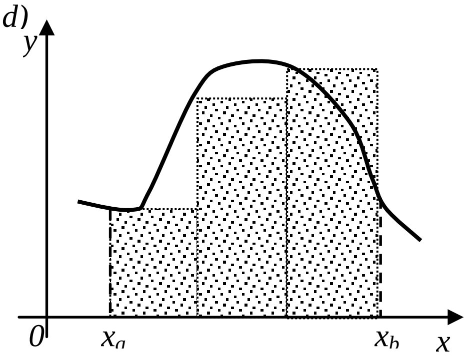


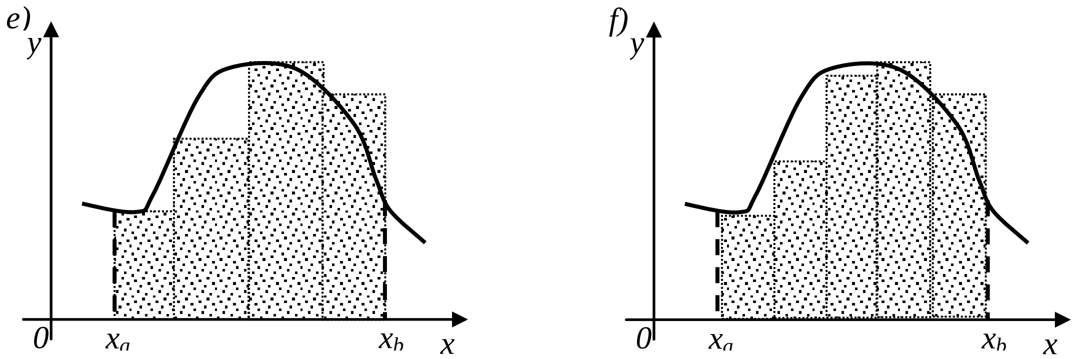
Para tener un valor más aproximado del área bajo la curva podemos ir aumentando la cantidad de rectángulos utilizados como se muestran en las figuras siguientes y entonces aproximar el área bajo la curva por la suma de las áreas de los rectángulos

c)

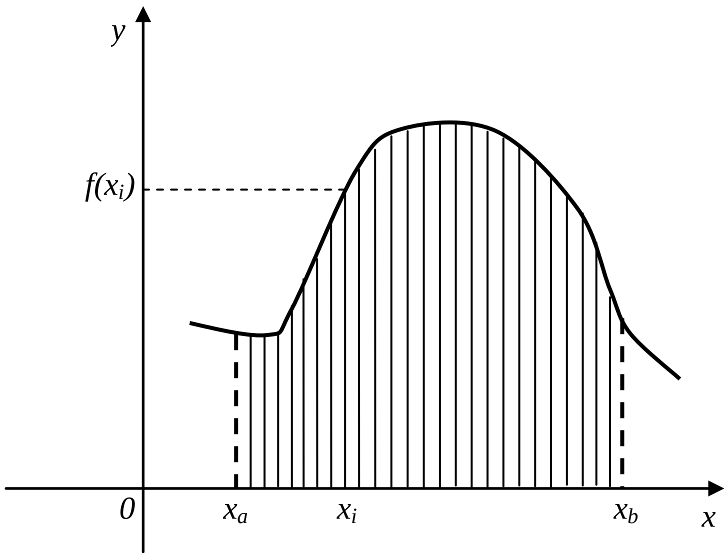


d)





Vemos que a medida que utilizamos mayor cantidad de rectángulos el área ocupada por ellos se aproxima cada vez más al área de la curva. Por lo tanto si tomamos un número de rectángulos *N* grande, la suma de sus áreas será una muy buena aproximación al área de la curva. Suponiendo que dividimos el intervalo $[x_a, x_b]$ en partes iguales cada una de longitud Δx entonces cada uno de los rectángulos tendrá una base de longitud Δx y su altura será $f(x_i)$, donde x_i es coordenada de la arista del rectángulo.



Entonces el área del *i*-ésimo rectángulo será

$$A_i = f(x_i).\Delta x$$

y el área bajo la curva, que denominaremos *A*, será aproximadamente igual a la suma del área de los rectángulos

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} f(x_i).\Delta x$$

Cuanto mayor sea el número N de rectángulos que utilicemos mejor aproximaremos el área bajo la curva. Si incrementamos el número de rectángulos en el intervalo $[x_a, x_b]$ entonces disminuirá la longitud de la base Δx. La suma de las áreas de los rectángulos será igual al área bajo la curva en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ (o sea que $\Delta x \rightarrow 0$). En este límite, teniendo en cuenta que

$$\Delta x \rightarrow dx \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{N} \rightarrow \int_{x_a}^{x_b}$$

el área bajo la curva resulta

$$A = \int_{x_a}^{x_b} f(x_i).dx$$

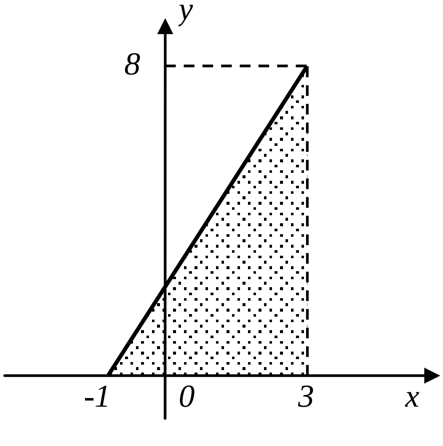
La expresión $\int_{x_a}^{x_b} f(x_i).dx$ se denomina la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[x_a, x_b]$. Si sabemos que la integral indefinida de $f(x)$ es

$$\int f(x) \cdot dx = y(x)$$

entonces el valor de la integral definida es

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x_i).dx = y(x_b) - y(x_a)$$

Analicemos el caso particular de una función simple: Dada la función $f(x) = 2x + 2$ nos interesa calcular el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$ que corresponde al área del triángulo que se muestra en la siguiente figura



De acuerdo a lo antes expresado

$$A = \int_{-1}^{3} (2.x + 2).dx$$

sabemos que la integral indefinida de *f(x)* es

$$\int (2.x + 2).dx = x^2 + 2.x + C$$

donde C es una constante indefinida. Si calculamos el valor de la integral definida obtenemos

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{3} (2.x + 2).dx &= \left[3^2 + 2.3 + C\right] - \left[(-1)^2 + 2.(-1) + C\right] \\ &= (9 + 6 + C) - (1 - 2 + C) \\ &= (15 + C) - (-1 + C) \\ &= 15 + C + 1 - C \\ &= 16 \end{aligned}$$

Vemos que la constante indeterminada de la integral indefinida no nos imposibilita realizar el cálculo de la integral definida. En este ejemplo la figura geométrica que queda definida entre la curva y el eje *x* es un triángulo cuya base tiene una longitud de *4* unidades y su altura una longitud de *8* unidades y su área es

$$\begin{aligned} A &= \frac{base.altura}{2} \\ &= \frac{4.8}{2} \\ &= 16 \end{aligned}$$

verificando que ambos resultados concuerdan. Ustedes pueden verificar que si el gráfico de la función está totalmente, o parcialmente, por debajo del eje *x* esa parte del área nos dará un valor negativo.

Aplicación de las integrales definidas en cinemática

La aceleración de un cuerpo está definida cómo

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

y podemos escribir

$$dv = a(t).dt$$

Si conocemos que el cuerpo para el tiempo $t = t_o$ tiene una velocidad $v(t_o) = v_o$ y que para $t = t_1$ la velocidad es $v(t_1) = v_1$ podemos realizar la integral definida en ambos miembros de la expresión anterior. En ambos miembros integramos sobre diferentes variables pero los límites de integración están relacionados $t_o \rightarrow v_o$ y $t_1 \rightarrow v_1$

$$\int_{v_o}^{v_1} dv = \int_{t_o}^{t_1} a(t).dt$$

Primero calculemos la integral definida de la izquierda; sabemos que la integral indefinida de la izquierda es

$$\int dv = v + C$$

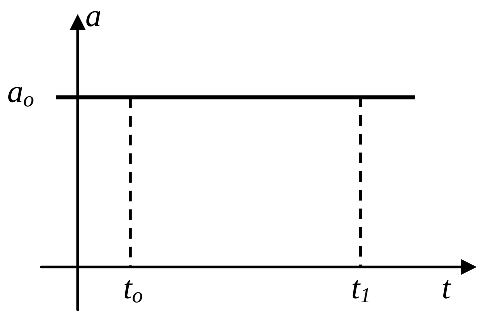
entonces la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_{v_o}^{v_1} dv &= (v_1 + C) - (v_o + C) \\ &= v_1 + C - v_o - C \\ &= v_1 - v_2 \\ &= \Delta v\end{aligned}$$

Vemos que esta integral definida $\int_{v_o}^{v_1} dv$ es igual a la variación de la velocidad del cuerpo en el intervalo [t_o, t_1] y sabemos que la integral definida $\int_{t_o}^{t_1} a(t).dt$ es igual al área bajo la curva de la función aceleración. Por lo tanto podemos concluir que la variación de la velocidad en un determinado intervalo de tiempo es igual al área bajo la curva de la función aceleración en el mismo intervalo.

$$\Delta v = \int_{t_o}^{t_1} a(t).dt$$

Tomemos como ejemplo el caso de un cuerpo que se desplaza con aceleración constante, como se observa en la figura

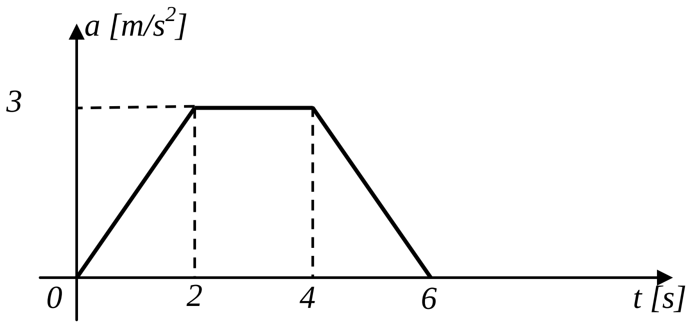


entonces la variación de la velocidad en el intervalo [t_o, t_1] será igual al área bajo la curva de la función aceleración. En este caso particular en que la aceleración es constante, el área corresponde a la de un rectángulo resultando

$$\Delta v = a_o.(t_1 - t_o)$$

que coincide con lo obtenido en el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Veamos otro ejemplo: supongamos que un cuerpo está sometido a una aceleración cuya gráfica se muestra en la figura



entonces la variación de la velocidad en el intervalo [$0s$, $6s$] será igual al área bajo la curva de la función aceleración. En este caso particular es

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{2s.3m/s^2}{2} + (4s - 2s).3m/s^2 + \frac{(6s-4s).3m/s^2}{2} \\ &= 3m/s + 6m/s + 3m/s \\ &= 12m/s\end{aligned}$$

También hemos definido la velocidad de un cuerpo como

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

entonces

$$dx = v(t).dt$$

Si el cuerpo para el tiempo $t = t_o$ está en la posición $x(t_o) = x_o$ y que para $t = t_1$ en la posición $x(t_1) = x_1$ podemos realizar la integrar definida en ambos miembros de la expresión anterior. Notemos nuevamente que el miembro de la izquierda sólo contiene a la variable posición, mientas que el miembro de la derecha sólo es una función del tiempo y consecuentemente se integra sobre distintas variables, pero los límites de integración están relacionados $t_o \rightarrow x_o$ y $t_1 \rightarrow x_1$

$$\int_{x_o}^{x_1} dx = \int_{t_o}^{t_1} v(t).dt$$

Por lo tanto, al igual que ocurría con la velocidad y la aceleración, podemos escribir

$$\Delta x = \int_{t_o}^{t_1} v(t).dt$$

esta expresión indica que la variación de la posición de un cuerpo en un cierto intervalo de tiempo es igual al área bajo la curva de la función velocidad en dicho intervalo.

Capítulo 5

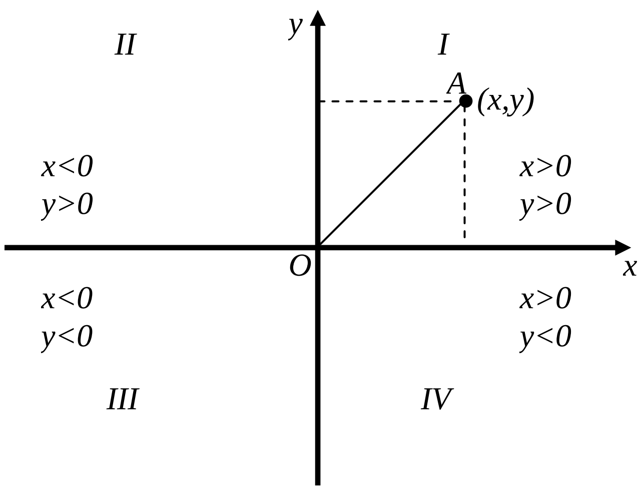
Localización de un punto en el plano

Hasta ahora hemos descrito el movimiento unidimensional (1-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas. Sin embargo nos interesa poder describir movimientos algo más complejos que los rectilíneos. Para ir incrementando de manera gradual la dificultad en la descripción de otros tipos de movimiento ahora estudiaremos el movimiento de cuerpos en dos dimensiones (2-D), es decir cuerpos que se mueven en el plano.

De igual manera que hicimos en la descripción de movimientos unidimensionales, lo primero que debemos hacer es ver cómo vamos a determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en este universo plano en el cual se mueve.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema está conformado por dos ejes cartesianos, como los utilizados en la descripción de movimientos unidimensionales, perpendiculares entre sí. Ambos ejes representan coordenadas espaciales.

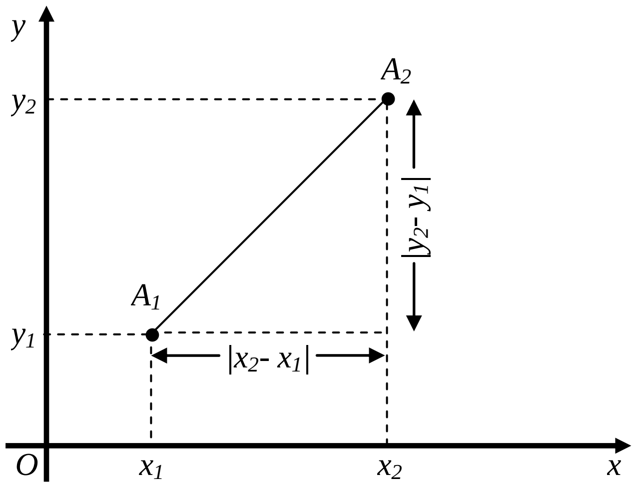


Todos los puntos del plano quedan definidos por un par de números referidos al sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, el punto *A* tiene una posición en el plano que queda determinada por medio de las coordenadas espaciales *(x,y)*.

La distancia que existe entre un punto del plano de coordenadas *(x,y)* y el origen, d_{AO}, está dada por la expresión:

$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

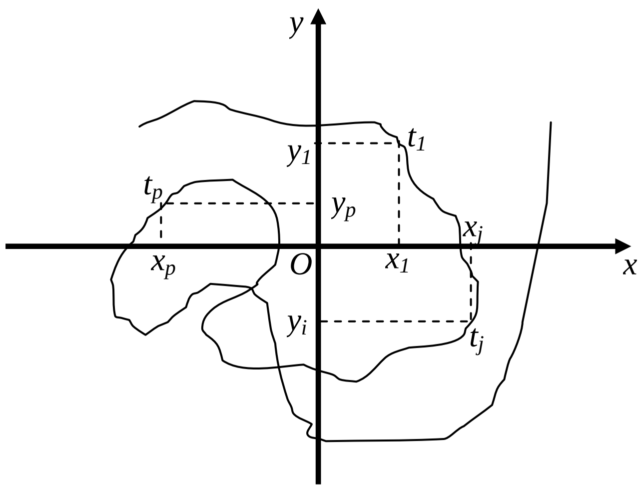
Dados dos puntos del plano A_1 y A_2, de coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) respectivamente, la distancia entre ellos *d* es la longitud del segmento $\overline{A_1A_2}$ y está dada por la expresión:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Trayectoria y Funciones de Movimiento

Si marcamos todos los puntos del plano que el cuerpo ocupa sucesivamente en su movimiento tendremos una gráfica, la cual se denomina *trayectoria*, como la que se muestra en la figura.



Por lo tanto *trayectoria* se denomina a la gráfica del camino, o recorrido, que realiza el cuerpo a medida que realiza su movimiento.

Si para cada tiempo t_i nos fijamos cuáles eran las coordenadas $(x_i\ ,\ y_i)$ del punto del plano donde estaba ubicado el cuerpo, podemos construir una tabla con dichos valores

t	x	y
t_1	x_1	y_1
t_2	x_2	y_2
:	:	:
:	:	:
t_j	x_j	y_j
:	:	:
:	:	:

Vemos que a partir de esta tabla podemos construir dos funciones de movimiento

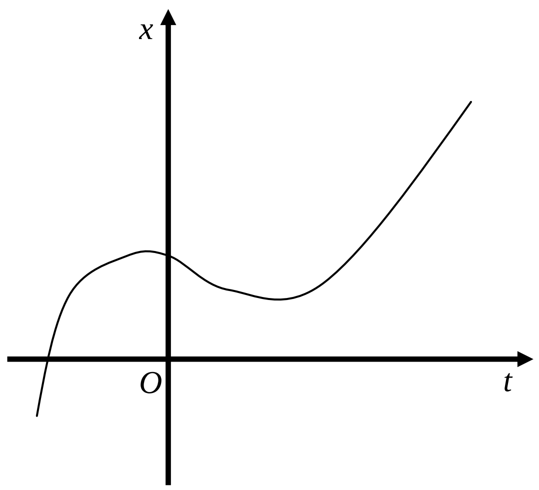
t	x
t_1	x_1
t_2	x_2
:	:
:	:
t_j	x_j
:	:
:	:

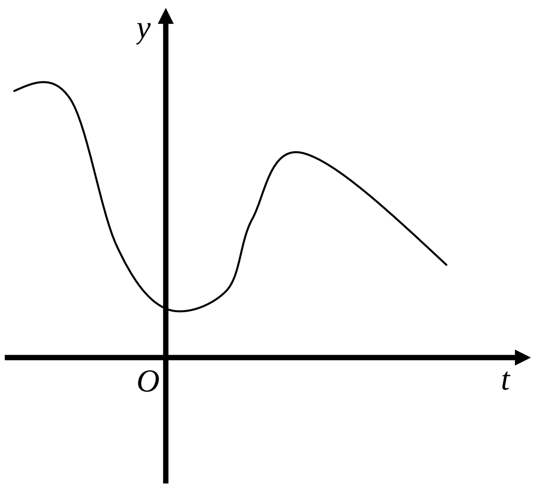
$\Rightarrow x = x(t)$

t	y
t_1	y_1
t_2	y_2
:	:
:	:
t_j	y_j
:	:
:	:

$\Rightarrow y = y(t)$

las cuales podemos graficar





Las funciones *x(t)* e *y(t)* se denominan *funciones de movimiento* y nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo en el plano a través de sus coordenadas para cada instante de tiempo.

Por otra parte, la expresión matemática de la trayectoria estará dada por una relación $y = f(x)$. Esta expresión puede deducirse a partir de las funciones de movimiento del cuerpo. Como veremos en algunos ejemplos más adelante todos los puntos de la trayectoria verifican la relación $y= f(x)$, sin embargo no todos los puntos que satisfacen la relación $y=f(x)$ pertenecen a la trayectoria. Debemos aclarar que hemos utilizado el término *relación* en vez de *función* pues no siempre los puntos del plano que pertenecen a la trayectoria son una función.

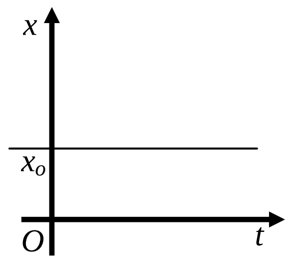
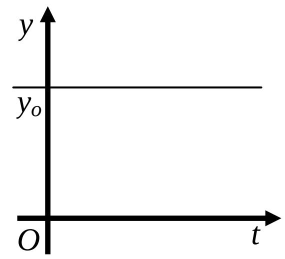
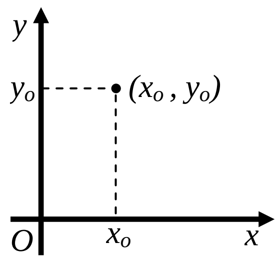
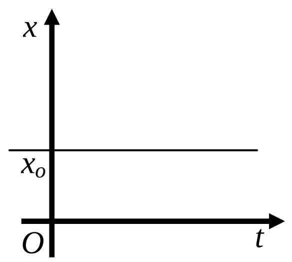
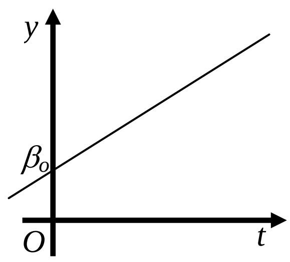
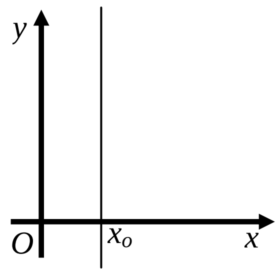
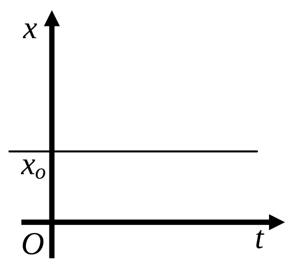
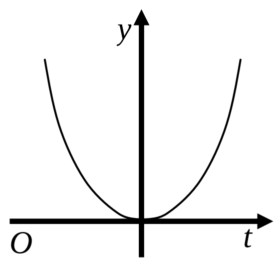
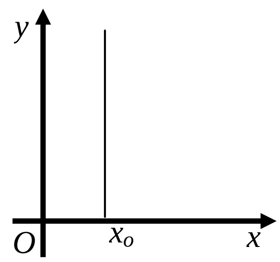
La forma más general de obtener la expresión $y = f(x)$ es eliminando la variable t de las funciones de movimiento $x(t)$ e $y(t)$. Las dos formas más simples de realizar esto son:

1) Se despeja la variable t de una de las funciones de movimiento, por ejemplo $x(t)$, y luego se reemplaza esta expresión en la otra función de movimiento, por ejemplo $y(t)$, obteniendo $y[t(x)]$.

2) Se despeja la variable t de ambas funciones de movimiento, obteniendo $t = g(x)$ y $t = h(y)$. Se igualan ambas expresiones eliminando el parámetro t, $g(x) = h(y)$, y de esta igualdad se puede obtener $x = l(y)$ ó $y = f(x)$.

Sin embargo, dado que $x(t)$ e $y(t)$ nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo para cada instante de tiempo nos están definiendo cuál es la trayectoria del cuerpo. En este caso decimos que $x(t)$ e $y(t)$ describen la *trayectoria* en forma paramétrica donde el parámetro es t.

Analicemos a continuación algunos ejemplos de cómo obtener la expresión para la trayectoria a partir de las funciones de movimiento del cuerpo.

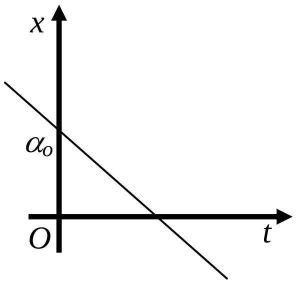
$x = x(t)$	$y = y(t)$	$y = y(x)$
a) $x = x_o = cte$ 	$y = y_o = cte$ 	$x = x_o$, $y = y_o$ 
b) $x = x_o = cte$ 	$y = \beta_o + \beta_1 . t$ 	$x = x_o$, $y = \beta_o + \beta_1 . t$ 
c) $x = x_o = cte$ 	$y = \beta . t^2$ 	$x = x_o$, $y = \beta . t^2$ 

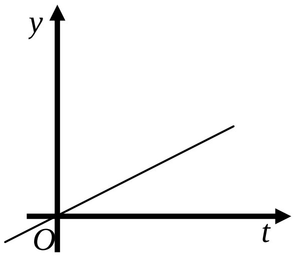
El ejemplo a) describe un cuerpo en reposo y los ejemplos b) y c) corresponden a movimientos rectilíneos. En estos dos últimos casos, si hubiésemos hecho coincidir uno de los ejes del sistema de coordenadas con la trayectoria, los podríamos haber descripto como movimientos unidimensionales.

Analicemos otros ejemplos:

d) $x(t) = \alpha_o + \alpha_1 t$ [$\alpha_o > 0$ y $\alpha_1 < 0$] $y(t) = \beta t$ [$\beta > 0$]

El gráfico de las funciones de movimiento es



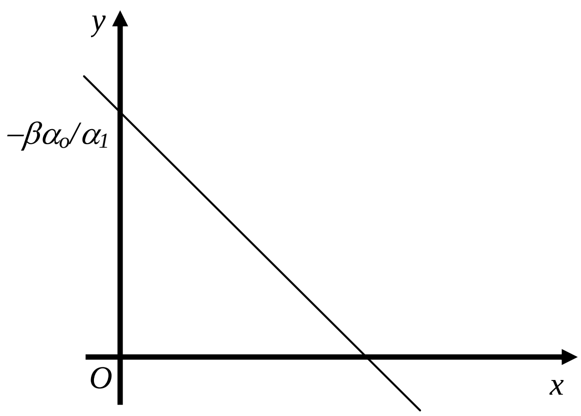


Despejando t de la función de movimiento $x=x(t)$ y luego reemplazando en la función de movimiento $y=y(t)$ obtenemos

$$t = \frac{x}{\alpha_1} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{\beta}{\alpha_1} x - \frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1}$$

$$\frac{\beta}{\alpha_1} < 0 \qquad \frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1} < 0 \quad \therefore \quad -\frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1} > 0$$

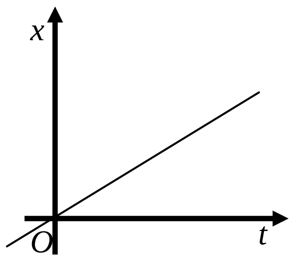
En este caso particular la ecuación de la trayectoria corresponde a una función lineal la cual se grafica abajo.

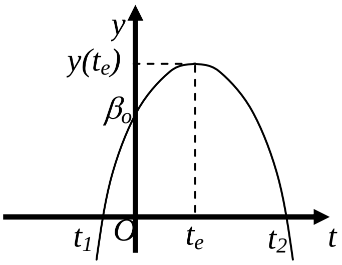


Si hubiésemos elegido el sistema de coordenadas de manera tal que uno de los ejes coincidiera con la trayectoria, el movimiento del cuerpo podría haber sido descripto como un movimiento unidimensional. Este ejemplo permite visualizar cuán importante es la correcta elección del sistema de coordenadas para una descripción simple, desde el punto de vista matemático, del movimiento del cuerpo.

e) $x(t) = \alpha t$ $[\alpha > 0]$ $y(t) = \beta_o + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ $[\beta_o>0, \beta_1>0 \text{ y } \beta_2<0]$

En este ejemplo la gráfica de las funciones de movimiento es





y podemos calcular para qué valores de tiempo la coordenada y es igual a cero y cuando tomará su valor máximo

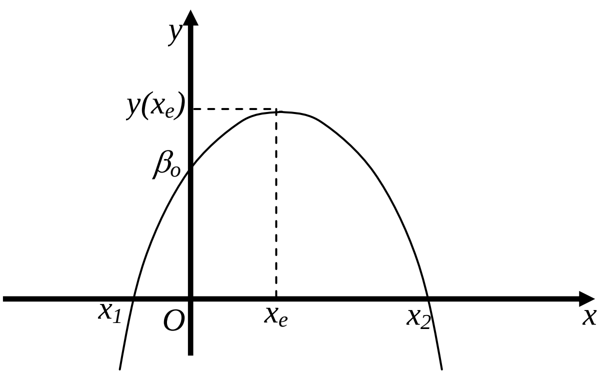
$$t_1 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\beta_1^{\,2} - 4\beta_2\,\beta_0}}{2\beta_2} \quad , \quad t_2 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^{\,2} - 4\beta_2\,\beta_0}}{2\beta_2}$$

$$t_e = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} > 0 \quad , \quad y(t_e) = \beta_0 - \frac{\beta_1^{\,2}}{4\beta_2} > 0$$

Para encontrar la ecuación de la trayectoria debemos despejar el parámetro t de la función de movimiento $x(t)$ y luego reemplazar el parámetro t en la ecuación de movimiento $y(t)$

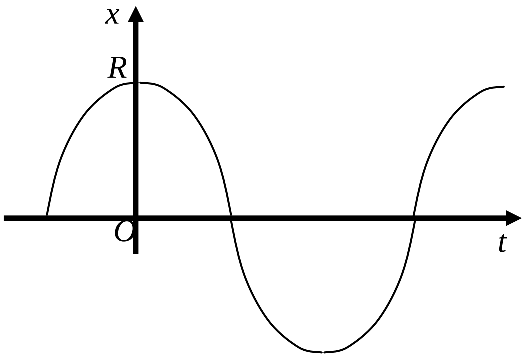
$$t = \frac{x}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}x + \frac{\beta_2}{\alpha^2}x^2$$

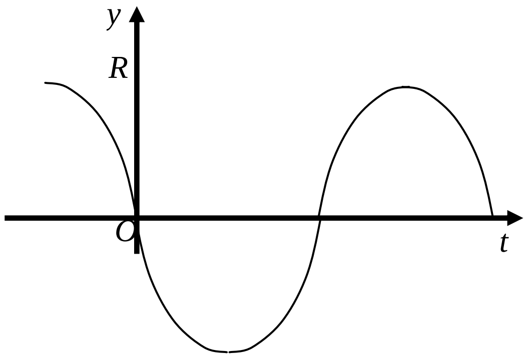
Como vemos la trayectoria es una parábola cuyo gráfico es el mostrado abajo:



donde $x_1 = \alpha t_1$; $x_2 = \alpha t_2$ y $x_e = \alpha t_e$

f) $x(t) = R\cos(k\,t)$ $\qquad$ $y(t) = R\,sen(k\,t)$ $\qquad$ $[k > 0]$





En este caso si utilizamos el mismo método que en los ejemplos anteriores para encontrar la trayectoria tenemos que al despejar t de una de las ecuaciones de movimiento, por ejemplo de $x = x(t)$ obtenemos

$$t = \frac{1}{k} \cdot \arccos\left(\frac{x}{R}\right)$$

si ahora reemplazamos t en ecuación de movimiento $y = y(t)$ la expresión de la trayectoria resulta

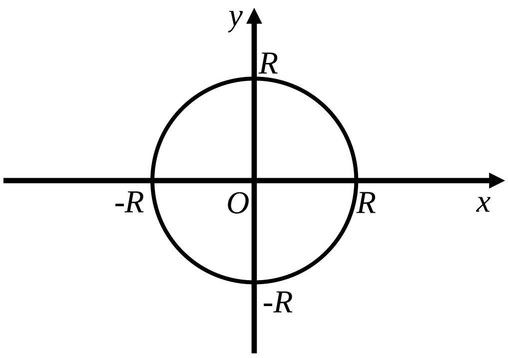
$$y(x) = R.sen\left[\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right]$$

Resulta evidente que a partir de esta expresión no podemos determinar fácilmente cuál será el gráfico de la trayectoria. Sin embargo, si elevamos al cuadrado las funciones de movimiento y luego las sumamos obtenemos.

$$x^2 = R^2 \cos^2(kt) \qquad\qquad y^2 = R^2\, sen^2(kt)$$

$$x^2 + y^2 = R^2\,[\cos^2(k\,t) + sen^2(k\,t)] \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2$$

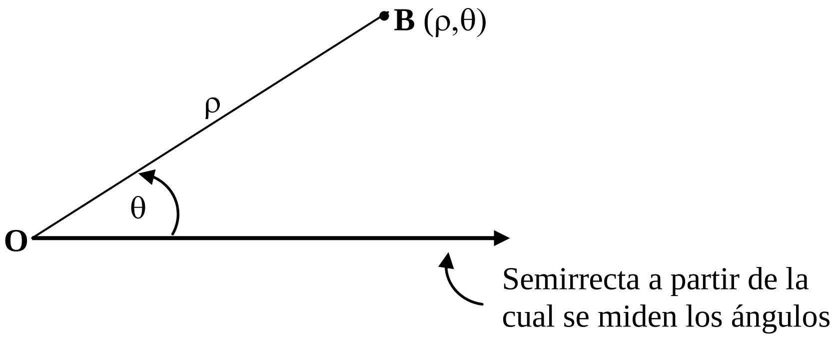
por lo tanto el gráfico de la trayectoria es un círculo de radio R



Como vemos este ejemplo es un caso particular en el cual no es posible expresar a los puntos del plano que pertenecen a la trayectoria como una función.

Sistema de coordenadas polares

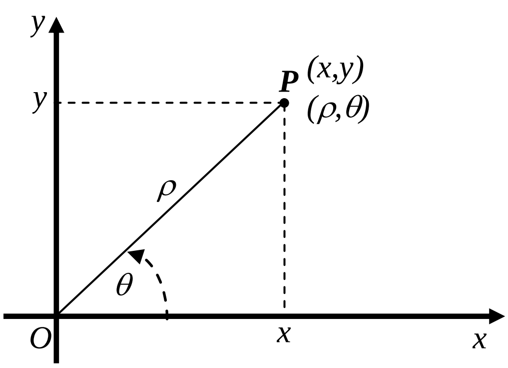
Hasta ahora para definir la localización de un punto en el plano hemos utilizado un sistema de coordenadas cartesianas. Sin embargo también es posible determinar un punto del plano utilizando otro tipo de coordenadas, por ejemplo las coordenadas polares.



Como vemos en el dibujo la posición del punto **B** se puede fijar dando los valores de ρ y θ, donde:

- ρ es la longitud del segmento $\overline{OB}$ $\therefore$ $\rho > 0$ o sea es la distancia del punto al origen de coordenadas.
- θ es el ángulo subtendido por el segmento $\overline{OB}$ y la semirrecta horizontal. Por convención, si el ángulo se genera rotando dicho segmento en sentido antihorario el signo del ángulo será positivo, pero si se genera rotando el segmento en sentido horario el signo del ángulo será negativo.

Con estas dos coordenadas (ρ,θ) se determina unívocamente la posición de un punto en el plano. Como vemos hasta ahora todo lo concerniente a las coordenadas polares es completamente análogo a las coordenadas cartesianas.



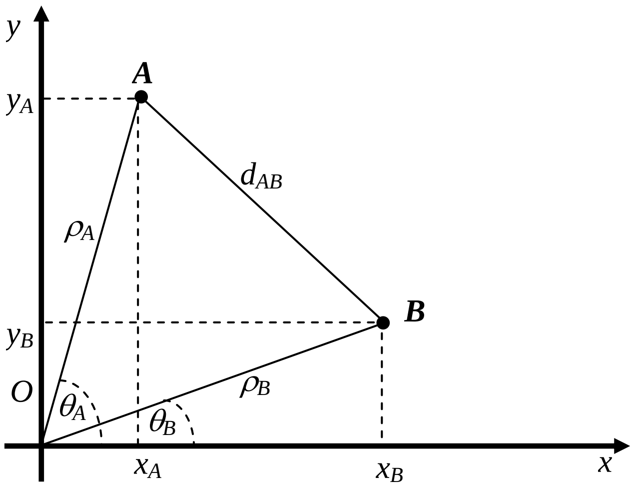
Las coordenadas cartesianas y polares están relacionadas por las siguientes expresiones:

$$x = \rho \cos(\theta)$$
$$y = \rho\ sen(\theta)$$

y la relación inversa es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg(\theta) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

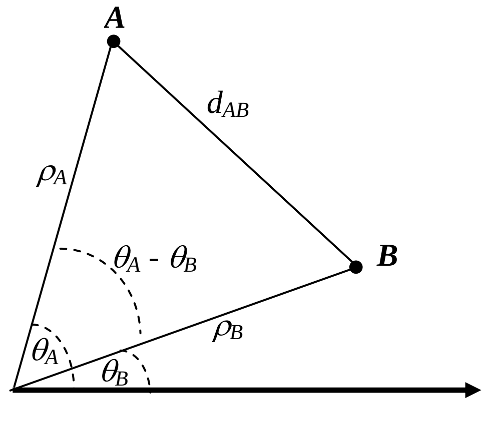
Distancia entre dos puntos del plano en coordenadas polares



La distancia entre los puntos ***A*** y ***B*** en función de sus coordenadas cartesianas está dada por la expresión

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Si analizamos la figura, vemos que queda definido un triángulo cuyos lados son ρ_A, ρ_B y d_{AB}. En este triángulo el ángulo entre los lados ρ_A y ρ_B es $(\theta_A - \theta_B)$.



Haciendo uso del teorema del coseno podemos determinar que:

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B{}^2 + \rho_A{}^2 - 2\,\rho_A\,\rho_B \cos(\theta_A - \theta_B)}$$

Analicemos si son equivalentes las expresiones obtenidas en coordenadas cartesianas y polares para la distancia entre los puntos ***A*** y ***B***. Sabemos que

$$x_A = \rho_A \cos(\theta_A)$$
$$y_A = \rho_A\ sen(\theta_A)$$
$$x_B = \rho_B \cos(\theta_B)$$
$$y_B = \rho_B\ sen(\theta_B)$$

y

$$\rho_A^{\ 2} = x_A^{\ 2} + y_A^{\ 2}$$
$$\rho_B^{\ 2} = x_B^{\ 2} + y_B^{\ 2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{x_B^{\ 2} - 2x_A x_B + x_A^{\ 2} + y_B^{\ 2} - 2y_A y_B + y_A^{\ 2}}$$

$$d_{AB} = \sqrt{x_B^{\ 2} + y_B^{\ 2} + x_A^{\ 2} + y_A^{\ 2} - 2(x_A x_B + y_A y_B)}$$

utilizando las relaciones entre coordenadas cartesianas y polares se obtiene

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B^{\ 2} + \rho_A^{\ 2} - 2\rho_A \rho_B\left[\cos(\theta_A)\cos(\theta_B) + sen(\theta_A)\,sen(\theta_B)\right]}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\rho_B^{\ 2} + \rho_A^{\ 2} - 2\rho_A \rho_B \cos(\theta_A - \theta_B)}$$

Como vemos las dos expresiones son equivalentes, ya que la distancia entre dos puntos debe ser independiente del sistema de coordenadas que se use para calcularla. La distancia entre dos puntos debe ser invariante ante transformaciones de coordenadas.

Descripción de movimientos en coordenadas polares

Para dar la posición de un cuerpo que está en movimiento por medio de coordenadas polares, podemos construir una tabla

t	ρ	θ
t_1	ρ_1	θ_1
t_2	ρ_2	θ_2
:	:	:
:	:	:
t_j	ρ_j	θ_j
:	:	:
:	:	:

y de igual manera que en coordenadas cartesianas, tendremos dos funciones de movimiento

t	ρ
t_1	ρ_1
t_2	ρ_2
:	:
:	:
t_j	ρ_j
:	:
:	:

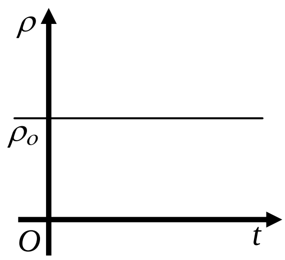
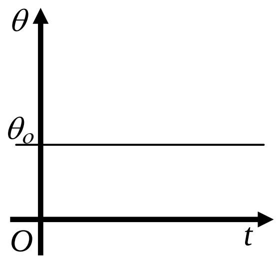
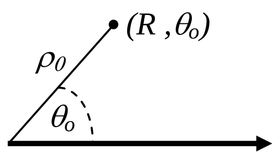
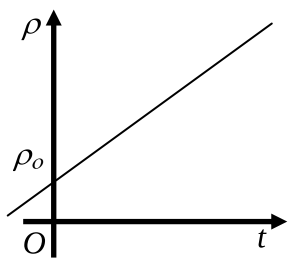
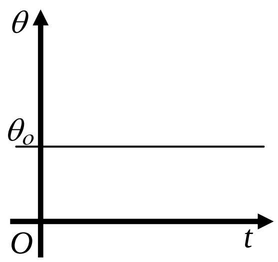
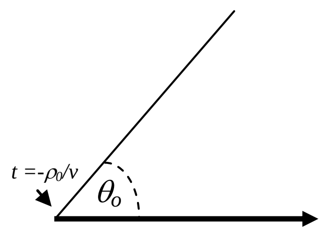
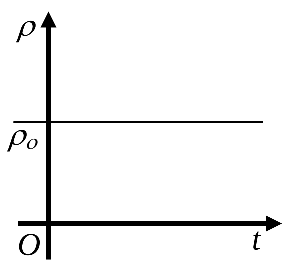
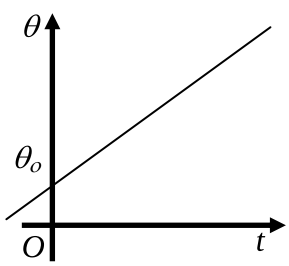
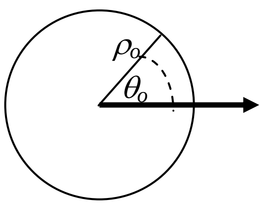
$$\Rightarrow \rho = \rho\,(t)$$

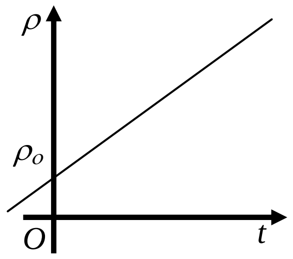
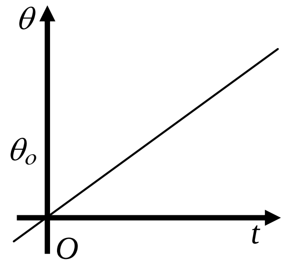
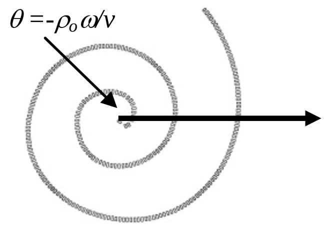
t	θ
t_1	θ_1
t_2	θ_2
:	:
:	:
t_j	θ_j
:	:
:	:

$$\Rightarrow \theta = \theta\,(t)$$

La trayectoria estará dada en forma paramétrica con parámetro t por las expresiones de las funciones de movimiento $\rho\ (t)\ y\ \theta\ (t)$ o por una relación entre las coordenadas polares ρ y θ, es decir $\rho = \rho(\theta)$, la cual se obtiene eliminando t en las funciones de movimiento.

Analicemos a continuación algunos ejemplos de movimientos en el plano descriptos en coordenadas polares.

$\rho = \rho(t)$	$\theta = \theta(t)$	$\rho = \rho(\theta)$
a) $\rho = \rho_o = cte$ 	$\theta = \theta_o = cte$ 	$\rho = \rho_0\ ,\ \theta = \theta_o$ 
b) $\rho = \rho_o + v\,t$ (*) 	$\theta = \theta_o = cte$ 	$\rho = \rho_o + v\,t,\ \theta = \theta_o$ (*) 
c) $\rho = \rho_o = cte$ 	$\theta = \theta_o + \omega\,t$ 	$\rho = \rho_o,\ \theta = \theta_o + \omega\,t$ 

d) $\rho = \rho_o + v\,t$ *(*)*	$\theta = \omega\,t$	$\rho = \rho_o + v\theta/\,\omega$
		

(*) Debido a que $\rho > 0$ estas funciones de movimiento son válidas sólo para $t \geq -\rho_o / v$.

El ejemplo (a) corresponde a la descripción de un cuerpo en reposo; el (b) a un movimiento rectilíneo circunscripto al primer cuadrante. El ejemplo (c) corresponde a la descripción de un movimiento circular y vemos que las expresiones de las funciones de movimiento en polares ($\rho(t)$ y $\theta(t)$) son más simples que en coordenadas cartesianas ($x(t)$ e $y(t)$). El ejemplo (c) corresponde a la descripción del movimiento de un cuerpo que describe una trayectoria espiral cuya expresión en cartesianas sería sumamente compleja.

Aunque nosotros sólo trabajaremos con coordenadas cartesianas y polares es necesario destacar que existen otros sistemas de coordenadas para determinar la posición de puntos en el plano (por ejemplo coordenadas elípticas) que podrán ser utilizados cuando la simetría del problema permita una descripción más simple en estos sistemas de coordenadas.

Capítulo 6

Vectores

Existen magnitudes físicas que no son escalares, es decir no quedan completamente definidas dando su valor y la correspondiente unidad. Hay muchas magnitudes físicas que para poder definirlas es necesario dar más información, es necesario definirlas mediante la utilización de vectores y estas magnitudes reciben el nombre de magnitudes vectoriales.

Existen diversas definiciones para los vectores:

- Un vector es un segmento de una cierta longitud (denominada módulo del vector), al cual se le asignan propiedades adicionales como la dirección y sentido. El punto de origen en el espacio se denomina punto de aplicación.

- Un vector es la representación geométrica de una magnitud que necesita orientación espacial, punto de aplicación, dirección y sentido para quedar definida.

- Un vector es un segmento de recta orientado que va desde un punto P hasta un punto Q.

y así podríamos seguir enumerando muchas otras definiciones de un vector. Sin embargo vemos que en todas coinciden en cuáles son sus elementos característicos

i) una dirección
ii) un sentido
iii) una magnitud o módulo.

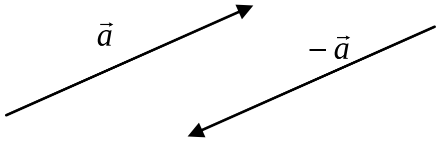
A un vector lo representaremos gráficamente por una flecha

y en el texto denotaremos que *r* es un vector mediante la letra que lo identifica, que puede ser minúscula o mayúscula, escrita en negrita (**r**), o la letra que lo identifica con una flecha encima ($\vec{r}$). Para denotar el módulo de un vector se encierra el símbolo utilizado para el vector entre dos barras verticales (|**r**| ó $|\vec{r}\,|$) o simplemente por la letra que lo identifica sin que aparezca la flecha encima ($|\vec{r}\,| = r$). El módulo de un vector es una magnitud escalar, es decir que queda totalmente definido por un número y eventualmente por una unidad.

Cuando multiplicamos un vector por un escalar obtenemos otro vector con las siguientes propiedades:

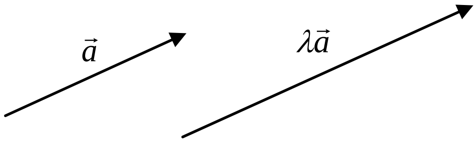
- $\lambda\vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$
- $\vec{a}$ y $\overrightarrow{\lambda a}$ tienen la misma dirección
- el módulo del producto es igual al producto de los módulos; $|\lambda\vec{a}| = \left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

- Si λ = 0 entonces $\lambda\vec{a} = 0$ lo que implica que es un vector nulo.
- Si λ = -1 entonces $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ y es el vector opuesto a $\vec{a}$ lo que implica que tiene la misma dirección y módulo pero sentido contrario.

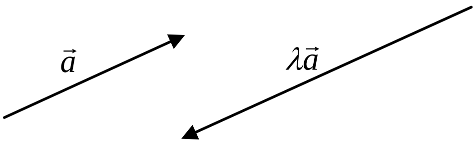


- En general si |λ| > 1 $|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{\lambda a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}|$

si λ >0

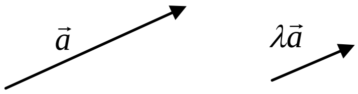


si λ <0

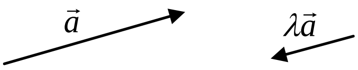


cuando |λ| < 1 $|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{\lambda a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}|$

si λ >0



si λ <0



Podemos definir distintos tipos de vectores:

- Vectores libres: no tienen su extremo inicial, u origen, fijado en ningún punto en particular.
- Vectores fijos: tienen su extremo inicial, u origen, fijado en algún punto en particular.
- Vectores equipolentes: son vectores que presentan iguales módulos, direcciones y sentidos.
- Vectores deslizantes: son vectores equipolentes que actúan sobre una misma recta.
- Vectores concurrentes: comparten el mismo extremo inicial u origen.
- Vectores colineales: aquéllos cuyas direcciones coinciden.

Versores

Un vector particular es el que obtenemos cuando multiplicamos a un vector $\vec{a}$ por un escalar cuyo valor es igual a la inversa de su módulo

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|} > 0$$

entonces

$$\lambda\vec{a} = \overrightarrow{\lambda a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

y el módulo de este vector es

$$|\lambda\vec{a}| = \left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

Vemos que el vector definido de esta manera es paralelo al vector $\vec{a}$ y su módulo igual a 1. Este tipo de vectores reciben el nombre particular de versores y los denotaremos por el símbolo $\hat{a}$.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad \text{y} \qquad |\hat{a}| = 1$$

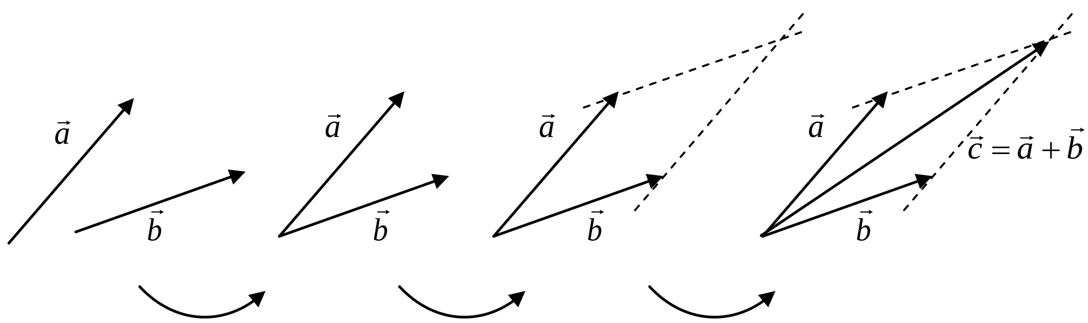
Los versores son vectores muy interesantes pues nos permiten definir una dirección y un sentido en el espacio y a partir de él podemos generar todos los vectores posibles en dicha dirección.

Suma de vectores

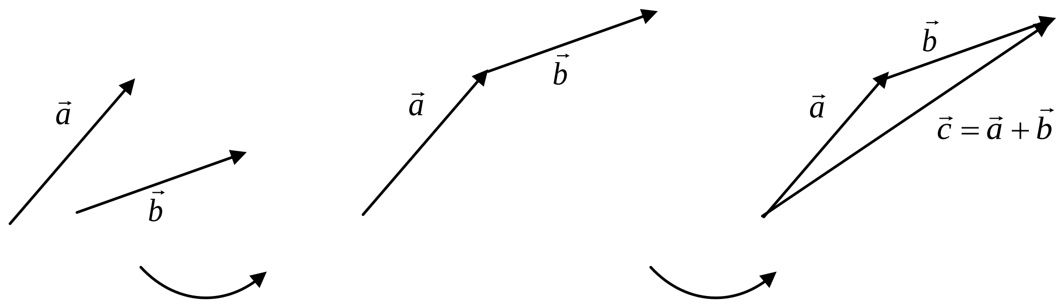
La suma de dos vectores da como resultado otro vector y esta operación, entre otras, posee las propiedades conmutativa y asociativa.

a) Propiedad conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
b) Propiedad asociativa: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

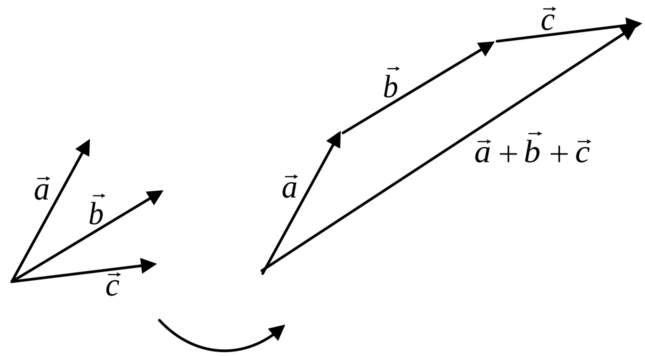
El vector suma se puede obtener gráficamente por la regla del paralelogramo.



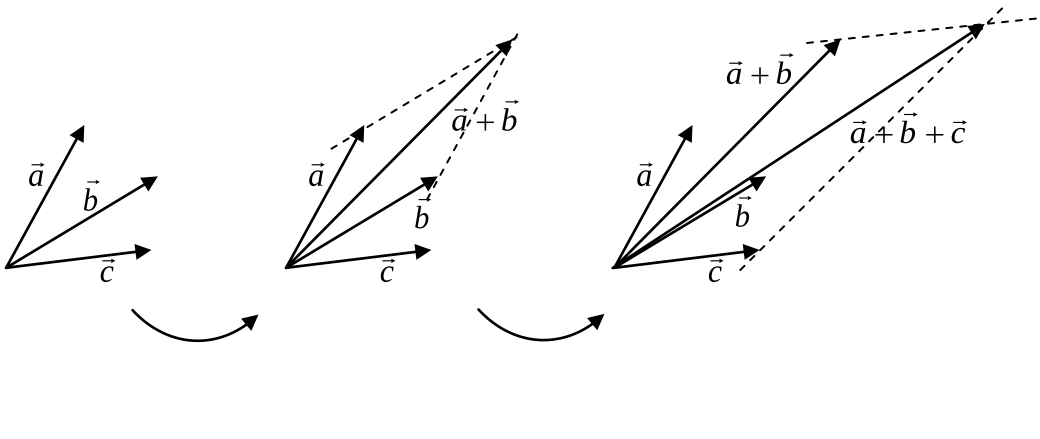
para ello hay que trasladar los dos vectores al mismo punto de aplicación, luego se forma un paralelogramo como se muestra en la figura y el vector suma queda definido por la diagonal del paralelogramo que contiene al punto común de aplicación de los vectores. Otra forma es trasladar el segundo vector al extremo del primero y el vector suma será el que une el origen del primero con el extremo del segundo.



Para sumar más de dos vectores se puede utilizar de manera reiterada este último método o aplicar la propiedad asociativa.



ó

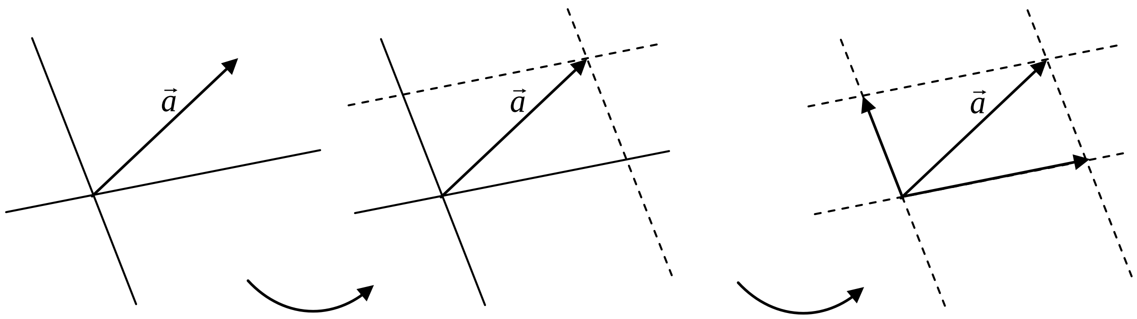


Un caso particular es cuando los dos vectores que sumamos son colineales. En este caso el vector suma tendrá la misma dirección que los dos vectores, el sentido del mayor de los vectores y su módulo será la suma de ambos módulos si ambos vectores tienen el mismo sentido o la diferencia si ambos tienen diferentes sentidos.

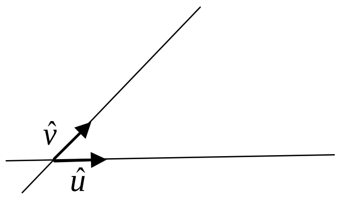
Al vector resta de dos vectores, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ lo podemos pensar como el vector suma de dos vectores $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$, donde entendemos al vector $(-\vec{b})$ como uno con la misma dirección y módulo pero sentido contrario al del vector $\vec{b}$.

Descomposición de vectores

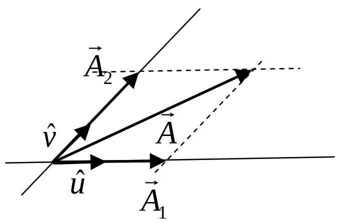
Un vector $\vec{a}$ puede ser expresado como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones predeterminadas. Encontrar cuáles son esos vectores se denomina hacer la descomposición del vector $\vec{a}$ en dichas direcciones. Para ello se trazan, por el extremo del vector $\vec{a}$, dos paralelas a cada una de las direcciones predeterminadas; donde estas rectas cortan a las direcciones dadas determinan el extremo de cada uno de los vectores en los cuales hemos descompuesto al vector $\vec{a}$.



Los versores pueden definir las direcciones a lo largo de las cuales queremos descomponer un vector. Al conjunto de versores que definen estas direcciones se les llama *base vectorial*.



Por ejemplo, consideremos los versores $\hat{u}$ y $\hat{v}$ que definen una base y las direcciones según las cuales se pueden descomponer vectores.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ son los vectores componentes de $\vec{A}$ según las direcciones $\hat{u}$ y $\hat{v}$. Como $\vec{A}_1$ y $\hat{u}$ son vectores paralelos, al igual que $\vec{A}_2$ y $\hat{v}$, podemos escribir:

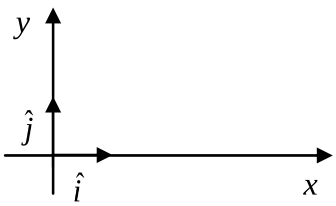
$$\vec{A}_1 = A_u \cdot \hat{u}$$
$$\vec{A}_2 = A_v \cdot \hat{v}$$

con lo cual

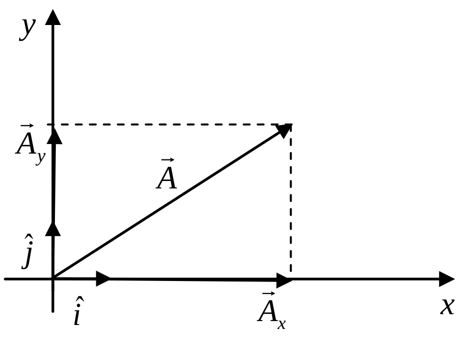
$$\vec{A} = A_u \cdot \hat{u} + A_v \cdot \hat{v}$$

donde A_u y A_v son dos cantidades escalares que se denominan componentes del vector $\vec{A}$ en las direcciones de $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.

Una base vectorial muy usada, y que utilizaremos habitualmente, es la ortonormal en la cual los versores que la definen son perpendiculares entre sí. En el caso del sistema cartesiano ortogonal, que utilizamos para describir el movimiento de los cuerpos, los versores se ubicarán sobre cada uno de los ejes. El versor que determina la dirección del eje *x* se denomina $\hat{i}$ y el que determina la dirección del eje *y* se denomina $\hat{j}$.



Las componentes de un vector según estas direcciones perpendiculares se llaman componentes ortogonales.



$\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son las componentes *vectoriales* del vector $\vec{A}$ según las direcciones de los ejes *x* e *y* respectivamente. Por lo tanto podemos escribir

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

ahora, haciendo uso de los versores, podemos escribir las componentes vectoriales como

$$\vec{A}_x = A_x \cdot \hat{i}$$
$$\vec{A}_y = A_y \cdot \hat{j}$$

entonces el vector puede expresarse como

$$\vec{A} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j}$$

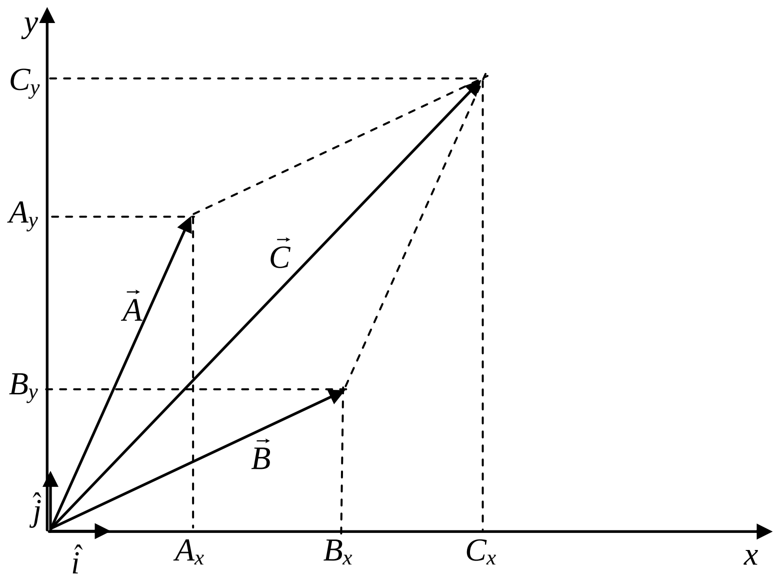
A_x y A_y son las componentes del vector $\vec{A}$ y son magnitudes escalares y pueden ser positivas, nulas o negativas.

Podemos calcular el módulo del vector utilizando el teorema de Pitágoras expresándolo en función de estas componentes;

$$\left|\vec{A}\right|^2 = A_x^2 + A_y^2 \ .$$

Suma de dos vectores en una base ortogonal

Supongamos que deseamos determinar el vector suma de dos vectores $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



Podemos expresar estos vectores utilizando los versores y sus componentes cartesianas

$$\vec{A} = A_x \cdot \hat{i} + A_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x \cdot \hat{i} + B_y \cdot \hat{j}$$
$$\vec{C} = C_x \cdot \hat{i} + C_y \cdot \hat{j}$$

como

$$
\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\
\vec{C} &= A_x \cdot \hat{\imath} + A_y \cdot \hat{\jmath} + B_x \cdot \hat{\imath} + B_y \cdot \hat{\jmath} \\
\vec{C} &= (A_x + B_x) \cdot \hat{\imath} + (A_y + B_y) \cdot \hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

y podemos identificar a las componentes del vector $\vec{C}$

$$
\begin{aligned}
C_x &= (A_x + B_x) \\
C_y &= (A_y + B_y)
\end{aligned}
$$

entonces vemos que la suma de dos vectores es igual a un vector cuya componente en un determinado eje es la suma de las componentes de cada uno de los vectores en dicho eje.

Resta de dos vectores en una base ortogonal

Para realizar la resta de dos vectores, $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, procedemos de manera similar a la suma, pues podemos pensar a la resta como la suma de dos vectores $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ donde, expresándolos en término de sus componentes cartesianos

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x \cdot \hat{\imath} + A_y \cdot \hat{\jmath} \\
\vec{B} &= B_x \cdot \hat{\imath} + B_y \cdot \hat{\jmath} \\
-\vec{B} &= -B_x \cdot \hat{\imath} - B_y \cdot \hat{\jmath} \\
\vec{C} &= C_x \cdot \hat{\imath} + C_y \cdot \hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} - \vec{B} \\
\vec{C} &= A_x \cdot \hat{\imath} + A_y \cdot \hat{\jmath} - B_x \cdot \hat{\imath} - B_y \cdot \hat{\jmath} \\
\vec{C} &= (A_x - B_x) \cdot \hat{\imath} + (A_y - B_y) \cdot \hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

donde

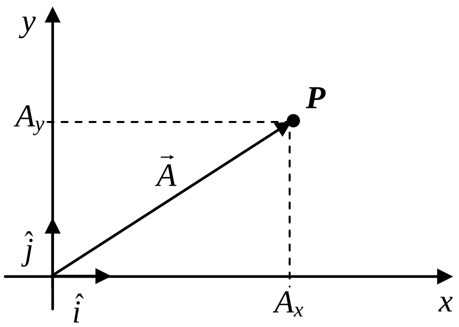
$$
\begin{aligned}
C_x &= (A_x - B_x) \\
C_y &= (A_y - B_y)
\end{aligned}
$$

por lo tanto el vector resta de dos vectores es igual a un vector cuya componente en un determinado eje es la resta de las componentes de cada uno de los vectores en dicho eje.

Capítulo 7

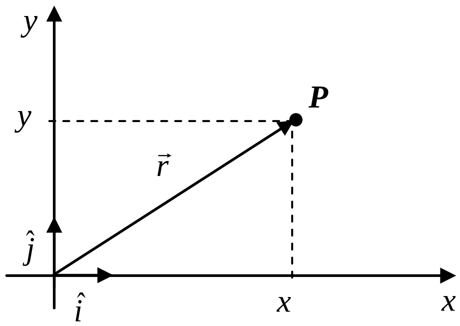
Vector posición

Podemos identificar un punto ***P*** del plano, de coordenadas *(x,y)*, mediante un vector $\vec{A}$ que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en dicho punto.



Las componentes de $\vec{A}$ son las coordenadas cartesianas de ***P***; es decir $A_x = x$ y $A_y = y$. Por lo tanto al punto ***P*** y al vector $\vec{A}$ lo podemos definir por $\vec{A} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$.

Cuando identificamos con un vector el punto del plano donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición* y lo denotamos generalmente con la letra $\vec{r}$ ó $\vec{R}$.

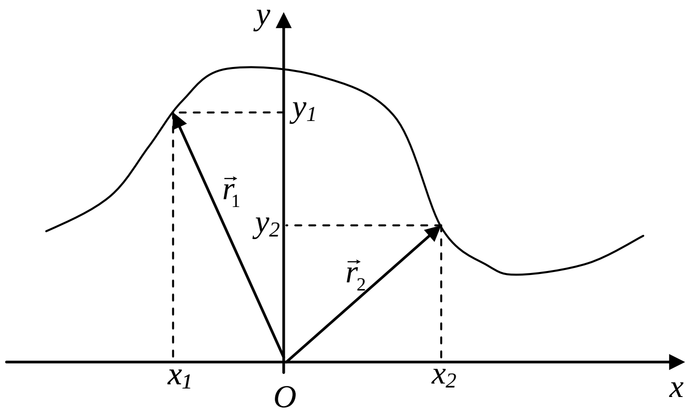


$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \qquad \text{y} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

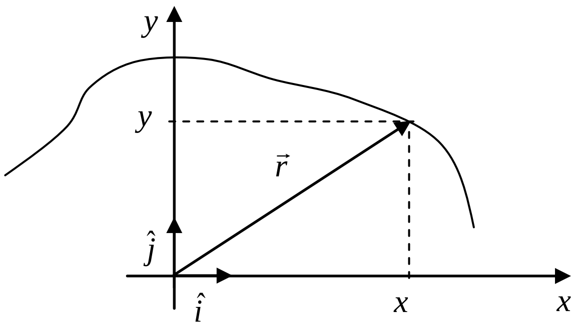
Función vectorial de movimiento

Hemos visto que la posición de un punto en el plano puede ser dada por un vector denominado "*vector posición del punto*". Si el cuerpo se mueve sobre el plano *su vector posición variará con el tiempo* y en cada instante de tiempo tendremos un vector posición determinado por las coordenadas *x* e *y* del cuerpo.

t	x	y	$\vec{r}$
t_1	x_1	y_1	$\vec{r}_1$
t_2	x_2	y_2	$\vec{r}_2$
t_3	x_3	y_3	$\vec{r}_3$
t_4	x_4	y_4	$\vec{r}_4$
t_5	x_5	y_5	$\vec{r}_5$
.	.	.	.
.	.	.	.



Lo que tenemos es un vector que es función del tiempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal tendremos, como habíamos visto, $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$



donde *x(t)* e *y(t)* son las funciones de movimiento del cuerpo en coordenadas cartesianas. Por lo tanto tenemos forma de referir el movimiento de un cuerpo en el plano por medio de la "*función vectorial de movimiento*" $\vec{r}(t)$.

Velocidad media

Con la función vectorial de movimiento tenemos definida la posición del cuerpo para todo instante de tiempo, pero podemos complementar esta información dando, además, la dirección, sentido y rapidez del movimiento. Para tratar de dar esta información vamos a definir el vector *velocidad media* como:

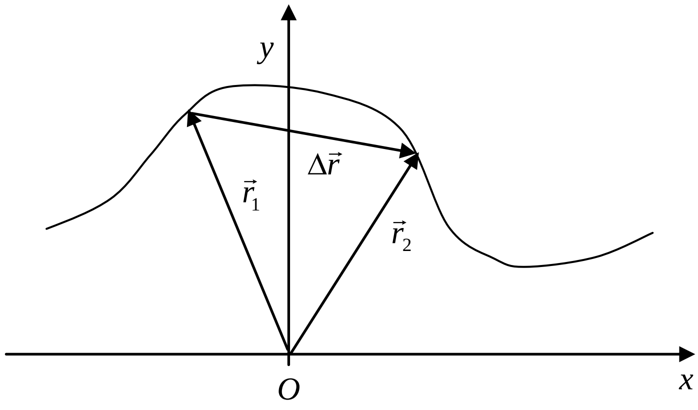
$$\bar{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

donde $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Como $t_2 = t_1 + \Delta t$ podemos escribir

$$\bar{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t}$$

o escribiendo de manera más genérica para cualquier t_1, es decir $t_1 = t$

$$\bar{\vec{V}} \equiv \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$\bar{\vec{V}}$ es un vector que tiene la dirección y sentido del vector $\Delta\vec{r}$ y su módulo igual a $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$.

Calculemos ahora la $\bar{\vec{V}}$ para algunas funciones vectoriales de movimiento:

a) $x(t) = c_1\, t \quad e \quad y(t) = c_2\, t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = c_1\, t\, \hat{i} + c_2\, t^2\, \hat{j} \qquad (c_1 = cte > 0, c_2 = cte > 0)$

$\Delta t = t_2 - t_1$, entonces $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)$$

$$\Delta\vec{r} = \left[c_1 (t_1+\Delta t)\, \hat{i} + c_2 (t_1+\Delta t)^2\, \hat{j}\right] - \left[c_1\, t_1\, \hat{i} + c_2\, t_1^{\,2}\, \hat{j}\right]$$

$$\Delta\vec{r} = c_1 (t_1 + \Delta t - t_1)\, \hat{i} + c_2 \left[(t_1+\Delta t)^2 - t_1^2\right] \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\, \Delta t\, \hat{i} + c_2 \left[t_1^2 + 2\, t_1\, \Delta t + \Delta t^2 - t_1^2\right] \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\, \Delta t\, \hat{i} + c_2 (2\, t_1\, \Delta t + \Delta t^2)\, \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = c_1\, \Delta t\, \hat{i} + c_2\, \Delta t\, (2\, t_1 + \Delta t)\, \hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta t\, \left[c_1\, \hat{i} + c_2\, (2\, t_1 + \Delta t)\, \hat{j}\right]$$

Entonces el vector velocidad media será

$$\vec{\bar{V}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta t \left[c_1\ \hat{\imath} + c_2\ (2\ t_1 + \Delta t)\ \hat{\jmath}\right]}{\Delta t}$$

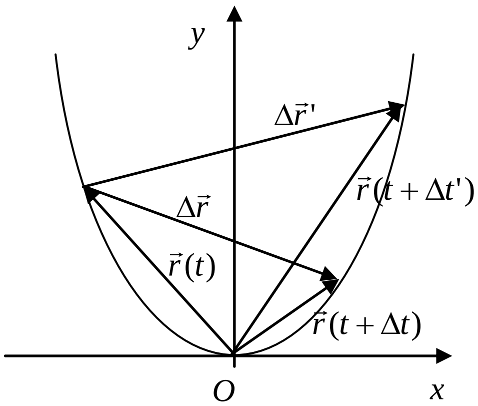
$$\vec{\bar{V}} = c_1\ \hat{\imath} + c_2\ (2\ t_1 + \Delta t)\ \hat{\jmath}$$

Como se puede ver $\vec{\bar{V}}$ depende de Δt. Esto también es evidente si analizamos su módulo; $\left|\vec{\bar{V}}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 (2\ t_1 + \Delta t)^2}$. La variabilidad de $\vec{\bar{V}}$ también se evidencia si analizamos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento.

$$\vec{r}(t) = c_1\ t\ \hat{\imath} + c_2\ t^2\ \hat{\jmath}$$

$$x(t) = c_1\, t \quad e \quad y(t) = c_2\, t^2$$

$$t = \frac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_2\ \frac{x^2}{c_1^2}$$



La dirección de $\vec{\bar{V}}$, la cual se corresponde con la dirección de $\Delta\vec{r}$, dependiendo del Δt elegido puede variar notablemente.

Consideremos las siguientes funciones de movimiento

$$x(t) = b_1 + b_2\, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4\, t \quad (b_i = cte > 0)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta\vec{r} = \left[b_1 + b_2\ (t + \Delta t)\right] \hat{\imath} + \left[b_3 + b_4\ (t + \Delta t)\right] \hat{\jmath} - \left[(b_1 + b_2\ t)\ \hat{\imath} + (b_3 + b_4\ t)\ \hat{\jmath}\right]$$

$$\Delta\vec{r} = (b_1 + b_2\ t + b_2\ \Delta t - b_1 - b_2\ t)\ \hat{\imath} + (b_3 + b_4\ t + b_4\ \Delta t - b_3 - b_4\ t)\ \hat{\jmath}$$

$$\Delta\vec{r} = b_2\ \Delta t\ \hat{\imath} + b_4\ \Delta t\ \hat{\jmath} = \Delta t \left(b_2\ \hat{\imath} + b_4\ \hat{\jmath}\right)$$

y la velocidad media es

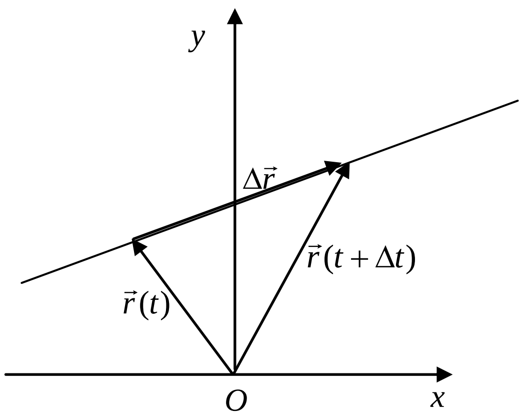
$$\bar{\vec{V}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = b_2 \ \hat{i} + b_4 \ \hat{j}$$

como vemos, $\bar{\vec{V}}$ es un vector constante. Analicemos cómo es la trayectoria del cuerpo cuando sus funciones de movimiento son las dadas en este ejemplo

$$x(t) = b_1 + b_2 \, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4 \, t$$

$$t = \frac{x - b_1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{b_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot b_4}{b_2} \right) + \frac{b_4}{b_2} x$$

La ecuación de la trayectoria es una recta



y en este caso, sin importar cuánto valga t y Δt, el cálculo del $\bar{\vec{V}}$ nos dará el mismo resultado. Este movimiento es el que se denomina *Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).*

Veamos un último ejemplo en el cual las funciones de movimiento son:

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2 \, t^2 + b_3 \quad (b_1 \ y \ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta \vec{r} = b_1 (t + \Delta t)^2 \ \hat{i} + \left[b_2 \ (t + \Delta t)^2 + b_3 \right] \hat{j} - \left[b_1 t^2 \ \hat{i} + (b_2 \, t^2 + b_3) \ \hat{j} \right]$$

$$\Delta \vec{r} = b_1 (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) \ \hat{i} + \left[b_2 \ (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) + b_3 \right] \hat{j} - b_1 t^2 \ \hat{i} - (b_2 \, t^2 + b_3) \ \hat{j}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta t \cdot \left[b_1 (2 \cdot t + \Delta t) \ \hat{i} + b_2 \ (2 \cdot t + \Delta t) \ \hat{j} \right]$$

$$\overline{\vec{V}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = b_1 (2 \cdot t + \Delta t)\ \hat{\imath} + b_2\ (2 \cdot t + \Delta t)\ \hat{\jmath}$$

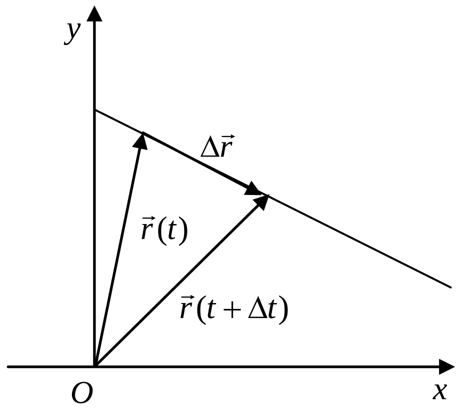
$$\overline{\vec{V}} = b_1 (2 \cdot t + \Delta t)\ \hat{\imath} + b_2\ (2 \cdot t + \Delta t)\ \hat{\jmath}$$

$$\overline{\vec{V}} = (2 \cdot t + \Delta t) \cdot (b_1\ \hat{\imath} + b_2)\ \hat{\jmath}$$

vemos que este vector $\overline{\vec{V}}$ es un vector constante multiplicado por un escalar que depende de *t* y *Δt*, es decir es un vector que siempre está sobre la misma dirección y que sólo puede modificar su módulo y sentido. Analicemos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\ t^2 + b_3 \quad (b_1\ y\ b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0)$$

$$t^2 = \frac{x}{b_1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{b_2}{b_1} x + b_3 \quad (x > 0)$$



Aunque es un movimiento rectilíneo $\overline{\vec{V}}$ depende de *t* y *Δt*.

En los ejemplos anteriores hemos visto que $\overline{\vec{V}}$ tiene la dirección y sentido de $\Delta \vec{r}$, y en algunos casos, modificando *Δt* se modifica $\overline{\vec{V}}$. Esto indica que $\overline{\vec{V}}$ no es un buen indicador de la forma en que se mueve el cuerpo. Lo que queremos, de manera similar a lo buscado en los movimientos unidimensionales, es una cantidad que sólo dependa del punto donde se encuentra el cuerpo o del instante de tiempo de que se trate. Para ello definiremos lo que llamamos *vector velocidad instantánea* o simplemente, *vector velocidad.*

Vector velocidad

Definimos al vector velocidad como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero.

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vec{V}}$$

En general, si tenemos un vector $\vec{A}$ que depende de una variable z, es decir $\vec{A} = \vec{A}(z)$, se define la derivada del vector $\vec{A}(z)$ con respecto a z como

$$\frac{d\vec{A}(z)}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(z+\Delta z) - \vec{A}(z)}{\Delta z}$$

Entonces podemos escribir la derivada del vector posición respecto al tiempo como

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Analicemos como podemos hacer esta derivada pues hasta ahora sólo sabemos derivar funciones escalares. Si el vector posición está dado en términos de sus componentes cartesianas como $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x(t+\Delta t)\,\hat{i} + y(t+\Delta t)\,\hat{j}\right] - \left[x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}\right]}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\,\hat{i} + y(t+\Delta t)\,\hat{j} - x(t)\,\hat{i} - y(t)\,\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\hat{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\hat{j}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right]\hat{i} + \left[\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right]\hat{j} \right\}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right]\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right]\hat{j}$$

por lo tanto

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}$$

Podemos escribir el vector velocidad en sus componentes cartesianas

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

donde identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad y \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

Como vemos, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo. Notemos que en el proceso de derivación los versores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ no se derivan pues ellos son constantes en el tiempo, es decir no modifican ni su módulo ni dirección.

Analicemos algunos ejemplos

a) Supongamos que tenemos las siguientes funciones de movimiento

$x(t) = c_1\, t \quad y \quad y(t) = c_2\, t^2$

La trayectoria que describen estas funciones de movimiento es

$t = \dfrac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dfrac{c_2}{c_1^{\,2}}\, x^2$; o sea una parábola.

El vector posición es $\vec{r}(t) = c_1\, t\,\hat{i} + c_2\, t^2\,\hat{j}$ y derivando obtenemos $\vec{v}(t) = c_1\,\hat{i} + 2c_2\, t\,\hat{j}$.

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}(t)| = \sqrt{c_1^{\,2} + 4\, c_2^{\,2}\, t^2}$

En este caso particular el vector velocidad es una función del tiempo y su módulo no es constante.

b) Consideremos las siguientes funciones de movimiento

$x(t) = b_1 + b_2\, t \quad e \quad y(t) = b_3 + b_4\, t \quad (b_i = cte > 0)$

$\vec{r} = (b_1 + b_2\, t)\,\hat{i} + (b_3 + b_4\, t)\,\hat{j}$

derivando el vector posición obtenemos

$\vec{v} = b_2\,\hat{i} + b_4\,\hat{j}$

y el módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{b_2^{\,2} + b_4^{\,2}}$

Para estas funciones de movimiento el vector velocidad resulta igual al vector velocidad media. Este es el único caso en que ocurre y es debido a que la velocidad es constante, y como vimos antes, estas funciones de movimiento se corresponden a una trayectoria rectilínea, en particular, a un movimiento rectilíneo uniforme.

c) Analicemos un último ejemplo

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1 \; y \; b_3 = cte > 0;\, b_2 = cte < 0)$$

$$\vec{r} = b_1 t^2 \; \hat{\imath} + (b_2\, t^2 + b_3)\; \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = 2\, b_1 \; t\, \hat{\imath} + 2\, b_2\, t \;\; \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = 2\, t\; (b_1 \; \hat{\imath} + b_2 \;\; \hat{\jmath})$$

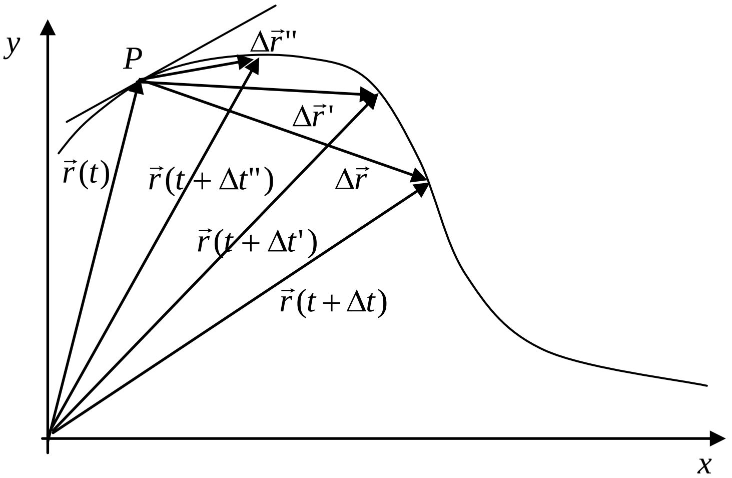
este vector velocidad es un vector constante multiplicado por un escalar que depende del tiempo. Por lo tanto este vector cambia su módulo pero no su dirección. Si recordamos la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento es $y(t) = \dfrac{b_2}{b_1}\, x + b_3 \quad (x > 0)$. Por lo tanto corresponde a un movimiento rectilíneo.

Significado del módulo, dirección y sentido de $\vec{v}$

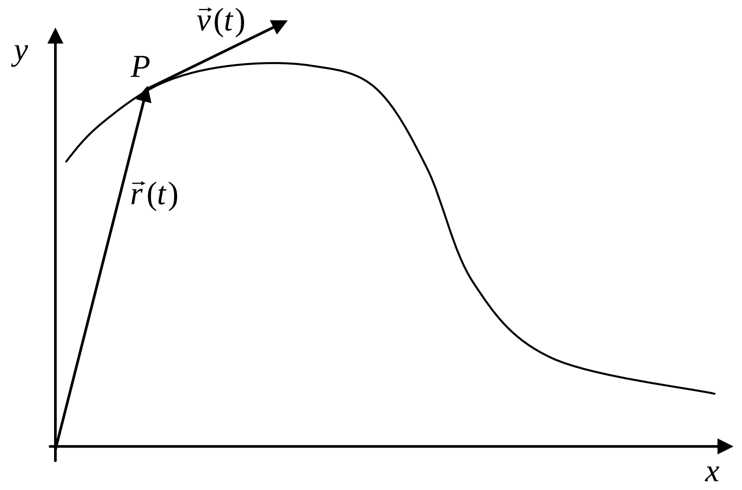
El vector velocidad lo hemos definido como

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vec{V}}$$

Analicemos, desde un punto de vista geométrico, qué ocurre con $\overline{\vec{V}}$ a medida que hacemos $\Delta t \to 0$



El vector $\vec{\overline{V}}$ tiene la misma dirección del vector $\Delta\vec{r}(t)$ y por lo tanto ambos está sobre la secante que une los dos puntos de la trayectoria elegidos para el cálculo. A medida que $\Delta t \to 0$ se ve que $\vec{r}(t+\Delta t) \to \vec{r}(t)$ y la dirección de $\Delta\vec{r}(t)$ tiende a alinearse con la de la recta tangente a la trayectoria en el punto *P*. Como $\vec{\overline{V}}$ tiene la misma dirección que $\Delta\vec{r}(t)$ y $\vec{\overline{V}} \to \vec{v}$ cuando $\Delta t \to 0$ entonces se puede deducir que ***la dirección del vector velocidad en un punto de la trayectoria es el de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto***.



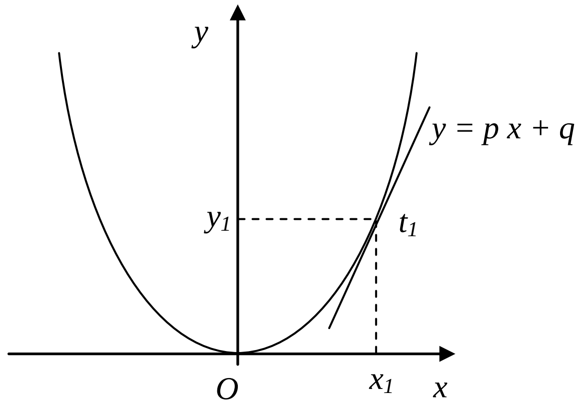
Veamos esta última afirmación en uno de los ejemplos que habíamos analizado. Si las funciones de movimiento son:

$x(t) = c_1\, t \quad y \quad y(t) = c_2\, t^2$

La trayectoria que describen estas funciones de movimiento es

$t = \dfrac{x}{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dfrac{c_2}{c_1^{\,2}}\, x^2$; o sea una parábola.

El vector posición es $\vec{r}(t) = c_1\, t\, \hat{i} + c_2\, t^2\, \hat{j}$ y derivando obtenemos $\vec{v}(t) = c_1\, \hat{i} + 2c_2\, t\, \hat{j}$.
Si el móvil se encontraba en la posición *(x_1 , y_1)* cuando $t = t_1$



tenemos que $t_1 = x_1/c_1$; entonces $\vec{v}(t_1) = c_1\ \hat{i} + 2\dfrac{c_2}{c_1}\ x_1\ \hat{j}$ y la pendiente de la recta que contiene al vector velocidad es:

$$m = \frac{v_x}{v_y} = 2\ \frac{c_2}{{c_1}^2}\ x_1$$

Por otro lado podemos calcular la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x_1\ ,\ y_1)$ mediante la derivada de la función que define la trayectoria

$$p = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_1} = 2\ \frac{c_2}{{c_1}^2}\ x_1 \quad \therefore \quad m = p$$

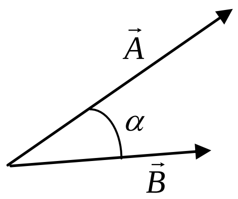
Como vemos la pendiente de la recta que contiene a la velocidad y la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto son iguales, por lo tanto podemos ver que se verifica que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

Capítulo 8

Producto escalar

El producto escalar (también denominado producto interno o producto punto) entre dos vectores es una operación entre dos vectores y cuyo resultado es un escalar. Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que subtienden entre sí un ángulo α, el producto escalar entre ambos está definido como el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que ellos subtienden:

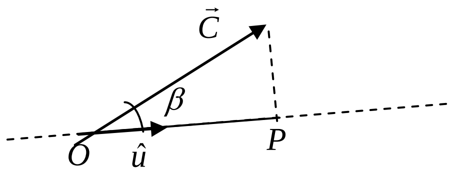
$$\vec{A} \bullet \vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos(\alpha)$$



Como vemos el producto escalar entre dos vectores ($\vec{A} \bullet \vec{B}$) da como resultado un escalar, el cual puede ser positivo (si $0 < \theta < \pi/2$), negativo (si $\pi/2 < \theta < \pi$) o cero (si $\theta = \pi/2$). De la definición del producto escalar es claro que posee la propiedad conmutativa ($\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$).

Supongamos que uno de los vectores que operan sea un versor, por ejemplo $\hat{u}$, entonces el producto escalar entre un vector $\vec{C}$ y el versor $\hat{u}$ será

$$\vec{C} \bullet \hat{u} = \left|\vec{C}\right| \cdot \left|\hat{u}\right| \cdot \cos(\beta) = C \cdot \cos(\beta)$$



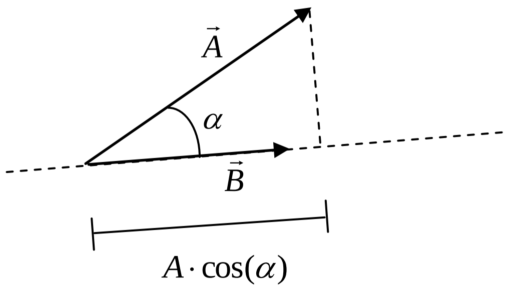
Como se puede ver en la figura $\vec{C} \bullet \hat{u} = C \cdot \cos(\beta) = \overline{OP}$ es la proyección del vector $\vec{C}$ sobre la dirección definida por $\hat{u}$. Por lo tanto el producto escalar de un vector por un versor nos permite calcular la componente (o proyección) del vector según al dirección definida por el versor.

Si tenemos dos vectores, por ejemplo $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y deseamos calcular la componente, o proyección, de uno de ellos, supongamos el vector $\vec{A}$, a lo largo de la dirección del otro vector, o sea el vector $\vec{B}$, debemos hacer el producto escalar del vector $\vec{A}$ con un versor con la misma dirección y sentido del vector $\vec{B}$. Podemos definir un versor en la dirección del vector $\vec{B}$ de la siguiente forma

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} = \frac{\vec{B}}{B}$$

de esta manera

$$\vec{A} \bullet \hat{B} = \vec{A} \bullet \frac{\vec{B}}{B} = A \cdot \frac{B}{B} \cdot \cos(\alpha) = A \cdot \cos(\alpha)$$



A partir de la definición del producto escalar es posible determinar cuál es el ángulo entre dos vectores

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A \cdot B}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}}{A} \bullet \frac{\vec{B}}{B}$$

$$\cos(\alpha) = \hat{A} \bullet \hat{B}$$

Analicemos algunas propiedades del producto escalar:

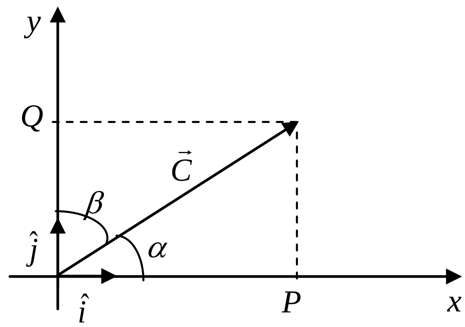
- El producto escalar de un vector por si mismos da como resultado el módulo del vector elevado al cuadrado.

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A \cdot A \cdot \cos(0) = A^2$$

Como consecuencia de esto se verifica que el producto interno de un versor por si mismo es uno ($\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = 1$ y $\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = 1$).

- Si dos vectores son no nulos ($\vec{A} \neq 0$ y $\vec{B} \neq 0$) y el producto escalar entre ambos da cero ($\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$) entonces ambos vectores son perpendiculares entre sí ($\vec{A} \perp \vec{B}$). Por lo tanto el producto interno entre los versores que definen la base cartesiana ortogonal será cero ($\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$).

Podemos encontrar las componentes de un vector, por ejemplo $\vec{C}$, en dos direcciones dadas por los versores que definen una base ortogonal haciendo el producto escalar de $\vec{C}$ con cada uno de los versores.



$$\vec{C} \bullet \hat{\imath} = C.\cos(\alpha) = \overline{OP}$$

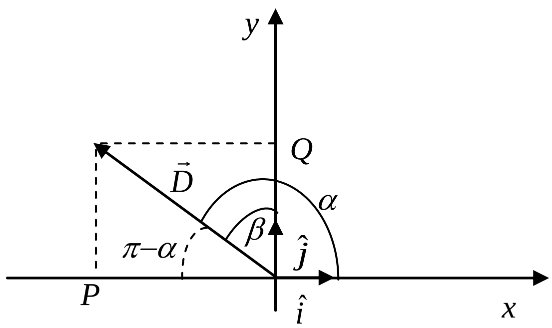
$$\vec{C} \bullet \hat{\jmath} = C.\cos(\beta) = \overline{OQ}$$

pero $\overline{OP}$ coincide con la magnitud y signo de la componente de $\vec{C}$ en la dirección *x* (C_x) y $\overline{OQ}$ coincide con la magnitud y signo de la componente de $\vec{C}$ en la dirección *y* (C_y). Por lo tanto

$$\vec{C} \bullet \hat{\imath} = C_x$$

$$\vec{C} \bullet \hat{\jmath} = C_y$$

Supongamos ahora que tenemos un vector $\vec{D}$ como el que se muestra en la figura



$$\vec{D} \bullet \hat{\imath} = D.\cos(\alpha) = -D.\cos(\pi - \alpha) = -\overline{OP} = D_x$$

$$\vec{D} \bullet \hat{\jmath} = D.\cos(\beta) = \overline{OQ} = D_y$$

Si repetimos el cálculo con vectores en cualquiera de los cuadrantes veríamos que el resultado sería el mismo, es decir que si tengo un vector $\vec{A}$ podemos encontrar sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal haciendo el producto de este vector por los versores que definen la base.

$$\vec{A} \bullet \hat{\imath} = A_x$$

$$\vec{A} \bullet \hat{\jmath} = A_y$$

En el caso particular que del vector posición, $\vec{r} = x.\hat{\imath} + y.\hat{\jmath}$, entonces

$$x = \vec{r} \bullet \hat{\imath}$$

$$y = \vec{r} \bullet \hat{\jmath}$$

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, expresados en sus componentes cartesianas, el producto escalar entre ambos resulta:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_x.\hat{\imath} + A_y.\hat{\jmath}) \bullet (B_x.\hat{\imath} + B_y.\hat{\jmath})$$

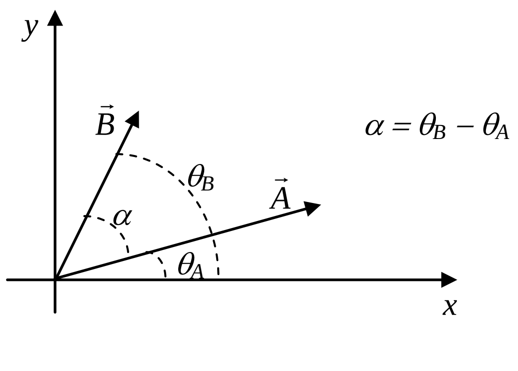
aplicando la propiedad distributiva tenemos

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x.(\hat{\imath} \bullet \hat{\imath}) + A_x.B_y.(\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath}) + A_y.B_x.(\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath}) + A_y.B_y.(\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath})$$

teniendo en cuenta que $\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = \hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = 1$ y $\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \bullet \hat{\imath} = 0$ resulta

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la primera definición que dimos para el producto escalar. Si tenemos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestra en el gráfico



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.\cos(\alpha) = A.B.\cos(\theta_B - \theta_A)$$

desarrollando el coseno de la diferencia de ángulos

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.\cos(\theta_A).\cos(\theta_{B)}) + A.B.sen(\theta_A).sen(\theta_{B)})$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.\cos(\theta_A).B.\cos(\theta_{B)}) + A.sen(\theta_A).B.sen(\theta_{B)})$$

podemos identificar en esta expresión a las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$A_x = A.\cos(\theta_A) \quad ; \quad A_y = A.sen(\theta_A)$$
$$B_x = B.\cos(\theta_B) \quad ; \quad B_y = B.sen(\theta_B)$$

resultando entonces

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y$$

que es la misma expresión obtenida antes para el producto escalar entre dos vectores en término de sus componentes cartesianas.

Con esta forma de calcular el producto escalar resulta fácil verificar que

$$\begin{aligned} \vec{r} \bullet \vec{r} &= r^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

También es posible calcular el ángulo entre dos vectores en término de sus componentes cartesianas

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \cdot B.\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A \cdot B}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x.B_x + A_y.B_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2}}$$

Capítulo 9

Aceleración

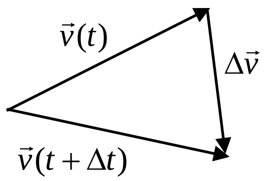
Cuando analizamos el caso del movimiento unidimensional habíamos definido la aceleración como la magnitud que da información de cómo cambia la velocidad con el tiempo. En el caso unidimensional teníamos que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

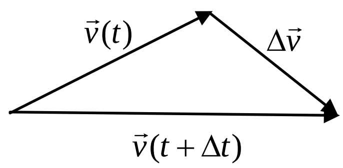
Ahora, en el movimiento bidimensional la velocidad es un vector y por lo tanto el cambio de la velocidad en el tiempo deberá dar cuenta del cambio de un vector en el tiempo. Un vector, y de manera particular el vector velocidad $\vec{v}$, puede cambiar de diversas maneras:

a) cambiando solamente el módulo y/o sentido sin modificar su dirección

b) cambiando solamente de dirección



c) modificando módulo y dirección simultáneamente



Definimos el vector aceleración como

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

como vemos el vector aceleración tiene la dirección y sentido del vector $\Delta\vec{v}$. Como $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ podemos escribir

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si el vector posición $\vec{r}$ está expresado en término de sus coordenadas cartesianas, $\vec{r} = x.\hat{\imath} + y.\hat{\jmath}$, resulta

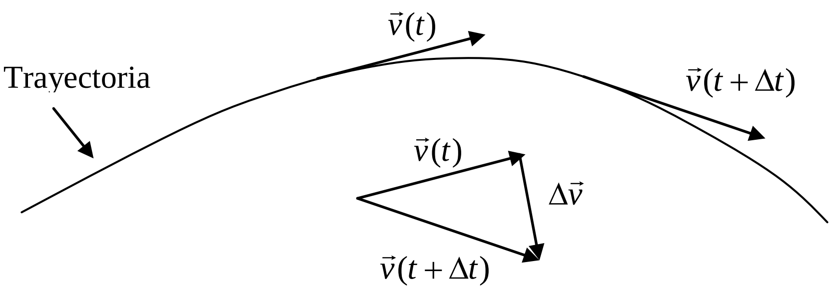
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}.\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}.\hat{\jmath}\right] = \frac{dv_x}{dt}.\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}.\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}.\hat{\jmath}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x.\hat{\imath} + a_y.\hat{\jmath}$$

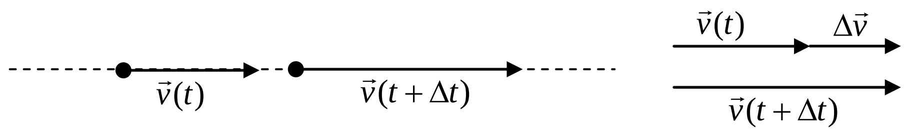
Analicemos la expresión que hemos obtenido para el vector aceleración. Sobre una trayectoria, como la que se muestra en la figura, la velocidad del cuerpo en el instante *t* y *t+Δt* será



por lo tanto es necesario analizar la evolución de $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$ para comprender el comportamiento del vector aceleración.

Para una mejor comprensión de este tema analicemos primero algunos casos simples:

1) Sea un móvil que se desplaza en una trayectoria lineal, por lo tanto el vector velocidad sólo puede cambiar de módulo y/o sentido pero no su dirección. El vector velocidad en los instantes *t* y *Δt* es como se muestra en la figura.



Sabemos que

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

y que a un vector lo podemos escribir como un escalar multiplicado por un versor en la misma dirección. En el caso del vector velocidad podemos definir un versor velocidad que es tangente a la trayectoria, por lo tanto escribimos

$$\vec{v}(t+\Delta t) = v(t+\Delta t).\hat{v}(t+\Delta t)$$

$$\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$$

En el caso que estamos analizando, como la trayectoria es rectilínea, se verifica que $\hat{v}(t+\Delta t) = \hat{v}(t) = \hat{v}$. Por lo tanto

$$\Delta\vec{v} = v(t+\Delta t).\hat{v} - v(t).\hat{v}$$

$$\Delta\vec{v} = \left[v(t+\Delta t) - v(t)\right].\hat{v}$$

$$\Delta\vec{v} = \Delta v.\hat{v}$$

Entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.\hat{v}$$

como $\hat{v}$ no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\hat{v}$$

Como vemos, el vector aceleración en un movimiento rectilíneo tiene la misma dirección que la velocidad, es decir que $\vec{a} // \vec{v}$, y coincide con la aceleración del movimiento unidimensional. A este vector aceleración, paralelo al vector velocidad lo llamaremos *aceleración tangencial* ($\vec{a}_{//}$ ó $\vec{a}_t$) pues su dirección es tangente a la trayectoria.

$$\vec{a}_{//} = \frac{dv}{dt}.\hat{v}$$

Como vemos la *aceleración tangencial* es la responsable de modificar el módulo del vector velocidad sin afectar la dirección de la misma.

Veamos un ejemplo. Supongamos que las funciones de movimiento de un cuerpo están dadas por

$$x(t) = b_1 t^2 \quad e \quad y(t) = b_2\, t^2 + b_3 \quad (b_1 \; y \; b_3 = cte > 0; b_2 = cte < 0$$

$$\vec{r}(t) = b_1 t^2\ \hat{i} + (b_2\, t^2 + b_3)\ \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2.b_1 t\ \hat{i} + 2.b_2\, t\ \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = 2.t.(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2.(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$$

determinando la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento obtenemos

$$t^2 = \frac{x}{b_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{b_1} x + b_3 \quad (x > 0)$$

como vemos en este caso particular la trayectoria es rectilínea. Si analizamos las expresiones obtenidas para $\vec{a}(t)$ y $\vec{v}(t)$ podemos observar que ambos son proporcionales al mismo vector ($(b_1\ \hat{i} + b_2\ \hat{j})$); por lo tanto $\vec{a} \,//\, \vec{v}$.

2) Supongamos ahora una trayectoria no rectilínea, pero que es recorrida de manera tal que el módulo del vector velocidad permanece constante. Nuevamente tenemos que

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

y que podemos escribir

$$\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t).\hat{v}(t + \Delta t)$$

$$\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$$

En este caso particular tenemos que $v(t + \Delta t) = v(t) = v$; entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v.\frac{\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)}{\Delta t}$$

como v no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = v.\frac{d\hat{v}}{dt}$$

En este caso particular no resulta evidente cual es la dirección del vector aceleración a partir de la expresión obtenida. Intentemos realizar un análisis más minucioso. Sabemos que

$$\hat{v} \,//\, \vec{v} \quad y \quad \vec{a} \,//\, \frac{d\hat{v}}{dt}$$

además, al ser $\hat{v}$ un versor se verifica que

$$\hat{v} \bullet \hat{v} = 1$$

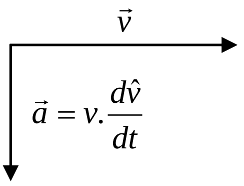
si derivamos ambos lados de esta igualdad respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\hat{v} \bullet \hat{v}) = \frac{d}{dt}1$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} \bullet \hat{v} + \hat{v} \bullet \frac{d\hat{v}}{dt} = 0$$

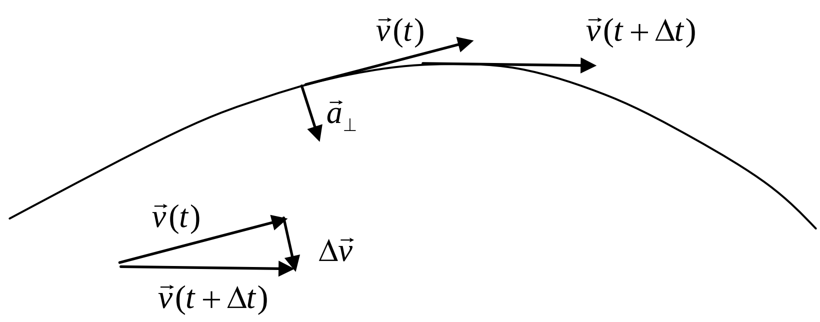
$$2.\hat{v} \bullet \frac{d\hat{v}}{dt} = 0$$

de esta última expresión se deduce que $\hat{v} \bullet \frac{d\hat{v}}{dt} = 0$, por lo tanto $\hat{v} \perp \frac{d\hat{v}}{dt}$. Esto último implica que cuando un cuerpo se mueve de manera tal que el módulo de su velocidad es constante, el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad ($\vec{a} \perp \vec{v}$).



Este vector aceleración que resulta perpendicular al vector velocidad lo llamaremos *aceleración normal* ($\vec{a}_{\perp}$ ó $\vec{a}_n$). La *aceleración normal* es la responsable de modificar la dirección del vector velocidad sin afectar su módulo.

$$\vec{a}_{\perp} = v.\frac{d\hat{v}}{dt}$$



Como vemos el vector aceleración normal apunta siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria.

Analicemos un ejemplo en el cual un cuerpo se mueve sobre una trayectoria con un vector velocidad de módulo constante ($|\vec{v}| = v = cte$).

$$\vec{v}(t) = v.[\cos(\omega.t)\ \hat{\imath} + sen(\omega.t)\ \hat{\jmath}] \quad (\omega = cte)$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v^2.[\cos^2(\omega.t) + sen^2(\omega.t)]}$$

$$|\vec{v}(t)| = v = cte$$

Calculando el vector aceleración en este caso particular obtenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = v.\omega.[-sen(\omega.t)\ \hat{\imath} + \cos(\omega.t)\ \hat{\jmath}]$$

Para ver si se verifica que $\vec{a} \perp \vec{v}$ debemos hacer el producto escalar entre ambos vectores ($\vec{a}.\vec{v}$)

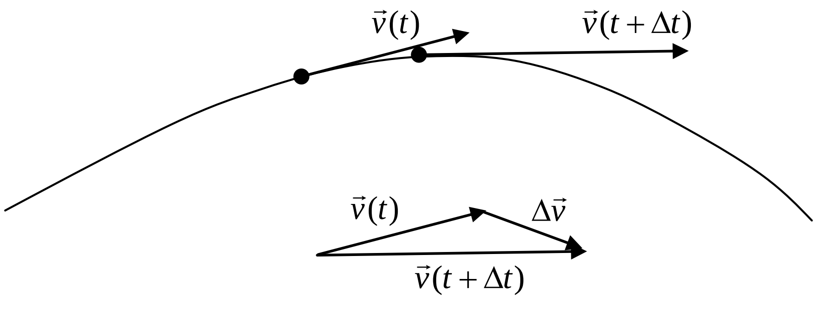
$$\vec{a}(t) \bullet \vec{v}(t) = v.\omega.[-sen(\omega.t)\ \hat{\imath} + \cos(\omega.t)\ \hat{\jmath}].v.[\cos(\omega.t)\ \hat{\imath} + sen(\omega.t)\ \hat{\jmath}]$$

$$\vec{a}(t) \bullet \vec{v}(t) = v^2.\omega.[-sen(\omega.t).\cos(\omega.t) + \cos(\omega.t).sen(\omega.t)\ \hat{\jmath}]$$

$$\vec{a}(t) \bullet \vec{v}(t) = 0$$

Como vemos cuando $|\vec{v}| = v = cte$ el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad ($\vec{a} \bullet \vec{v} = 0$).

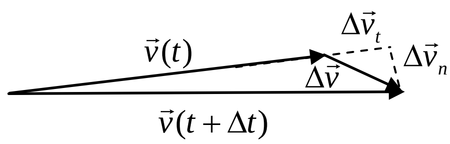
3) Calculemos el vector aceleración cuando varía el módulo ($|\vec{v}| = v$) y la dirección ($\hat{v}$) del vector velocidad. En la trayectoria tenemos que en el instante *t* el vector velocidad es $\vec{v}(t)$ y en (*t*+*Δt*) el vector velocidad es $\vec{v}(t+\Delta t)$



El vector aceleración $\vec{a}$ en el instante *t*, es por definición

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Como vamos a hacer que $\Delta t \to 0$, haremos un dibujo de $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t+\Delta t)$ para un Δt "muy pequeño".



Podemos descomponer al vector $\Delta\vec{v}$ en dos vectores; uno en la misma dirección del vector $\vec{v}(t)$, que denominaremos $\Delta\vec{v}_t$ (componente tangencial, o sea está en la dirección tangente a la trayectoria) y otro que denominaremos componente normal ($\Delta\vec{v}_n$) cuya dirección es perpendicular a $\vec{v}(t)$. Entonces podemos escribir

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$$

Por lo tanto, si calculamos la aceleración tenemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Entonces podemos expresar a la aceleración como la suma de dos componentes, una que es perpendicular al vector velocidad ($\vec{a}_n$) y otra paralela al vector velocidad ($\vec{a}_t$). Como vimos, la componente de la aceleración paralela a la velocidad sólo es responsable de modificar el módulo de la velocidad, mientras que la componente de la aceleración perpendicular a la velocidad será la responsable de modificar la dirección de la velocidad.

Veamos ahora cómo calcular las componentes tangencial y normal del vector aceleración. Sabemos que podemos expresar a un vector como un escalar multiplicado por un versor, y en el caso particular de la velocidad podemos escribir $\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$. Si tanto el módulo como la dirección de la velocidad pueden variar con el tiempo tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v(t).\hat{v}(t)\right]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t) + v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en los casos particulares que hemos analizado.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_t(t) = \vec{a}_{//}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t)$$

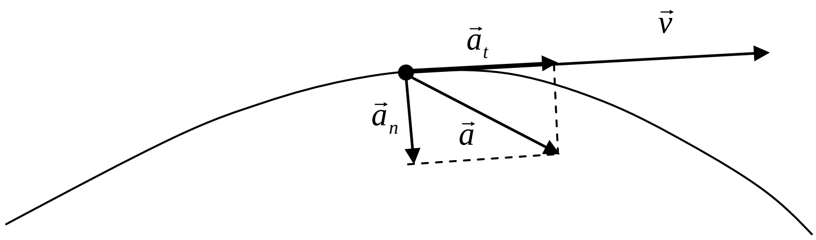
$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}_{\perp}(t) = v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Entonces podemos descomponer al vector aceleración en dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados.

Aceleración tangencial ($\vec{a}_t$): Es la responsable de modificar el módulo del vector velocidad.

Aceleración normal ($\vec{a}_n$): Es la responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Ahora analizaremos cómo, a partir del vector aceleración dado en coordenadas cartesianas, expresamos las componentes tangencial y normal de la aceleración. Para el caso particular de la componente tangencial vemos en el gráfico que lo que deseamos es obtener la componente de la aceleración en la dirección tangente a la trayectoria. Hemos analizado que para obtener la componente de un vector en una determinada dirección debemos hacer el producto escalar de dicho vector por un versor en la dirección deseada.



Por lo antes descrito debemos definir un versor $\hat{\tau}$ cuya dirección sea tangente a la trayectoria. Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria podemos utilizarlo para definir dicho versor.

$$\hat{\tau} = \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Entonces podemos calcular la proyección, o componente, del vector aceleración en la dirección tangente a la trayectoria realizando el producto escalar entre el vector aceleración con el versor $\hat{v}$

$$a_t = \vec{a} \bullet \hat{v} = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v}$$

y podemos escribir *el vector aceleración tangencial* como

$$\vec{a}_t = a_t.\hat{v}$$

$$\vec{a}_t = (\vec{a} \bullet \hat{v}).\hat{v}$$

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{v}.\hat{v}$$

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{v^2}.\vec{v}$$

Determinar la componente normal del vector aceleración es una tarea más simple. Sabiendo que al vector aceleración lo podemos escribir como $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$, y conociendo la expresión del vector aceleración tangencia tenemos

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{v^2}.\vec{v}$$

Determinación del vector posición ($\vec{r}$) a partir del vector aceleración ($\vec{a}$)

Cuando analizábamos el movimiento unidimensional en el capítulo 4, vimos cómo obtener la función de movimiento *x(t)* a partir de la aceleración *a(t)* del móvil. Si la información con la que contamos es la función aceleración *a(t)* y nuestro objetivo es obtener la función de movimiento del cuerpo *x(t)* sabemos que están relacionadas por la siguiente expresión

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

entonces debemos primero encontrar una función $v(t) = v^+(t) + C$ ($C = cte.$) tal que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^+}{dt} = a(t)$$

y luego una función $x(t) = x^+(t) + C.t + D$ ($D = cte.$) que verifique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^+}{dt} + C = v(t)$$

A las constantes de integración C y D las determinamos a partir de información adicional que nos tienen que proveer, conjuntamente con la aceleración, y que pueden ser la velocidad y posición para un determinado tiempo ($x(t_0)$ y $v(t_1)$ pudiendo ser $t_0 = t_1$) o la posición para dos tiempo diferentes ($x(t_0)$ y $x(t_1)$).

Ahora, para el caso de un movimiento en dos dimensiones, lo que tenemos como dato es el vector aceleración $\vec{a}(t)$ y debemos encontrar la función vectorial de movimiento $\vec{r}(t)$. Si el vector aceleración está dado en sus componentes cartesianas, $\vec{a} = a_x.\hat{i} + a_y.\hat{j}$, el problema será encontrar el vector posición dado en componentes cartesianas. El problema que ahora tenemos es idéntico al resuelto para una dimensión pero para cada una de las componentes cartesianas.

Dado a_x debemos encontrar una función $v_x(t) = v_x^+(t) + C_x$ (C_x = *cte.*) tal que

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x^+}{dt} = a_x(t)$$

y luego una función $x(t) = x^+(t) + C_x.t + D_x$ (D_x = *cte.*) que verifique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^+}{dt} + C_x = v_x(t)$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x^+}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x^+}{dt} = a_x$$

De igual manera, dado a_y debemos encontrar una función $v_y(t) = v_y^+(t) + C_y$ (C_y = *cte.*) tal que

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y^+}{dt} = a_y(t)$$

y luego una función $y(t) = y^+(t) + C_y.t + D_y$ (D_y = *cte.*) que verifique

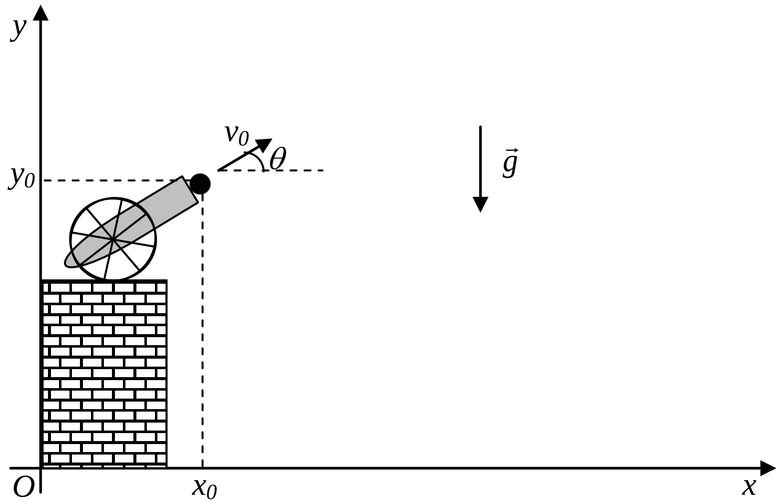
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy^+}{dt} + C_y = v_y(t)$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y^+}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y^+}{dt} = a_y$$

de esta forma podemos escribir los vectores velocidad $\vec{v}(t) = v_x(t).\hat{i} + v_y(t).\hat{j}$ y posición $\vec{r}(t) = x(t).\hat{i} + y(t).\hat{j}$, pero para que queden unívocamente determinados estos vectores es necesario encontrar los valores para las constantes de integración C_x, C_y, D_x *y* D_y. Para esto, al igual que en el caso unidimensional, es necesario que nos provean datos extras aparte del vector aceleración; estos datos extras pueden ser por ejemplo los vectores velocidad y posición para un determinado tiempo ($\vec{r}(t_0)$ y $\vec{v}(t_1)$ pudiendo ser $t_0 = t_1$) o el vector posición para dos tiempo diferentes ($\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}(t_1)$).

Veamos un ejemplo: Supongamos que un cañón, ubicado sobre una plataforma, dispara un proyectil con una velocidad inicial de módulo v_0 que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura. Sabiendo que todo cuerpo que está sometido a la atracción gravitatoria experimenta una aceleración $\vec{g}$, deseamos encontrar cual es la función de movimiento del mismo a partir del instante que salen por el extremo del cañón.



Para describir el movimiento de los proyectiles utilizaremos el sistema de coordenadas mostrado en la figura y tomaremos como *t = 0 s* al instante en que el proyectil abandona el tubo del cañón. Entonces, tomando en cuenta el sistema de coordenadas graficado nosotros tenemos que:

$$\vec{a}(t) = -g.\hat{j}$$
$$\vec{r}(0s) = x_0.\hat{i} + y_0.\hat{j}$$
$$\vec{v}(0s) = v_0.\cos(\theta).\hat{i} + v_0.sen(\theta).\hat{j}$$

Si analizamos cada una de las componentes tenemos:

Componente *x*	Componente *y*
$a_x(t) = 0$	$a_y(t) = -g$
$x(0s) = x_0$	$y(0s) = y_0$
$v_x(0s) = v_0.\cos(\theta)$	$v_y(0s) = v_0.sen(\theta)$

Integrando podemos obtener las componentes de la velocidad

$v_x(t) = C_x$	$v_y(t) = -g.t + C_y$
$v_x(0s) = C_x = v_0.\cos(\theta)$	$v_y(0s) = C_y = v_0.sen(\theta)$
$v_x(t) = v_0.\cos(\theta)$	$v_y(t) = -g.t + v_0.sen(\theta)$

Con estas componentes podemos escribir el vector velocidad del proyectil

$$\vec{v}(t) = v_0.\cos(\theta).\hat{i} + [-g.t + v_0.sen(\theta)].\hat{j}$$

Integrando nuevamente obtenemos las funciones de movimiento para las coordenadas

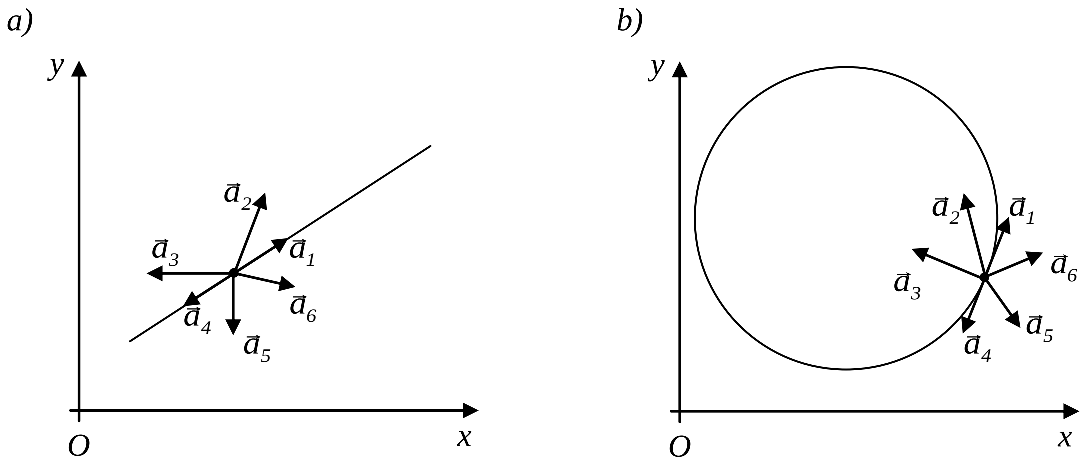
$$x(t) = v_0.\cos(\theta).t + D_x$$
$$x(0s) = D_x = x_0$$
$$x(t) = v_0.\cos(\theta).t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + D_y$$
$$y(0s) = D_y = y_0$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + y_0$$

Por lo tanto el vector posición del proyectil es

$$\vec{r}(t) = \left[v_0.\cos(\theta).t + x_0\right].\hat{i} + \left[-\frac{1}{2} g.t^2 + v_0.sen(\theta).t + y_0\right].\hat{j}$$

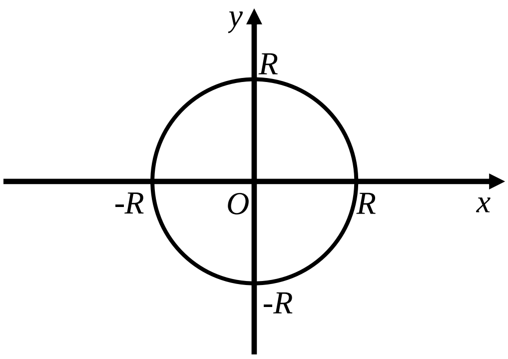
Si la única información de la que disponemos del movimiento de un cuerpo es su trayectoria no podemos construir a partir de ella sus funciones de movimiento; sin embargo podemos obtener alguna información sobre sobre dicho movimiento. Sabemos que en cada punto de la trayectoria el vector velocidad será tangente a la misma, pero no podemos decir en qué sentido la está recorriendo. Al igual que con el vector velocidad también podemos dar alguna información sobre el vector aceleración. Abajo les mostramos dos posibles trayectorias y les damos como información adicional que la trayectoria a) es recorrida de izquierda a derecha y la b) en sentido anti horario. En un punto de cada trayectoria les graficamos seis posibles vectores aceleración y les pedimos que analice cuál o cuáles pueden ser vectores aceleración y cuales no justificando tus afirmaciones. Al final del apunte está un análisis de este ejercicio.



Capítulo 10

Movimiento circular

El movimiento circular es un caso particular de un movimiento en el plano en el cual la trayectoria es una circunferencia, o parte de ella. Si para describirlo se elige un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con el centro de la circunferencia la trayectoria puede ser descripta en coordenadas cartesianas por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, mientras que en coordenadas polares por $\rho = R$ y $\theta = \theta(t)$.



El vector posición de una partícula que realiza un movimiento circular expresado en coordenadas cartesianas es

$$\vec{r}(t) = R.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

derivando obtenemos la velocidad del cuerpo

$$\vec{v}(t) = R.\left[-sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}(t) = R.\frac{d\theta}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento angular (*θ(t)*) la denominamos velocidad angular y la denotamos por $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$; entonces

$$\vec{v}(t) = R.\omega.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] \qquad \left(|\vec{v}| = R.\omega\right)$$

Obtenemos el vector aceleración derivando el vector velocidad

$$\vec{a}(t) = R.\frac{d\omega}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] + R.\omega.\left[-\cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} - sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$

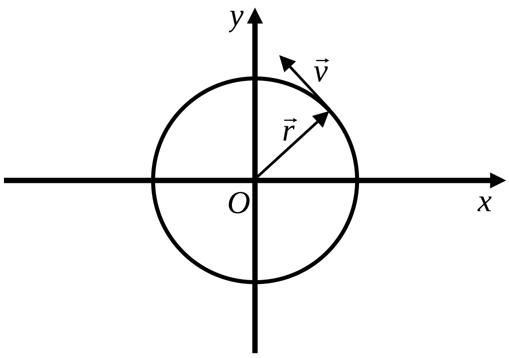
la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular es la aceleración angular $\gamma = \dfrac{d\omega}{dt}$ y podemos escribir el vector aceleración como

$$\vec{a}(t) = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{\imath} + \cos(\theta(t)).\hat{\jmath}\right] - R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{\imath} + sen(\theta(t)).\hat{\jmath}\right]$$

Podríamos escribir este vector de manera que aparezca una única componente en la dirección x y una única componente en la dirección y

$$\vec{a}(t) = -R.\left[\gamma.sen(\theta(t)) + \omega^2.\cos(\theta(t))\right].\hat{\imath} + R.\left[\gamma.\cos(\theta(t)) - \omega^2.sen(\theta(t))\right].\hat{\jmath}$$

Sin embargo veremos que la primera forma en que fue escrita la aceleración es más interesante.



Si realizamos el producto escalar entre el vector posición, correspondiente a un sistema de coordenadas con origen en el centro de la circunferencia, y el vector velocidad vemos que

$$\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t) = R\left[\cos(\theta(t)).\hat{\imath} + sen(\theta(t)).\hat{\jmath}\right].R\,\omega\left[-sen(\theta(t)).\hat{\imath} + \cos(\theta(t)).\hat{\jmath}\right]$$

$$\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t) = R^2\omega\left[-\cos(\theta(t)).sen(\theta(t)) + sen(\theta(t)).\cos(\theta(t))\right]$$

$$\vec{r}(t) \bullet \vec{v}(t) = 0$$

lo que implica que en un movimiento circular el vector posición es siempre perpendicular al vector velocidad ($\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$). Si la componente tangencial del vector aceleración tiene la dirección de la velocidad entonces la componente normal tendrá la dirección del vector posición. Si analizamos la expresión del vector aceleración vemos que está escrito como una suma de dos vectores, donde cada uno de estos vectores es un versor multiplicado por un escalar. La parte vectorial del primer término de la aceleración es idéntica a la parte vectorial de la velocidad y por lo tanto podemos identificar este término con la aceleración tangencial.

$$\vec{a}_t(t) = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{\imath} + \cos(\theta(t)).\hat{\jmath}\right]$$

Mientras que la parte vectorial del segundo término de la aceleración es igual a la parte vectorial del vector posición, entonces podemos identificar a la componente normal de la aceleración con este segundo término.

$$\vec{a}_n(t) = -R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Para verificar esto calcularemos las componentes tangencial y normal de la aceleración mediante las expresiones $\vec{a}_t = (\vec{a}.\hat{v}).\hat{v}$ y $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$ como fue descripto en el capítulo anterior. Para este caso particular el versor velocidad ($\hat{v}$) es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\omega}{|\omega|}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

$$a_t = \vec{a} \bullet \hat{v} = \vec{a}.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = R.\gamma.\frac{\omega}{|\omega|}$$

entonces

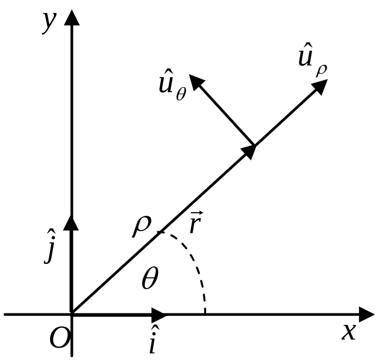
$$\vec{a}_t = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

y

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a} - \vec{a}_t = -R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Como vemos las expresiones para la aceleración tangencial y normal son las mismas que habíamos deducido anteriormente.

Ahora describiremos el movimiento circular utilizando coordenadas polares. Para hacerlo de manera vectorial es necesario definir los versores correspondientes a las coordenadas polares que denominaremos $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$. Los versores en un sistema de coordenadas ortogonales son vectores ortogonales, de módulo uno que tienen la dirección y sentido en que crece cada coordenada; por lo tanto en el caso de las coordenadas polares tenemos



$$\rho = |\vec{r}|$$

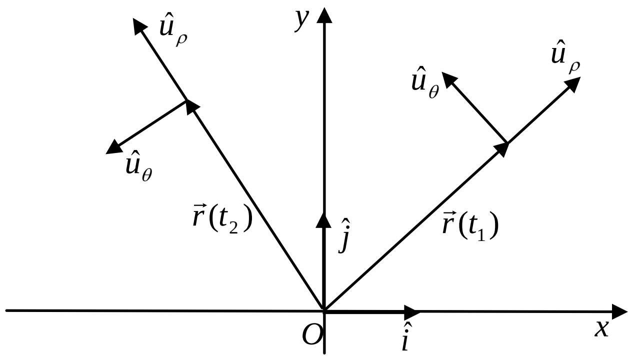
El vector posición escrito en coordenadas polares es

$$\vec{r}(t) = \rho(t).\hat{u}_{\rho}$$

y en el caso particular del movimiento circular el vector posición es

$$\vec{r}(t) = R.\hat{u}_{\rho}$$

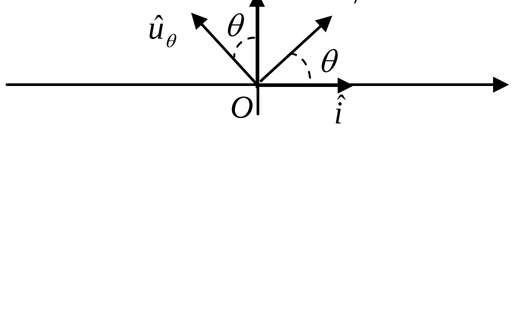
Para calcular la velocidad debemos derivar el vector posición respecto del tiempo. Hasta ahora habíamos derivado vectores cuyas componentes están escritos en coordenadas cartesianas, donde los versores son constantes en módulo y dirección y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es cero. Sin embargo, como se observa en la figura, en un sistema de coordenadas polares los versores modifican su dirección cuando cambia la posición del cuerpo cuyo movimiento describimos.



Por lo tanto los versores del sistema de coordenadas polares son funciones del tiempo y hay que tenerlo en cuenta cuando efectuemos la derivada. Entonces, en coordenadas polares, el vector velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\hat{u}_{\rho}) = R.\frac{d\hat{u}_{\rho}}{dt}$$

Para poder continuar con nuestra descripción del movimiento circular en coordenadas polares debemos conocer a qué es igual la derivada de los versores respecto al tiempo. Para ello escribiremos los versores polares en términos de los versores de un sistema de coordenadas cartesianos.



$$\hat{u}_{\rho} = \cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}$$

$$\hat{u}_{\theta} = -sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}$$

En estas expresiones lo que es función del tiempo es el ángulo θ. Si derivamos respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = -sen(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \omega.\left[-sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}\right]$$

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \omega.\hat{u}_\theta$$

y

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} - sen(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega.\left[\cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}\right]$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega.\hat{u}_\rho$$

Aplicando estos resultados, la velocidad de un cuerpo que realiza un movimiento circular en coordenadas polares es

$$\vec{v} = R.\omega.\hat{u}_\theta$$

Es evidente, a partir de esta expresión del vector velocidad, que $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$. Para calcular el vector aceleración debemos derivar la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\omega.\hat{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = R.\frac{d\omega}{dt}.\hat{u}_\theta + R.\omega.\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\omega^2.\hat{u}_\rho$$

En esta expresión del vector aceleración es claro que la componente en la dirección del versor $\hat{u}_\theta$ es paralela a la velocidad y la componente en la dirección $\hat{u}_\rho$ es normal a la velocidad, por lo tanto.

$$\vec{a}_t = R.\gamma.\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}_n = -R.\omega^2.\hat{u}_\rho$$

La componente normal de la aceleración tiene la dirección $-\hat{u}_\rho$, es decir que apunta hacia el centro del círculo (parte cóncava de la trayectoria). Esta componente de la aceleración que es la responsable de la modificación de la dirección de la velocidad en el movimiento circular y recibe el nombre de *aceleración centrípeta*.

Veamos que estas expresiones son totalmente equivalentes a las obtenidas en coordenadas cartesianas. El vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = R.\omega.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

donde podemos identificar el versor $\hat{u}_\theta = -sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}$; por lo tanto resulta $\vec{v} = R.\omega.\hat{u}_\theta$ que es la expresión obtenida cuando trabajamos con coordenadas polares. Si analizamos el vector aceleración en coordenadas cartesianas su expresión es

$$\vec{a}(t) = R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] - R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

donde podemos identificar a los versores polares $\hat{u}_\rho$, [$\hat{u}_\rho = \cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}$], y $\hat{u}_\theta$, [$\hat{u}_\theta = -sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}$]. Haciendo los reemplazos obtenemos $\vec{a} = R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\omega^2.\hat{u}_\rho$ que es la expresión obtenida cuando trabajamos en coordenadas polares.

Analicemos un ejemplo simple. Para la preparación de pilotos y astronautas se los introduce en dispositivos que pueden girar a gran velocidad de manera de exponerlos a grandes aceleraciones en el plano horizontal como el mostrado en la figura. En este tipo de experimentos se acostumbra expresar las aceleraciones lograda en términos de la aceleración de la gravedad G (G=9,8 m/s^2). Una persona tiene distinta tolerancia para aceleraciones verticales u horizontales. En promedio la máxima aceleración vertical hacia arriba que puede soportar una persona es 5G pero utilizando trajes antigravedad este límite es de 10G y cuando desciende la máxima aceleración soportada es entre 2G y 3G. Cuando la aceleración es en la dirección horizontal la máxima aceleración soportada es de aproximadamente 20G. Este dispositivo de entrenamiento puede lograr aceleraciones de hasta 30G. El radio de la trayectoria que describe el individuo de prueba es de 6 m y la aceleración angular γ = 0,3 s^{-2}. Con esta información, y sabiendo que el simulador parte del reposo, calculemos:

a) ¿Cuál debe ser la velocidad angular del simulador cuando la aceleración centrípeta sea 20G?

La aceleración centrípeta es

$$\vec{a}_n = -R.\omega^2.\hat{u}_\rho$$

$$\left|\vec{a}_n\right| = R.\omega^2$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\left|\vec{a}_n\right|}{R}} = \sqrt{\frac{20G}{6m}}$$

reemplazando los valores obtenemos

$$\omega_{\max} = 5{,}715\,s^{-1}$$

b) ¿Cuánto tiempo demorará el simulador en alcanzar esta velocidad?

Sabiendo de la aceleración angular es constante y que el sistema parte del reposo podemos obtener la velocidad angular en función del tiempo.

$$\gamma = 0{,}3\,s^{-2}$$

$$\omega = \int \gamma\, dt = \gamma\, t$$

Ahora podemos determinar cuánto tiempo demora el simulador en alcanzar la velocidad angular deseada

$$t_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{\gamma}$$

$$t_{\max} = 19{,}052\,s$$

c) Sabiendo que luego de alcanzar la velocidad angular máxima esta se mantiene constante, de la expresión de la aceleración que experimenta el individuo de prueba en coordenadas polares.

Para tiempos menores a t_{max} hay aceleración angular y por lo tanto el vector aceleración tendrá una componente tangencial y otra normal. Para tiempos mayores a t_{max} la velocidad angular es constante y la aceleración sólo tendrá una componente normal.

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\omega^2.\hat{u}_\rho & t < t_{\max} \\ - R.\omega_{\max}^2.\hat{u}_\rho & t \geq t_{\max} \end{cases}$$

Reemplazando obtenemos

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\gamma^2.t^2.\hat{u}_\rho & t < t_{\max} \\ - R.\gamma^2.t_{\max}^2.\hat{u}_\rho & t \geq t_{\max} \end{cases}$$

d) Calcule el valor del módulo de la aceleración en instante que se alcanza la velocidad angular máxima, justo antes de que esta sea constante.

En un instante infinitésimo antes de que sea constante la velocidad angular (t^-_{max}) tenemos las componentes tangencial y normal del vector aceleración. Para ese instante tenemos

$$\bar{a}(t) = R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\gamma^2.t_{\max}^{-\,2}.\hat{u}_\rho$$

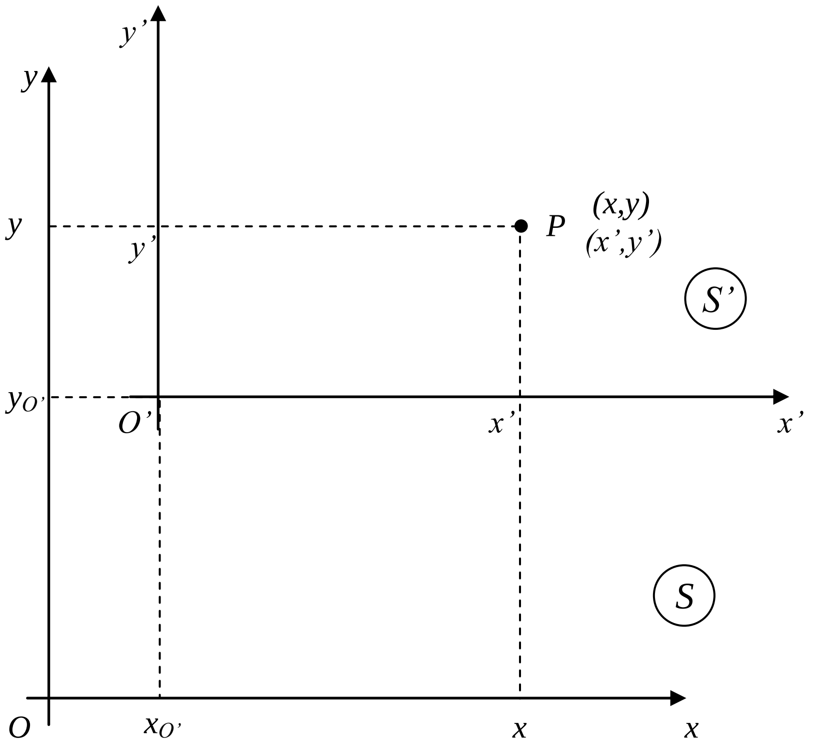
$$|\bar{a}(t)| = \sqrt{(R.\gamma)^2 + \left[R.\gamma^2.\left(t_{\max}^{-}\right)^2\right]^2}$$

$$|\bar{a}(t)| = 196{,}008\,\frac{m}{s^2} = 20{,}001\,G$$

Capítulo 11

Cambio de coordenadas

Analicemos qué relación existe entre las coordenadas correspondientes a dos sistemas de referencia diferentes denominados S y S'. Sólo analizaremos el caso en que los sistemas de referencia son ortogonales y tienen sus ejes paralelos entre sí. La coordenada de un punto P del plano en los dos sistemas será (x,y) y (x',y'), respectivamente.



El origen del sistema S', visto por el sistema S, tiene coordenadas $(x_{O'}\ ,\ y_{O'})$; mientras que el origen del sistema S respecto al sistema S' tiene coordenadas $(x'_O\ ,\ y'_O)$. A partir de la gráfica se desprende que se verifican las siguientes relaciones entre las coordenadas de los sistemas S y S'.

$$x_{O'} = -x'_O \qquad y_{O'} = -y'_O$$

$$x = x' + x_{O'} \qquad y = y' + y_{O'}$$

$$x' = x - x_{O'} \qquad y' = y - y_{O'}$$

$$x = x' - x'_O \qquad y = y' - y'_O$$

De esta manera quedan dadas las relaciones entre las coordenadas de un punto medidas desde ambos sistemas.

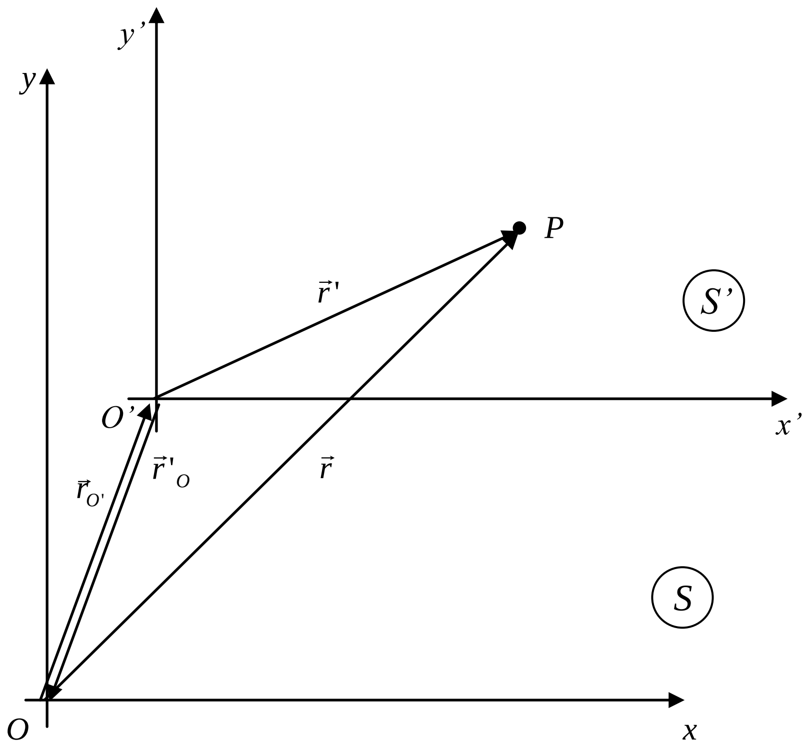
Analicemos esto mismo pero usando vectores posición. Denominemos:

$\vec{r}$: vector posición del punto *P* respecto a *O*;

$\vec{r}\,'$: vector posición del punto *P* respecto a *O'*;

$\vec{r}_{O'}$: vector posición de *O'* respecto de *O*;

$\vec{r}\,'_O$: vector posición de *O* respecto a *O'* ($\vec{r}\,'_O = -\vec{r}_{O'}$).



Del gráfico se ve que se verifica la siguiente relación vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'} \qquad \text{o bien} \qquad \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_O$$

de aquí resulta:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}\,'_O$$

Si el cuerpo, cuyas coordenadas estamos indicando, está en movimiento con respecto a los sistemas *O* y *O'* las funciones vectoriales de movimiento serán $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(t)$.

Analicemos los siguientes casos:

1) Supongamos que el sistema *O* no se mueve respecto de *O'*. Entonces las relaciones son:

$$\vec{r}'(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{r}(t)=\vec{r}'(t)-\vec{r}'_O$$

y a la velocidad del cuerpo vista desde ambos sistemas la podemos obtener derivando el vector posición respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}'_O}{dt}$$

pero como los sistemas están en reposo uno respecto al otro se cumple que $\vec{r}_{O'}=-\vec{r}'_O=cte$ y por lo tanto $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}=\frac{d\vec{r}'_O}{dt}=0$, entonces resulta

$$\vec{v}(t)=\vec{v}'(t)$$

Como vemos en este caso la velocidad del cuerpo con respecto a *O* es la misma que respecto a *O'*.

2) Supongamos ahora que el sistema *O* está en movimiento respecto de *O'*. En este caso tendremos

$$\vec{r}'(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}_{O'}(t) \qquad \text{o} \qquad \vec{r}(t)=\vec{r}'(t)-\vec{r}'_O(t)$$

y la velocidad será

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}'_O}{dt}$$

como $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{v}(t)$ es la velocidad del cuerpo visto por el sistema *O*, $\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}=\vec{v}'(t)$ es la velocidad del cuerpo visto por *O'*, $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}=\vec{v}_{O'}$ la velocidad del observador *O'* vista por el observador *O* y $\frac{d\vec{r}'_O}{dt}=\vec{v}'_O$ la velocidad del observador *O* vista por *O'* ($\vec{v}'_O=-\vec{v}_{O'}$) tenemos

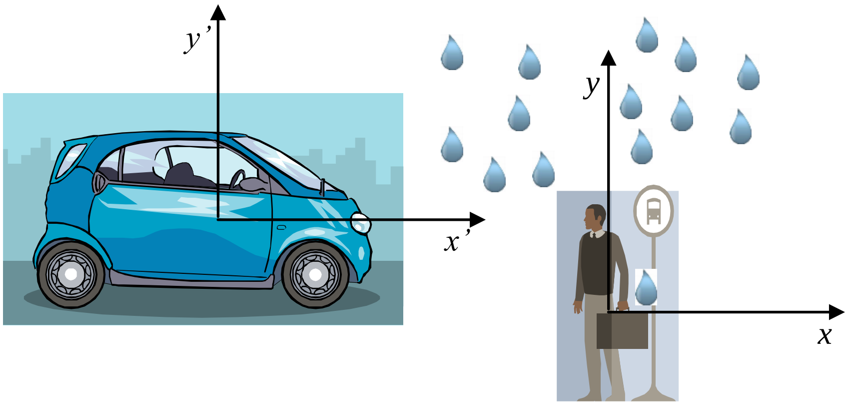
$$\vec{v}'(t)=\vec{v}(t)-\vec{v}_{O'} \qquad \text{o} \qquad \vec{v}(t)=\vec{v}'(t)-\vec{v}'_O$$

Estas relaciones vinculan las velocidades de un cuerpo observadas por dos sistemas diferentes que se mueven uno respecto del otro. La relación entre las velocidades suele denominarse *Teorema de adición de velocidades*.

Estas transformaciones incluyen a las *transformaciones de Galileo* que supone que la velocidad relativa entre ambos sistemas es constante, es decir $\vec{v}_{O'}=-\vec{v}'_O=cte$; por lo tanto $\vec{r}_{O'}=\vec{v}_{O'}\,t+\vec{r}_{O'}(0)$ con lo cual la relación entre las coordenadas del cuerpo descriptas por los dos sistemas será

$$\vec{r}'(t)=\vec{r}(t)-\vec{v}_{0'}\,t-\vec{r}_{0'}(0)$$

Analicemos un ejemplo. Supongamos que en una ciudad está lloviendo y no hay viento a nivel de superficie. Una persona que está en una parada de ómnibus verá que las gotas caen verticalmente, pero ¿cómo las verá caer otra persona que viaja en un automóvil?



Los dos sistemas de referencia son la persona en la parada de ómnibus (*S*) y la persona que viaja en el automóvil (*S'*). La velocidad de la gota vista por el sistema *S* será

$$\vec{v} = \vec{v}_g = v_g\ \hat{j}$$

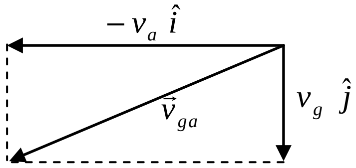
(de acuerdo al sistema de coordenadas graficado $v_g < 0$), mientras que la velocidad del auto respecto del sistema *S* será

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_a = v_a\ \hat{i}$$

(en nuestro caso será $v_a > 0$). Utilizando la expresión que relaciona la velocidad vista por ambos sistemas ($\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}$) podemos obtener cuál es la velocidad de la gota vista por la persona que viaja en el auto, la cual resulta

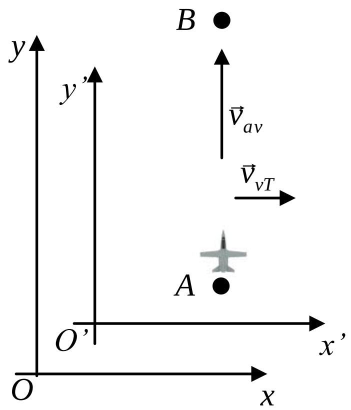
$$\vec{v}' = \vec{v}_{ga} = v_g\ \hat{j} - v_a\ \hat{i}$$

Realicemos un diagrama vectorial cualitativo para ilustrar mejor cómo es la dirección en la que el conductor del auto ve caer las gotas el conductor del auto.



Veamos otro ejemplo. Un vuelo debe unir la ciudad *A* con la ciudad *B* (situada al norte de *A*). El piloto fija el rumbo hacia el norte mientras el avión vuela a una velocidad de módulo v_a respecto al aire en reposo. El informe meteorológico informa que hay viento en dirección oeste-este cuya velocidad es de módulo v_v respecto a tierra. ¿Podrá el piloto lograr su objetivo?

Como vemos aquí los datos están referenciados a dos sistemas diferentes. La posición de las ciudades y la velocidad del viento están dados respecto a un sistema fijo a tierra (sistema *O*); mientras que el módulo y la dirección (dada por la brújula) de la velocidad del avión están referenciados a un sistema fijo al aire (sistema *O'*). Hagamos un diagrama de la situación planteada



Utilizando los sistemas elegidos en la figura podemos escribir:

Velocidad del avión respecto al viento ($\vec{v}'(t)$) : $\vec{v}_{av} = v_a\ \hat{j}$
Velocidad del viento respecto a tierra ($\vec{v}_{O'}$): $\vec{v}_{vT} = v_v\ \hat{i}$
Utilizando la expresión que relaciona la velocidad de un cuerpo visto por dos sistemas diferentes de coordenadas ($\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) - \vec{v}'_O$) y sabiendo que $\vec{v}'_O = -\vec{v}_{O'}$ podemos escribir

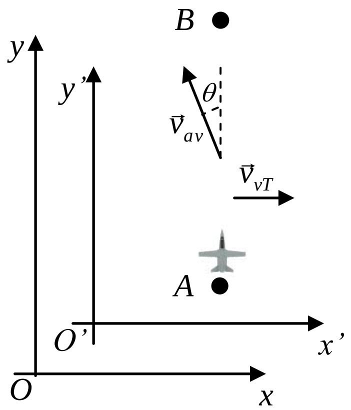
$$\vec{v}_{aT} = \vec{v}_{av} + \vec{v}_{vT}$$

reemplazando obtenemos

$$\vec{v}_{aT} = v_a\ \hat{j} + v_v\ \hat{i}$$

Como vemos el vector velocidad del avión, visto desde un sistema fijo a tierra, tiene componentes en las direcciones de $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Pero como el avión parte de la ciudad *A*, y las ciudades *A* y *B* están en la dirección sur-norte, para llegar a la ciudad *B* el vector velocidad del avión sólo debería tener componente en la dirección de $\hat{j}$. Lo que ocurre es que si el piloto pone dirección al norte los motores lo mueven en esta dirección pero el aire lo hará moverse también en la dirección del viento. Considerando esto podemos prever que el avión no llegará a su destino.

Ahora nos preguntamos qué dirección tendría que fijar el piloto para poder llegar a la ciudad *B*. Es evidente que para viajar hacia el norte debe compensar el arrastre del viento y por lo tanto la velocidad del avión respecto al viento deberá tener una componente horizontal como se muestra en la figura de abajo



Para esta nueva situación podemos escribir los vectores velocidades como:

Velocidad del avión respecto al viento ($\vec{v}'(t)$) : $\vec{v}_{av} = -v_a\, sen(\theta)\hat{\imath} + v_a \cos(\theta)\ \hat{\jmath}$
Velocidad del viento respecto a tierra ($\vec{v}_{O'}$): $\vec{v}_{vT} = v_v\ \hat{\imath}$

Sabemos que

$$\vec{v}_{aT} = \vec{v}_{av} + \vec{v}_{vT}$$

y reemplazando obtenemos

$$\vec{v}_{aT} = -v_a\, sen(\theta)\hat{\imath} + v_a \cos(\theta)\ \hat{\jmath} + v_v\, \hat{\imath}$$

$$\vec{v}_{aT} = [v_v - v_a\, sen(\theta)]\hat{\imath} + v_a \cos(\theta)\ \hat{\jmath}$$

Para que el avión viaje hacia el norte su velocidad vista desde un observador fijo a tierra sólo debe tener componente en la dirección de $\hat{\jmath}$, y por lo tanto debería ser $\vec{v}_{aT} = v_{aT}\ \hat{\jmath}$. Igualando ambos vectores obtenemos

$$v_{aT}\ \hat{\jmath} = [v_v - v_a\, sen(\theta)]\hat{\imath} + v_a \cos(\theta)\ \hat{\jmath}$$

Igualando componente a componente resulta

$$0 = v_v - v_a\, sen(\theta)$$
$$v_{aT} = v_a \cos(\theta)$$

en este sistema de ecuaciones nuestras incógnitas son v_{aT} (módulo de la velocidad del avión respecto a tierra) y θ (ángulo que debe formar la velocidad del avión respecto al aire con la dirección vertical, o sea la dirección que debe marcar la brújula). Resolviendo obtenemos

$$sen(\theta) = \frac{v_v}{v_a}$$
$$v_{aT} = v_a \cos(\theta)$$

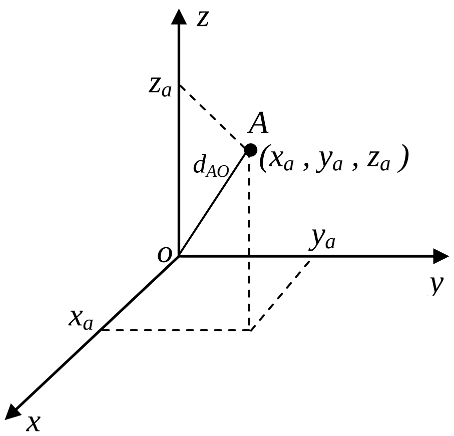
Capítulo 12

Localización de un punto en el espacio tridimensional

En los capítulos anteriores hemos descripto el movimiento unidimensional (1-D) y bidimensional (2-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas o en un plano. Ahora estamos interesados en describir el movimiento de cuerpos en el espacio tridimensional (3-D). De manera similar a lo que hicimos en la descripción de los movimientos 1-D y 2-D, lo primero que debemos hacer es determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en el espacio tridimensional.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema es similar al que utilizamos para definir la posición de un cuerpo en el plano, sólo que agregaremos un nuevo eje, el cual es perpendicular a los dos que definen el plano, en el cual se especifica la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto al plano de referencia. Esta nueva coordenada la llamaremos z. Por lo tanto para definir la posición de un punto en el espacio tridimensional deberemos especificar una terna de valores que corresponden a las tres coordenadas del cuerpo en el espacio como se observa en la figura.



La distancia que existe entre un punto en el espacio, de coordenadas (x_a ,y_a ,z_a), y el origen O (d_{AO}) está dada por la expresión:

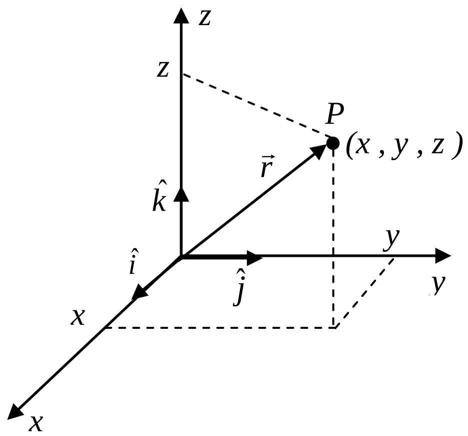
$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2 + {z_a}^2}$$

Dados dos puntos en el espacio A_1 y A_2, de coordenadas (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) respectivamente, la distancia d entre ellos es la longitud del segmento $\overline{A_1A_2}$ que une ambos puntos y está dada por la expresión:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vector posición

También podemos identificar un punto ***P*** del espacio tridimensional, de coordenadas *(x,y,z)*, mediante un vector $\vec{r}$ que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en ***P***.



Las componentes de este vector $\vec{r}$ son las coordenadas cartesianas de ***P***; es decir

$$r_x = x,\ \ r_y = y \text{ y } r_z = z$$

Por lo tanto al punto ***P*** y al vector $\vec{r}$ lo podemos definir por

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\,,$$

donde $\hat{k}$ es un versor en la dirección del eje *z*. Cuando identificamos con este vector $\vec{r}$ el punto del espacio donde se encuentra ubicado el cuerpo, cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición*.

Función vectorial de movimiento

Como hemos visto la posición de un punto en el espacio puede ser dada por un vector denominado "*vector posición del punto*"; si el cuerpo se mueve *su vector posición variará con el tiempo* y, por lo tanto, en cada instante de tiempo tendremos un vector posición. Es decir que el vector posición será una función del tiempo

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal podemos escribir

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

donde *x(t)*, *y(t)* y *z(t)* son las funciones de movimiento del cuerpo en coordenadas cartesianas. Por lo tanto podemos describir el movimiento de un cuerpo en el espacio por medio de la "*función vectorial de movimiento*" $\vec{r}(t)$.

Velocidad y aceleración en el movimiento tridimensional

Definimos la velocidad del cuerpo, de igual manera a cómo lo hicimos cuando analizamos el movimiento de un cuerpo que se mueve en el plano (2-D), como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir:

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vec{V}}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

Podemos escribir el vector velocidad en sus componentes cartesianas

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

donde identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad y \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

Como vemos, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo.

De manera similar a lo realizado en el movimiento en el plano también podemos definir el vector aceleración para el movimiento tridimensional como

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si el vector posición $\vec{r}$ está expresado en término de sus coordenadas cartesianas, $\vec{r} = x.\hat{i} + y.\hat{j} + z.\hat{k}$, resulta

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}.\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}.\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}.\hat{k} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}.\hat{i} + \frac{dy}{dt}.\hat{j} + \frac{dz}{dt}.\hat{k}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\hat{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad y \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x.\hat{\imath} + a_y.\hat{\jmath} + a_z.\hat{k}$$

Sabemos que podemos expresar a un vector como un escalar multiplicado por un versor; y en el caso particular de la velocidad podemos escribir $\vec{v}(t) = v(t).\hat{v}(t)$, donde $\hat{v}(t)$ es un vector tangente a la trayectoria. Tanto el módulo como la dirección del vector velocidad pueden variar con el tiempo; entonces tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v(t).\hat{v}(t)\right]$$
$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t) + v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en el caso de movimiento bidimensional.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_t(t) = \vec{a}_{//}(t) = \frac{dv(t)}{dt}.\hat{v}(t)$$

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}_{\perp}(t) = v(t).\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

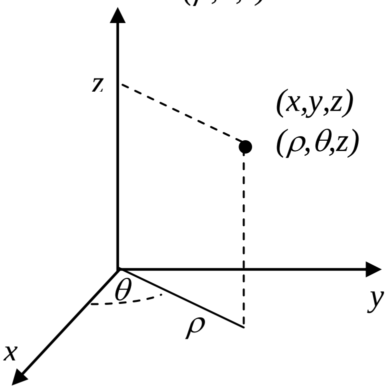
Entonces podemos expresar al vector aceleración en término de dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados, la a*celeración tangencial* *(* $\vec{a}_t$ *)* responsable de modificar el módulo del vector velocidad y la a*celeración normal* *(* $\vec{a}_n$ *)* responsable de modificar la dirección del vector velocidad. En el caso tridimensional el vector aceleración normal se encuentra sobre el plano formado por los vectores velocidad y aceleración.

Sistema de coordenadas cilíndrico y esférico

Hasta ahora hemos analizado el movimiento tridimensional descripto en un sistema de coordenadas cartesiano. Sin embargo hay ciertos movimientos que, por su simetría particular, es más simple su descripción desde otro tipo de sistema de coordenadas diferente al cartesiano. Esto es similar a lo que ocurre en la descripción de un movimiento circular en el plano, el cual es más simple de analizar utilizando un sistema de coordenadas polares. Existen muchos sistemas de coordenadas posibles pero analizaremos sólo dos, el cilíndrico y el esférico.

a) Sistema de coordenadas cilíndrico:

Este sistema utiliza un sistema de coordenadas polares para ubicar un punto en el plano e incorpora un eje *z* para determinar la altura del punto respecto a un plano de referencia. Para definir la posición de un punto en el espacio en un sistema de coordenadas cartesianas se debe especificar los valores de la terna *(x,y,z)* mientras que en coordenadas cilíndricas los de la terna (ρ,θ,z)



La relación entre el sistema de coordenadas cartesianos y cilíndrico es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = \rho \cdot \cos(\theta)$$
$$\theta = arctg(y/x) \qquad y = \rho \cdot sen(\theta)$$
$$z = z \qquad (\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Para calcular la velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas debemos tener en cuenta que los versores en las direcciones ρ y θ son funciones del tiempo.

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{u}_\rho + z.\hat{k}$$
$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k}$$

Sabiendo que $\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta = \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta$, la velocidad resulta

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \dot{z} \cdot \hat{k}$$

Si derivamos nuevamente respecto al tiempo podemos obtener la expresión para el vector aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt} \cdot \hat{k}$$

Como $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\rho = -\dot{\theta} \cdot \hat{u}_\rho$ tenemos que la expresión para el vector aceleración es

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\cdot\hat{u}_\rho + 2\cdot\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{u}_\theta + \rho\cdot\ddot{\theta}\cdot\hat{u}_\theta - \rho\cdot\dot{\theta}^2\cdot\hat{u}_\rho + \ddot{z}\cdot\hat{k}$$

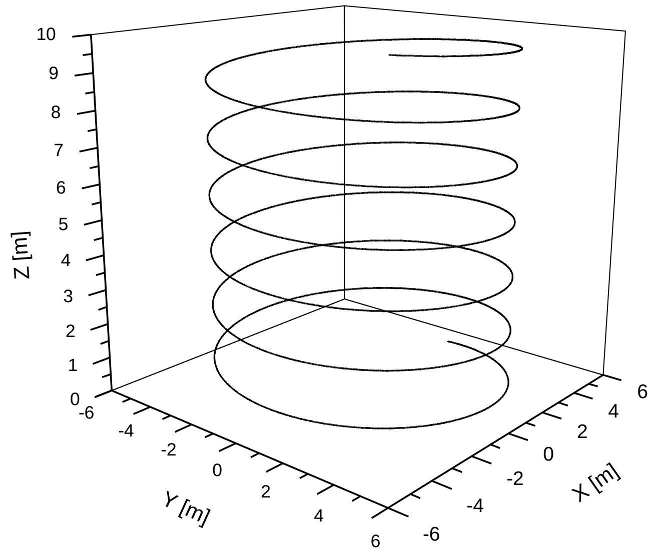
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho}\cdot - \rho\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\hat{u}_\rho + \left(2\cdot\dot{\rho}\cdot\dot{\theta} + \rho\cdot\ddot{\theta}\right)\cdot\hat{u}_\theta + \ddot{z}\cdot\hat{k}$$

Veamos la descripción de algunos movimientos en un sistema de coordenadas cilíndrico:

a) Supongamos que las funciones de movimiento son:

En coordenadas cilíndricas:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 5\,m$ $\theta(t) = 2\,s^{-1}.t$ $z(t) = 0.5\dfrac{m}{s}.t$	$x(t) = 5\,m.\cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 5\,m.sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 0.5\dfrac{m}{s}.t$

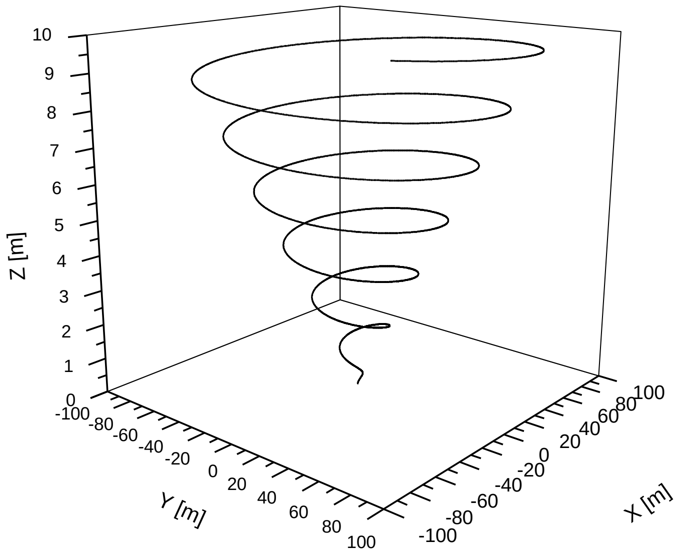
Como vemos la expresión de las funciones de movimiento es más simple en un sistema de coordenadas cilíndrico que en coordenadas cartesianas. En la figura se muestra la trayectoria correspondiente a este movimiento.



b) Si las funciones de movimiento son:

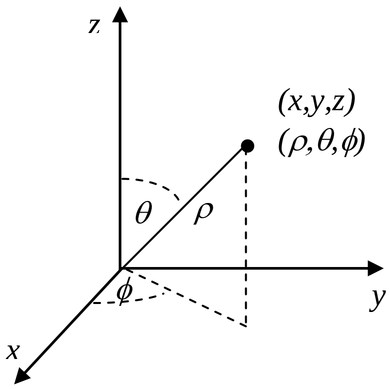
En coordenadas cilíndricas:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 5\dfrac{m}{s}.t$ $\theta(t) = 2\,s^{-1}.t$ $z(t) = 0.5\dfrac{m}{s}.t$	$x(t) = 5\dfrac{m}{s}.t.\cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 5\dfrac{m}{s}.t.\,sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 0.5\dfrac{m}{s}.t$

La trayectoria del movimiento sería la mostrada en la figura de abajo



b) Sistema de coordenadas esférico:

En el sistema de coordenadas esférico, para determinar la ubicación de un punto en el espacio, se debe especificar la terna de valores (ρ,θ,ϕ) que corresponden a las coordenadas mostradas en la figura



La relación entre el sistema de coordenadas cartesianos y esférico es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = \rho \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\phi)$$
$$\theta = arctg(\sqrt{x^2 + y^2} / z) \qquad y = \rho \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi)$$
$$\phi = arctg(y / x) \qquad z = \rho \cdot \cos(\theta)$$

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

El vector posición en coordenadas esféricas es

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{u}_\rho$$

Para obtener el vector velocidad debemos derivar el vector posición respecto al tiempo y resulta

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt}$$

en coordenadas esféricas

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + sen\theta \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_\phi = \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + sen\theta \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi$$

la velocidad resulta

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \hat{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot sen\,\theta \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi$$

Si derivamos nuevamente respecto al tiempo podemos obtener la expresión para el vector aceleración en coordenadas esféricas

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi +$$
$$\rho \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi + \rho \cdot sen\theta \cdot \frac{d\dot{\phi}}{dt} \cdot \hat{u}_\phi + \rho \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \frac{d\hat{u}_\phi}{dt}$$

Como

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \cos(\theta) \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_\phi = -\dot{\theta} \cdot \hat{u}_\rho + \cos(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi$$

y

$$\frac{d\hat{u}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \cdot sen(\theta) \cdot \hat{u}_\rho - \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{u}_\theta = -\dot{\phi} \cdot \left(sen(\theta) \cdot \hat{u}_\rho + \cos(\theta) \cdot \hat{u}_\theta\right)$$

el vector aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \cdot \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \left(\dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + sen\theta \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi\right) + \frac{d\rho}{dt} \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \hat{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \left(-\dot{\theta} \cdot \hat{u}_\rho + \cos(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi\right)$$
$$+ \frac{d\rho}{dt} \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi + \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \dot{\phi} \cdot \hat{u}_\phi + \rho \cdot sen\theta \cdot \frac{d\dot{\phi}}{dt} \cdot \hat{u}_\phi - \rho \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \left(sen(\theta) \cdot \hat{u}_\rho + \cos(\theta) \cdot \hat{u}_\theta\right)$$

Separando en cada una de las componentes resulta

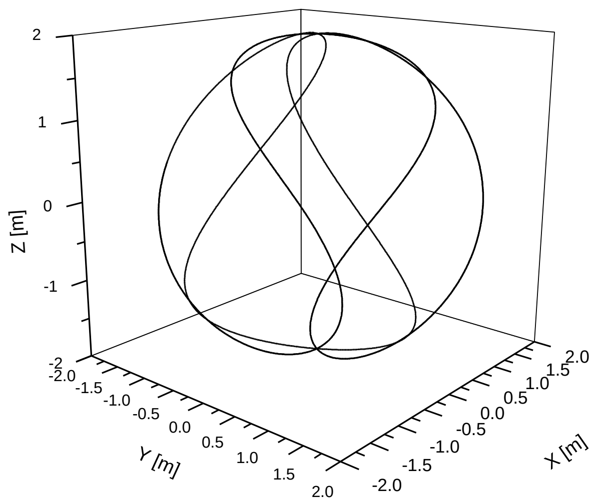
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 - \rho \cdot sen^2(\theta) \cdot \dot{\phi}^2\right) \cdot \hat{u}_\rho + \left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} - \rho \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\phi}^2\right) \cdot \hat{u}_\theta +$$
$$\left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot sen(\theta) \cdot \ddot{\phi}\right) \cdot \hat{u}_\phi$$

Veamos unos ejemplos simples de movimientos de cuerpos puntuales descriptos en un sistema de coordenadas esférico:

a) Si las funciones de movimiento son

En coordenadas esférico:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 2\,m$ $\theta(t) = 3\,s^{-1}.t$ $\phi(t) = 4\,s^{-1}.t$	$x(t) = 2m \cdot sen(3\,s^{-1}.t) \cdot \cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 2m \cdot sen(3\,s^{-1}.t) \cdot sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 2m \cdot \cos(3s^{-1}.t)$

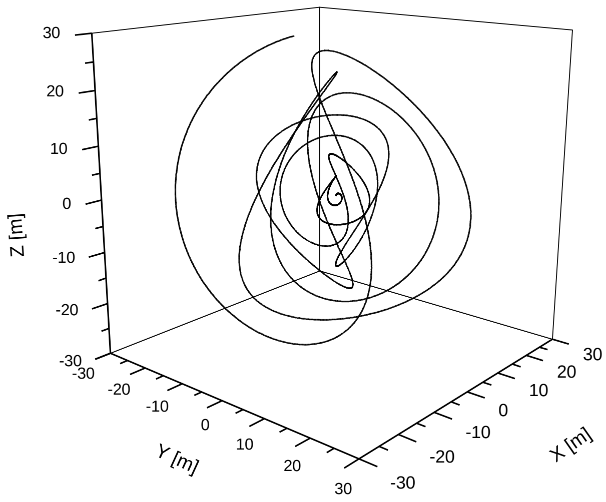
el gráfico de la trayectoria es



b) Supongamos ahora que todas las funciones de movimiento en coordenadas esféricas son funciones lineales del tiempo

En coordenadas esférico:	En coordenadas cartesinas
$r(t) = 3\dfrac{m}{s}\,t$ $\theta(t) = 5\,s^{-1}.t$ $\phi(t) = 2\,s^{-1}.t$	$x(t) = 3\dfrac{m}{s}\,t \cdot sen(5\,s^{-1}.t) \cdot \cos(2\,s^{-1}.t)$ $y(t) = 3\dfrac{m}{s}\,t \cdot sen(5\,s^{-1}.t) \cdot sen(2\,s^{-1}.t)$ $z(t) = 3\dfrac{m}{s}\,t \cdot \cos(5\,s^{-1}.t)$

la trayectoria es:



Como vemos funciones de movimiento muy simples en coordenadas esféricas corresponden a la descripción de movimientos complejos.

Respuesta al ejercicio planteado en la página 115

Trayectoria a):

Como se ve en la figura esta es una trayectoria rectilínea; por lo tanto el vector velocidad no cambia de dirección. Si el vector velocidad no cambia de dirección implica que no existe ninguna componente normal a la trayectoria del vector aceleración. Por esto podemos asegurar que los vectores $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_5$ y $\vec{a}_6$ no pueden representar vectores aceleración pues tienen componentes normales a la trayectoria. En cambio los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_4$ son tangentes a la trayectoria y pueden representar vectores aceleración posibles. Si la trayectoria se recorre de izquierda a derecha el vector aceleración $\vec{a}_1$ tiene el mismo sentido que el vector velocidad y originará un aumento del módulo de la misma. En el caso del vector $\vec{a}_4$ tiene sentido opuesto al del vector velocidad y por lo tanto generará una disminución del módulo del vector velocidad.

Trayectoria b):

En este caso particular vemos que el cuerpo recorre una trayectoria circular en sentido antihorario. Cómo la trayectoria no es rectilínea el vector aceleración debe tener una componente normal a la trayectoria. Por esto los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_4$ no pueden representar vectores aceleración posibles pues ellos son tangentes a la trayectoria y no poseen una componente normal. También habíamos visto que la componente normal de la aceleración siempre debía apuntar hacia la parte cóncava de la trayectoria para generar los cambios observados en el vector velocidad. Debido a esto los vectores $\vec{a}_5$ y $\vec{a}_6$ no pueden ser vectores aceleración posibles pues sus componentes normales apuntan hacia la parte convexa de la trayectoria, los vectores $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ poseen componentes normales apuntando hacia la parte cóncava de la trayectoria y por lo tanto pueden ser posibles vectores aceleración. El vector $\vec{a}_2$ tiene componentes normales y tangenciales distintos de cero y por lo tanto generarán una modificación del módulo y dirección del vector velocidad. El vector $\vec{a}_1$ parecería ser normal a la trayectoria y por lo tanto su componente tangencial será cero y generará que se modifique la dirección del vector velocidad sin alterar su módulo.

Bibliografía recomendada

- FÍSICA: Resnick, R. - Halliday, D. Tomo 1. Ed. ECPSA
- FÍSICA UNIVERSITARIA: Sear, Francia W. - Zemansky, Mark W. - Young Hugh D. Adisson - Wesley Iberoamericana, 6ta. Edición Wilmington.
- FÍSICA: Serway, Raymound A, Tomo 1. 3ra. Edición. Mc. Graw - Hill.