Matemática Discreta

(https://github.com/Mazuh/MyNotebook-Math)

Demonstração da Forma Fechada de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é gerada por uma **relação de recorrência**, cujo n-ésimo termo é dado por f(n) tal que:

$$\boldsymbol{f(0) = 0};$$
$$\boldsymbol{f(1) = 1};$$

$$\boldsymbol{f(n) = f(n-1) + f(n-2)}, se\ \boldsymbol{n > 1} \tag{1}$$

Observa-se que essa relação é:
- **de segunda ordem**, recorrendo aos dois últimos termos;
- **linear**, termos recorrentes não fazem produto e a maior potência é 1;
- **homogênea**, o coeficiente independente de termo recorrente é 0.

Por causa dessas características, talvez seja possível encontrar sistematicamente uma solução para essa recorrência usando a seguinte igualdade:

$$f(n) = r^n$$

Que é equivalente a:

$$f(n) = r^n \implies f(n-1) = r^{n-1} \implies f(n-2) = r^{n-2}$$

E essa técnica nos dá a seguinte **equação característica**:

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

(que pode ser simplificada dividindo tudo pelo r de menor potência)

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

(e usaremos a propriedade de divisão de potênciações)

$$r^{n-(n-2)} = r^{n-1-(n-2)} + r^{n-2-(n-2)}$$
$$r^{\mathbf{n-n+2}} = r^{\mathbf{n-1-n+2}} + r^{\mathbf{n-2-n+2}}$$
$$r^2 = r^1 + r^0$$
$$r^2 = r + 1$$

Ao trazermos tudo ao membro esquerdo, a equação característica fica:

$$\mathbf{r^2 - r - 1 = 0} \tag{2}$$

Dizemos que essa equação (2) é característica da recorrência (1) pois dependemos de suas raízes r para encontrar uma solução à recorrência f. Dito isso, pela fórmula quadrática:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4(1)(-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \\ r &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Isso quer dizer que (2) tem duas raízes diferentes:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Por $r_1 \neq r_2$, a equação característica (2) implicará na seguinte **solução** para a recorrência (1):

$$f(n) = a * (r_1)^n + b * (r_2)^n, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ constantes}$$

Ou seja, a solução seria:

$$f(n) = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3}$$

Apesar de a e b serem constantes, tais valores ainda nos são desconhecidos. E uma forma de encontrá-los seria criando um sistema de equações composto por $f(0)$ e $f(1)$, para garantir que a solução (3) satisfaça ambos os casos base de (1) simultaneamente. Logo, temos:

$$\begin{cases} a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathbf{0}} + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathbf{0}} = f(\mathbf{0}) \\ a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathbf{1}} + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathbf{1}} = f(\mathbf{1}) \end{cases}$$

(e, por (1), já sabemos qual a imagem de f quando $n = 0$ e $n = 1$)

$$\begin{cases} a(1) + b(1) = 0 \\ a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a + b = 0} \\ \mathbf{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1} \end{cases} \tag{4}$$

Resolveremos esse sistema (4) usando a técnica de **substituição**. A começar pela primeira equação:

$$a + b = 0$$

$$\mathbf{a = -b}$$

Usaremos essa igualdade para retirar a da segunda equação:

$$-\mathbf{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

(e deixaremos o fator comum b em evidência para simplificar)

$$b\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$$

(finalizaremos executando a soma de frações e isolando b)

$$b\left[\frac{-(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})}{2}\right]=1$$

$$b\left[\frac{\mathbf{-1}-\sqrt{5}\ \mathbf{+1}-\sqrt{5}}{2}\right]=1$$

$$b\left[\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}\right]=1$$

$$b\left[\frac{\mathbf{-2}\sqrt{5}}{\mathbf{2}}\right]=1$$

$$b\left[-\sqrt{5}\right]=1$$

$$\mathbf{b}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Agora b teve seu valor descoberto, e será usado na primeira equação de (4) para encontrar a:

$$a=-b$$

$$a=-\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Agora, já sabemos os valores das constantes a e b da função (3) e das raízes r_1 e r_2 da característica (2). São dados o suficiente para finalizar a solução (3). Temos:

$$f(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(finalizamos pondo fator comum $\frac{1}{\sqrt{5}}$ em evidência para simplificar)

$$\mathbf{f}(\mathbf{n})=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\left[\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}}-\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}}\right]$$

Esta é a **solução** da relação (1) e pode ser provada por indução.