Решение интегрального уравнения I рода методом механических квадратур.

<u>Постановка задачи:</u> требуется численно решить интергальное уравнение I рода

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{1}$$

<u>В данной задаче:</u>

$$\begin{aligned} &K(x,t) = \frac{1}{(x+t+\frac{3}{2})^2} \\ &f(x) = \frac{1}{1+x} ln(\frac{3(x+\frac{3}{2})}{x+\frac{5}{2}}) - \frac{ln(2)}{x+\frac{3}{2}} - \frac{ln(\frac{3}{2})}{x+\frac{5}{2}} \\ &[a,b] = [0,1] \end{aligned} \tag{2}$$

Для решения необходимо найти функцию u, минимизирующую регуляризатор $\alpha\|u\|^2 + \|Ku - f\|^2$, где α - варьируемый параметр.
В итоге все сведется к интегральному уравнению II рода:

$$\begin{aligned} &\alpha u(x) + \int_a^b (K^*K)(x,t)u(t)dt = \int_a^b K(t,x)f(t)dt \\ &K^*K(x,t) = \int_a^b K(\xi,x)K(\xi,t)d\xi \end{aligned} \tag{3}$$

Его будем решать методом механических квадратур.

Заменим интеграл на приближенное выражение по квадратурной формуле Гаусса:

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} A_i K(x,\xi_i)u(\xi_i) \tag{4}$$

Узлы квадратурной формулы ξ_i - корни полинома Лежандра степени n, которые можно найти методом итераций:

$$\xi_i^{(0)} = cos(\pi\frac{4i-1}{4n+2}); \quad \xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} - \frac{P_n(\xi_i^{(k)})}{P_n'(\xi_i^{(k)})} \tag{5}$$

Где $P_n'(x) = \frac{n}{1-x^2}(P_{n-1}(x) - xP_n(x))$ - производная от полинома Лежандра. Веса квадратурной формулы вычисляются по формуле: $A_i = \frac{2}{(1-\xi_i^2)(P_n'(\xi_i))^2}$

Запишем уравнение (3) с учетом (4) в узлах квадратурной формулы ξ_i. Получим систему уравнений относительно u_i. Решение этой системы приближенно равно решению исходного уравнения: $u_i \approx u(x_i)$. При уменьшении параметра α до некоторых предельной значений, решение системы будет все лучше сходиться к истинному.