Решение интегрального уравнения II рода методом Ритца.

Постановка задачи: требуется численно решить интергальное уравнение II рода

$$u(x) - \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{1}$$

В данной задаче:

$$\begin{aligned} &K(x,t) = ln(1 + 0.35xt) \\ &f(x) = ln(1 + x) \\ &[a,b] = [0,1] \end{aligned} \tag{2}$$

В первую очередь стоит отметить, что данный метод применим только для положительно-определенных симметричных операторов $K(x,t)$. Данная задача удовлетворяет этому условию. Для решения необходимо найти функцию u, минимизирующую энергетический функционал $\mathcal{F}(u) = (Au,u) - 2(f,u)$, где $Au = u - \int_a^b K(x,t)u(t)dt$; $(g,y) = \int_a^b g(t)y(t)dt$ - скалярное произведение.
Введем набор линейно-независимых координатных функций $\{\phi_k\}_1^n$ и представим решение исходного уравнения в виде линейной комбинации этих функций

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \tag{3}$$

Воспользовавшись условием минимизации энергетического функционала, после некоторых преоразований получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (A\phi_k, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad i = 1 \dots n \tag{4}$$

из которой можно найти коэффициенты c_k.

Для вычисления интегралов используется квадратурная формула Гаусса:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) \tag{5}$$

Узлы квадратурной формулы ξ_i - корни полинома Лежандра степени n, которые можно найти методом итераций:

$$\xi_i^{(0)} = cos(\pi \frac{4i-1}{4n+2}); \quad \xi_i^{(k+1)} = \xi_i^{(k)} - \frac{P_n(\xi_i^{(k)})}{P_n'(\xi_i^{(k)})} \tag{6}$$

Где $P_n'(x) = \frac{n}{1-x^2}(P_{n-1}(x) - xP_n(x))$ - производная от полинома Лежандра. Веса квадратурной формулы вычисляются по формуле: $A_i = \frac{2}{(1-\xi_i^2)(P_n'(\xi_i))^2}$