Решение задачи №5 по анализу временных рядов.

Мазурин Константин.

Постановка задачи: Дан временной ряд $x_k = x(\Delta tk)$, $k = 0, 1, ..., 2N - 1$, у которого первое и второе, третье и четвертое и т.д. значения попарно совпадают. Требуется доказать аналитически, что периодограмма такого ряда будет симметрична относительно частоты $\nu = 0.5\nu_c = 1/4\Delta t$. Также следуюет проиллюстрировать это свойство с помощью программы СКАВРя.

Будет использоваться следующий ряд:

$$\overline{x}_k = A_1 cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) + A_2 cos(2\pi\nu_2 t_k - \phi_2) + \sigma_x \xi_k \quad (1)$$

$$t_k = \Delta tk; \qquad k = 0, 1, 2, ..., N - 1 \quad (2)$$

Где Δt - постоянный шаг выборки;
$Ai, \nu_i, \phi_i, i = 1, 2$ - амплитуды, частоты и фазы двух гармонических компонентов;
ξ_k - случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенные по нормальному закону (шумовой компонент ряда);
σ_x - среднеквадратическое отклонение шумового компонента, которое можно вычислить через отношение "сигнал к шуму"γ с помощью соотношения

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{2\gamma}} \quad (3)$$

Для того, чтобы ряд подходил под условия задачи, каждый член ряда возьмем дважды, тем самым увеличив их количество до $2N$ и уменьшив вдвое шаг ряда Δt.

Решение: Для начала получим выражение для периодограммы ряда:

$$X_j = \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{2N}kj} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}(1 + e^{-i\frac{2\pi}{2N}j}) = (1 + e^{-i\frac{2\pi}{2N}j}) \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \quad (4)$$

$$D_j = \frac{1}{N^2}[Re^2 X_j + Im^2 X_j] = \frac{1}{N^2}|X_j|^2 = \frac{1}{N^2}\big|1 + e^{-i\frac{2\pi}{2N}j}\big|^2 * \Big|\sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}\Big|^2 \quad (5)$$

$$j = 0, 1, ..., N \quad (6)$$

Мы видим, что последний множитель является периодограммой исходного ряда $\overline{x}_k$, построенной на первых N точках. Также заметим, что частота $1/4\Delta t = 0.5\nu_c$ является Найквистовой для ряда $\overline{x}_k$. Из этих фактов следует, что частоты, отраженные на периодограмме, будут вдвое меньше, чем у исходного ряда. Рассмотрим центральный множитель:

$$\big|1 + e^{-i\frac{2\pi}{2N}j}\big|^2 = \big|1 + \cos\frac{2\pi}{2N}j - i\sin\frac{2\pi}{2N}j\big|^2 = (1 + \cos\frac{2\pi}{2N}j)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{2N}j = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{2N}j \quad (7)$$

Можно легко убедиться, что он будет с точностью до знака косинуса симметричен относительно $j = N/2$, что соответствует частоте $0.5\nu_c$.

Также нетрудно показать, что и последний множитель примет одинаковые значения при j и $N - j$, что говорит о симметрии относительно точки $j = N/2$.

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-j)}\Big|^2 = \Big|\sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i2\pi k} e^{i\frac{2\pi}{N}kj}\Big|^2 = \Big|\sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{i\frac{2\pi}{N}kj}\Big|^2 = \Big|\sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}\Big|^2 \quad (8)$$

Результаты работы программы СКАВРя

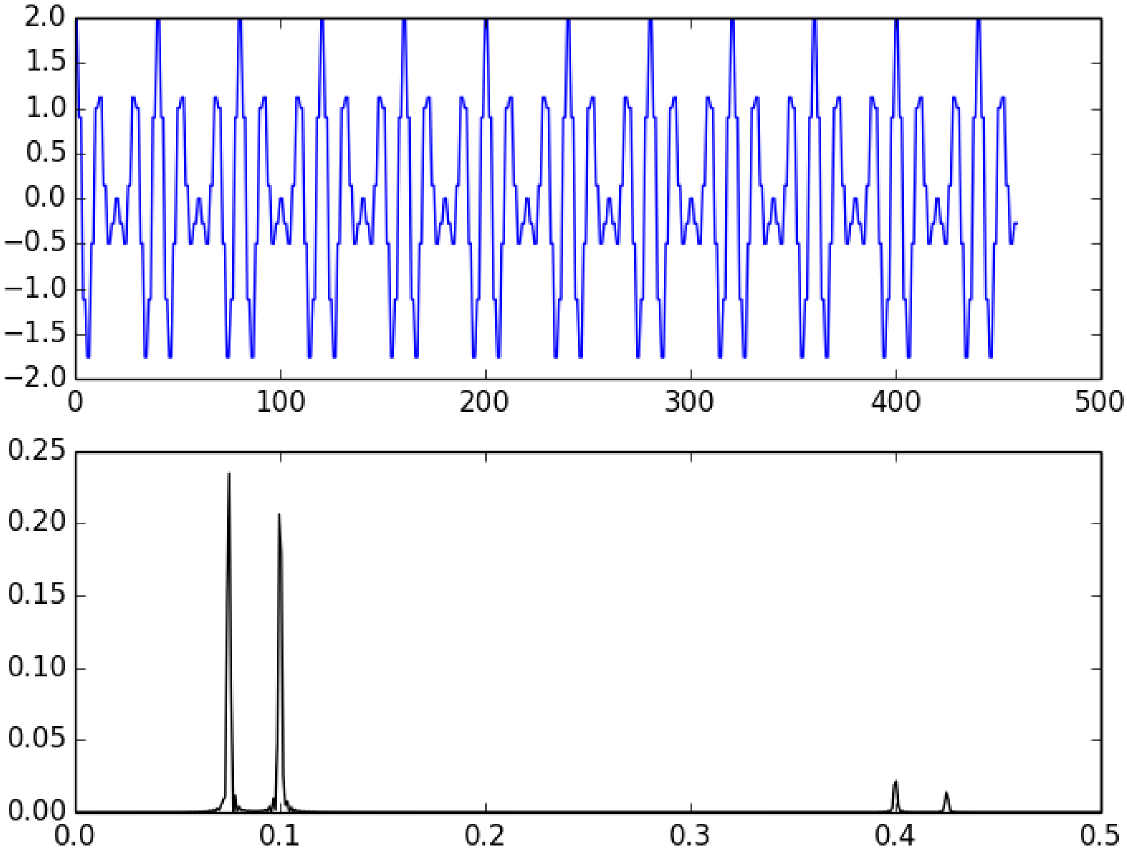

Рис. 1: Временной ряд (сверху) и его периодограмма (снизу). $A_i = 1, \nu_1 = 0.2, \nu_2 = 0.15, \phi_i = 0$