Решение эллиптического уравнения методами простых итераций, Зейделя и верхней релаксации.

Постановка задачи: требуется численно решить эллиптическое уравнение в частных производных

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+a(x,y)u=f(x,y) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0;\quad u(0,y)=0;\ u(1,y)=1;\quad x\in[0,1];y=1+x:\ u(x,y)=x \quad (2)$$

В данной задаче:

$$\begin{aligned} a_{11}&=(x^2+1) & a_1&=x & a&=0\\ a_{22}&=(y^2+1) & a_2&=-y & f&=y^2(x-1)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Составляем разностные уравнения:

$$a_{11}(x_i,y_k)\frac{u_{i+1,k}-2u_{ik}+u_{i-1,k}}{h^2}+a_{22}(x_i,y_k)\frac{u_{i,k+1}-2u_{ik}+u_{i,k+1}}{h^2}+$$
$$+a_1(x_i,y_k)\frac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h}+a_2(x_i,y_k)\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2h}+a(x_i,y_k)u_{ik}=f(x_i,y_k) \quad (4)$$

Для граничных условий уравнения будут выглядеть так:

$$u_{i,0}=\frac{1}{1+\frac{a_{11}}{a_{22}h}}\left(\left(\frac{1}{h}+\frac{a_2}{2a_{22}}\right)u_{i,1}+\left(\frac{a_{11}}{2ha_{22}}+\frac{a_1}{4a_{22}}\right)u_{i+1,0}+\left(\frac{a_{11}}{2ha_{22}}-\frac{a_1}{4a_{22}}\right)u_{i-1,0}\right) \quad (5)$$

$$u_{0,k}=0;\ u_{n,k}=1;\ u_{i,1+i}=(i+1)h \quad (6)$$

Сетка имеет вид: $x_i=h*i$, $y_k=h*k$, где h - шаг сетки.
Область имеет вид трапеции: $y\in[0,1):\ x\in[0,1];\quad y\in[1,2]:\ x\in[y-1,1]$
Численное решение будем искать в виде: $u_{ik}\approx u(x_i,y_k)$

- **Метод простых итераций:**
  Разрешаем уравнения относительно u_{ik}:

$$u_{ik}^{(n+1)}=\frac{(A_{ik}u_{i-1,k}+B_{ik}u_{i,k-1}+C_{ik}u_{i,k+1}+D_{ik}u_{i+1,k}-F_{ik})^{(n)}}{E_{ik}} \quad (7)$$

  Где:

$$\begin{aligned} A_{ik}&=\frac{a_{11}}{h^2}-\frac{a_1}{2h} & D_{ik}&=\frac{a_{11}}{h^2}+\frac{a_1}{2h} & E_{ik}&=\frac{2}{h^2}(a_{11}+a_{22})-a\\ B_{ik}&=\frac{a_{22}}{h^2}-\frac{a_2}{2h} & C_{ik}&=\frac{a_{22}}{h^2}-\frac{a_2}{2h} & F_{ik}&=f(x_i,y_k) \end{aligned} \quad (8)$$

- **Метод Зейделя:**
  Используется для ускорения сходимости. Работает, если a_{11}; a_{22} и a разных знаков.

$$u_{ik}^{(n+1)}=\frac{\left(A_{ik}u_{i-1,k}^{(n+1)}+B_{ik}u_{i,k-1}^{(n+1)}+C_{ik}u_{i,k+1}^{(n)}+D_{ik}u_{i+1,k}^{(n)}-F_{ik}\right)}{E_{ik}} \quad (9)$$

- **Метод верхней релаксации:**
Метод сходится еще быстрее метода Зейделя при правильном подборе параметра ω. Сначала ищем $\tilde{u}_{ik}^{(n+1)}$ по методу Зейделя. Затем уточняем значение, пользуясь формулой:
$$u_{ik}^{(n+1)} = u_{ik}^{(n)} + \omega(\tilde{u}_{ik}^{(n+1)} - u_{ik}^{(n)}) \tag{10}$$
Параметр $\omega \in (1, 2)$. В данной задаче будем искать его эмпирически.