Решение одномерного параболического уравнения методом сеток. (Простейшая явная и неявная схемы)

Постановка задачи: требуется численно решить одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \psi_0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = \psi_1 \tag{2}$$

и начальным условием:

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{3}$$

В данной задаче:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a2 = -1 \quad f = 0 \\ &\phi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \psi_0 = \psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Сетка имеет вид: $x_i = ih$, $t_k = k\tau$, $i = 0\dots n$; $k = 0 \dots M$ где $h = \frac{1}{n}$; $\tau = \frac{1}{2M}$.
Область: $x \in [0,1]$; $\quad t \in [0, \frac{1}{2}]$
Численное решение будем искать в виде: $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$

Составляем сеточные уравнения:

$$\mathcal{L}_h u_i^k = a_0\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + a_1\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{h} + a_2 u_i^k \tag{5}$$

Для граничных условий уравнения будут выглядеть так:

$$\frac{-u_2^k + 4u_1^k - 3u_0^k}{2h} = \psi_0(t_k) \tag{6}$$

$$\frac{u_{n-2}^k - 4u_{n-1}^k + 3u_n^k}{2h} = \psi_1(t_k) \tag{7}$$

- **Простейшая явная схема:**

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \mathcal{L}_h u_i^k + f(x_i, t_k) \tag{8}$$

Разрешаем уравнения относительно u_i^{k+1}:

$$u_i^{k+1} = A_i^k u_{i-1}^k + B_i^k u_i^k + C_i^k u_i^{k+1} + D_i^k \tag{9}$$

Где:

$$\begin{aligned} &A_i^k = \sigma a_0 - \frac{h}{2}\sigma a_1 \quad B_i^k = 1 - 2\sigma a_0 + \tau a_2 \quad \sigma = \frac{\tau}{h^2} \\ &C_i^k = \sigma a_0 + \frac{h}{2}\sigma a_1 \quad D_i^k = \tau f(x_i, t_k) \end{aligned} \tag{10}$$

- **Простейшая неявная схема:**

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \mathcal{L}_h u_i^k + f(x_i, t_k) \tag{11}$$

Прямой счет невозможен, три незвестных:

$$A_i^k u_{i-1}^k - B_i^k u_i^k + C_i^k u_{i+1}^k = D_i^k \tag{12}$$

Где:

$$\begin{aligned} A_i^k &= \sigma a_0 - \frac{h}{2}\sigma a_1 \quad B_i^k = 1 + 2\sigma a_0 - \tau a_2 \qquad \sigma = \frac{\tau}{h^2} \\ C_i^k &= \sigma a_0 + \frac{h}{2}\sigma a_1 \quad D_i^k = -\tau f(x_i, t_k) - u_i^{k-1} \end{aligned} \tag{13}$$

На каждом шаге по t, дополняя систему уравнений граничными условиями, решаем ее методом матричной прогонки.