Cognome: **Nome:** **Matr:**

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	Total
Punti											

Fondamenti dell'Informatica

Appello di giugno 2023

(CON RISPOSTE)

Domanda 1. Insiemi 3 P.

Siano $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{b\}, b\}$ e $B = \{\{\emptyset\}, a, b, \{\emptyset, b\}\}$ due insiemi.

Ricordate che $\mathscr{P}(X)$ rappresenta l'insieme potenza di X e $X \triangle Y$ è la differenza simmetrica fra insiemi.

1. Determinare $A \cup B$

2. Determinare $B \setminus A$

3. Costruire un insieme C tale che $\mathscr{P}(C) \triangle \{1, a, \{\emptyset\}\}$ ha 7 elementi

Risposta 1.

1. $A \cup B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{b\}, b, a, \{\emptyset, b\}\}$
2. $B \setminus A = \{a, \{\emptyset, b\}\}$
3. $C = \{x, y\}$
   (qualunque insieme con 2 elementi che non siano 1 o a e non includa $\emptyset$)

Domanda 2. Relazioni

3 P.

Siano $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 4, |x| \geq 2\}$ e R la relazione definita per

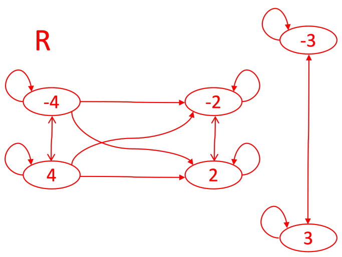
$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \bmod y = 0\}$$

Si ricordi che l'operazione modulo (**mod**) rappresenta il resto della divisione intera.

1. Descrivere R tramite un **grafo orientato**.
2. Determinare le proprietà di R
   - ☐ riflessiva
   - ☐ irriflessiva
   - ☐ simmetrica
   - ☐ asimmetrica
   - ☐ antisimmetrica
   - ☐ transitiva
3. Determinare se R^{-1} è:
   - ☐ una relazione di equivalenza
   - ☐ un preordine
   - ☐ un ordine parziale
   - ☐ nessuna delle precedenti

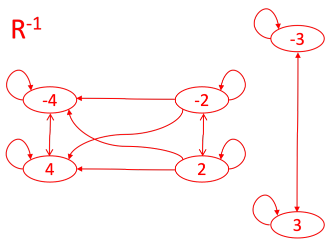
   Giustificare la risposta.

Risposta 2.



1.

2. riflessiva e transitiva



3. R^{-1} è un preordine

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 3. Funzioni 3 P.

1. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione definita come

   $$f(x) = \sin x^2 + 2$$

   Determinare le proprietà di f

   - ☐ totale
   - ☐ parziale
   - ☐ iniettiva
   - ☐ suriettiva
   - ☐ invertibile
   - ☐ biiettiva
   - ☐ biunivoca

2. Sia $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definita per

   $$g(x) = \sqrt{x - 1}$$

   Si ricordi che $\mathbb{R}_0^+$ include anche 0.

   Determinare le proprietà di g

   - ☐ totale
   - ☐ parziale
   - ☐ iniettiva
   - ☐ suriettiva
   - ☐ invertibile
   - ☐ biiettiva
   - ☐ biunivoca

3. Determinare, se possibile, $g \circ f$ e $f \circ g$. Qualora la composizione sia possibile, scrivere l'espressione analitica per calcolarla

---

Risposta 3.

1. f è totale (non iniettiva perché il seno è periodico, non suriettiva perché il codominio è R+ e i valori fra 0 e 1 non si possono raggiungere)

2. g è parziale (perché per i valori fra 0 e 1 non è definita), è iniettiva, è invertibile, è suriettiva (perché è R0+), è bieettiva

3. $f(g(x))$ non si può definire;

   $$g(f(x)) = \sqrt{\sin x^2 + 1}$$

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 4. Ordinamenti/Grafi/Alberi 1 3 P.

Si consideri l'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ e la relazione $R \subseteq A \times A$ definita per:

$$R := \{\langle x, y\rangle \mid x = y \quad \textit{oppure} \quad x^2 - y^2 > 3\}$$

1. descrivere R come un **diagramma di Hasse**
2. determinare:
   - $0 \sqcap 1$
   - $2 \sqcup 4$
3. determinare se R:

   ☐ induce un reticolo **non** limitato e **non** completo

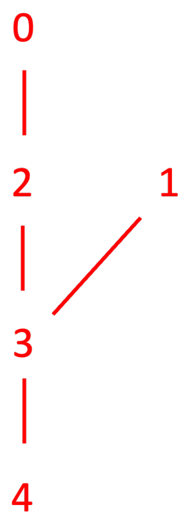
   ☐ induce un reticolo limitato e **non** completo

   ☐ induce un reticolo **non** limitato e completo

   ☐ induce un reticolo limitato e completo

   ☐ **non** induce un reticolo

Risposta 4.

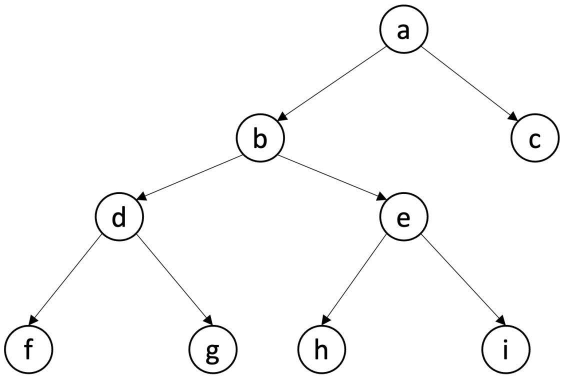


1.
2. - $0 \sqcap 1 = 3$
   - $2 \sqcup 4 = 2$
3. non induce un reticolo

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 5. Ordinamenti/Grafi/Alberi 2 3 P.

Si consideri la relazione R rappresentata dal seguente albero binario G:



1. determinare se G è:
   - ☐ pieno
   - ☐ completo
   - ☐ bilanciato
2. rappresentare l'albero binario G in forma tabulare, evidenziando i livelli
3. definire su G un cammino semplice di lunghezza massima e un semicammino semplice di lunghezza massima, e specificare la lunghezza di entrambi.

Risposta 5.

1. G è pieno, non completo, non bilanciato
2.

R	1
liv 1	1
	1
liv 2	1
	1
	0
	0
liv 3	1
	1
	1
	1
	0
	0
	0
	0

3. Un cammino semplice di lunghezza massima è $\langle a, b, d, f\rangle$ di lunghezza 3, un semicammino semplice di lunghezza massima è $\langle c, a, b, d, f\rangle$ di lunghezza 4.

Domanda 6. Induzione 3 P.

Sia $x \in \mathbb{R}$, tale che $x > -1$, si dimostri per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Risposta 6.

Caso base: $n = 1$

$$(1+x)^n = (1+x) = 1+x.$$

Ipotesi di induzione: Supponiamo per induzione che sia vero per un numero naturale $n \geq 1$; cioè:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Passo indutivo: Vogliamo mostrare che

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Risolviamo la parte di sinistra:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

Per ipotesi di induzione e poiché $x > -1$ abbiamo:

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

Risolviamo la parte di destra:

$$(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2$$

Ora $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ dunque:

$$1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x$$

.

Quindi mettendo assieme la parte sinistra e la parte destra otteniamo:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 7. Logica Proposizionale 1

3 P.

Si costruisca una tavola attraverso il metodo delle **tavole di verità** per la seguente proposizione e si dica se si tratta di una tautologia, di una formula soddisfacibile non tautologica, o di una contraddizione. Determinarne eventuali **contromodelli**.

$$\neg((s \wedge \neg t) \to (t \vee q)) \vee (s \to (t \vee q))$$

Risposta 7.

$\phi = \neg((s \wedge \neg t) \to (t \vee q)) \vee (s \to (t \vee q))$ É una tautologia non ci sono contromodelli.

q	s	t	$t \vee q$	$s \to (t \vee q)$	$\neg t$	$s \wedge \neg t$	$t \vee q$	$G = (s \wedge \neg t) \to (t \vee q)$	$\neg G$	ϕ
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 8. Logica Proposizionale 2

3 P.

Per la formula seguente, costruite **prima** l'albero sintattico e poi decidete tramite il metodo dei **tableaux** se è una tautologia, una formula soddisfacibile o una contraddizione. Determinarne eventuali **contromodelli**.

$$r \wedge (p \vee q) \to \neg p \to q$$

Risposta 8.
Tautologia

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 9. Logica Predicativa 1 3 P.

Tradurre in linguaggio formale le seguenti proposizioni, specificando **prima** i simboli utilizzati (costanti, funzioni e predicati):

1. Qualche frutto è salutare e qualche frutto non lo è

2. Il pomodoro è un frutto rosso

3. Se un frutto non è rosa, allora è salutare

Risposta 9.

1. $\exists x.(Frutto(x) \land Salutare(x)) \land \exists y.(Frutto(y) \land \neg Salutare(y))$
2. $Frutto(pomodoro) \land Rosso(pomodoro)$
3. $\forall x.(Frutto(x) \land Rosa(x) \to Salutare(x))$

Cognome: **Nome:** **Matr:**

Domanda 10. Logica Predicativa 2 3 P.

Si utilizzi il metodo dei **tableaux** per decidere se la seguente proposizione sia una tautologia, una formula soddisfacibile o una contraddizione.

$$\exists x.(P(x, x) \to \forall y.P(x, y))$$

Risposta 10.
soddisfacibile non tautologica