**Prop 3.5** Sia $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare

1) Se $\{v_1 \dots v_k\}$ generano $V$, allora $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ generano $\operatorname{Im} f$.

2) Se $\{v_1 \dots v_k\}$ sono tali che $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ e' un sistema indipendente, allora $\{v_1 \dots v_k\}$ e' indipendente.

**Dim:** 1) Sia $w \in \operatorname{Im} f$. Allora $\exists\, v \in V : f(v) = w$.

Poiche' $v_1 \dots v_k$ generano si ha:

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

Dunque:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)$$

quindi $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ generano $\mathrm{Im} f$.

2) Consideriamo

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$$

Applicando $f$ si ha:

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)$$

Poiché $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ sono lin. ind. si ha $a_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$.

**Prop 3.6:** Sia $f : V \longrightarrow W$ app. lineare.

1) $f$ iniettiva $\iff \mathrm{Ker} f = \{0\}$
$\iff \dim \mathrm{Ker} f = 0$

2) $f$ suriettiva $\iff \operatorname{Im} f = W$

$\iff \dim \operatorname{Im} f = W$.

Dim: 1) Supponiamo $f$ iniettiva.
Dato $v \in \operatorname{Ker} f$ si ha

$$f(v) = 0 = f(0).$$

Per iniettività, devo avere:

$$v = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

Se $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, consideriamo $v_1, v_2 \in V$ tali che:

$$f(v_1) = f(v_2).$$

Per linearità:

$$0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2).$$

Dato che $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, si ha:

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

L'equivalenza

$$\operatorname{Ker} f = \{0\} \iff \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

segue dalle definizioni.

2) Esercizio.

**Oss:** Per svolgere l'esercizio osservare che se

$W \subseteq V$ ssv allora $\dim W \leq \dim V$

**Domanda:** Come si costruiscono le applicazioni lineari?

**Teor 3.7:** (Esistenza e unicità dell'estensione)

Dati $V, W$ sp. vettoriali, sia $\{v_1, \dots v_n\} = B$ una base di $V$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ un insieme qualunque di vettori di $W$.

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ tale che:

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

Tale $f$ si chiama estensione lineare.

Dim: Dato $v \in V$, $\exists!\, a_i$ :

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

poiché $\mathcal{B}$ è base di $V$. Poniamo:

$$f(v) := \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

Unicità: Siano $f_1, f_2 : V \longrightarrow W$ due app. lineari tali che:

$$f_1(v_i) = w_i \quad f_2(v_i) = w_i \quad \forall i$$

Dato $v \in V$ con $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ si ha:

$$f_1(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_1(v_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_2(v_i)$$

$$= f_2(v).$$

<u>Esistenza</u>: Basta far vedere che se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ la funzione:

$$f: V \longrightarrow W, \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

è lineare.

Dati

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

Si ha:

$$f(u+v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i\right) =$$

definizione di f

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$$

$$= f(u) + f(v).$$

Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

$$f(\alpha v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i w_i = \alpha f(v).$$

$\square$

**Teor 3.8:** (Formula dimensionale o di nullità più rango)

Sia $f: V \longrightarrow W$ un'app. lineare.
Vale:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

**Dim:** Sia $\mathcal{D} := \{v_1, \dots, v_k\}$ una base del nucleo.
Grazie al Teor di completamento, possiamo estendere $\mathcal{D}$ a una base di $V$, precisamente:

$$\mathcal{B} := \{v_1 \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n\}$$

Basta mostrare che

$$\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$$

è una base di $\operatorname{Im} f$.

Osserviamo che per la Prop 3.5 i vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ generano $\operatorname{Im} f$.
(in quanto $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono nulli).

Mostriamo che sono lin. indip.

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i\right)$$

Quindi $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i \in \operatorname{Ker} f$,

da cui:

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = 0$$

Poiché $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ho che $a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ quindi $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono indipendenti.

$\boxed{\mathcal{B}}$

**Prop 3.9** Siano $f : V \longrightarrow W$
$g : W \longrightarrow U$
due applicazioni lineare. La composizione:

$$g \circ f : V \longrightarrow U \quad \text{è lineare}$$

**Dim:** Prendiamo $v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(v_1 + v_2) = g(f(v_1 + v_2)) =$$
$$= g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) +$$
$$+ g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2).$$

Analogamente:

$$(g \circ f)(\alpha v_1) = g(f(\alpha v_1)) =$$

$$\overset{!}{=} g(\alpha f(v_1)) = \alpha (g \circ f)(v_1).$$

**Def 3.10:** Sia $f: V \longrightarrow W$ un' app. lineare.

Diciamo che $f$ è invertibile se esiste una funzione LINEARE

$$g: W \longrightarrow V$$

tale che: $g \circ f = id_V$

$f \circ g = id_W$.

La funzione $g = f^{-1}$ si dice inversa.

Se $f$ è invertibile, $V$ e $W$ si dicono isomorfi e $f$ si chiama isomorfismo.

## Teor 3.11 (Teor di isomorfismo)

Siano $V, W$ sp. vettoriali.

$V, W$ sono isomorfi $\Longleftrightarrow \dim V = \dim W$.

**Dim:** Supponiamo $V, W$ siano isomorfi.

Allora esiste $f : V \longrightarrow W$ lineare e invertibile.

In particolare $f$ e' iniettiva e suriettiva.

Dunque; per Prop 3.6:

$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \qquad \dim \operatorname{Im} f = W$.

Usando la formula dimensionale (Teor 3.8) vale:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \overset{!}{=} 0 + \dim W = \dim W.$$

Viceversa se $V, W$ hanno la stessa dimensione allora esistono:

$\mathcal{B} = \{v_1 \ldots v_n\}$ base di $V$

$\mathcal{D} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base di $W$.

Ponendo $f(v_i) = w_i$ e considerando l'estensione lineare del Teor 3.7 si ha:

$f : V \longrightarrow W$ con $f(v_i) = w_i$.

Questo è l'isomorfismo richiesto. Basta considerare come inversa l'estensione:

$g : W \longrightarrow V$ con $g(w_i) = v_i$.

Es: (Importante)

Data una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di $V$ la funzione:

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad F_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

e' un ISOMORFISMO.

Cor 3.12: Ogni spazio vettoriale $V$ e' isomorfo a $\mathbb{R}^{\dim V}$.