

Fondamenti dell'Informatica

Simulazione Compitino + Soluzioni

1. Insiemi

Sia $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$.

Descrivere estensionalmente e intensionalmente $\wp(A)$, l'insieme delle parti di A.

Cercare poi due insiemi B e C che soddisfino le seguenti proprietà:

- $B \subseteq A$
- $C \not\subseteq A$
- $B \cap C = \{\emptyset\}$
- $B \cup C \supseteq A$
- $B \times C$ abbia 5 elementi (scrivere esplicitamente in notazione estensionale)

SOLUZIONE:

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{0, \{\emptyset\}\}, \{0, \emptyset\}, A\} = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

visto che $B \times C$ ha 5 elementi, (cardinalità di B) (cardinalità di C) = 5 e le uniche 2 possibilità sono $\text{card}(B) = 1$ e $\text{card}(C) = 5$ oppure $\text{card}(C) = 5$ e $\text{card}(B) = 1$; la seconda è impossibile perché $B \subseteq A$, quindi ha al più 3 elementi. Ma allora visto che $\text{card}(B) = 1$ e $B \cap C = \{\emptyset\}$ si conclude che $B = \{\emptyset\}$.

A questo punto, dovendo C soddisfare le condizioni $\text{card}(C)=5$, $B \cup C \supseteq A$ e $B \cap C = \{\emptyset\}$, C dovrà contenere tutti gli elementi di A più altri 2 a caso, ad esempio

$C = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$. Con queste scelte risulta

$$B \times C = \{\langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \emptyset, 0 \rangle\}$$

2. Funzioni

Se A e B sono insiemi finiti, che condizione devono soddisfare le loro rispettive cardinalità perché possa esistere una funzione totale iniettiva $f : A \rightarrow B$?

E una funzione iniettiva $f : A \rightarrow B$ non necessariamente totale?

SOLUZIONE:

Per il principio della piccionaia deve essere $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ per la funzione totale iniettiva.

Per la funzione iniettiva non necessariamente totale, l'unica condizione è che non sia definita dall'insieme vuoto all'insieme vuoto, in altre parole $\text{card}(A) > 0$, $\text{card}(B) > 0$.

3. Relazioni

Siano A e B due insiemi e $R \subseteq A \times B$ una relazione.

Che condizione deve soddisfare R affinché R^{-1} sia una funzione (anche parziale)?

E affinché R^{-1} sia totale, ovvero abbia come dominio B, ma non sia una funzione?

SOLUZIONE:

R^{-1} è una funzione (anche parziale) se e solo se ognqualvolta si trovino elementi $a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle \in R^{-1}$ deve risultare $a_1 = a_2$; in termini di R la frase si riformula dicendo che ognqualvolta si trovino elementi $a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ deve risultare $a_1 = a_2$, o equivalentemente $a_1 \neq a_2$ implica che non esiste alcun $b \in B$ tale che

$\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ (si noti che nel caso particolare in cui R è una funzione questa condizione è precisamente l'iniettività di R).

E affinché R^{-1} abbia come dominio B , ma non sia una funzione, il codominio di R deve essere tutto B e per la discussione precedente dobbiamo poter trovare

$a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $a_1 \neq a_2$ ma $\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ (ancora una volta, se R è una funzione ciò significa che deve essere non iniettiva).

Costruire un esempio di relazione fra 2 insiemi

- che non sia una funzione
- la cui relazione inversa sia una funzione totale

SOLUZIONE:

Prendiamo ad esempio $A = \{0\}$ e $B = \{1, 2\}$ e definiamo la relazione $R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\} \subseteq A \times B$.

R è una relazione non funzione e la sua inversa $R^{-1} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\} \subseteq B \times A$ è la funzione totale $f : B \rightarrow A$ data da $f(1) = 0, f(2) = 0$.

Dati l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ e la relazione $R \subseteq A \times \{b, c, d\}$ definita da

$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$, descrivere la composizione $R^{-1} \circ R$

Nota importante: l'esercizio sarà risolto con la convenzione che la prima relazione applicata è l'ultima scritta, dunque prima R poi R^{-1} .

SOLUZIONE:

$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle c, d \rangle\}$ e per ottenere la composizione

$R^{-1} \circ R \subseteq A \times A$ (che è ben definita perché il codominio della prima relazione da applicare, cioè R , coincide col dominio della seconda, cioè R^{-1}) ragioniamo elemento per elemento così:

- l'elemento a è in relazione R con b e c . b a sua volta è in relazione R^{-1} con a e c e questo ci dà le coppie $\langle a, a \rangle$ e $\langle a, c \rangle$. c invece è in relazione R^{-1} con a e d , perciò otteniamo le coppie $\langle a, a \rangle$ (che già avevamo) e $\langle a, d \rangle$.
- b non è in relazione R con alcun elemento, dunque la composizione non conterrà coppie il cui primo elemento è b .
- c è in relazione R con b e sappiamo che b a sua volta è in relazione R^{-1} con a e c e questo ci dà le coppie $\langle c, a \rangle$ e $\langle c, c \rangle$.
- d è in relazione R con c e d . Abbiam già visto che c è in relazione R^{-1} con a e d , perciò otteniamo le coppie $\langle d, a \rangle$ e $\langle d, d \rangle$. Infine d è in relazione R^{-1} solo con d , perciò otteniamo la coppia $\langle d, d \rangle$ (che già avevamo).

Riassumendo, $R^{-1} \circ R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, d \rangle\}$

4. Ordinamenti / Grafi / Alberi

Si disegni il grafo della struttura relazionale (A, R) sapendo che:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- R è relazione d'ordine parziale

(si utilizzino le convenzioni per i grafi generico o per i diagrammi di Hasse).

Si individuino poi elementi massimali e minimali.

SOLUZIONE:

Una delle tante possibilità è scegliere come R l'ordinamento canonico dei naturali, cioè porre $R = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,3>, <3,4>, <4,4>\}$. l'unico elemento massimale è 4, l'unico minimale è 1.

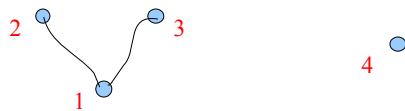
In tal caso il diagramma di Hasse è



Altra possibilità (forse più interessante): $R = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <3,3>, <4,4>\}$.

Elementi massimali sono 2,3,4; minimali sono 1 e 4.

Diagramma di Hasse:



5. Algebre e Algebra di Boole

Com'è fatta la più piccola algebra di Boole? (descrivere i suoi elementi con la notazione estensionale e con un diagramma di Poset).

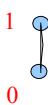
SOLUZIONE:

$B = \{0, 1\}$ dove join e meet sono definiti così:

$$0 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \quad 0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 1 \vee 1 = 1$$

e dove il complementare di 0 è 1 e viceversa. (è l'algebra dei valori di verità)

Diagramma di Hasse:



6. Induzione

Dimostrare che per ogni numero naturale non nullo n , n^2 è la somma dei primi n numeri dispari [suggerimento: i primi n dispari si possono scrivere come $2k - 1$ con k che varia da 1 a n]

SOLUZIONE:

Utilizziamo il principio di induzione: se $n = 1$, $n^2 = 1$, che è la somma (banale) del primo numero dispari. Supponiamo allora che l'asserto valga per tutti i naturali non nulli fino a $n-1 > 0$, ossia

$$(n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

in tal caso

$$\begin{aligned} n^2 &= (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2(n-1) + 1 = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2n - 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2n - 1 = \sum_{k=1}^n (2k-1) \end{aligned}$$

perciò il passo induttivo è completato.

7. Logica Proposizionale 1

Si costruisca una fbf con almeno 3 componenti che risulti, mediante verifica con le tavole di verità, una contraddizione.

SOLUZIONE:

Fra le infinite possibilità, si può ragionare così: sappiamo che per ogni fbf A, la fbf $A \wedge \neg A$ è la madre di tutte le contraddizioni (tant'è vero che la sua negazione, ovviamente una tautologia, è chiamata "principio di non-contraddizione"). A questo punto selezioniamo a caso altre 2 fbf, diciamo B e C, e non facciamo altro che congiungere il tutto: $(A \wedge \neg A) \wedge B \wedge C$; essendo la congiunzione vera se e solo se tutte le sue componenti lo sono, e essendo la sua prima componente sempre falsa, abbiamo trovato ciò che cercavamo. La verifica mediante tavole di verità è lasciata ai lettori.

8. Logica Proposizionale 2

Si costruisca una tavola attraverso il metodo dei tableaux per la seguente proposizione e si dica se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di una formula soddisfacibile non tautologica (in quest'ultimo caso si elenchino i modelli che la verificano e quelli che la falsificano)

$$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow B$$

SOLUZIONE:

vediamo il tableau:

<u>F($(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$) → B</u>	
<u>T($(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$), FB</u>	
<u>TA → B, TA → ¬B, FB</u>	
FA, TA → ¬B, FB	TB, TA → ¬B, FB
FA, FA, FB	FA, T¬B, FB (chiuso: non occorre proseguire)
FA, FB, FB	
(non chiuso)	(non chiuso)

Essendoci rami non chiusi, la fbf proposta non è una tautologia e in particolare il modello che la falsifica è l'assegnazione del valore di verità F a entrambe A e B. Tutti gli altri 3 modelli (quelli cioè in cui ad almeno una fra A e B è assegnato il valore di verità T) la verificano, perciò siamo in presenza di una formula soddisfacibile non tautologica.

9. Logica Predicativa 1

Si verifichi col metodo dei tableaux la validità della fbf $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$.

La semantica della logica predicativa esclude esplicitamente che il dominio di interpretazione sia l'insieme vuoto; in caso contrario cosa potrebbe accadere nella situazione data dalla fbf precedente? (quest'ultima risposta opzionale)

SOLUZIONE:

$F\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

$T\forall x P(x), F\exists y P(y)$

$TP(t), F\exists y P(y)$

$TP(t), FP(t)$

e il tableau è chiuso, dunque si tratta di una tautologia; notiamo esplicitamente che quando applichiamo la regola $F\exists$ (ultimo passaggio) possiamo usare la stessa lettera t introdotta in precedenza dalla regola $T\forall$ e proprio questo rende il tableau chiuso.

Se usassimo un dominio di interpretazione vuoto, la fbf $\forall x P(x)$ sarebbe banalmente verificata, qualunque interpretazione si dia alla lettera predicativa P, semplicemente perché non ci sono elementi in gioco, dunque tutti quelli che ci sono soddisfano P; Per lo stesso motivo, la fbf $\exists y P(y)$ risulterebbe banalmente falsa qualunque interpretazione si dia alla lettera predicativa P (non ci sono proprio elementi: come possono esisterne alcuni che verifichino P?).

Ma allora $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$ sarebbe un'implicazione con antecedente vero e conseguente falso, dunque sarebbe falsa, contro la dimostrazione fornita dal tableau sopra; non è difficile individuare che il problema sta proprio nell'applicazione della regola $F\exists$: se il dominio di interpretazione è vuoto, non possiamo trovare un suo elemento rappresentato da t. In conclusione, le regole dei tableaux predicativi sono state concepite per essere compatibili con domini di interpretazione non vuoti.

10. Logica Predicativa 2

Si costruisca una tavola attraverso il metodo dei tableaux per la seguente fbf e si dica se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di una formula soddisfacibile non tautologica (in quest'ultimo caso si costruisca un'interpretazione che la renda vera e una che la renda falsa)

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$

SOLUZIONE:

$F\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$

$F\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), F\exists y (P(y) \wedge Q(y))$

$FP(t) \rightarrow Q(t), F\exists y (P(y) \wedge Q(y))$

$FP(t) \rightarrow Q(t), F P(t) \wedge Q(t)$

$TP(t), FQ(t), F P(t) \wedge Q(t)$

$TP(t), FQ(t), FP(t)$
(chiuso)

$TP(t), FQ(t), FQ(t)$
(non chiuso)

Essendoci un ramo non chiuso, la fbf proposta non è una tautologia.
Un'interpretazione che la renda falsa si può costruire così: come dominio

dell'interpretazione scegliamo l'insieme $\{2\}$, come predicato rappresentato da P usiamo “essere pari” e come predicato rappresentato da Q usiamo “essere multiplo di 4”; ora il numero naturale rappresentato da t deve essere per forza 2 (non abbiamo altra scelta nel dominio di interpretazione) che è pari ma non multiplo di 4, pertanto $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists y (P(y) \wedge Q(y))$ sono ambedue falsi e così falso risulta anche $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$.

Se allarghiamo il dominio di interpretazione, portandolo a $\{2,4\}$ e manteniamo le nostre scelte su P e Q, $\exists y (P(y) \wedge Q(y))$ è vera (basta prendere 4 come y) e di conseguenza tutta $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$ è vera in questa nuova interpretazione.

Riassumendo, la fbf data è soddisfacibile ma non tautologica.