Gemini 1

🎓 Esame "Master" Open Book (Set J)

Tags: #esame #fondamenti #simulazione #soluzioni-visibili
Istruzioni: Prova completa con soluzioni immediatamente visibili e pronte per la lettura.

Esercizio 1: Insiemi (3 Punti)

Siano $A = \{\emptyset, 1, \{1\}\}$ e $B = \{1, 2, \{1\}\}$.
Eseguire le seguenti operazioni:

1. **Intersezione e Unione:** Calcolare $A \cap B$ e $A \cup B$.
2. **Differenza:** Calcolare $A \setminus B$.
3. **Insieme delle Parti:** Calcolare $\mathcal{P}(A \setminus B)$.
4. **Verità:** Dire se l'affermazione $\{1\} \in A$ è vera o falsa.
5. **Partizione:** Scrivere un esempio di partizione di B in 2 sottoinsiemi.

✍ **Il tuo Svolgimento**

✓ **Soluzione**

1. Intersezione e Unione

- $A \cap B = \{1, \{1\}\}$.
- $A \cup B = \{\emptyset, 1, 2, \{1\}\}$.

2. Differenza ($A \setminus B$)

- Elementi in A non presenti in B. L'unico è $\emptyset$.
- Risultato: $\{\emptyset\}$.

3. Insieme delle Parti $\mathcal{P}(A \setminus B)$

- L'insieme è $\{\emptyset\}$. Le parti sono: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4. Verità

- $\{1\} \in A$? Sì, l'elemento $\{1\}$ è presente in A come elemento. **VERO**.

5. Partizione di B

- $B = \{1, 2, \{1\}\}$. Esempio di partizione: $X_1 = \{1, \{1\}\}$, $X_2 = \{2\}$.

Esercizio 2: Relazioni (3 Punti)

Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sia R definita da: $xRy \iff x \leq y$.
Consideriamo la relazione inversa R^{-1} (ovvero $xR^{-1}y \iff y \leq x$, cioè $x \geq y$).

1. **Rappresentazione:** Matrice Booleana e Grafo Orientato di R^{-1}.
2. **Proprietà:** Proprietà di R^{-1} (Riflessiva, Simmetrica, Antisimmetrica, Transitiva).
3. **Sottorelazione:** Rimuovere coppie da R^{-1} per renderla **Simmetrica**.

> ✍ **Il tuo Svolgimento**

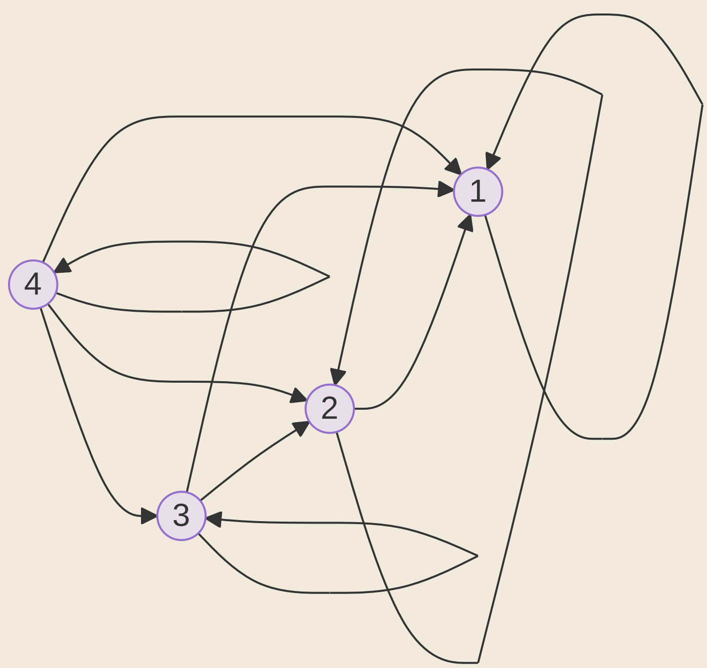
✓ Soluzione

1. Rappresentazione ($x \geq y$)

- Coppie: $\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.
- **Matrice:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Grafo Orientato:**



2. Proprietà

- **Riflessiva:** SÌ.
- **Simmetrica:** NO (es. $2 \geq 1$ ma non $1 \geq 2$).
- **Antisimmetrica:** SÌ.
- **Transitiva:** SÌ.

3. Sottorelazione Simmetrica
Tengo solo le coppie della diagonale (identità), rimuovendo tutte le relazioni d'ordine stretto.
$R' = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Esercizio 3: Funzioni (3 Punti)

Siano $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da:

$$f(n) = n - 5$$

$$g(n) = |n|$$

1. Proprietà di f (Totale, Iniettiva, Suriettiva, Biunivoca).
2. Proprietà di g (Totale, Iniettiva, Suriettiva, Biunivoca).
3. Calcolo di $(f \circ g)(n)$.
4. Calcolo di $(g \circ f)(n)$.

✍ Il tuo Svolgimento

Soluzione

1. Proprietà di $f(n) = n - 5$

- Totale: SÌ.
- Iniettiva: SÌ.
- Suriettiva: SÌ.
- Biunivoca: SÌ.

2. Proprietà di $g(n) = |n|$

- Totale: SÌ.
- Iniettiva: NO (es. $g(-2) = g(2) = 2$).
- Suriettiva: NO (nessun numero negativo in output).
- Biunivoca: NO.

3. $(f \circ g)(n) = f(g(n))$

$$f(|n|) = |n| - 5$$

4. $(g \circ f)(n) = g(f(n))$

$$g(n-5) = |n-5|$$

Esercizio 4: Diagrammi di Hasse (3 Punti)

Sia $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ordinato per divisibilità.

1. **Grafo:** Diagramma di Hasse (Bottom-Top, no frecce).
2. **Coppie:** Join e Meet di $\{6, 8\}$.
3. **Totale:** Join e Meet del diagramma.
4. **Reticolo:** È un reticolo?

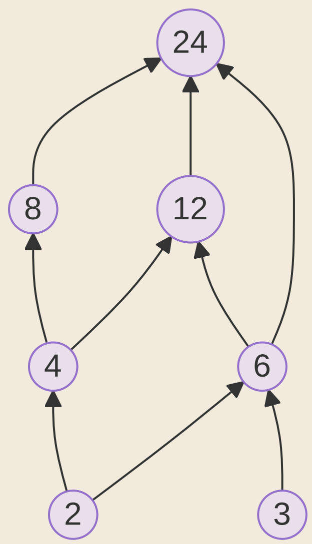
✍ **Il tuo Svolgimento**

✓ **Soluzione**

1. Diagramma di Hasse

- 2 divide 4, 6.

- 3 divide 6.
- 4 divide 8, 12.
- 6 divide 12, 24.
- 8 divide 24.
- 12 divide 24.



2. Coppia $\{6, 8\}$

- **Join ($6 \vee 8$):** MCM(6,8) = 24. (È presente in A).
- **Meet ($6 \wedge 8$):** MCD(6,8) = 2. (È presente in A).

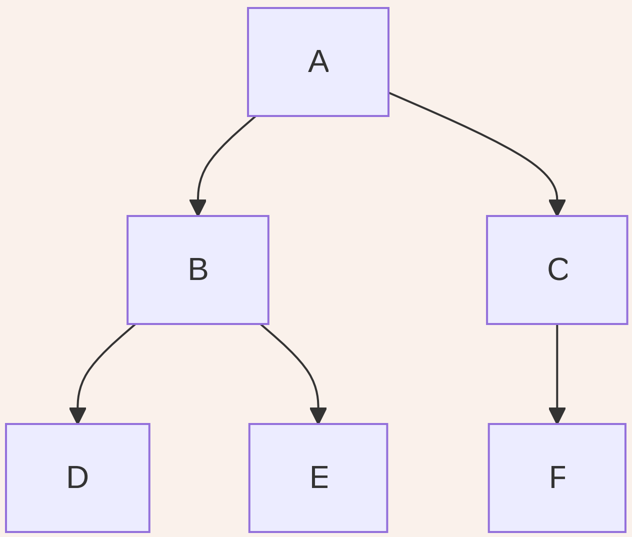
3. Totale

- **Join ($\bigvee A$):** 24 (Massimo).
- **Meet ($\bigwedge A$):** Non esiste unico (2 e 3 sono minimali distinti).

4. Reticolo?
NO. La coppia $\{2, 3\}$ ha MCD=1, ma 1 non è nell'insieme. Quindi non esiste il loro Meet in A.

Esercizio 5: Alberi Binari (3 Punti)

Albero: Radice A. Figli: B(sx), C(dx). Figli di B: D(sx), E(dx). Figli di C: F(sx).



1. **Classificazione:** Pieno? Completo? Bilanciato?
2. **Tabella:** Rappresentazione con array/tabella.

✍ Il tuo Svolgimento

Soluzione

1. Classificazione

- **Pieno?** NO. Il nodo C ha solo 1 figlio (F).
- **Completo?** SÌ. Livelli 0 e 1 pieni. Livello 2 riempito da sx (D, E, F presenti, manca solo l'ultimo a dx).
- **Bilanciato?** SÌ. (A: sx altezza 1, dx altezza 1. Diff 0).

2. Tabella

| Ind | Info | SX | DX |

|:-:|:-:|:-:|:-:|
0	A	1	2
1	B	3	4
2	C	5	-
3	D	-	-
4	E	-	-
5	F	-	-

Esercizio 6: Induzione e Ricorsione (3 Punti)

1. **Ricorsione:** Definire l'insieme M delle stringhe binarie che iniziano con '1' e finiscono con '0'.
2. **Induzione:** Dimostrare $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

✍ Il tuo Svolgimento

Soluzione

1. Ricorsione

- Base: $10 \in M$.
- Passo: Se $w \in \{0,1\}^*$ (una qualsiasi stringa binaria), allora $1w0 \in M$.
  (Definizione costruttiva basata sulla concatenazione).

2. Induzione

- **Base ($n = 1$):** Sx: $1/(1 \cdot 2) = 1/2$. Dx: $1/(1+1) = 1/2$.

- **Passo ($n+1$):**
  Obiettivo: $\frac{n+1}{n+2}$.
  Calcolo: $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
  $= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$
  $= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
  C.V.D.

Esercizio 7: Logica Proposizionale 1 (3 Punti)

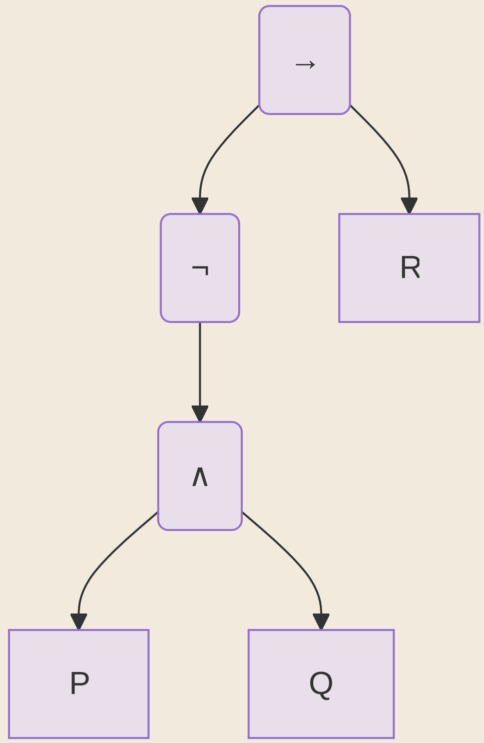
Formula: $\neg(P \land Q) \to R$.

1. **Albero Sintattico:** Disegnarlo.
2. **Tavola:** Tautologia, Contraddizione o Soddisfacibile?

✍ **Il tuo Svolgimento**

Soluzione

1. Albero Sintattico



2. Tavola
Basta trovare un caso falso.
Se $P = 0, Q = 0, R = 0$:

- $P \wedge Q$ è Falso.
- $\neg(P \wedge Q)$ è Vero.
- Implicazione $Vero \to R(Falso)$ è **Falsa**.
  Formula Soddisfacibile (non Tautologia, non Contraddizione).

ⓘ Esercizio 8: Logica Proposizionale 2 (3 Punti)

Tableaux: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.
(Legge di distribuzione dell'implicazione).

99 ✍ Il tuo Svolgimento

✓ Soluzione

1. Nego la formula intera.
2. $T(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ e $F((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$.
3. Espando la seconda parte falsa: $T(P \rightarrow Q)$ e $F(P \rightarrow R)$.
4. Espando $F(P \rightarrow R)$: $T(P)$ e $F(R)$.
5. Espando $T(P \rightarrow Q)$ (usando $T(P)$ trovato sopra):
    - Ramo A: $F(P)$. CHIUSO.
    - Ramo B: $T(Q)$.
6. Espando la prima parte vera $T(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$:
    - Ramo C: $F(P)$. CHIUSO.
    - Ramo D: $T(Q \rightarrow R)$.
        - Ramo D1: $F(Q)$. CHIUSO (perché ho $T(Q)$ dal punto 5B).
        - Ramo D2: $T(R)$. CHIUSO (perché ho $F(R)$ dal punto 4).

Tautologia (Formula Valida).

? Esercizio 9: Logica Predicativa 1 (3 Punti)

Tradurre:

1. "Tutti gli algoritmi hanno una complessità."
2. "Alcuni servizi cloud non sono sicuri."
3. "Se l'utente è admin, può accedere a tutti i file."

99 ✍ Il tuo Svolgimento

✓ **Soluzione**

1. $\forall x(Algoritmo(x) \to \exists y(Complessita(y) \land Ha(x,y)))$.
2. $\exists x(Cloud(x) \land \neg Sicuro(x))$.
3. $Admin(utente) \to \forall y(File(y) \to Accesso(utente,y))$.

ⓘ Esercizio 10: Logica Predicativa 2 (3 Punti)

Tableaux Validità: $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to (\exists x P(x) \land \exists x Q(x))$.

99 ✍ Il tuo Svolgimento

✓ **Soluzione**

1. Nego la formula.
2. $T(\exists x(P(x) \land Q(x)))$.
3. $F(\exists x P(x) \land \exists x Q(x))$.
4. Da (2), creo costante a: $T(P(a) \land Q(a)) \implies T(P(a))$ e $T(Q(a))$.
5. Ramifico (3) $F(\land)$:
    - Ramo A: $F(\exists x P(x)) \implies \forall x \neg P(x)$.
        - Uso la costante a: $F(P(a))$.
        - CHIUSO (contraddice $T(P(a))$).
    - Ramo B: $F(\exists x Q(x)) \implies \forall x \neg Q(x)$.
        - Uso la costante a: $F(Q(a))$.
        - CHIUSO (contraddice $T(Q(a))$).

Tautologia.