

Abbiamo visto che l'intersezione di sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio.

Vediamo l'unione.

Prendiamo $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

due ssv di \mathbb{R}^2 .

$W_1 \cup W_2$ è un sottosp?

Basta prendere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2.$$

Quindi l'unione NON è un sottospazio vettoriale.

Def 2.19: Dati due sottosp. vettoriali W_1, W_2 di V , lo spazio **Somma** e' definito come:

$$W_1 + W_2 := \text{Span}(W_1 \cup W_2)$$

La somma si dice **diretta** se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. In tal caso scriviamo $W_1 \oplus W_2$.

Prop 2.20: Dati due sottosp. vettoriali W_1, W_2 di V si ha:

$$W_1 + W_2 = \left\{ u_1 + u_2 \mid \begin{array}{l} u_1 \in W_1, \\ u_2 \in W_2 \end{array} \right\}$$

Dim: Poniamo

$$U := \{ u_1 + u_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2 \}$$

Mostriamo che $W_1 + W_2 \subset U$.
Basta notare che $W_1, W_2 \subset U$
e dunque anche

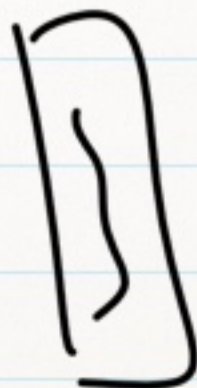
$$W_1 \cup W_2 \subset U.$$

Eser: Mostrare che $S_1 \subset S_2$
implica
 $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(S_2)$.

Grazie all'esercizio :

$$W_1 + W_2 = \text{Span}(W_1 \cup W_2) \subseteq \\ \text{Span}(U) = U.$$

L'inclusione $U \subset W_1 + W_2$
è banale: un elemento
 $u_1 + u_2$ è un elemento di
 $\text{Span}(W_1 \cup W_2)$.



Es: Torniamo al caso

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

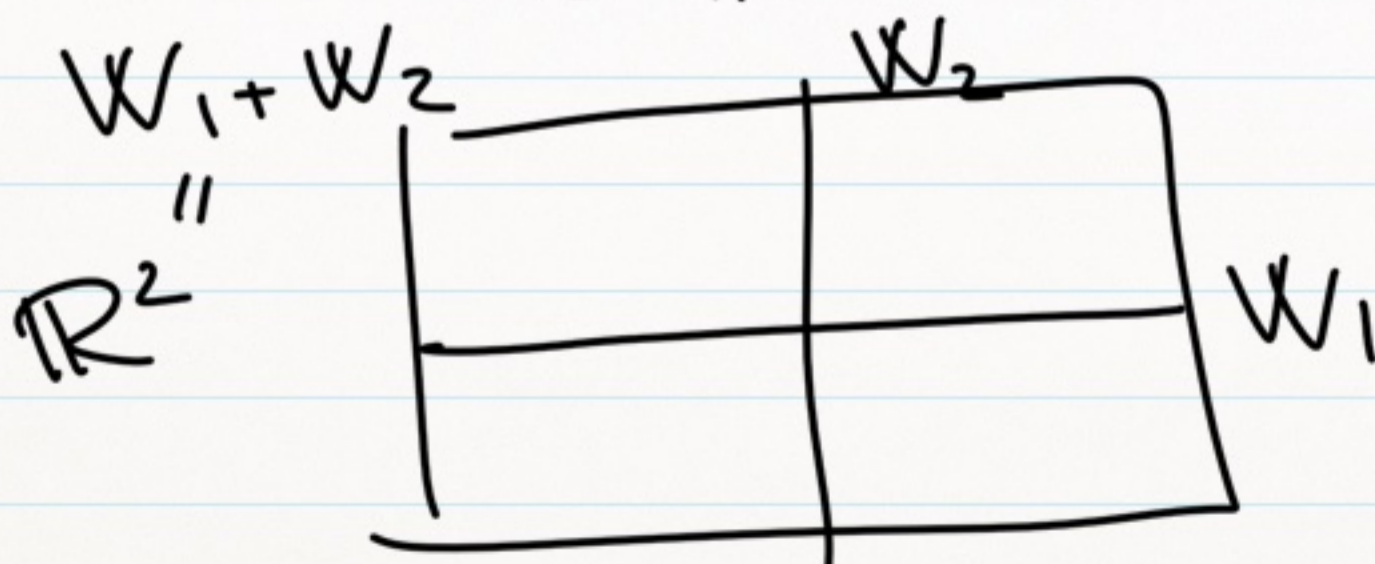
chei due sottospazi di \mathbb{R}^2 .

Per la prop. precedente:

$$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^2$$



Teor 2.21: (Formula di Grassmann)

Dati due sottosp. vettoriali W_1, W_2 di V , vale:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dim: Prendiamo

$$B_{12} = \{u_1, \dots, u_m\}$$

base di $W_1 \cap W_2$.

Per il Teor 2.17 posso estendere tale base a

$$B_1 = \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_r\}$$

una base di W_1 . Analogamente posso estendere a:

$$B_2 = \{u_1, \dots, u_m, w_{m+1}, \dots, w_\ell\}$$

base di W_2 .

Ho che:

$$\dim(W_1) = r \quad \dim(W_2) = \ell$$

$$\dim(W_1 \cap W_2) = m.$$

Devo dimostrare che:

$$\dim(W_1 + W_2) = r + \ell - m.$$

Per farlo dimostro che:

$$B = \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_r, w_{m+1}, \dots, w_\ell\}$$

è una base di $W_1 + W_2$.

Per la Prop. 2.20, l'insieme B è un sistema di generatori di $W_1 + W_2$.

Infatti un elemento generico
si scrive:

$$u = v + w = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=m+1}^r b_j v_j$$

$\in W_1 \quad \in W_2$

$$+ \sum_{i=1}^m c_i u_i + \sum_{k=m+1}^l d_k w_k$$

in quanto B_1 è base di W_1
e B_2 è base di W_2 .

Ora mostriamo che B è
un sistema indipendente.

$$0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=m+1}^r \beta_j v_j + \sum_{k=m+1}^l \gamma_k w_k$$

Tale equazione equivale a:

$$\underbrace{\sum_{k=m+1}^{\ell} \gamma_k w_k}_{\in W_2} = - \underbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i - \sum_{j=m+1}^r \beta_j v_j}_{\in W_1}$$

Dunque ambo i membri sono nell'intersezione. In particolare:

$$\sum_{k=m+1}^{\ell} \gamma_k w_k = \sum_{i=1}^m \delta_i u_i$$

Ma essendo B_2 una base devo avere che:

$$\delta_{i'} = 0 = \gamma_k \quad \begin{array}{l} i' = 1 \dots m \\ k = m+1 \dots \ell \end{array}$$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=m+1}^r \beta_j v_j = 0$$

Essendo B , una base, si ha

$$\alpha_{i'} = 0 = \beta_j \quad \begin{array}{l} i' = 1 \dots m \\ j = m+1 \dots r \end{array}$$

2.3 Sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n



Prop. 2.22: Si consideri una
matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Lo spazio:

$$W := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Soluzioni del sistema} \\ \text{omogeneo associato ad} \\ A \end{array} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

Dim: Prendiamo $x_1, x_2 \in W$

due soluzioni del sistema
lineare $Ax = 0$.

Dobbiamo far vedere che
 $x_1 + x_2 \in W$ e $\alpha x_1 \in W$.

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) &= Ax_1 + Ax_2 \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$A(\alpha x_1) = \alpha Ax_1 = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Oss: L'insieme delle soluzioni
di un sistema lineare
qualunque $Ax = b$ NON è
un sottosp. vettoriale se $b \neq 0$.
Infatti non contiene l'origine.

Grazie al Teorema di Rouché
Capelli sappiamo che le
soluzioni del sistema omogeneo

dipendono da $n - r(A)$ parametri.
Questo si traduce nella
seguente:

Prop 2.23: Data una matrice
 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
si consideri:

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Se $r = r(A)$ e le soluzioni
dipendono dai parametri
 $s_1 \dots s_{n-r}$, allora:

1) $\dim W = n - r$

2) Una base di W si ottiene
ponendo, una alla volta,
un parametro pari a 1
e gli altri pari a zero.

Dim: Omissa.

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice ha rango 2.
Consideriamo!

$$W := \{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0 \}.$$

Per la Prop 2.23 ho che:

$$\dim W = 4 - r(A) = 4 - 2 = 2.$$

Determiniamo una base. Dobbiamo trovare le soluzioni di $Ax = 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = s_1$
 $x_4 = s_2$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-S_1 + S_2}{2} \\ x_2 = -S_1 + S_2 \\ x_3 = S_1 \\ x_4 = S_2 \end{cases}$$

Una base di W si ottiene ponendo:

$$S_1 = 1, S_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = 0, S_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da cui la base è:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notiamo che:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi dato un sistema
lineare

$$Ax = b$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$

lo spazio

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

non è un ssv.

Lo è:

$$W_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

I due sono legati da:

Prop 2.24: Dato $Ax = b$

come sopra, sia

$\bar{x} \in W$ una soluzione particolare
Allora:

$$W := \bar{x} + W_0 = \{\bar{x} + x_0 : x_0 \in W_0\}$$

Dim: Dato un elemento

$\bar{x} + x_0, x_0 \in W_0$ vale:

$$A(\bar{x} + x_0) = A\bar{x} + Ax_0 = \\ = b + 0 = b$$

quindi $\bar{x} + x_0 \in W$.

Sia x_1 un elemento di W .

Poniamo:

$$x_0 := \bar{x} - x_1.$$

Vale:

$$Ax_0 = A\bar{x} - Ax_1 = b - b = 0$$

cioè $x_0 \in W_0$.

