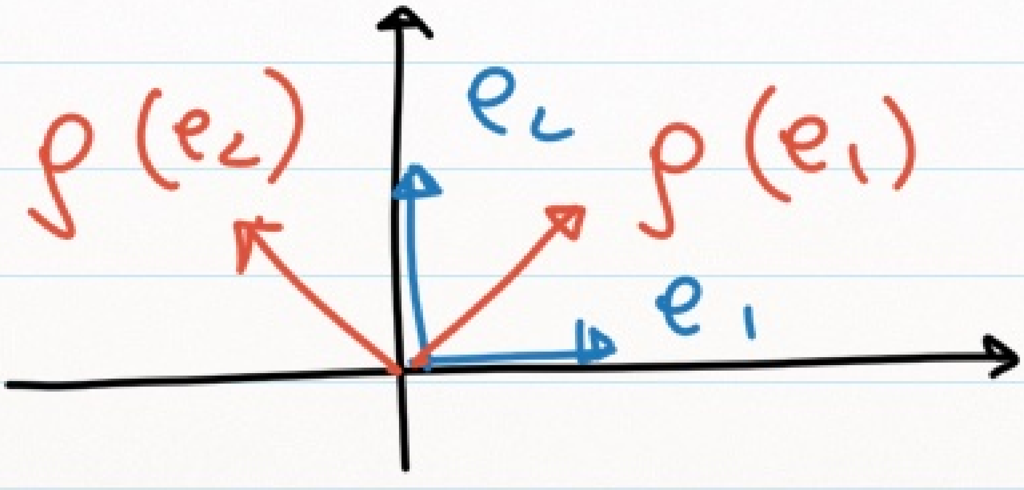
Es:

Facciamo un esempio di elemento di $O(2)$.

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \rho = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \rho(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



Def 5.16: Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo.
Una isometria lineare di V è un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ tale che:

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle .$$

Prop 5.17: Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo e $f \in End(V)$ un endomorfismo.

1) f è una isometria lineare se e solo se $\|v\| = \|f(v)\|$ $\forall v \in V$.

2) se f è un isometria, è anche un isomorfismo.

3) Dati $v, w \in V$, se f è una isometria si ha che:

$$\theta_{v,w} = \theta_{f(v), f(w)}$$

Dim: 1) Se f è una isometria lineare allora

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$$

per ogni $v, w \in V$.
In particolare

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v) \rangle =$$
$$\overset{1}{=} \langle v, v \rangle = \|v\|^2,$$

dunque

$$\|f(v)\| = \|v\|.$$

Supponiamo ora $\|f(v)\| = \|v\|$.
Presi $v, w \in V$ si ha:

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|f(v+w)\|^2 -$$

$$\|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 \Big) =$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$$

$$\overset{!}{=} \langle v, w \rangle .$$

2) Se f è isometria lineare, vale

$$\|v\| = \|f(v)\|$$

per ogni $v \in V$.

Se $f(v) = 0$ allora:

$$0 = \|f(v)\| = \|v\|$$

quindi f è iniettiva. Essendo un endomorfismo, è suriettiva.

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

$$\overset{!}{=} \dim V$$

Quindi è un isomorfismo.

3) $$\theta_{v,w} = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) =$$

$$= \arccos \frac{\langle f(v), f(w) \rangle}{\|f(v)\| \, \|f(w)\|} = \theta_{f(v), f(w)}.$$

$\square$

Prop 5.18: Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ con il prodotto scalare standard. Le isometrie lineari di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente le matrici ortogonali.

Dim: Iniziamo osservando che qualunque applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è del tipo L_A, con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Basta prendere:

$$A = \left(f(e_1) | \dots | f(e_n) \right).$$

Se f e' un'isometria lineare $f = L_A$. Mostriamo che A e' ortogonale.

$$< f(e_i), f(e_j) > = e_i^T e_j$$

$$\overset{|}{=} < A e_i, A e_j > = e_i^T A^T A e_j$$

$$(I_n)_{ij} \overset{|}{=} (e_i^T e_j) = $$

$$\overset{|}{=} (e_i^T A^T A e_j) = $$

$$\overset{|}{=} (A^T A)_{ij}$$

quindi $A^T A$ e' ortogonale. Il viceversa e' ovvio. $\square$

5.3 Matrici simmetriche e diagonalizzabilità

Def 5.19: Data una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$, diciamo che X è simmetrica se:

$$X = X^T.$$

Al contrario è antisimmetrica se:

$$X = -X^T.$$

Def 5.20: Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo. Un endomorfismo $f \in End(V)$ è simmetrico se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$$

per ogni $v, w \in V$.

Prop 5.21: Sia $(V, <,>)$ uno sp. vettoriale euclideo.
Un endomorfismo $f \in End(V)$ e' simmetrico se e solo se esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e' simmetrica.

Dim: Sia f simmetrico e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale.
Poniamo $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.
Per definizione vale:

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k .$$

Si ha che:

$$< f(v_i), v_j > = < v_i, f(v_j) >$$

Da cui:

$$\langle f(v_i), v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k, v_j \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \langle v_k, v_j \rangle$$

$$= a_{ji}$$

$$\langle v_i, f(v_j) \rangle = \langle v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= a_{ij}.$$

Quindi $a_{ij} = a_{ji}$ e A è simmetrica.
Procedendo a ritroso, se supponiamo B ortonormale e A simmetrica:

$$\langle f(v_i), v_j\rangle = a_{ji} = a_{ij}$$

$$= \langle f(v_j), v_i\rangle$$

$$= \langle v_i, f(v_j)\rangle. \quad \square$$

Def 5.22: Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo. Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base ortonormale di autovettori

__Oss:__ Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se esiste $P \in O(n)$:

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

con D diagonale.

Teor 5.23: (Teorema spettrale)

Una matrice / un endomorfismo è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica / simmetrico.

Dim: Omessa.

Useremo il teorema spettrale in varie occasioni.

5.4 Forme bilineari:

Def 5.24: Sia V uno sp. vettoriale.

Una forma bilineare simmetrica è una funzione:

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

1) $B(v,w) = B(w,v) \quad \forall v, w \in V.$

2) $B(av + bw, u) =$
$= aB(v,u) + bB(w,u).$
$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V.$

Es: Un qualunque prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica.

Es: Definisco
$$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - y_1y_2.$$

Questa è una forma bilineare

simmetrica. Osserviamo:

$$B\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 0.$$

Def 5.25: Sia (V, B) uno sp. vettoriale con una forma bilineare simmetrica. Data una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ la **matrice associata a B** è la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(B) \in M_n(\mathbb{R})$$

che ha per termine (i, j) la valutazione $B(v_i, v_j)$.

Es: $(\mathbb{R}^2, B)$

$$B\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = x_1x_2 - y_1y_2.$$

Nella base canonica:

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oss: Data la base $\mathcal{B}$, la matrice associata a $M_{\mathcal{B}}(B)$ è sempre simmetrica, perché la forma è simmetrica.

Prop 5.26: Sia (V, B) dotato di una forma bilineare simmetrica. Siano

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \quad \mathcal{D} = \{w_1 \dots w_n\}$$

due basi.
Allora vale:

$$M_{\mathcal{B}}(B) = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id)^T M_{\mathcal{D}}(B) M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id)$$

Dim: Sia $A = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id)$.
Se il termine generico è a_{ij} sappiamo che:

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} w_k .$$

$$B(v_i, v_j) = B\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} w_k , \sum_{l=1}^{n} a_{lj} w_l\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} B(w_k, w_l)\, a_{lj}$$

$$= \left(A^T \cdot M_{\mathcal{D}}(B) \cdot A\right)_{ij}. \qquad \square$$

Def 5.27: Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono congruenti se esiste una matrice invertibile P :

$$B = P^T \cdot A \cdot P.$$

oss: Basi diverse producono matrici associate a una forma bilineare simmetrica che sono congruenti.

Def 5.28: Sia $(V, \mathcal{B})$ uno sp. vettoriale con una forma bilineare simmetrica. La forma quadratica associata a $\mathcal{B}$ è:

$$q_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q_{\mathcal{B}}(v) := \mathcal{B}(v, v).$$

Es: Nel caso di $\mathcal{B}$ = prodotto scalare, la forma quadratica è la norma.

Es: $V = \mathbb{R}^2$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2 - y_1 y_2 .$$

La forma quadratica e':

$$q_B(x, y) = x^2 - y^2 .$$

Eser: Data B bilineare simmetrica, mostrare che:

$$B(v, w) = \frac{1}{2}\left[q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w)\right]$$

per ogni $v, w \in V$.

Teor 5.29: (Teor di Sylvester)

Sia (V, B) uno sp. vettoriale con una forma bilineare simmetrica.

Esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$

per cui:

$$B(v_i, v_j) = 0 \qquad B(v_i, v_i) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

ovvero:

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dim: Data $\mathcal{D}$ base, poniamo $A = M_{\mathcal{D}}(B)$.

Poiché A è simmetrica, per il Teor 5.23, esiste $P \in O(n)$:

$$A = P^T \cdot \Delta \cdot P$$

con Δ diagonale

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, esiste una base $\mathcal{C} = \{w_1 \dots w_n\}$ tale che:

$$B(w_i, w_i) = \lambda_i \quad 1 \leq i \leq k$$
$$B(w_i, w_i) = 0 \quad i > k$$
$$B(w_i, w_j) = 0 \quad i \neq j.$$

Distinguiamo

$$B(w_i, w_i) > 0 \quad 1 \leq i \leq \ell$$
$$B(w_i, w_i) < 0 \quad \ell+1 \leq i \leq k.$$

Poniamo $v_i = \begin{cases} \dfrac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k \\ w_i & i > k. \end{cases}$

In questa base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ ho:

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Es: $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_2 + x_3^2$$

Se B e' la forma bilineare associata:

$$\underset{A}{M_{\mathscr{C}}(B)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\mathscr{C}$ e' la base canonica.

$$P_A(t) = t(t-1)(t^2-4).$$

Ho 4 autovalori $-2, 0, 1, 2$.
Quindi A è diagonalizzabile a:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

Esiste una base $\mathscr{B}$ in cui:

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma quadratica diventa:

$$q(y_1 \dots y_4) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Def 5.30: Sia (V, B) uno sp. vettoriale con una forma bilineare simmetrica.

Data una base $\mathcal{B}$ di V, la terna di numeri:

$i_+ := \#$ autovalori positivi di $M_{\mathcal{B}}(B)$.

$i_- := \#$ autov. negativi di $M_{\mathcal{B}}(B)$

$i_0 := \#$ autov nulli di $M_{\mathcal{B}}(B)$

si chiama segnatura di B.