

## 5.1 Proiezioni ortogonali e algoritmo di Gram-Schmidt.

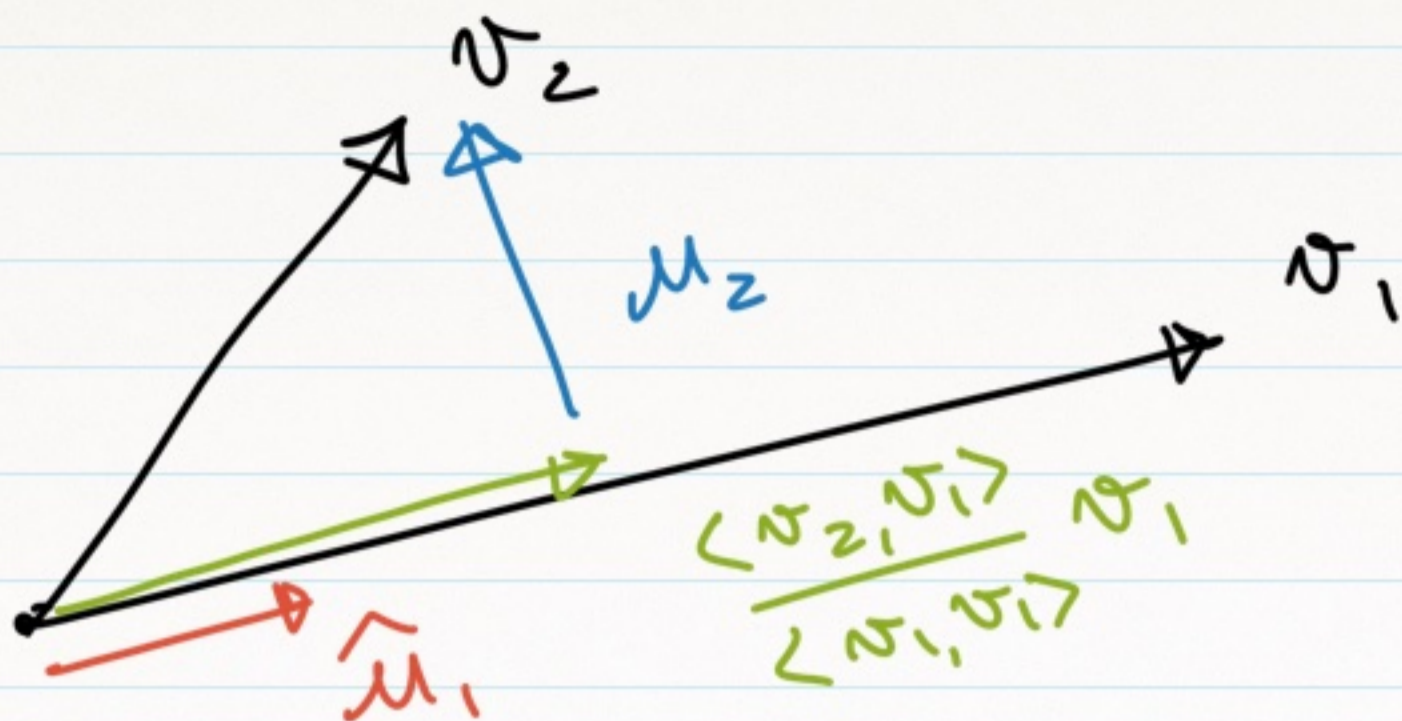
Teor 5.8: Sia  $(V, \langle, \rangle)$  uno sp. vettoriale euclideo. Partendo da una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  è possibile ottenere una base  $\hat{B}$  che è ortonormale.

Dim: Dimostrazione algoritmica = fornisce un metodo per determinarle.

Poniamo  $\hat{u}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ .

Analogamente definiamo:

$$\begin{aligned} u_2 &:= v_2 - \langle v_2, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 = \\ &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 \end{aligned}$$



Poniamo poi  $\hat{u}_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ .

In generale poniamo:

$$u_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \hat{u}_i \rangle \hat{u}_i$$

$$\hat{u}_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}.$$

Es: Prendiamo la base di  $\mathbb{R}^3$  data da:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\hat{\mu}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= v_2 - \langle v_2, \hat{\mu}_1 \rangle \hat{\mu}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{\mu}_2 := \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= v_3 - \langle v_3, \hat{\mu}_1 \rangle \hat{\mu}_1 - \langle v_3, \hat{\mu}_2 \rangle \hat{\mu}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$e \quad \hat{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Def 5.9: Sia  $(V, \langle, \rangle)$  uno sp. vettoriale euclideo

Dato  $U \subseteq V$  un sottosp. vettoriale, il sottospazio ortogonale a  $U$  è definito come:

$$U^\perp := \left\{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \right. \\ \left. \forall u \in U \right\}$$

Eser: Verificare che  $U^\perp$  è un sottospazio vettoriale.

Prop 5.10: Sia  $(V, \langle, \rangle)$  uno sp. vettoriale euclideo.

Dato  $U \subset V$  sottosp. vettoriale

1) Esiste una funzione lineare

$$P_U: V \longrightarrow U$$

che è suriettiva e  $\text{Ker } P_U = U^\perp$ .

$$2) \dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

Dim: Sia  $B = \{u_1, \dots, u_k\}$  base di  $U$ . Possa supporre  $B$  ortogonale grazie al Teor 5.8.

Pongo:

$$P_U: V \longrightarrow U$$

$$P_U(v) := \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$$

Mostriamo che è suriettiva.  
Sia  $u \in U$ . Allora:

$v = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i$  e vale:

$$P_U \left( \sum_{i=1}^k a_i \mu_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i P_U(\mu_i)$$

$$= \sum_{i=1}^k a_i \left( \sum_{j=1}^k \underbrace{\langle \mu_i, \mu_j \rangle}_{\text{"} \mu_i \text{"}} \mu_j \right)$$

$= \mu.$

Dunque su  $U$  ho suriettività  
in quanto  $P_U$  è l'identità.

Mostriamo che  $\text{Ker } P_U = U^\perp$ .

Se  $v \in U^\perp$  allora:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^k \underbrace{\langle v, \mu_i \rangle}_0 \mu_i = 0$$

quindi  $v \in \text{Ker } P_U$ .

Se  $v \in \text{Ker } p_U$  allora

$$0 = p_U(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k.$$

$u_1, \dots, u_k$  base di  $U \Rightarrow$

$$\langle v, u_1 \rangle = \dots = \langle v, u_k \rangle = 0.$$

da cui  $v \in U^\perp$ .

Eser: Verificare l'ultima affermazione.

$$\begin{aligned} 2) \dim U^\perp &= \dim \text{Ker } p_U = \\ &= \dim V - \dim \text{Im } p_U \\ &= \dim V - \dim U. \end{aligned}$$

oss: Vale:  $V = U \oplus U^\perp$ .

Def 5.11: La funzione  $P_U$  definita nel

Teor 5.10 si chiama **proiezione ortogonale** su  $U$ .

Es: Prendiamo  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  con il prodotto scalare standard.

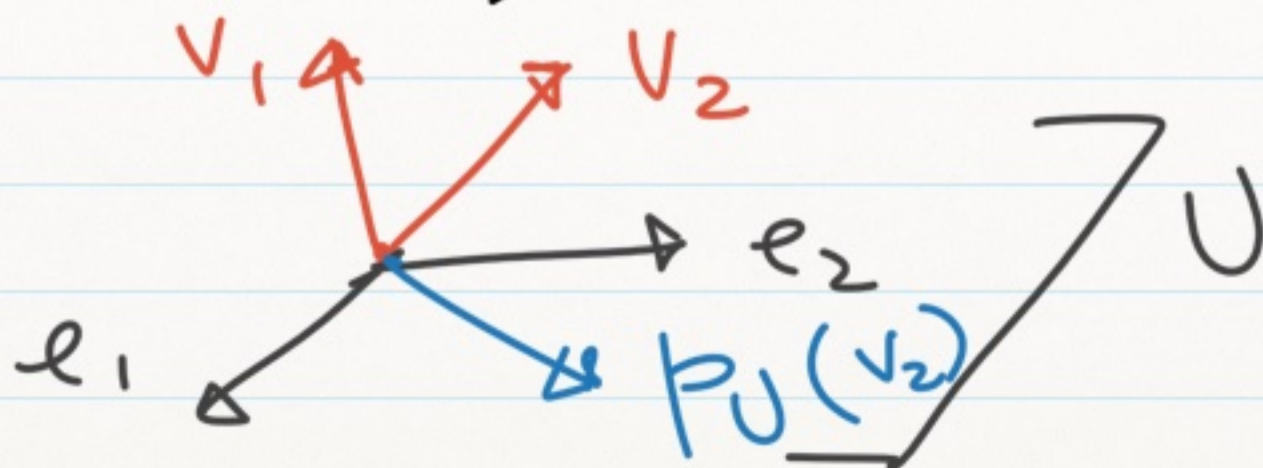
$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_U(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_U(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Es: Calcoliamo in  $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$   
di  $U^\perp$  una base ortogonale  
dove

$$U := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per Teor 5.10 (2) so che:

$$\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 2 = 2.$$

Le equazioni cartesiane di  $U$   
sono date da:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 + x_2$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_3 - x_4.$$

Quindi una base di  $U^\perp$  è:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È ortogonale, basta dividere per la norma ciascun vettore.

## 5.2 Matrici e prodotti scalari

Def 5.12: Sia  $(V, \langle, \rangle)$  sp. vettoriale euclideo.

Dato una base  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ , la matrice associata a  $\langle, \rangle$  rispetto a  $B$  è una matrice

$$M_B(\langle, \rangle) \in M_n(\mathbb{R})$$

che ha nel posto  $(i, j)$  il

prodotto  $\langle v_i, v_j \rangle$ .

Es:  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$  e base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_B(\langle, \rangle) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Oss: Grazie al Teor 5.8  
esiste sempre una base  $\hat{B}$   
ortonormale per  $\langle, \rangle$ ,  
per cui vale:

$$M_{\hat{B}}(\langle, \rangle) = I_{\dim V}.$$

Prop 5.13: Siano

$$B = \{v_1 \dots v_n\} \quad \mathcal{D} = \{w_1 \dots w_n\}$$

due basi ortonormali di uno  
sp. vettoriale euclideo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  
Se

$$A = M_B^{\mathcal{B}}(\text{id})$$

allora  $A^T \cdot A = I_n$ .

Dim: Per definizione vale:

$$w_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i \quad k=1 \dots n.$$

Calcoliamo,

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_\ell \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i, \sum_{j=1}^n a_{j\ell} v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik} a_{j\ell} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{i\ell} \end{aligned}$$

in quanto  $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ie} = (A^T \cdot A)_{ke}$$

$$\langle w_k, w_e \rangle = (I_n)_{ke}.$$

oss: Se  $A$  soddisfa

$$A^T \cdot A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T.$$

Def 5.14 L'esistenza delle  
matrici **ortogonali**  
è:

$$O(n) := \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T \cdot A = I_n \right\}$$

Eser: Mostrare che se  
 $A \in O(n)$  allora  
 $\det A = 1$ .

Eser: Mostrare che se  
 $A, B \in O(n)$ , allora  
 $AB^{-1} \in O(n)$ .

Prop 5.15: Le matrici di  
 $O(2)$  hanno due  
possibili forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Dim: Omesse.