Def 4.3: Sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo con autovalore λ.
L' autospazio associato all'autovalore λ e':

$$V_\lambda := \{ v \in V : f(v) = \lambda v \}$$

Prop 4.4: Sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo.

1) Se λ e' autov, allora V_λ e' un sottospazio vettoriale

2) Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono autovalori distinti con autovettori $v_1, \ldots, v_n$ allora $\{v_1 \ldots v_n\}$ e' lin. indipendente.

Dim: 1) Sia $u, v \in V_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$= \lambda(u+v)$$
$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \lambda(\alpha v).$$

2) Per esercizio con 2 vettori.
~~Facciamo la dim con 3 vettori.~~
~~In generale per induzione.~~

Prendiamo λ, μ, ν con autovettori v, u, w.
Data:

$$av + bu + cw = 0$$

Supponiamo $c \neq 0$. Allora

$$w = -\frac{a}{c}v - \frac{b}{c}u.$$

$$f(w) = \nu w = -\frac{a\nu}{c} v - \frac{b\nu}{c} u$$

$$f(w) = f\left(-\frac{a}{c} v - \frac{b}{c} u\right) = -\frac{a\lambda}{c} v - \frac{b\mu}{c} u .$$

Dovendo essere uguali si ha:

$$-\frac{a\nu}{c} v - \frac{b}{c} \nu u = -\frac{a}{c} \lambda v - \frac{b}{c} \mu u$$

Equivalentemente:

$$a(\nu - \lambda) v + b(\nu - \mu) u = 0$$

Poiché $\nu - \lambda \neq 0 \neq \nu - \mu$, allora $a = b = 0$ e quindi $c = 0$ ↯.

Dom: Come si calcolano gli autovalori di un endomorfismo?

Def 4.5: Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(t) := \det(A - tI_n)$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} (a-t)(d-t) - cb$$

$$\stackrel{!}{=} t^2 - (a+d)t + ad - cb =$$

$$t^2 - \mathrm{Tr}(A)\,t + \det A.$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$
$$= (1-t)^2(2-t).$$

Prop 4.6: Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ coniugate.

Vale:
$$p_A(t) = p_B(t).$$

Dim: Per ipotesi, esiste X invertibile tale che:
$$B = X \cdot A \cdot X^{-1}.$$

$$p_B(t) = \det(B - tI_n) =$$

$$= \det(X \cdot A X^{-1} - tI_n)$$

$$= \det(XAX^{-1} - tX \cdot X^{-1})$$

$$= \det[X(A - tI_n)X^{-1}]$$

Binet

$$= \det X \det(A - tI_n) \det X^{-1}$$

$\det X^{-1} = (\det X)^{-1}$

$$= \cancel{\det} X \det(A - tI_n) \frac{1}{\cancel{\det} X}$$

$$= p_A(t).$$

$\square$

Dato un endomorfismo

$$f : V \longrightarrow V$$

e due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ di V, abbiamo visto:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$$

coniugate

$\Rightarrow$ Fissata una base $\mathcal{B}$ posso definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ come:

$$p_f(t) :\overset{!}{=} \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - t I_n\right)$$

<u>Es:</u> $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \longrightarrow a_1 + 2a_2 X.$$

Chi è $p_D(t)$?

Fissiamo la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

La matrice associata è:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$P_D(t) = t^3.$$

Teor 4.7 (caratterizzazione degli autovalori)

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo. Allora λ e' autovalore se e solo se:

$$P_f(\lambda) = 0.$$

Dim: Se λ e' autovalore di f, allora esiste $v \neq 0$:

$$f(v) = \lambda v.$$

Equivalentemente

$$(f - \lambda \, id_V)(v) = 0$$

cioè

$$v \in Ker(f - \lambda \, id_V).$$

Dunque $f - \lambda \, id_V$ non è iniettiva e quindi non invertibile

Ponendo

$$A := M_B^B(f)$$

si ha che:

$f - \lambda \, id_V$ non invertibile $\Rightarrow$

$A - \lambda I_n$ non invertibile $\Rightarrow$

$(n = \dim V)$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Supponiamo ora che:

$$p_f(\lambda) = p_A(\lambda) = 0.$$

Questo implica

$A - \lambda I_n$ non e' invertibile $\Rightarrow$

$f - \lambda \, id_V$ non e' invertibile $\Rightarrow$

$\exists v \neq 0 : v \in Ker(f - \lambda \, id_V) \Rightarrow$

λ autovalore.

$\square$

Def 4.8: Un endomorfismo $f \in End(V)$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di V composta di soli autovettori per f.

Tale base si chiama **base spettrale**.

Data una base spettrale $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ per f

vale che
$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$
con λ_i autov. opportuno.

Dunque:
$$M^B_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
è DIAGONALE.

<u>oss:</u> Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se coniugata a una matrice diagonale.

<u>C.Es:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = t^2 + 1.$$

Non ha radici reali, dunque non è diagonalizzabile.

<u>Es:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Phi_A(t) = -t(t^2 - 1)$

Ho 3 autovalori distinti

$0, 1, -1.$

So che $\dim V_\lambda \geq 1$ e

$V_0 \oplus V_{-1} \oplus V_1 \subset \mathbb{R}^3$

da cui: $V_0 \oplus V_{-1} \oplus V_1 = \mathbb{R}^3.$

<u>Dom:</u> Come capire quando A è diagonalizzabile?

Sia λ autov di $f: V \longrightarrow V$.
Essendo autovalore, sappiamo

$$p_f(\lambda) = 0.$$

Possiamo quindi scrivere:

$$p(t) = (t - \lambda)^m q(t)$$

dove $q(\lambda) \neq 0$.

Def 4.9: Sia $f \in End(V)$ con autov. λ.
La **molteplicità geometrica** di λ è:

$$m_g(\lambda) := \dim V_\lambda.$$

La **molteplicità algebrica** di λ è:

$m_a(\lambda) =$ il numero di volte che p_f si annulla su $\lambda = m$

con $p_A(t) = (t-\lambda)^m q(t)$.

<u>Es:</u> $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

$$M^B_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui segue:

$m_g(0) = 1$

$m_a(0) = 3$.