Def 6.10: Sia $\mathcal{P}$ uno sp. affine con direzione V.

Dati due sottospazi affini Q_1, Q_2 diciamo che questi sono **incidenti** se $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$. (si intersecano in maniera non banale).

Prop 6.11: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V. Siano Q_1, Q_2 due sottosp. affini con direzioni U_1 e U_2. Se Q_1 e Q_2 sono incidenti, la loro intersezione è un sottosp. affine con direzione $U_1 \cap U_2$.

Dim: Sia $W :\overset{!}{=} \{P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in Q_1 \cap Q_2\}$

Perché:

$$U_1 := \{P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in Q_1\}$$

$$U_2 := \{P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in Q_2\}$$

$W \subseteq U_1 \cap U_2$.

Sia ora $u \in U_1 \cap U_2$.

Preso $P \in Q_1 \cap Q_2$ si ha:

$$P + u \in Q_1 \quad e \quad P + u \in Q_2$$

per definizione, dunque

$$P + u \in Q_1 \cap Q_2$$

e quindi $u = (P+u) - P \in W$.

Questo prova anche la seconda proprietà.

$\square$

6.1 Posizioni reciproche di sottospazi affini in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Studiare le posizioni reciproche di due sottospazi affini significa in primo luogo comprendere se questi sono incidenti o meno

e se non lo sono si cerca di comprendere le direzioni vettoriali associate.
Partiamo dallo studio di rette affini nel piano $\mathbb{R}^2$. Siano:

$$r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

due rette affini. Consideriamo la matrice completa del sistema lineare associato:

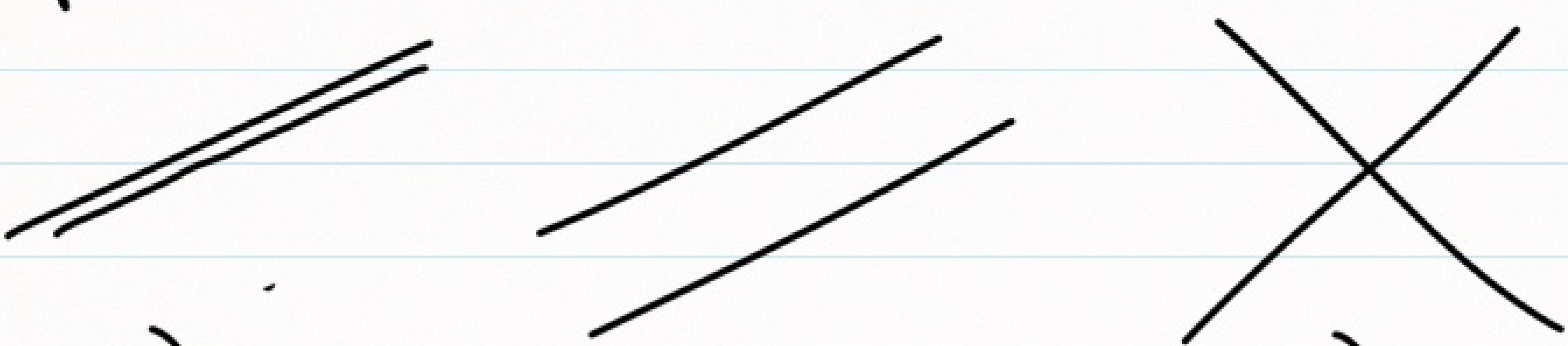
$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

Schematizziamo le varie possibilità:

1) $r(A) = r(A|b) = 1$: le rette sono coincidenti

2) $r(A) = 1 < r(A|b) = 2$: le rette sono parallele (non coincid)

3) $r(A) = r(A|b) = 2$: le rette sono incidenti in un solo punto:



1) 2) 3)

Nel caso di sottosp. di $\mathbb{R}^3$ ho sia rette che piani.

Partiamo studiando 2 piani affini:

$$\Pi_1 : \ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\Pi_2 : \ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

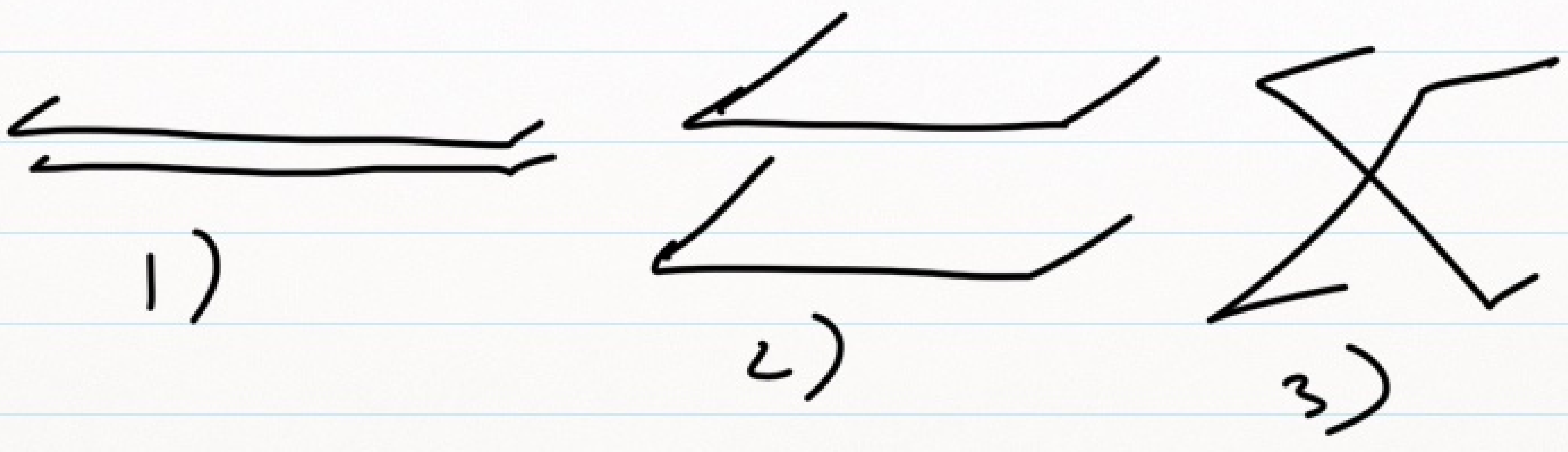
Di nuovo, la matrice completa è:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

1) se $r(A) = r(A|b) = 1$: i piani sono coincidenti

2) se $r(A) = 1 < r(A|b) = 2$: i piani sono paralleli.

3) se $r(A) = r(A|b) = 2$ i piani sono incidenti in una retta.



Es: Dati i piani:

$\Pi_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y = 1 \right\}$

$\Pi_2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\}$

descrivere la loro posizione.

<u>Sol:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Per avere le eq. cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y-x-1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

Quindi $\Pi_2 : x - y + 1 = 0$

Poiché: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$r(A) \neq r(A|b)$ sono paralleli

Passiamo ora al caso di una retta e un piano.

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi: a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

La matrice

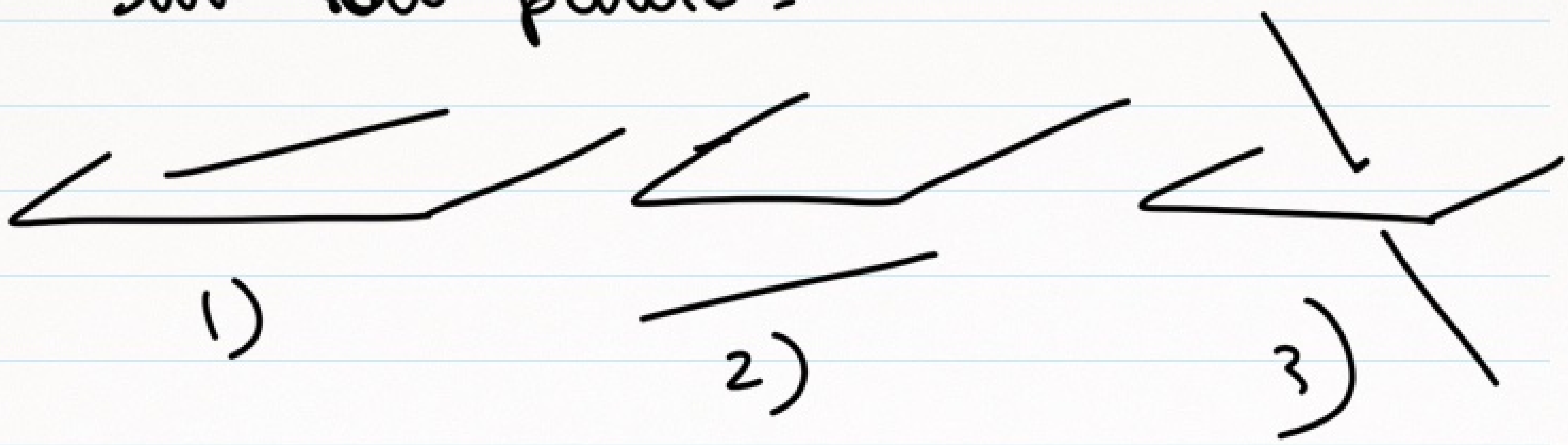
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

ha rango almeno 2, dato che r e' non vuota.

1) $r(A) = r(A|b) = 2$: la retta e' inclusa nel piano.

2) $r(A) = 2 < r(A|b) = 3$: il piano e la retta sono paralleli

3) $r(A) = r(A|b) = 3$: il piano e la retta sono incidenti in un solo punto.



Concludiamo con il caso di due rette.

$$r_1 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Notiamo anche in questo caso che la matrice,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

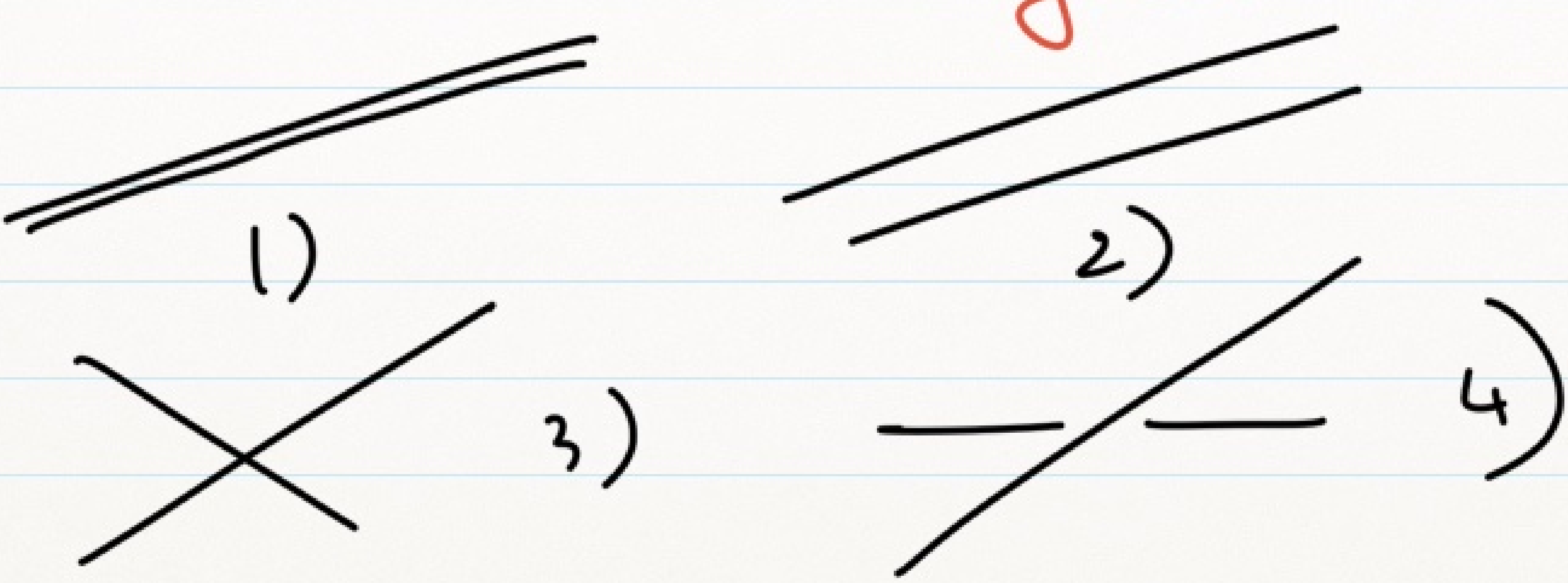
ha rango almeno 2.

1) $r(A) = r(A|b) = 2$: le rette sono coincidenti

2) $r(A) = 2 < r(A|b) = 3$: le rette sono parallele

3) $r(A) = 3 = r(A|b)$: le rette sono incidenti in un punto

4) $r(A) = 3 < r(A|b) = 4$: le rette sono sghembe



Es: Date:

$$r_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$$

darne la posizione.

Sol:
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Riduco a scala la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ -1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -1 & y \\ 2 & x-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+R_1 \\ R_3-2R_1}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & y+z \\ 0 & x-2z-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r_1 \begin{cases} y+z=0 \\ x-2z=1 \end{cases}$$

Per la seconda retta:

$$r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che $\det(A|b) \neq 0$ il rango è 4 e le rette sono sghembe.

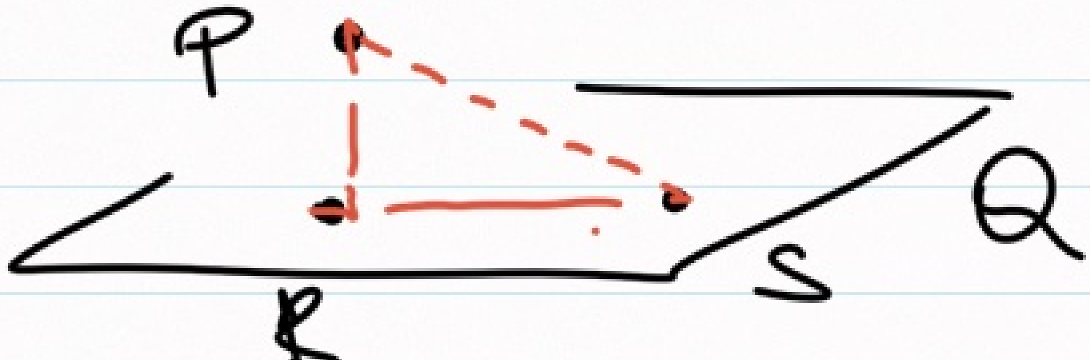
6.2 Spazi affini euclidei

Def 6.12: Uno spazio affine $\mathbb{P}$ con direzione V si dice euclideo se V è dotato di prodotto scalare.

Prop 6.13: Sia $\mathcal{P}$ sp. affine euclideo con direzione V. Dato $Q \subseteq \mathcal{P}$ sottosp. affine e $P \in \mathcal{P}$ esiste un unico punto $R \in Q$ tale che:

$$P - R \in U^{\perp}$$

dove U è la direzione di Q.



Dim: Siano $R_1, R_2 \in Q$:

$$P - R_1,\ P - R_2 \in U^{\perp}.$$

$R_1 - R_2 \in U$ per definizione

$$\underset{\parallel}{(R_1 - P)} + (P - R_2) = \underset{\in U^{\perp}}{(R_1 - P)} - \underset{\in U^{\perp}}{(R_2 - P)}$$

Dunque $R_1 - R_2 \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

e quindi coincidono.

Prendiamo ora $S \in Q$ qualunque.

$$P - S \in V = U \oplus U^{\perp}$$

quindi $P - S \overset{!}{=} u + u^{\perp}$.

Poniamo $R := S + u$.

Vale che:

$$P - R = P - S + S - R \overset{!}{=} u + u^{\perp} - u = u^{\perp}.$$

$\square$

Def 6.14: La funzione:

$$\pi_Q : P \longrightarrow Q$$

si chiama **proiezione ortogonale** su Q.

Oss: Se P è affine euclideo e Q è sottosp. affine.

con direzione U allora:

$$\forall P \in \mathcal{P}: P - \pi_Q(P) = \pi_{U^\perp}(P - S)$$

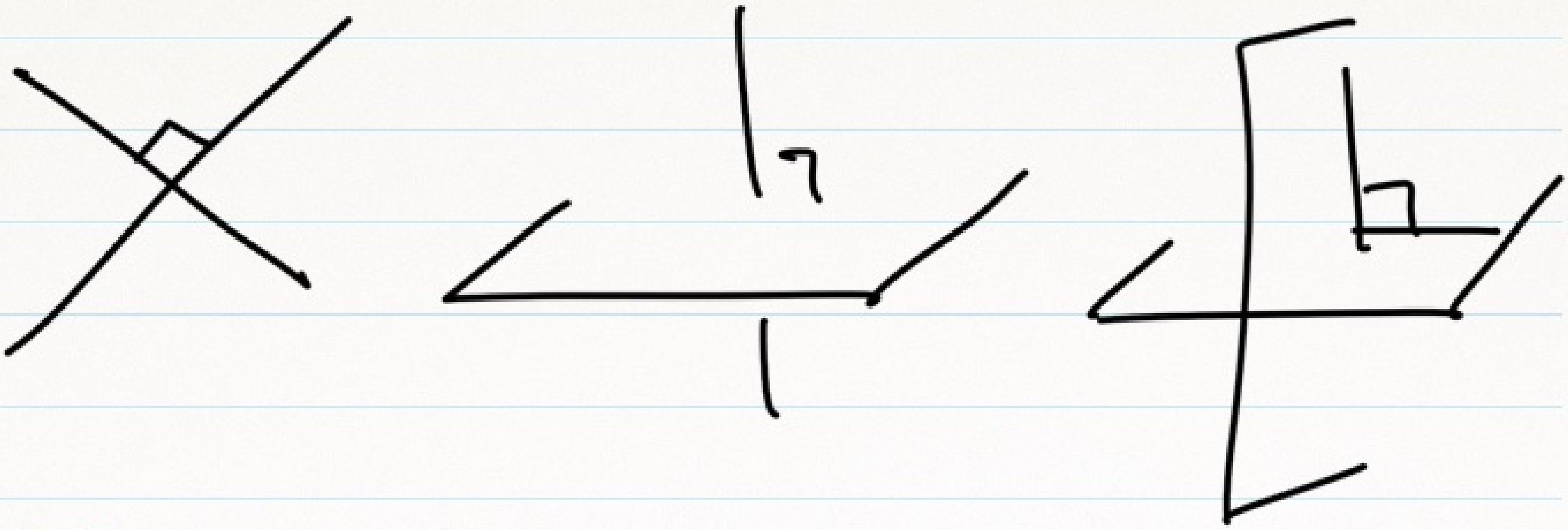
per ogni $S \in Q$.

Oss: Nel caso di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ questi sono naturalmente sp. affini euclidei.

Possiamo dire che due rette r_1, r_2 (in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) sono ortogonali se incidenti e le direzioni sono ortogonali.

Lo stesso vale per una retta e un piano in $\mathbb{R}^3$.

Due piani con direzioni $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sono ortogonali se $U_1^\perp$ e $U_2^\perp$ sono ortogonali.



Fatto 6.15: 1) Data una retta $r \subset \mathbb{R}^2$ e un punto P non su essa, esiste un'unica retta ortogonale a r per P.

2) Lo stesso vale per un piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ e un punto P non su di esso.

3) Data una retta $r \subset \mathbb{R}^3$ e un punto non su di essa esiste un'unica retta complanare a r e P, passante per P e ortogonale a r -

Es: Sia dato

$$H := \{x+y-z=1\}$$

si determini la proiezione ortogonale del punto $P = (1,2,0)$.

Sol: Sappiamo che per P passa un'unica retta ortogonale al sottosp. H.

Osserviamo che H e' parallelo alla sua direzione

$$H_0 := \{x+y-z=0\}.$$

$$x+y-z = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Detto $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si ha che

n e' un vettore ortogonale a H_0 (e quindi a H).

La retta ortogonale a H e passante per P ha equazioni parametriche:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo determinare $r \cap H$.
Cerchiamo $t \in \mathbb{R}$:

$$(1+t) + (2+t) - (-t) = 1$$

$$\Rightarrow 3(1+t) = 1 \Rightarrow t = -2/3.$$

Quindi: $Q := r \cap H =$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

6.3 Distanze in spazi affini euclidei.

Def 6.16: La distanza fra due

punti $P, Q \in \mathcal{P}$ di uno spazio affine euclideo e':

$$d(P,Q) = \| P - Q \| .$$

Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ e' un sottosp. affine:

$$d(P, \mathcal{T}) := \inf_{S \in \mathcal{T}} \{ d(P, S) \}$$

<u>Prop 6.17:</u> Dato $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ sott. affine di uno spazio affine euclideo. Per ogni $P \in \mathcal{P}$:

$$d(P, \mathcal{T}) = d(P, \pi_{\mathcal{T}}(P))$$

<u>Dim:</u> Sia $Q := \pi_{\mathcal{T}}(P)$.

$$d(P, \mathcal{T}) \leq d(P, Q).$$

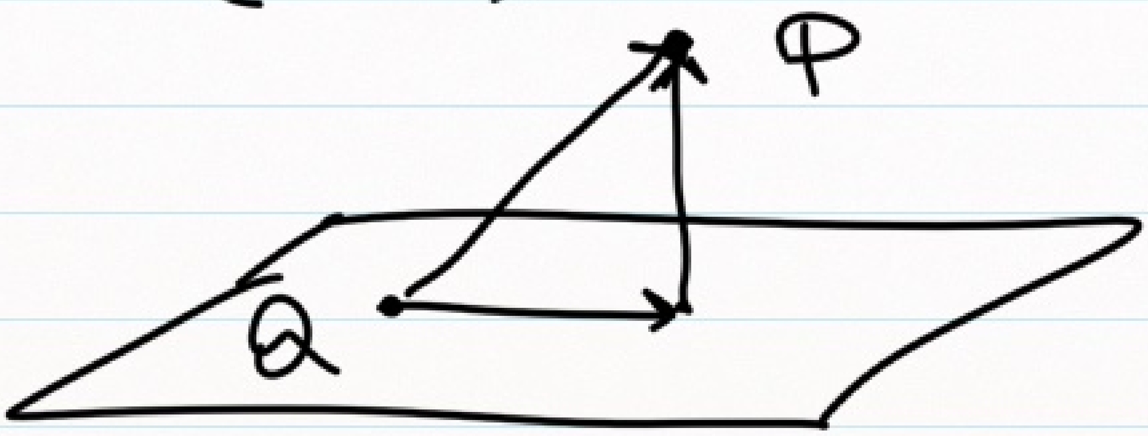
Sia $S \in \mathcal{T}$. Vale:

$$
\begin{aligned}
d(S,P)^2 &= \|S-P\|^2 \\
&= \|S-Q\|^2 + \|Q-P\|^2 \quad (\text{Pitagora}) \\
&= d(S,Q)^2 + d(Q,P)^2 \\
&\geq d(Q,P)^2 .
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad d(S,P) \geq d(Q,P) \quad \Rightarrow$$

$$d(P,\tau) \geq d(Q,P).$$

<u>oss</u>: $d(P,\tau) = \| \pi_{\perp}(P-Q) \|$



Calcoliamo la distanza di un punto di $\mathbb{R}^3$ prima da un piano e poi da una retta.

$$P=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \qquad H=\{ax+by+cz+d=0\}$$

$$\text{e} \quad H_0=\{ax+by+cz=0\}$$

$$d(P,H)=\|\pi_{H_0^\perp}(P-Q)\|$$

con $Q \in H$. Se $Q=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

allora $ax_1+by_1+cz_1=d$.

Ricordiamo $n=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ genera $H^\perp$.

$$\|\pi_{H_0^\perp}(P-Q)\| = \left\| \frac{\langle n, P-Q\rangle}{\langle n,n\rangle}\cdot n \right\|$$

$$= \frac{|\langle n, P-Q\rangle|}{\|n\|} =$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Formula: $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$H = \{ax + by + cz + d = 0\}$$

$$d(P,H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

<u>Es:</u> $H = \{x + y - 2z = 1\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(P,H) = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$