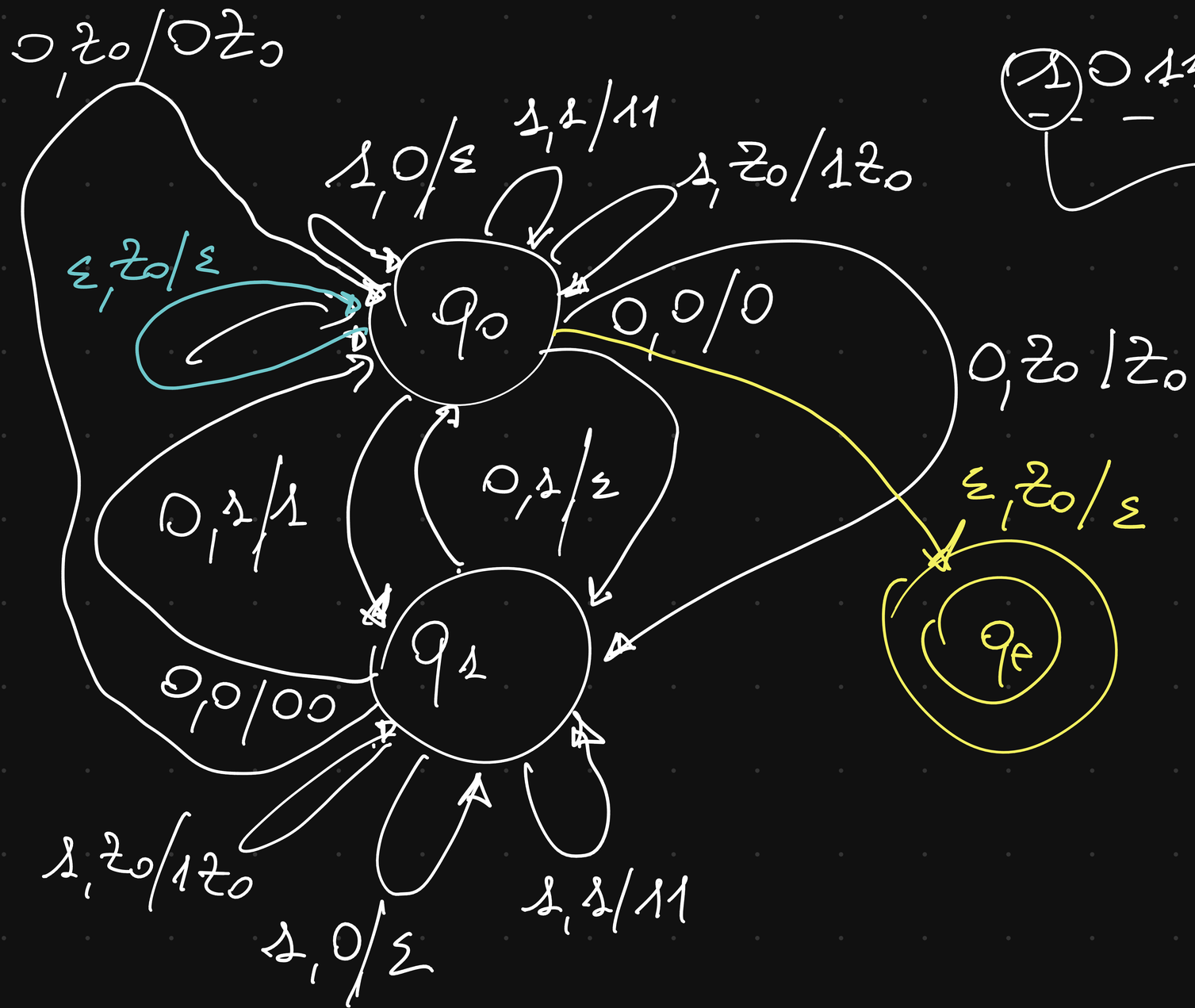
Descrivere un PDA che riconosce il linguaggio delle parole in Σ_B^* che contengono un numero di 0 che è il doppio del numero di 1

$$\frac{\#_0}{2} = \#_1$$

$$\left\lfloor \frac{\#_0}{2} \right\rfloor \qquad \#_0 - \left\lfloor \frac{\#_0}{2} \right\rfloor \cdot 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 & \#_0 \text{ è pari} \\ 1 & \#_0 \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\left\lfloor \frac{\#_0}{2} \right\rfloor - \#_1 \longrightarrow \text{pila}$$

$\longrightarrow$ stati



→ pile vuoto

→ stati accettanti

Equivalenza fra PDA con stati accettanti e PDA con pile vuota

Configurazione di PDA (q, w, α) $\quad w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$

$$(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash (q_2, w_2, \alpha_2)$$

Se il PDA passa da (q_1, w_1, α_1) a (q_2, w_2, α_2) con una singola transizione

$w_1 = a x_1 \quad \alpha_1 = b \gamma_1$ $\quad \delta(q_1, a, b)$ contiene la coppia (q_2, γ_2) e

$w_2 = x_1$ e $\alpha_2 = \gamma_2 \gamma_1$

$$(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash^{*} (q_2, w_2, \alpha_2)$$

Se il PDA passa da (q_1, w_1, α_1) a (q_2, w_2, α_2) con un numero arbitrario di transizioni

$$(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash^{*} (q_1, w_1, \alpha_1)$$

Proprietà

Se $(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash^* (q_2, w_2, \alpha_2)$

Allora $(q_1, w_1 w, \alpha_1 \beta) \vdash^* (q_2, w_2 w, \alpha_2 \beta)$

per ogni $w \in \Sigma^*$

e per ogni $\beta \in \Gamma^*$

Proprietà

Se $(q_1, w_1 w, \alpha_1 \beta) \vdash^* (q_2, w_2 w, \alpha_2 \beta)$

Allora $(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash^* (q_2, w_2, \alpha_2)$

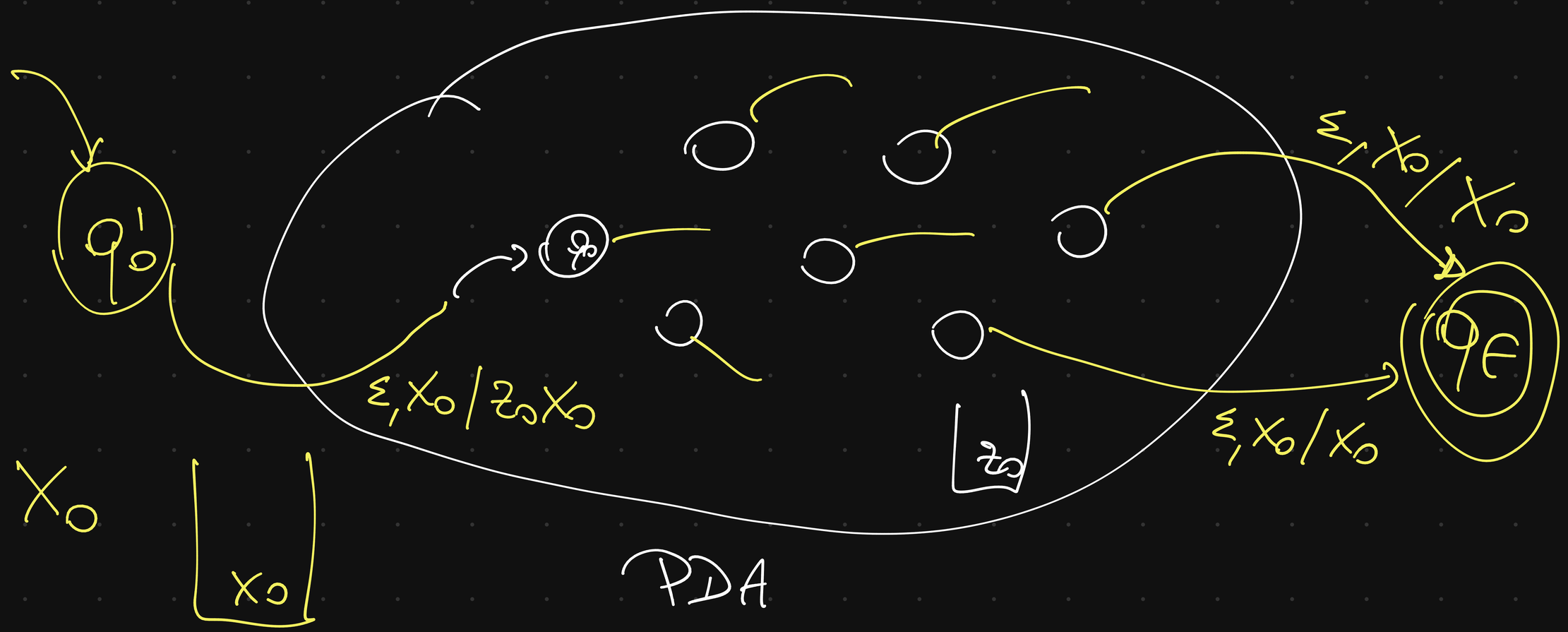
per ogni $w \in \Sigma^*$

e per ogni $\beta \in \Gamma^*$

Solo se tutte le configurazioni intermedie hanno la forma $(\cdot, \cdot, \alpha_i \beta)$

Sia PDA con N(PDA) il linguaggio che accetta con pila vuota

Costruiamo PDA_1 tale che $L(PDA_1) = N(PDA)$



Sia $w \in N(PDA)$, ovvero $(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{PDA}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, \varepsilon)$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{PDA}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0', w, X_0) \vdash (q_0, w, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0', w, X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0) \underset{PDA_1}{\vdash} (q_f, \varepsilon, X_0)$$

Sia $w \in L(PDA_1)$, ovvero $(q_0', w, X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_f, \varepsilon, \cdot)$

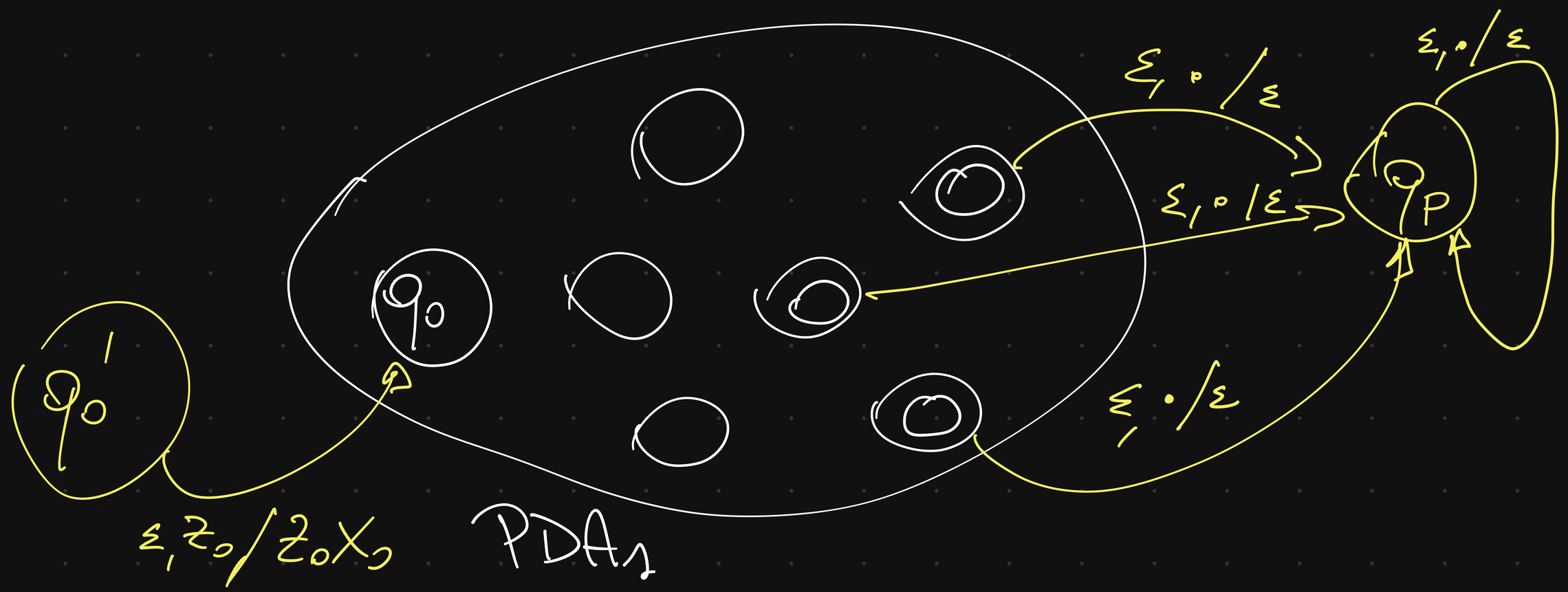
$$\Rightarrow (q_0', w, X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0) \underset{PDA_1}{\vdash} (q_f, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0', w, X_0) \underset{PDA_1}{\vdash} (q_0, w, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, X_0) \underset{PDA_1}{\vdash} (q_f, \varepsilon, X_0)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{PDA_1}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{PDA}{\vdash}} (q_i, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow w \in N(PDA)$$

Sia PDA_1 un automa che accetta con stato accettante, costruiamo un automa PDA che accetta con pila vuota e tale che

$$L(PDA_1) = N(PDA)$$