CAPITOLO 1: SISTEMI LINEARI

1.1 Introduzione

<u>Assunzione</u>: in questo corso lavoreremo per lo più su $\mathbb{R}$, qualche volta in $\mathbb{C}$.
In generale si può lavorare con oggetti più generali che si chiamano campi.

Def 1.1: Un'equazione nelle **incognite** $x_1, \dots, x_k$ con **coefficienti** $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{R}$ si dice **lineare** se le incognite non presentano esponenti di grado superiore a 1 e non ci sono prodotti misti:

$$a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = b.$$

Se b l'equazione si dice **omogenea**.

Una lista di numeri reali $(s_1, \dots, s_k)$ e' una soluzione se soddisfa:

$$a_1 s_1 + \dots + a_k s_k = b.$$

Es: L' equazione

$$3x - y + 2z = 1$$

e' un' eq. lineare non omogenea con 3 incognite. La tripla $(1, 2, 0)$ e' una soluzione.

$$3 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 0 = 1$$

C.Es: L' equazione

$$3x^2 + 2y^2 - 6xy = 0$$

non e' lineare.

Il dato di m equazioni in n incognite da risolvere contemporaneamente si dice sistema lineare.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se $b_1 = \dots = b_m = 0$ il sistema si dice omogeneo.

<u>Es:</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

è un sistema privo di soluzioni.

<u>Es:</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Poiché la seconda equazione è 2 volte la prima, una soluzione della seconda eq. lo è anche della prima.
L'eq: $x_1 + x_2 = 3$ ha infinite soluzioni e dunque anche il sistema.

Es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione data da $(2, 1)$.

Def 1.2: Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

è equivalente a $x_1 + x_2 = 3$.

1.2 Matrici e sistemi lineari

Def 1.3: Dati $m, n \in \mathbb{N}$, una matrice con m righe e n colonne è una tabella contenente in ogni posizione un numero del campo (nel nostro caso reale, qualche volta complesso).

Es: Una matrice con 2 righe e 3 colonne è:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se il numero di righe e il numero di colonne coincidono diciamo che la matrice è quadrata.

Es: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Notazione: Denotiamo con:

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{matrici con} \\ \text{m righe e} \\ \text{n colonne} \end{array} \right\}$$

$$M_m(\mathbb{R}) :\overset{!}{=} M_{m,m}(\mathbb{R})$$

Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e una coppia di naturali:

$$1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

l'elemento di posto (i,j) e' il numero in riga i e colonna j.

Se $a_{i,j}$ è tale elemento, scriviamo formalmente:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Def 1.4: Due matrici

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$B \in M_{\ell,s}(\mathbb{R})$$

sono uguali se:

1) $m = \ell$, $n = s$
2) $a_{i,j} = b_{i,j}$ $\quad \forall \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n. \end{array}$

Def 1.5: Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
$b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

\# colonne A = \# righe di b

Il prodotto riga per colonna

$C = A \cdot b$ è una matrice

$$C \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

il cui termine $(i, 1)$ è:

$$c_{i,1} \overset{!}{:=} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,1}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C := A \cdot b = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Torniamo a un generico sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Questo sistema equivale a:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ponendo:

$$A = (a_{ij}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

•

Possiamo scrivere il sistema come:

$$Ax = b.$$

Def 1.6: La matrice A si dice **matrice dei coefficienti**.

La matrice che ottengo affiancando A con b, ovvero:

$$(A \mid b)$$

si dice **matrice completa** del sistema.

Es:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

si può scrivere come $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice completa e':

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Def 1.7 Una matrice si dice **ridotta a scala per righe** se:

1) le righe nulle (ogni termine $= 0$) sono in fondo alla matrice.

2) il primo elemento $\neq 0$ della riga i-esima si trova più a destra del primo elemento $\neq 0$ della riga $(i-1)$-esima. Questo vale per ogni riga.

Visivamente abbiamo:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

<u>Es:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>C.Es:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Def 1.8:</u> Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ridotta a scala per righe.
Il primo termine non nullo da sinistra di una riga si chiama pivot.

Si chiama **rango per righe** di una matrice ridotta a scala il numero di pivot.
Denotiamo il rango con $r(A)$.

Es: Prendiamo $A \in M_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I pivot di A sono $1, -1, \frac{1}{2}$.
Il rango di A è:

$$r(A) = 3.$$

oss: Il rango di $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Soddisfa:

$$r(A) \leq m, n.$$

Def 1.9: Dato un sistema lineare in forma matriciale

$$Ax = b$$

Diciamo che il sistema è **ridotto a scala** se la matrice completa è ridotta a scala per righe.