## Teor 4.10: (Teor di dominazione)

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ con autovalore $\lambda$. Vale:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq \dim V.$$

**Dim:** Poniamo $m_g(\lambda) = k$
$m_a(\lambda) = \ell$.

Per assurdo supponiamo $k > \ell$.
Prendiamo $\mathcal{B}_\lambda := \{v_1 \dots v_k\}$ una base dell'autospazio $V_\lambda$.
Se necessario, la completiamo a una base di $V$:

$$\mathcal{B} := \{v_1 \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Notiamo che si ha: $f(v_i) = \lambda v_i$ per $1 \leq i \leq k$.

La matrice associata è:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & & \\ 0 & \lambda & \cdots & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda & \\ \hline & & 0 & & B \end{array}\right)$$

Da questo segue:

$$P_f(t) = (\lambda - t)^k \det(B - \lambda I_{n-k})$$
$$\overset{!}{=} (\lambda - t)^k Q(t).$$

da cui $P_f$ si annulla su $\lambda$ precisamente $k$ volte $> \ell$ volte.

<u>Dom</u>: Possiamo usare le molteplicità per stabilire quando $f$ è

diagonalizzabile?

**Teor 4.11:** (Criterio di diagonalizzabilità)

Sia $f \in End(V)$.
Allora $f$ è diagonalizzabile se e solo se:

1) Possiamo scrivere $P_f$ in un prodotto di polinomi del tipo:

$$P_f(t) := \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}$$

2) $n_i = m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

**Dim:** Supponiamo che, dato $f \in End(V)$, valgano 1) e

2). Si ha che:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}$$

con $n_i = m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

Il grado del polinomio è:

$$\dim V = n = n_1 + \dots + n_k .$$

Detto: $U = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

sottospazio di $V$, grazie alla formula di Grassmann

$$\dim U = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i = n .$$

Dunque $U = V$ e prendendo l'unione delle basi di ciascun $V_{\lambda_i}$ ho una base spettrale di $V$. Quindi $f$ diagonalizzabile.

Viceversa, se $f$ è diagonalizzabile, ammette una base spettrale

$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots \dots v_n\}.$$

Di certo vale:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autov. distinti.
Supponiamo che la base $\mathcal{B}$ sia tale che:

$v_1 \dots v_{n_1}$ base di $V_{\lambda_1}$

$v_{n_1+1}, \dots, v_{n_1+n_2}$ base di $V_{\lambda_2}$

...

e così via. Vale:

$$\dim V_{\lambda_i} = n_i \qquad i = 1 \dots k$$

Scrivendo $M^B_B(f)$

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{cccccc}
\lambda_1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & \\
 & & & \lambda_2 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \lambda_2 \\
 & & & & & & \ddots
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} n_1 \\ \\ \\ n_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

da cui:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{n_i}$$

e $m_a(\lambda_i) = n_i$

**Cor 4.12:** Se $f \in End(V)$ ha $n$ autovalori distinti, con $n = \dim V$, allora è diagonalizzabile.

**Dim:** Siano $\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori. Deve valere:

$$P_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \cdots (\lambda_n - t)$$

e dunque $m_a(\lambda_i) = 1$ per $i = 1 \dots n$.
Il Teor 4.10 ci dice che:

$$1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) = 1.$$

quindi

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 1$$

e $f$ è diagonalizzabile per Teor 4.11. $\square$

**Eser:** Sia $A$ una matrice quadrata di ordine $n$ invertibile.

1) Mostrare che 0 non è autovalore di $A$.

2) Dedurre che gli autovalori di $A$ sono invertibili.

3) se $A$ diagonalizzabile allora mostrare che $A^{-1}$ è diagonalizzabile.

## Riepilogo 4.13 (Algoritmo di diagonalizzazione)

Sia $f \in End(V)$. Per capire se $f$ è diagonalizzabile:

1) si fissa una base $\mathcal{B}$ di $V$ e si calcola

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f).$$

·

2) Si calcola il polinomio caratt.:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{n_i}$$

e, SE POSSIBILE, lo scrivo in forma di prodotto.

3) Calcolo:

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n) = m_i$$

Se $m_i = n_i$ per $i = 1 \dots k$, $f$ è diagonalizzabile.

4) Se lo è determino una base di ciascun autospazio:

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1) $p_A(t) = \det(A - tI_3)$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-t & 2 & 4 \\ 2 & -t & 2 \\ 4 & 2 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$= -(t+1)^2(t-8).$$

Gli autovalori sono $-1, 8$.

$m_a(-1) = 2$, $m_a(8) = 1$.

Vediamo se $m_a(-1) = m_g(-1)$ e $m_a(8) = m_g(8)$.

La seconda condizione vale per forza.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Poichè $r(A+I_3)=1$ si ha:

$$\dim \operatorname{Ker}(A+I_3)=2.$$

Quindi

$$m_a(-1)=m_g(-1)=2.$$

e $A$ è diagonalizzabile.

Vogliamo determinare una base spettrale.

<u>Base di $V_8$:</u>

$$\operatorname{Ker}(A-8I_3)=$$

$$=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

ha base $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Base di $V_{-1}$:

$$\ker(A + I_3) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = \{ 2x + y + 2z = 0 \}$$

ha base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

## 5 PRODOTTI SCALARI E SPAZI EUCLIDEI

**Def 5.1:** Sia $V$ sp. vettoriale. Data una funzione

$$\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

supponiamo soddisfi le seguenti proprietà:

1) $\langle , \rangle$ è simmetrica, cioè:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V$$

2) $\langle , \rangle$ è bilineare, cioè:

$$\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$
$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall u, v, w \in V$

3) $\langle , \rangle$ è positiva, cioè:

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e se $\langle v, v \rangle = 0$ deve valere $v = 0$.

Una funzione simmetrica, bilineare e positiva si chiama prodotto scalare su $V$. La coppia $(V, \langle , \rangle)$ si chiama sp. vettoriale euclideo.

Es Dato $V = \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

con $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Si chiama prodotto scalare standard.

<u>Es:</u> $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$.

$$\langle P, Q \rangle :\overset{!}{=} \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

<u>Es:</u> $V = M_2(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y \rangle := \operatorname{Tr}(X^T \cdot Y)$$

<u>Eser:</u> Verificare che i 3 esempi

precedenti sono prodotti scalari.

**Def 5.2:** Dato un sp. vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ e $v \in V$, la **norma** di $v$ è:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Es:** Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ con $\langle v, w \rangle = v^T \cdot w$.
Preso $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ha:

$$\|v\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

La norma è la lunghezza di $v$ rispetto a $\langle , \rangle$.

**Prop 5.3:** Dato uno sp. vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ vale:

$$\langle v, w \rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$$
$\forall v, w \in V$.

Dim: $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle$

$= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle$. $\square$

Prop 5.4: Dato uno sp. vett. euclideo $(V, \langle , \rangle)$ vale:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

$\forall v, w \in V$.

Dim: Se $w = 0$ non devo fare niente.
Supponiamo $w \neq 0$.

Definiamo:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(t) := \| v - tw \|^2.$$

$$f(t) = \|v\|^2 - 2t\langle v, w\rangle + t^2 \|w\|^2.$$

$$\frac{df}{dt} = -2\langle v, w\rangle + 2t\|w\|^2.$$

$$\frac{df}{dt} \geq 0 \quad \text{se} \quad t \geq \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

Posto $t_0 = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$ si ha

$$f(t_0) = \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle}$$

Poiché $f(t) \geq 0$ si ha

$$f(t_0) \geq 0 \Rightarrow \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \geq 0$$

$\square$

**Prop 5.5:** Sia $(V, <,>)$ uno sp. vettoriale euclideo.

1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

2) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$:
$\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$.

3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
$\forall\, v, w \in V$.

**Dim:** 1), 2) per esercizio.

3) $$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2<v,w>$$
$$\overset{\text{Prop 5.4.}}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\|$$
$$\overset{!}{=} (\|v\| + \|w\|)^2.$$

$\square$

Osserviamo che, se $w, v \neq 0$,

la condizione

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

è equivalente a:

$$\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

cioè:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

**Def 5.6!** Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo.

Dati $v, w \in V$, il loro angolo è definito come:

$$\theta_{v,w} := \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\| \cdot \|v\|}.$$

Equivalentemente:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos\vartheta_{v,w}.$$

<u>Es:</u> Prendiamo $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = 1 \qquad \|w\| = \sqrt{2}$$

$$\langle v, w \rangle = -1$$

$$\Rightarrow \vartheta_{v,w} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

<u>Def 5.7:</u> Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo.

Due vettori $v, w \in V$ si dicono **ortogonali** se:

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Si dicono ortonormali se

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad e \quad \|v\| = \|w\| = 1.$$

Una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ si dice ortogonale se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

Una base $\mathcal{B}$ si dice ortonormale se:

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j \quad -$$