

Prop 3.5

Sia $f: V \rightarrow W$
un' applicazione lineare

1) Se $\{v_1 \dots v_k\}$ generano V , allora
 $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ generano
 $\text{Im } f$.

2) Se $\{v_1 \dots v_k\}$ sono tali che
 $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ è un sistema
indipendente, allora $\{v_1 \dots v_k\}$
è indipendente.

Dim: 1) Sia $w \in \text{Im } f$. Allora
 $\exists v \in V : f(v) = w$.
Poiché $v_1 \dots v_k$ generano si ha:
$$v = \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

Dunque:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^k a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i f(v_i)$$

quindi $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ generano $\text{Im} f$.

2) Consideriamo

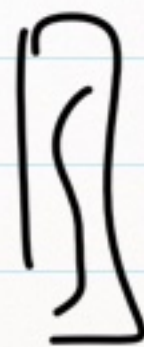
$$\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0$$

Applicando f si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f\left(\sum_{i=1}^k a_i v_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) \end{aligned}$$

Perché $\{f(v_1) \dots f(v_k)\}$ sono ind.
si ha $a_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$.

Prop 3.6: Sia $f: V \rightarrow W$
app. lineare.



1) f iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$
 $\Leftrightarrow \dim \text{Ker} f = 0$

$$2) f \text{ suriettiva} \Leftrightarrow \text{Im} f = W$$

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im} f = W.$$

Dim: 1) Supponiamo f iniettiva.
Dato $v \in \text{Ker} f$ si ha

$$f(v) = 0 = f(0).$$

Per iniettività, deve avere:

$$v = 0 \Rightarrow \text{Ker} f = \{0\}.$$

Se $\text{Ker} f = \{0\}$, consideriamo
 $v_1, v_2 \in V$ tali che:

$$f(v_1) = f(v_2).$$

Per linearità:

$$0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2).$$

Dato che $\text{Ker} f = \{0\}$, si ha:

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

L'equivalenza

$$\text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0$$

segue dalle definizioni.

2) Esercizio.

Oss: Per svolgere l'esercizio osservare che se

$$W \subseteq V \text{ s.v. allora } \dim W \leq \dim V$$

Domanda: Come si costruiscono le applicazioni lineari?

Teor 3.7: (Esistenza e unicità dell'estensione)

Dati V, W sp. vettoriali,
sia $\{v_1, \dots, v_n\} = B$ una base di V
e $\{w_1, \dots, w_n\}$ un insieme qualunque di vettori di W .

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che:

$$f(v_i) = w_i; \forall i = 1 \dots n$$

Tale f si chiama **estensione lineare**.

Dim: Dato $v \in V$, $\exists! a_i$:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

poiché B è base di V . Poniamo:

$$f(v) := \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

Unicità: Siano $f_1, f_2: V \rightarrow W$ due app. lineari tali che:

$$f_1(v_i) = w_i \quad f_2(v_i) = w_i \quad \forall i$$

Dato $v \in V$ con $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$
si ha:

$$\begin{aligned} f_1(v) &= \sum_{i=1}^n a_i f_1(v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i w_i = \sum_{i=1}^n a_i f_2(v_i) \\ &= f_2(v). \end{aligned}$$

Esistenza: Basta far vedere
che se $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$
la funzione:

$$f: V \rightarrow W, \quad f(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

è lineare.

Dati

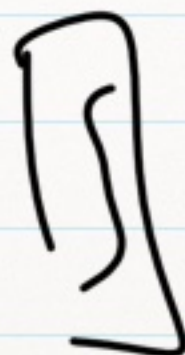
$$u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$$

Si ha:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i\right) \\ &\stackrel{!}{=} f\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) v_i\right) = \\ &\quad \text{definizione di } f \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) w_i = \sum_{i=1}^n a_i w_i + \sum_{i=1}^n b_i w_i \\ &\stackrel{!}{=} f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha a_i v_i\right) \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^n \alpha a_i w_i = \alpha f(v). \end{aligned}$$



Teor 3.8: (Formule dimensionale
o di nucleo più
range)

Sia $f: V \rightarrow W$ un' app. lineare.
Valere:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Dim: Sia $\mathcal{D} := \{v_1, \dots, v_k\}$
una base del nucleo.

Grazie al Teor di completamento,
possiamo estendere \mathcal{D} a una
base di V , precisamente:

$$\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Basta mostrare che

$$\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$$

è una base di $\operatorname{Im} f$.

Osserviamo che per la Prop 3.5 i vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ generano $\text{Im} f$.
(in quanto $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono nulli).

Mostriamo che sono lin. indep.

$$0 = \sum_{i=k+1}^n a_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^n a_i v_i\right)$$

Quindi $\sum_{i=k+1}^n a_i v_i \in \text{Ker} f$,

da cui:

$$\sum_{i=k+1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k a_i v_i - \sum_{i=k+1}^n a_i v_i = 0$$

Poiché $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ho che $a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ quindi $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono indipendenti.



Prop 3.9 Siano $f: V \longrightarrow W$
 $g: W \longrightarrow U$
due applicazioni lineari. La
composizione:

$g \circ f: V \longrightarrow U$ è lineare.

Dim: Prendiamo $v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_1 + v_2) &= g(f(v_1 + v_2)) = \\ &= g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + \\ &+ g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha v_1) &= g(f(\alpha v_1)) = \\ &= g(\alpha f(v_1)) = \alpha (g \circ f)(v_1).\end{aligned}$$

Def 3.10: Sia $f: V \longrightarrow W$
un'app. lineare.

Diciamo che f è **invertibile** se
esiste una funzione LINEARE

$$g: W \longrightarrow V$$

Tale che: $g \circ f = \text{id}_V$

$$f \circ g = \text{id}_W.$$

La funzione $g = f^{-1}$ si dice **inversa**.
Se f è invertibile, V e W si
dicono **isomorfi** e f si chiama
isomorfismo.

Teor 3.11 (Teor di isomorfismo)

Siano V, W sp. vettoriali.

V, W sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Dim: Supponiamo V, W siano isomorfi.

Allora esiste $f: V \rightarrow W$
lineare e invertibile.

In particolare f è iniettiva
e suriettiva.

Dunque; per Prop 3.6:

$$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \quad \dim \operatorname{Im} f = W.$$

Usando la formula dimensionale
(Teor 3.8) vale:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \\ &= 0 + \dim W = \dim W. \end{aligned}$$

Viceversa se V, W hanno la stessa dimensione allora esistono:

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

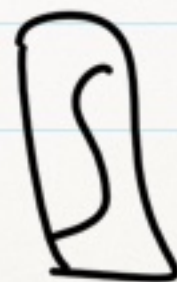
$\mathcal{D} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W ,

Ponendo $f(v_i) = w_i$ e considerando l'estensione lineare del Teor 3.7 si ha:

$f: V \longrightarrow W$ con $f(v_i) = w_i$.

Questo è l'isomorfismo richiesto. Basta considerare come unversa l'estensione:

$g: W \longrightarrow V$ con $g(w_i) = v_i$.



Es: (Importante)

Date una base $B = \{v_1 \dots v_n\}$
di V la funzione:

$$F_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n \quad F_B(v) = [v]_B$$

è un ISOMORFISMO.

Cor 3.12: Ogni spazio vettoriale V
è isomorfo a
 $\mathbb{R}^{\dim V}$.