Domanda: Come si legano matrici e applicazioni lineari?

Prendiamo

V sp. vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$

W sp. vettoriale con base $\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_m\}$

Prendiamo una applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

Poiché $\mathcal{D}$ è una base di W, il vettore $f(v_1)$ può scriversi come:

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

con $a_{i1} \in \mathbb{R}$.

Lo stesso vale per un qualunque

vettore v_k della base $\mathcal{B}$.
Precisamente:

$$f(v_k) = a_{1k} w_1 + \dots + a_{mk} w_m.$$

Def 3.19: Sia data $f: V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ base di V e $\mathcal{D} = \{w_1 \dots w_m\}$ base di W.
La matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ e' la matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

il cui termine (i,j) e' il coefficiente di $f(v_i)$ rispetto al vettore w_j.

Eser: Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ la traccia di A e' definita come:

$$\operatorname{Tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1) Mostrare che:

$$\operatorname{Tr} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e' lineare.

2) Calcolare $\dim \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

3) Determinare una base di $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ per $n = 3$.

Es: $\operatorname{Tr} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow a + d$$

Fissiamo

$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$\mathcal{D} = \{1\}$

$\operatorname{Tr} E_{11} = \operatorname{Tr} E_{22} = 1$

$\operatorname{Tr} E_{12} = \operatorname{Tr} E_{21} = 0$

Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(\operatorname{Tr}) = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

<u>Es:</u> $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longrightarrow a_1 + 2a_2 x$$

Scegliamo $\mathcal{B} = \mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$.

$D\,1 = 0$

$D\,x = 1$ da cui segue che:

$D\,x^2 = 2x$

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def 3.20: Data $id_V : V \longrightarrow V$ con basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, la matrice:

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

si chiama matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$.

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$$\mathcal{D} = \{1 + X, X + X^2, X^2\}$$

$$id(1) = 1 = a_0(1+X) + a_1(X+X^2) + a_2 X^2$$

$$\Rightarrow 1 = a_0 + (a_0 + a_1)X + (a_1 + a_2)X^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1. \end{cases}$$

Analogamente per X, X^2 si ottiene:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'idea e' che $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$ traduce f in matrice. Che significa?

Poniamo:

$$\mathrm{Hom}(V,W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$$

Possiamo definire:

$$f, g : V \xrightarrow{\text{lineari}} W, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(v) :\overset{!}{=} f(v) + g(v)$$

$$(\alpha f)(v) \overset{!}{=} \alpha f(v)$$

Questo determina una struttura di spazio vettoriale su $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Teor 3.21: Siano

V sp. vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$
W " " " " $\mathcal{D} = \{w_1 .. w_m\}$

Ho una funzione:

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$f \longrightarrow M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$$

1) $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di sp. vettoriali.

2) $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [f(v)]_{\mathcal{D}}$

Dim: Omessa.

Conseguenze:

1) $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = n \cdot m$.

2) f è invertibile se e solo se $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile. Inoltre:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}.$$

Il punto 2 segue più in generale da:

$f : V \longrightarrow W$ $\qquad$ $g : W \longrightarrow U$

lineari e basi

$\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{D}$ di W, $\mathcal{C}$ di U.

Allora vale:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g\circ f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g)\, M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f).$$

Caso particolare: formula del cambio di base

Data $f : V \longrightarrow V$ lineare e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, vale:

$$\boxed{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V).}$$

$$\begin{array}{cccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ A & X & B & X^{-1} \end{array}$$

Def 3.22: Date due matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ queste sono coniugate se esiste X INVERTIBILE :

$$A = X B X^{-1}.$$

Eser: 1) Mostrare che

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

2) Se A e B sono coniugate mostrare che:

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B).$$

4. AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Def 4.1: Un'applicazione lineare:

$$f : V \longrightarrow V$$

si chiama endomorfismo.

$$\mathrm{End}(V) \stackrel{!}{=} \mathrm{Hom}(V, V)$$

Per quanto detto

1) $\mathrm{End}(V)$ ha dimensione $(\dim V)^2$.

2) Se fisso $\mathcal{B}$ base di V ho che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

è un isomorfismo.

Def 4.2: Dato $f \in \mathrm{End}(V)$ un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è **autovalore** di f se

$$\exists\, v \neq 0;\ v \in V : f(v) = \lambda v.$$

Chiamiamo un tale v **autovettore** di f relativo a λ.

Es: $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$

$$f : P \longrightarrow P$$
$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \longrightarrow 3a_0 + 3a_1 X + 3a_2 X^2$$

3 e' autov. di f e ogni polinomio e' autovettore.

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$.

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$L_A(e_1) = 3e_1 \quad L_A(e_2) = \frac{1}{3} e_2$

Quindi

e_1 e' autovettore di L_A con autov. 3

e_2 e' autovettore di L_A
con autov. $1/3$.