

La prop 2.24 ci dice che

$$W := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \}$$

si ottiene traslando il sottospazio

$$W_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

rispetto a una soluzione particolare.

Es: $\{ x - y = 1 \}.$

Ha matrice completa

$$(1 \ -1 \ | \ 1).$$

Il sistema omogeneo associato è:

$$\{ x - y = 0 \}$$

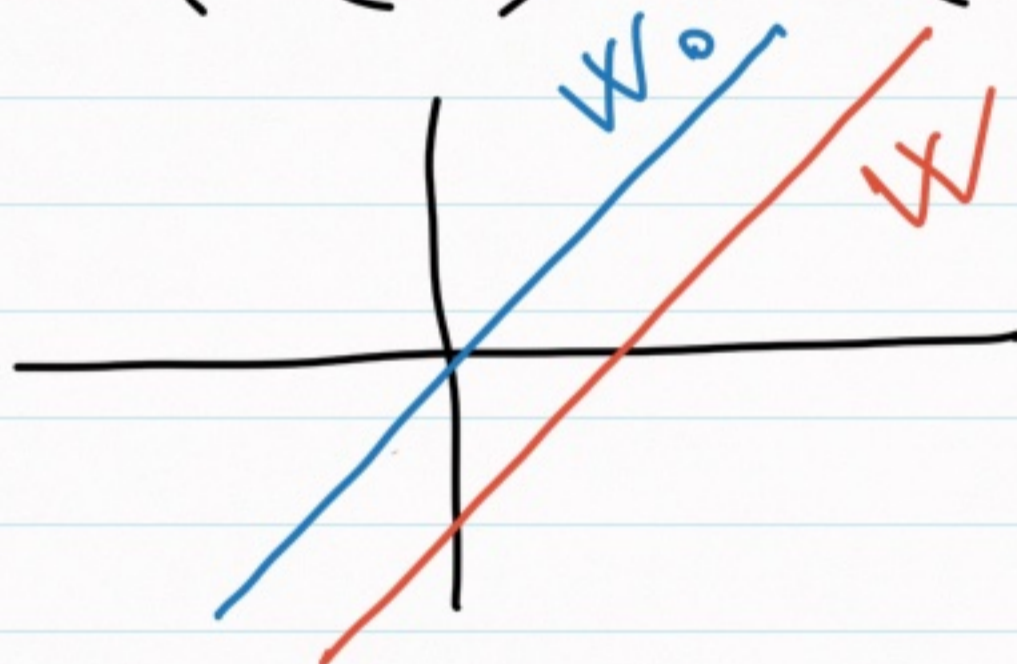
Una soluzione particolare del sistema iniziale è $(1, 0)$.

Quindi:

$$W = \{x - y = 1\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x - y = 0\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$



Def 2.25: Dato il sottospazio

$$W := \{Ax = b \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

chiamiamo **giacitura** di W
il sottosp. vettoriale:

$$W_0 := \{ Ax = 0 \mid x \in \mathbb{R}^n \}.$$

Le equazioni date dal sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si chiamano **equazioni contenute** di W .

Se $\{u_1, \dots, u_{n-r}\}$ dove $r = r(A)$ è una base della giacitura W_0 , le equazioni associate a:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \bar{x} + s_1 u_1 + \dots + s_{n-r} u_{n-r}$$

dove $A\bar{x} = b$ e $s_1, \dots, s_{n-r} \in \mathbb{R}$ si dicono **equazioni parametriche** di W .

Dato le eq. contemporanee

$$Ax = b$$

per ottenere quelle parametriche basta risolvere il sistema.

$$\underline{Es:} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice completa e':

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango e' 2 e le soluzioni dipendono da 2 parametri.

$$x_3 = s_1$$

$$x_2 = s_2$$

$$\Rightarrow x_4 = x_3 - 2 = s_1 - 2$$

$$x_1 = x_2 - x_3 = s_2 - s_1$$

Da cui le equazioni parametriche sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ -2 + s_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $(0, 0, 0, -2)$ è una soluzione particolare e

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base delle quicittura.

Dom: Come si passa da eq. parametriche a

eq. cartesiane?

Def 2.26: Data una matrice
 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
la matrice trasposta
la matrice

$$A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

i cui elementi sono

$$(A^T)_{ij} := A_{ji}.$$

Def 2.27: Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
lo spazio delle
colonne e' il sottosp. di \mathbb{R}^m
così definito:

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\text{colonne di } A\}.$$

Lo spazio delle righe
il sottospazio di \mathbb{R}^n
definito da:

$$\text{Row}(A) := \text{Col}(A^T).$$

Fatto 2.28: Valgono le
seguenti

uguaglianze:

$$\begin{aligned} r(A) &= \dim \text{Col}(A) \\ &= \dim \text{Row}(A). \end{aligned}$$

Torniamo all'eq. parametrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + s_1 u_1 + \dots + s_\ell u_\ell$$

Questo equivale a dire che

$$x - y \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_e\}$$

ovvero:

$$\dim \text{Span}\{x - y, u_1, \dots, u_e\} =$$

$$\dim \text{Span}\{u_1, \dots, u_e\}.$$

Per il fatto 2.28, vale:

$$\begin{aligned} r(x - y | u_1, \dots, u_e) &= r(u_1 | \dots | u_e) \\ &= r. \end{aligned}$$

Riducendo a scala la
matrice

$$(u_1 | \dots | u_e | x - y)$$

e imponendo rango r si
otengono le eq. cartesiane.

$$\underline{E_s}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} = (*)$$

Riducendo a scala:

$$(*) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 0 & 1 & y-z-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 0 & 1 & y-z-1 \\ 0 & 0 & x-y+z+1 \end{pmatrix}$$

Dovendo avere rango 2
e' eq. cartesiana e':
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Oss:

Equazioni cartesiane e
parametriche sono comode
per studiare i ssv intersezione
e somme.

Es: Dati

$$U: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$V := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinare base e dimensione di $U \cap V$ e $U + V$.

Sol: Determino le eq. cartesiane di V .

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_2 - R_1 \\ R_4 - R_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{array} \right)$$

Si ha che il rango deve essere 2 dunque

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è data considerando il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$\text{che in } U \cap V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Segue che:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W =$$

$$= 2 + 2 - 1 = 3.$$

Per trovare una base di $U + W$ considero prima una base di U .

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Il rango è 2 implicando

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 - s_1 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi
base di \cup $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e' base di $U + W$.

CAPITOLO 3 : APPLICAZIONI LINEARI

Dato una base $B = \{v_1 \dots v_n\}$
di uno spazio vettoriale V ,
per definizione sappiamo che
 $V = \text{Span}\{v_1 \dots v_n\}$.

Dunque dato $v \in V$, esistono
 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

Poiché B è lin. indipendente,
gli a_i sono unici.
Questo definisce una funzione:

$$\overline{F}_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$F_B(v) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Def 3.1: Dato $v \in V$,
chiamiamo
l'elemento

$$F_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

coordinate di v rispetto a B .
Per brevità scriveremo alternati-
vamente:

$$[v]_B := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

\overline{F}_B è una bijezione, ma ha
anche altre 2 proprietà

Eser: Verificare che:

$$1) F_B(v_1 + v_2) = F_B(v_1) + F_B(v_2)$$

$$2) F_B(\alpha v_1) = \alpha F_B(v_1).$$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Def 3.2: Una funzione

$$F: V \longrightarrow W$$

fra due sp. vettoriali si dice
applicazione lineare se valgono
le seguenti proprietà:

$$1) \forall v_1, v_2 \in V:$$

$$F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in V:$$

$$F(\alpha v_1) = \alpha F(v_1)$$

Es: Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ definisce una app lineare

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(v) := Av.$$

C. Es: La funzione:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
non è lineare in quanto:

$$f(2x) = 4f(x) \neq 2f(x).$$

Anche la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$$

non è lineare:

$$x + y + 1 = f(x + y) \neq x + y + 2 = f(x) + f(y).$$

Def 3.3: Sia $F: V \rightarrow W$
un' app. lineare.
Il **nucleo** di F è l'insieme:

$$\text{Ker } F := \{v \in V : F(v) = 0\}.$$

L' **immagine** di F è l'insieme:

$$\text{Im } F := \{w \in W : \exists v \in V, \\ f(v) = w\}$$

Prop 3.4: Sia $F: V \rightarrow W$
applicazione lineare.

1) Il nucleo $\text{Ker } F$ è un
sottosp. vettoriale di V

2) L'immagine $\text{Im } F$ è un
sott. vettoriale di W .

Dim: 1) Dati $v_1, v_2 \in \text{Ker } F$
vale:

$$\overset{F \text{ lineare}}{F(v_1 + v_2)} = F(v_1) + F(v_2)$$

$$v_1, v_2 \in \text{Ker } F$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Analogamente se $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

$$\overset{F \text{ lineare}}{F(\alpha v_1)} = \alpha F(v_1) \overset{v_1 \in \text{Ker } F}{=} 0$$

Dunque $v_1 + v_2 \in \text{Ker } F$ e $\alpha v_1 \in \text{Ker } F$

Da questo segue che $\text{Ker } F$ è un sottosp. vettoriale.

2) Per esercizio,

Es: Prendiamo $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
e consideriamo

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Il nucleo di questa applicazione

lineare, che per brevità chiameremo
nucleo di A e':

$$\begin{aligned} \text{Ker } A &:= \{ v \in \mathbb{R}^n : Av = 0 \} \\ &= \{ \text{sp. soluzioni del} \\ &\quad \text{sistema lineare} \\ &\quad \text{omogeneo} \}. \end{aligned}$$

Nella prop. successiva vedremo
che se $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$ e' la
base canonica, vale:

$$\begin{aligned} \text{Im } A &\stackrel{\text{Prop 3.5}}{:=} \text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\} \\ &= \text{Span}\{A^1, \dots, A^n\} \\ &= \text{Col}(A). \end{aligned}$$

In particolare vale la relazione:

$n = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Col}(A)$
grazie a Rouché - Capelli.