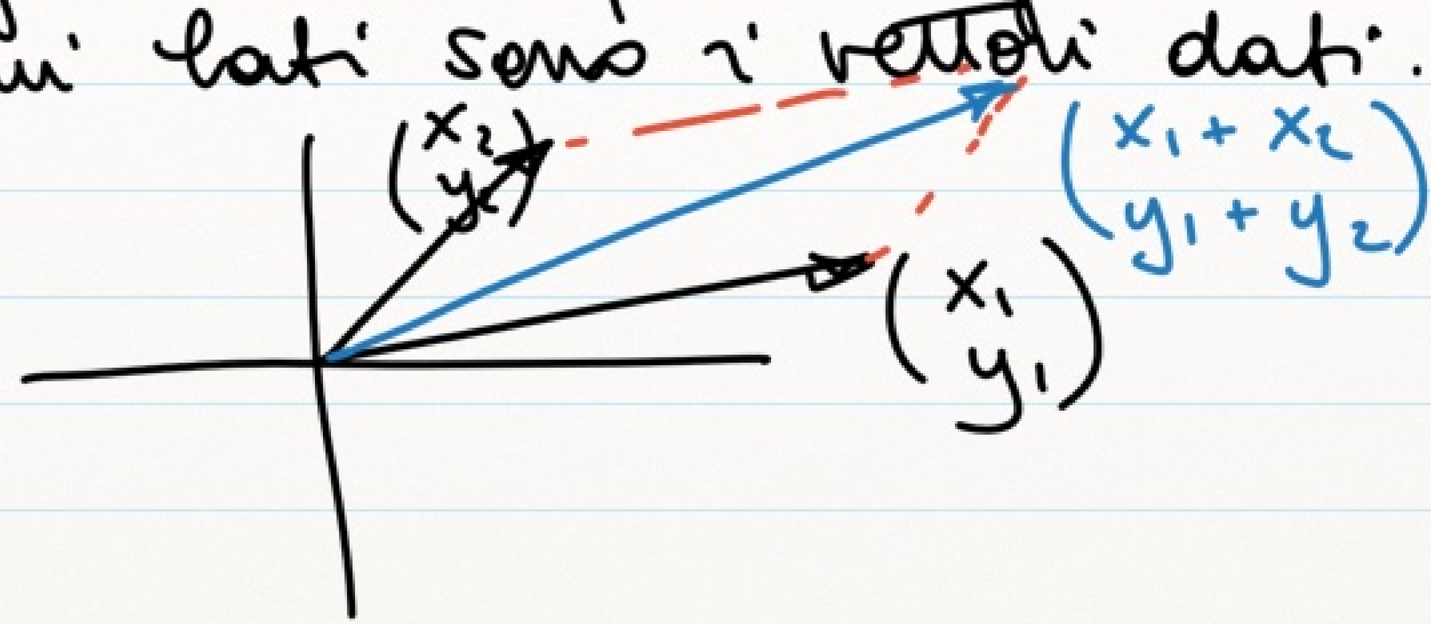
L'ultima volta abbiamo visto che su $\mathbb{R}^2$ ho definito

Somma : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

prodotto per scalare : $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

Domanda: Cosa significano?

Es: La somma realizza la regola del parallelogramma: la somma di due vettori è il vettore corrispondente alla diagonale del parallelogramma i cui lati sono i vettori dati.



Ho quindi due operazioni

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

con determinate proprietà.

Def 2.3: Sia dato V un insieme con due operazioni:

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (u,v) \longrightarrow u+v$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \quad (\alpha, v) \longrightarrow \alpha \cdot v$$

che soddisfano le seguenti proprietà:

1) associativa: $\forall u, v, w \in V$ vale:

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

2) commutativa:

$\forall u, v \in V: \ v + u = u + v$

3) Esiste un elemento $0 \in V$:

$$0 + u = u + 0 = u$$

0 e' detto elemento neutro / origine.

4) Per ogni $v \in V$, $\exists v' \in V$:

$$v + v' = v' + v = 0$$

L'elemento v' e' detto opposto di v.

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$:

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$:

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

7) $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$.

Se le proprieta' 1) - 7) sono soddisfatte diciamo che V e' uno spazio vettoriale reale.
Un elemento di V si chiama vettore.

Oss: Specifichiamo reale perche' esistono sp. vettoriale complessi o su campi più astrusi.

Es 1: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\alpha, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Ho uno sp. vettoriale per ogni $n \geq 1$.

Eser: Per $\mathbb{R}^n$ verificare le proprietà 1)-7).

Es 2: L'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno sp. vettoriale con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare definite nella lezione precedente:

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$$

Es 3: Un polinomio è una

Somma formale di potenze di una indeterminata X.

Poniamo:

$$\mathbb{R}_{\leq n}[X] := \{ a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n : a_i \in \mathbb{R} \}$$

Questo è l'insieme dei polinomi di grado $\leq n$, ovvero la potenza massima è al più n.

<u>oss</u>: Un qualunque polinomio P di grado $< n$ può scriversi come:

$$P(x) = a_0 + \dots + a_k X^k + 0 \cdot X^{k+1} + \dots + 0 \cdot X^n$$

Ad esempio $P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$:

$$P(x) = 1 + 2x =$$

$$= 1 + 2x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

La somma di due polinomi P e Q è data da:

$$P(x) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 X + \dots b_n X^n$$

$$(P+Q)(x) :\overset{!}{=} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \dots + (a_n + b_n) X^n$$

Analogamente se $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha P)(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1) X + \dots + (\alpha a_n) X^n$$

<u>Es:</u> $P, Q \in \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$

$$P(X) = 1 - 2x$$

$$Q(X) = x + 3x^2$$

$$(P+Q)(x) = 1 - 2x + x + 3x^2 \overset{!}{=} 1 - x + 3x^2$$

$(3P)(x) = 3 - 6x$

Lo spazio $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ è uno spazio vettoriale

Eser: Verificare le proprietà 1) - 7).

Es 4*: Dato un insieme X scriviamo

$$\mathbb{R}^X := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \}$$

= insieme delle funzioni da X a $\mathbb{R}$.

Date due funzioni $f, g \in \mathbb{R}^X$ possiamo definire:

$$(f+g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) :\overset{!}{=} f(x) + g(x)$$

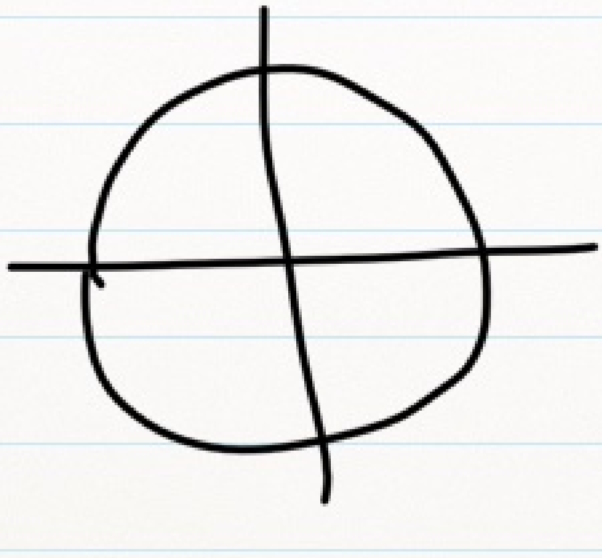
Analogamente se $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo considerare:

$$(\alpha f)(x) :\overset{!}{=} \alpha f(x).$$

$\mathbb{R}^X$ con queste operazioni e' un spazio vettoriale

<u>Eser:</u> Verificare le proprieta' 1) - 7).

<u>C.Es:</u> $X := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}$



Prendiamo le operazioni definite su $\mathbb{R}^2$.

Si ha che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in X$

ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X$

in quanto $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$.

Dunque la somma non è ben definita su X.

<u>Eser:</u> $X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 1 \right\}$

Verificare che con le operazioni su $\mathbb{R}^2$, X non è sp. vettoriale.

<u>Def. 2.4</u> Sia V uno sp. vettoriale. Un suo sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice **sottospazio vettoriale** se valgono:

1) $\forall\, u, w \in W \Rightarrow u + w \in W$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$

<u>Es:</u> $V = \mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = 0 \right\}$$

Verifichiamo che è un sottospazio

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in W.$$

$$\alpha u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix} \in W.$$

Dunque W è sottospazio.

<u>Oss:</u> Se $W \subseteq V$ e' un sottospazio vettoriale deve contenere l'origine, in quanto:

$$\underline{0} = 0 \cdot u \in W \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} 0 \in \mathbb{R} \\ u \in W \end{array}$$

<u>C.Es:</u> $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1 \right\}$$

In ambo i casi l'origine $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non e' un elemento.

<u>Domanda:</u> Se ho un sottoinsieme S

di uno sp. vettoriale V e
so che S non è un sottospazio vettoriale, posso "linearizzarlo"?

Def 2.5: Dato uno sp. vettoriale V e dei vettori

$$v_1, \dots, v_k \in V$$

una loro combinazione lineare è una somma della forma

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

con $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Analogamente diciamo che $v \in V$ è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ se esistono $a_1 \dots a_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

Es: Dati $u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

possiamo scrivere $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ come:

$$w = \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es: Un qualunque elemento $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si scrive:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ed e' combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.