**Def 2.6:** Uno spazio vettoriale $V$ si dice **finitamente generato** se esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che ogni vettore $v \in V$ si scrive come combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$, ovvero esistono $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

I vettori $v_1 \dots v_n$ si dico **generatori** di $V$.

Es: Abbiamo già visto che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

Più in generale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono generatori di $\mathbb{R}^n$.

C. Es: Esistono sp. vettoriali non finitamente generati.

Prendiamo ad esempio

- $\mathbb{R}^X$ con $X$ infinito (ad esempio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)
- $\mathbb{R}[X]$ sp. vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali.

Es*: Consideriamo

$$V := C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$$

Date due funzioni $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo:

$$(f+g)(x) \overset{!}{:=} f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) \overset{!}{:=} \alpha f(x)$$

1) Mostrare che con queste operazioni $V$ è uno sp. vettoriale

2) Mostrare che $V$ non è finitamente generato.

Def 2.7: Dati $v_1 \dots v_k \in V$ il sottospazio vettoriale generato da $v_1 \dots v_k$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1 \dots v_k$.

$$\text{Span}(v_1 \dots v_k) \overset{!}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Allo stesso modo se $S$ è un sottoinsieme di $V$, il sottospazio vettoriale generato da $S$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di $S$, ovvero:

$$\mathrm{Span}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i s_i \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{R} \\ s_i \in S \end{array} \right\}$$

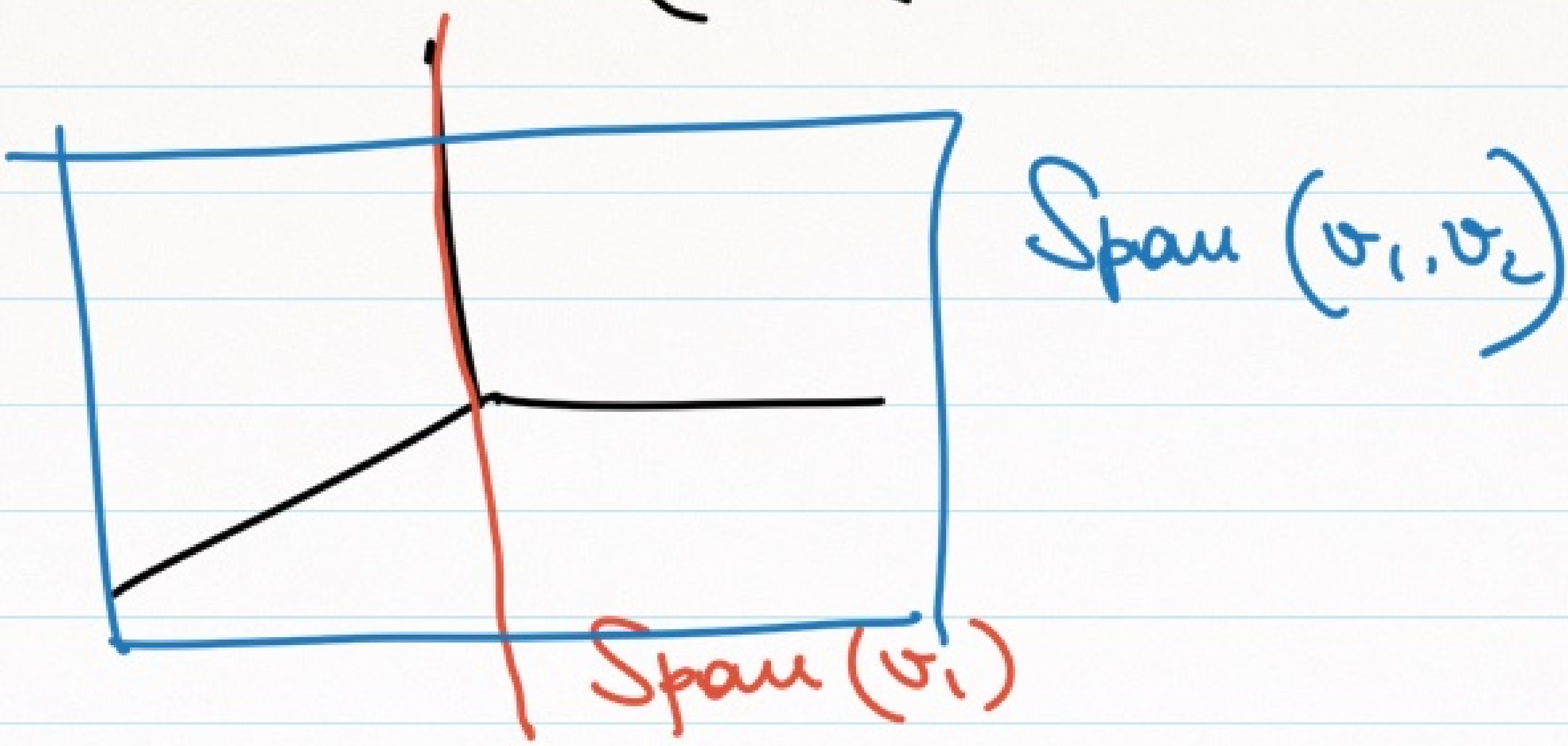
<u>Eser:</u> Verificare che $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_k)$ e $\mathrm{Span}(S)$ sono sottospazi vettoriali di $V$.

<u>Es 1</u> In $\mathbb{R}^3$ prendiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}(v_1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$




<u>Oss:</u> Se uno spazio V è finitamente generato da $v_1 \dots v_e$ allora

$$V = \mathrm{Span}(v_1 \dots v_e).$$

<u>Oss:</u> Dato uno spazio vettoriale finitamente generato, esistono infinite famiglie di generatori.

Anche $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è

un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$.
In questo caso però:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ho vari modi di scrivere uno stesso vettore.

<u>Domanda</u>: Esistono casi in cui la scrittura è unica?

<u>Def 2.8</u>: Dato uno sp. vettoriale $V$ e un insieme di vettori $v_1 \dots v_k \in V$, diciamo che tali vettori sono **linearmente indipendenti** se

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$$

Se invece esistono $a_1, \dots, a_k$ non nulli, $v_1 \dots v_k$ si dicono **linearmente dipendenti**.

<u>Es</u>: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

sono linear. indip.

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

<u>C.Es</u>: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Infatti:

$$1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

<u>Prop 2.9</u>: Siano $v_1 \dots v_k \in V$ vettori. Questi sono linearmente indipendenti se e solo se vale:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i \Rightarrow a_i = b_i \quad i = 1 \dots k$$

**Dim:** Se $v_1 \dots v_k$ sono linear. indipendenti, supponiamo di avere:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i) v_i = 0$$

Per indipendenza lineare:

$$a_i - b_i = 0 \ \forall i \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i.$$

Viceversa, se

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i$$

prendendo

$$\sum a_i v_i = 0$$

devo avere $a_i = 0$, cioè $v_1 \dots v_k$ sono indipendenti. $\square$

Oss: Supponiamo $v_1 \dots v_n$ non siano indipendenti. Esistono $a_1 \dots a_n$ non tutti nulli, tali che:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0.$$

Per semplicità supponiamo $a_n \neq 0$. Allora possiamo scrivere

$$v_n = -\frac{a_1}{a_n} v_1 - \frac{a_2}{a_n} v_2 \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} v_{n-1}$$

cioè $v_n$ è combinazione lineare di $v_1 \dots v_{n-1}$.

Prop 2.10: Se $v_1 \dots v_n \in V$ sono linearmente dipendenti uno di questi vettori è combinazione lineare dei rimanenti.

Es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Questi sono linear. dipendenti in $\mathbb{R}^2$ in quanto:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oss: Se $v_1 \dots v_k$ e' un insieme di vettori linearmenti indipendenti ogni suo sottoinsieme e' ancora linearmente indipendente.

Prop 2.11: Sia $S = \{v_1 \dots v_m\}$ un insieme di generatori di $V$.

Se $S$ e' un insieme linearmente indipendente, allora $S$ contiene un sottoinsieme proprio di generatori.

Dim: Per ipotesi esistono $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, tali che:

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Assumendo $a_m \neq 0$, si ha che:

$$v_m = -\frac{a_1}{a_m} v_1 - \dots - \frac{a_{m-1}}{a_m} v_m.$$

Mostriamo che $v_1, \dots, v_{m-1}$ sono generatori di $V$. Dato $v \in V$, esistono $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$:

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m =$$

$$= b_1 v_1 + \dots + b_{m-1} v_{m-1} + b_m \left( \sum_{i=1}^{m-1} -\frac{a_i}{a_m} v_i \right)$$

$$= \left( b_1 - \frac{b_m}{a_m} a_1 \right) v_1 + \dots + \left( b_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} a_{m-1} \right) v_{m-1}.$$

Quindi $v$ e' combinazione lineare di $v_1 \dots v_{m-1}$.

$\square$

**Prop 2.12:** Siano $v_1 \dots v_k$ lin. indipendenti in $V$.
Dato $u \in V$ si ha che $u, v_1 \dots v_k$ sono lin. indipendenti se e solo se

$$u \notin \mathrm{Span}(v_1 \dots v_k).$$

**Dim:** Siano $u, v_1, \dots, v_k$ lin. indipendenti.
Per assurdo supponiamo $u \in \mathrm{Span}(v_1 \dots$
Allora esistono $a_1 \dots a_k$ t.c.

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - u = 0$$

ma questo viola l'ind. lineare. $\lightning$

Viceversa supponiamo $u \notin \mathrm{Span}(v_1 \dots v_k)$
Per assurdo, se $u, v_1 \dots v_k$ sono lin. indipendenti allora

esistono $a_1 \dots a_k, b$ t.c.

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b u = 0$$

Poiché $v_1 \dots v_k$ sono indipendenti devo avere $b \neq 0$. Da cui

$$u = -\frac{a_1}{b} v_1 - \dots - \frac{a_k}{b} v_k$$

cioè $u \in \mathrm{Span}(v_1 \dots v_k)$.
Questa è una contraddizione.

## In sintesi

(1) Dato un sistema di generatori non indipendenti, possiamo rimuoverne uno per avere ancora dei generatori

(2) Aggiungere opportunamente un vettore a vettori indipendenti mantenendo l'indipendenza

**Fatto 2.13:** Sia $S = \{u_1 \dots u_k\}$ un sistema di generatori di $V$ e sia $S' = \{v_1 \dots v_\ell\}$ un sistema indipendente.
Vale:

$$\ell \leq k.$$

**Def 2.14:** Un insieme di vettori $v_1 \dots v_n$ linearmente indipendenti che generano $V$ si chiama **base** di $V$.

D'ora in poi salvo casi particolari i nostri spazi saranno finitamente generati

**Cor 2.15:** Tutte le (infinite) basi di $V$ hanno la stessa cardinalità.

Dim: Siano
$$\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\} \quad e \quad \mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_m\}$$
due basi di V.
Vedendo $\mathcal{B}'$ come sistema indipendente e $\mathcal{B}$ come sistema di generatori, devo avere:
$$m \leq n.$$
Scambiando i ruoli di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ ho anche:
$$n \leq m.$$
Quindi $n = m$. $\square$

Def 2.16: La cardinalità di una qualunque base di uno sp. vettoriale finitamente generato V è detta **dimensione** di V e denotata con $\dim(V)$.

**Teor 2.17:** Sia $V$ sp. vettoriale finitamente generato.

1) Un qualunque sistema di generatori contiene una base.

2) Un qualunque sistema indipendente si può estendere a una base.

**Dim:** 1) Sia $n = \dim V$.
Dato un sistema di generato $S = \{v_1 \dots v_m\}$ ho che:

$$m \geq n.$$

Se $m = n$ non faccio nulla
Se $m > n$ uno dei vettori di $S$, ad esempio $v_m$, è dipendente dagli altri.

Per la Prop 2.11

$$S' = \{v_1 \dots v_{m-1}\}$$

genera $V$. Se $m-1=n$ ho finito altrimenti proseguo finché non ho cardinalità $n$.

2) Sia $S = \{v_1 \dots v_\ell\}$ indipendente. Ho che,

$$\ell \leq n.$$

Se $\ell = n$ non faccio nulla.
Se $\ell < n$ aggiungo a $S$ un qualunque $v_{\ell+1} \in V$ :

$$v_{\ell+1} \notin \mathrm{Span}(S).$$

Per Prop 2.12

$$S' = \{v_1 \dots v_\ell, v_{\ell+1}\}$$

è indipendente. Se $\ell+1=n$ ho finito altrimenti proseguo fino ad ottenere cardinalità $n$.

**Es:** Dato $V = \mathbb{R}^n$
una base è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questa è detta base canonica.

**Es:** Anche

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

è base di $\mathbb{R}^n$. Esistono infinite basi di $\mathbb{R}^n$.

**Eser:** Dato $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$
mostrare che
$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

sono una base di $V$.

Eser: Dato $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ definiamo

$$E_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ & \vdots & 1 & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nulla tranne nel posto $(i,j)$ dove compare $1$.
Mostrare che $(E_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ e' una base.

## 2.2 Intersezione e somma di sp. vettoriali

Dati due sottospazi vettoriali $W_1, W_2$ di $V$ possiamo considerare :

$W_1 \cap W_2$ e $W_1 \cup W_2$.

Quali di questi è ancora un sottospazio vettoriale?

**Prop 2.18:** Dati due sottosp. vettoriali $W_1, W_2$ di $V$ si ha che $W_1 \cap W_2$ è sottosp. vettoriale di $V$.

**Dim:** Prendiamo $u, v \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ha che:

$$u, v \in W_1 \Rightarrow u + v \in W_1$$
$$u, v \in W_2 \Rightarrow u + v \in W_2$$

dunque $u + v \in W_1 \cap W_2$.

Allo stesso modo:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha u \in W_1 \\ \alpha u \in W_2 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha u \in W_1 \cap W_2$$

Quindi $W_1 \cap W_2$ e' un sottospazio. $\square$

Eser*: Dato $S \subset V$ sottoinsieme si ha che:

$$\mathrm{Span}(S) = \bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio} \\ S \subset W}} W$$