6.4 Affinità e isometrie affini

Def 6.22 Siano $\mathcal{P}_1$ sp. affine su V_1
$\mathcal{P}_2$ sp. affine su V_2.
Una funzione $f: \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ si dice **affinità** se esiste $\varphi: V_1 \longrightarrow V_2$ lineare t.c.

$$f(P) - f(Q) = \varphi(P - Q)$$

per ogni $P, Q \in \mathcal{P}_1$. Chiamiamo φ **parte lineare** di f.

Prop 6.23: Siano $\mathcal{P}_1$ affine su V_1 e $\mathcal{P}_2$ affine su V_2.
Una funzione $f: \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ è una affinità se e solo se:

$$\varphi: V_1 \longrightarrow V_2$$

$$u \longrightarrow f(u+P) - f(P)$$

con $P \in \mathcal{P}_1$, è lineare.

Dim: Omessa. $\square$

Es: Sia $\mathcal{P}$ affine euclideo e sia Q sottosp. affine con direzione U.

Abbiamo visto che

$$\pi_Q : \mathcal{P} \longrightarrow Q$$

$$\pi_Q(P) - S = \pi_U(P - S)$$

con $S \in Q$. Notando che

$$\pi_Q(S) = S$$

allora:

$$\pi_Q(P) = \pi_Q(S) + \pi_U(P - S)$$

quindi π_Q è affine.

Fra i casi possibili di affinità

un caso particolare è dato da:

Def 6.24: Sia $\mathcal{P}$ affine euclideo con direzione V. Una funzione $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ è una isometria affine se

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$$

$\forall P, Q \in \mathcal{P}$.

Teor 6.25: Dato $\mathcal{P}$ affine euclideo, $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ è una isometria affine se e solo se f è una affinità la cui parte lineare è una isometria lineare.

Dim: Supponiamo f affinità con parte lineare data da una isometria lineare φ.

$$d(f(P), f(Q)) = \|f(P) - f(Q)\|$$
$$\overset{!}{=} \|\varphi(P - Q)\| = \|P - Q\|$$
$$\overset{!}{=} d(P, Q).$$

Quindi f e' una isometria affine.

Supponiamo ora $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ sia una isometria affine.

Fissato $P \in \mathcal{P}$ poniamo:

$$\varphi : V \longrightarrow V$$
$$v \longrightarrow f(P+v) - f(P).$$

Notiamo che $\varphi(0) = 0$, quindi

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi(v) - \varphi(0)\| =$$
$$= \|f(P+v) - f(P)\| =$$
$$\overset{!}{=} d(f(P+v), f(P)) =$$

$$\stackrel{!}{=} d(P+v, P) = \|v\|.$$

Quindi φ preserva la norma.
$\Rightarrow$ φ preserva il prodotto scalare $\Rightarrow$ φ e' una isometria lineare.
Per la Prop 6.23, la funzione f e' una affinita'.

$\square$

<u>Eser</u>: Mostrare che una isometria affine $f: P \longrightarrow P$ e' invertibile.

<u>oss</u>: Le isometrie affini conservano le distanze fra punti, dunque anche le aree.

<u>Dom</u>: Possiamo scrivere una affinita' (e quindi

anche una isometria affine)
in forma matriciale?

Def 6.26: Sia $\mathcal{P}$ affine euclideo su V.
Un riferimento affine è una coppia $(P, \mathcal{B})$ con $P \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ base di V. Il riferimento è ortonormale se $\mathcal{B}$ lo è.
Le coordinate di $Q \in \mathcal{P}$ rispetto a $(P, \mathcal{B})$ sono le coordinate di $Q - P$ in $\mathcal{B}$.

Es: $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ allora

$$\{(0, \dots, 0), \{e_1 \dots e_n\}\}$$

è il riferimento ortonormale standard. Potevamo prendere anche:

$$\{(1, 1, 1, \dots, 1), \{e_1 \dots e_n\}\}.$$

Sia $f : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ una affinità con parte lineare φ.

Se $(P, \mathcal{B})$ rif. affine per $\mathcal{P}_1$

$(Q, \mathcal{D})$ " " " $\mathcal{P}_2$,

dato $S \in \mathcal{P}_1$, ricordiamo che:

$$f(S) - f(P) = \varphi(S - P)$$

Siano:

$X \in \mathbb{R}^n$ le coordinate di S rispetto a $(P, \mathcal{B})$

$Y \in \mathbb{R}^m$ " " " $\varphi(S)$ rispetto a $(Q, \mathcal{D})$

$b \in \mathbb{R}^m$ " " $\varphi(P)$ rispetto a $(Q, \mathcal{D})$

Se $A = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vale:

$$\begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $\boxed{Y = AX + b}$.

Nel caso particolare di una isometria affine vale:

$$Y = AX + b$$

con $A \in O(n)$.

<u>Es:</u> Una generica isometria affine di $\mathbb{R}^2$ si scrive come:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

oppure:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

6.5 Coniche e quadriche

Def 6.27: Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
Definiamo il polinomio associato come:

$$p(x_1 \dots x_n) = \langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + c$$

con $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Una quadrica è l'insieme degli zeri di un polinomio P come sopra:

$$Q := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1 \dots x_n) = 0\}$$

Es: Una quadrica in $\mathbb{R}^2$ ha forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$$

In questo caso la chiamiamo conica.

Ponendo:

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$$

chiamiamo $\overline{A}$ matrice totale della quadrica.

Se considero: $\overline{x} := \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

allora: $P(x) = \overline{x}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{x}$.

Prendiamo una isometria affine di $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Fissando il riferimento affine standard, in coordinate abbiamo:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \overline{M}} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $M \in O(n)$.

Sostituendo:

$$\overline{x}^T \overline{A}\, \overline{x} = \overline{y}^T \cdot \underbrace{\overline{M}^T \cdot \overline{A}\, \overline{M}}_{"\overline{A}'} \overline{y}$$

quindi $\overline{A}' = \overline{M}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{M}$.
Le matrici $\overline{A}'$ e $\overline{A}$ sono congruenti e questo implica che la quadrica:

$$\tilde{Q} := \{ y^T \cdot A y = 0 \}$$

è congruente: $Q = \{ x^T A x = 0 \}$.

$$\overline{A}' = \overline{M}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{M} =$$

$$= \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M^T \cdot A \cdot M & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Poiché $M \in O(n)$ vale che

$$M^T A M = M^{-1} A M$$

Scrivendo: $\overline{A}' = \begin{pmatrix} A' & b' \\ (b')^T & c' \end{pmatrix}$

si ha che A, A' sono coniugate.

Quindi una isometria affine $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ modifica la matrice totale di una quadrica come segue:

$$\overline{A} \longrightarrow \overline{M}^T \overline{A}\, \overline{M} = \overline{A}'$$

cambia per congruenza

$$A \longrightarrow M^T A M = M^{-1} A M$$

cambia per coniugio ortogonale.

Vediamo dunque che:

$$\det(\bar{A}') = \det(\bar{M}^T \bar{A} \bar{M})$$

$$\overset{!}{=} \det^2(\bar{M}) \det(\bar{A}).$$

Poiché $\bar{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ con M ortogonale si ha:

$$\det(\bar{A}') = \det(\bar{A}).$$

Analogamente

$$\det(A') = \det(M^{-1} A M)$$

$$\overset{!}{=} \det(A).$$

Essendo inoltre $\bar{A}'$ e $\bar{A}$ congruenti, ammettono la stessa segnatura per il Teor di Sylvester.

Da questo possiamo dedurre.

Teor 6.28: (Classificazione coniche)

Sia data una conica

$$Q = \left\{ \bar{x}^T \cdot \bar{A}\, \bar{x} = 0 \;\middle|\; \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

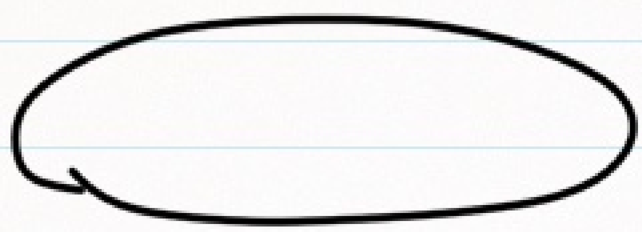
dove $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$

e $A \in M_2(\mathbb{R})$ simmetrica
$b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$.

A meno di utilizzare una isometria affine la conica Q è riconoscibi le coniche:

$\det(A) > 0$

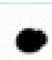
- $r(\bar{A}) = 3$: ellisse reale o immaginaria



$ax^2 + by^2 = \pm 1$

$a, b > 0$

- $r(\bar{A}) = 2$: rette complesse

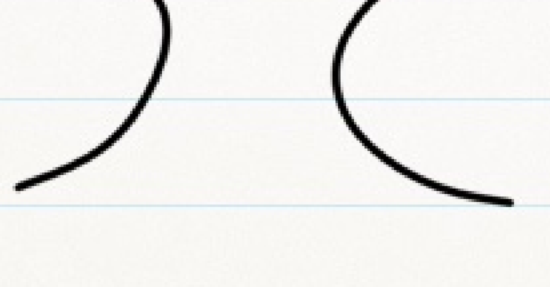


$ax^2 + by^2 = 0$

$(a, b \neq 0)$

$\det(A) < 0$:

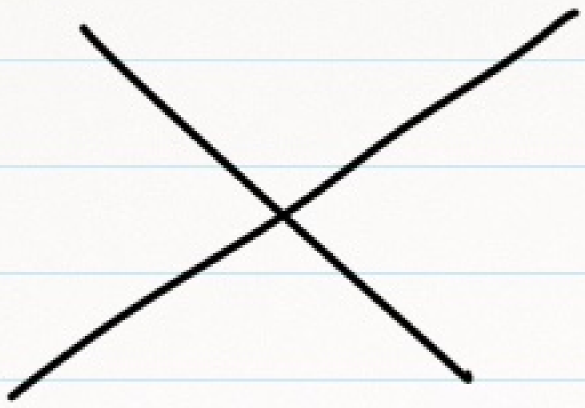
- $r(\bar{A}) = 3$: iperbole



$ax^2 - by^2 = \pm 1$

$a, b > 0$.

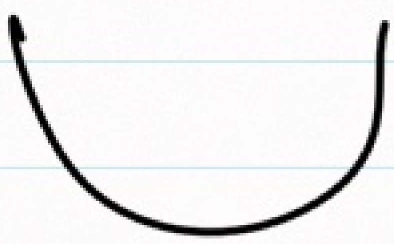
- $r(\bar{A}) = 2$: coppie di rette reali



$$ax^2 - by^2 = 0$$
$(a, b > 0)$

$\det(A) = 0$.

$r(\bar{A}) = 3$: parabola



$$y - ax^2 = 0$$
$a \neq 0$.

$r(\bar{A}) = 2$: rette parallele reali o complesse

$$ax^2 \pm 1 = 0$$
$(a > 0)$

$r(\bar{A}) = 1$: rette coincidenti

$$x^2 = 0$$

Le coniche per cui $\det(\bar{A}) \neq 0$ si dicono **non degeneri**.

<u>oss</u>: Il caso di rette complesse produce come soluzione reale un punto.
L'ellisse immaginaria e le rette complesse immaginarie sono vuote.

Teor 6.29: (Classificazione quadriche)

Sia data una quadrica

$$Q = \{ \bar{x}^T \bar{A} \bar{x} = 0 \mid \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^3 \}$$

e $\bar{A}$ matrice totale con:

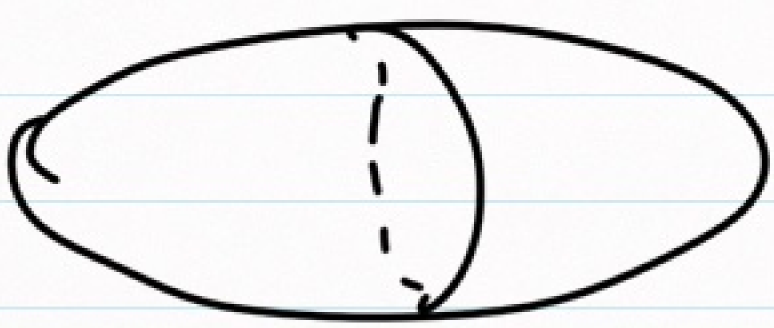
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$$

con $A \in M_3(\mathbb{R})$ simmetrica
$b \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$.

A meno di utilizzare una isometria Q è riconoscibile come un:

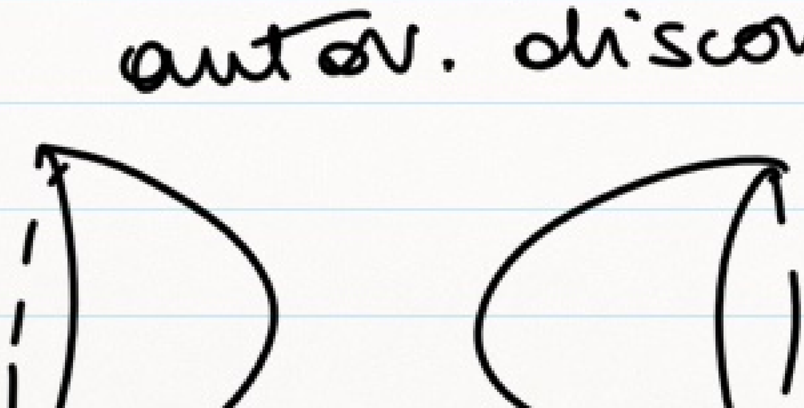
$\det \bar{A} < 0$

$\det A \neq 0$
autov. concordi : ellissoide reale



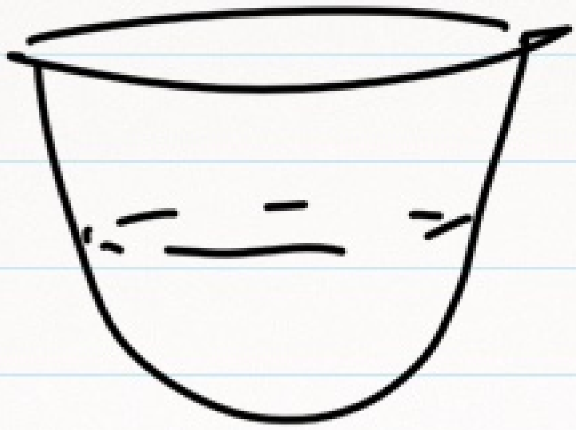
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$
$$a, b, c > 0.$$

$\det A \neq 0$
autov. discordi : iperboloide ellittico



$$ax^2 + by^2 - cz^2 = -1$$
$$a, b, c > 0$$

$\det A = 0$: paraboloide ellittico



$ax^2 + by^2 - z = 0$

$(a, b > 0)$

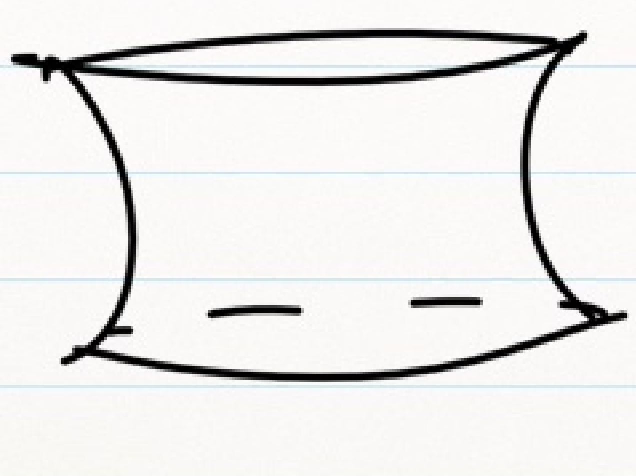
$\det \bar{A} > 0$

$\det A \neq 0$ autov concordi : ellissoide immaginario

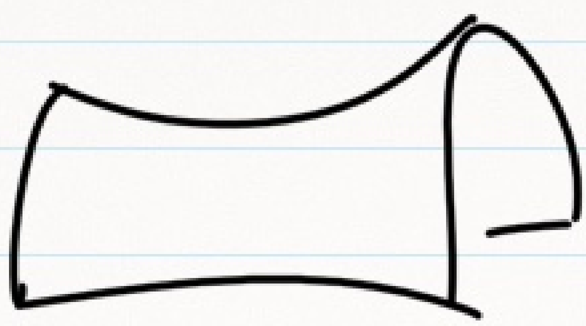
$ax^2 + by^2 + cz^2 = -1$

$a, b, c > 0$

$\det A \neq 0$ aut discordi : iperboloide iperbolico



$\det A = 0$: paraboloide iperbolico

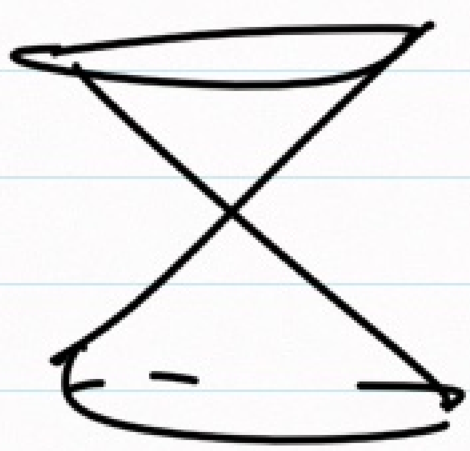


$$ax^2 - by^2 - z = 0$$

$a, b > 0$.

- $r(\bar{A}) = 3$

$\det A \neq 0$ cono reale o complesso



$$ax^2 + by^2 \pm cz^2 = 0$$

$a, b, c > 0$

$\det A = 0$ cilindro

iper. $ax^2 - by^2 = 1$

ellittico $ax^2 + by^2 = 1$.

parabolico $ax^2 - y = 0$

- $r(\bar{A}) = 2$ piani distinti

incidenti / paralleli
reali / complessi.

Se $\det(\bar{A}) \neq 0$ le quadriche sono non degeneri.