Fondamenti dell'Informatica

Compito di prova 21-01-2022

(CON RISPOSTE)

Esercizio 1. **Insiemi**

Siano $A = \{1, 3, \{3, 4, 5\}, 4, \emptyset\}$ e $B = \{\{8, 1\}, 4, 5\}$ due insiemi. Si rappresenti l'estensione dell'insieme risultante dall'applicazione delle seguenti operazioni:

1. $A \cup B$
2. $B - A$
3. Un esempio di partizione di A

Risposta 1.

1. $A \cup B = \{1, 3, \{3, 4, 5\}, 4, \emptyset, \{8, 1\}, 5\}$
2. $B - A = \{\{8, 1\}, 5\}$
3. Un esempio di partizione di $A = \{\{1, 3\}, \{\{3, 4, 5\}, \emptyset\}, \{4\}\}$

Esercizio 2. **Funzioni**

Si dica per ognuna delle seguenti funzioni se siano totali, iniettive, suriettive, biunivoche e invertibili:

1. $f(x) = x - 4$ con $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
2. $f(x) = \frac{x}{(x-1)}$ con $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
3. $f(x) = \log x$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Risposta 2.

1. $f(x) = x - 4$ è parziale, iniettiva, suriettiva, biunivoca, invertibile
2. $f(x) = \frac{x}{(x-1)}$ è parziale, iniettiva, invertibile
3. $f(x) = \log x$ è parziale, iniettiva, suriettiva, biunivoca, invertibile

---

Esercizio 3. **Relazioni**

Sia $U = \{a, b, c, d, e\}$ un insieme. Si consideri la relazione $R \subseteq U \times U$ definita come segue: $R = \{< a, a >, < b, e >, < c, d >, < d, b >, < d, d >, < e, a >\}$.

1. Si rappresenti R come matrice booleana
2. Si indichi se R sia riflessiva, simmetrica e/o transitiva
3. Costruire una relazione $R_1 \supseteq R$ che sia una relazione simmetrica

---

Risposta 3.

1. Si rappresenti R come matrice booleana:

R:

	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	0	0	0	1
c	0	0	0	1	0
d	0	1	0	1	0
e	1	0	0	0	0

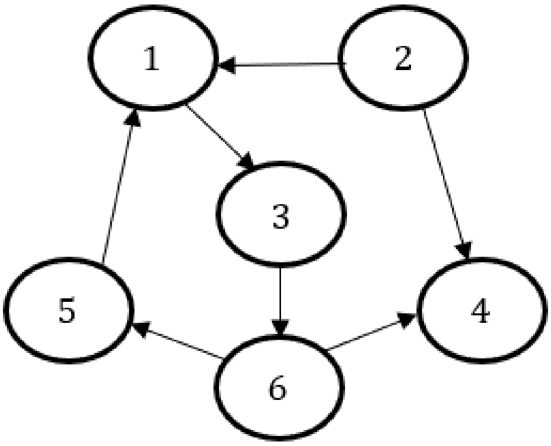
2. R non possiede nessuna particolare proprietà
3. Costruire una relazione $R_1 \supseteq R$ che sia una relazione simmetrica:

R1:

	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1
c	0	0	0	1	0
d	0	1	1	1	0
e	1	1	0	0	0

Esercizio 4. **Ordinamenti**

Si consideri il seguente grafo:



1. Si elenchino eventuali cicli e nodi pozzo
2. Dire se il grafo presentato è un albero, motivando la risposta
3. Si elenchino almeno due esempi di cammini di lunghezza 2 e due esempi di semicammini di lunghezza 2 che non siano anche cammini

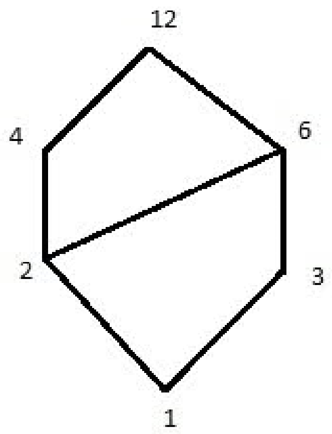
---

Risposta 4.

1. Cicli: $\langle 1, 3, 6, 5, 1\rangle$; Nodi pozzo: 4
2. Il grafo non è un albero poiché contiene cicli
3. Cammini di lunghezza 2: $\langle 2, 1, 3\rangle, \langle 3, 6, 4\rangle, \langle 5, 1, 3\rangle$
   Semicammini di lunghezza 2 non cammini: $\langle 2, 4, 6\rangle, \langle 5, 6, 4\rangle, \langle 2, 1, 5\rangle$

Esercizio 5. **Ordinamenti**

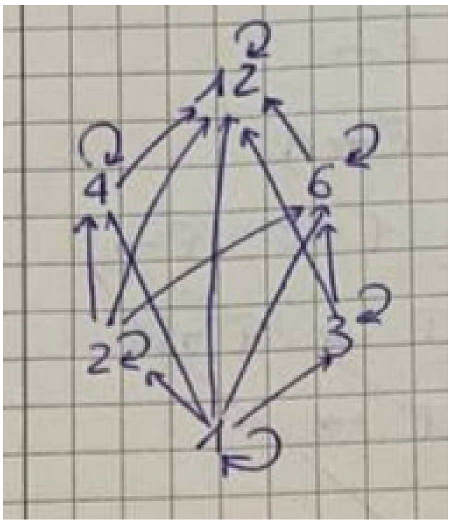
Si consideri il seguente diagramma di Hasse:



1. Rappresentare il diagramma di Hasse con un grafo orientato
2. Indicare se si tratti di un reticolo e motivare la risposta
3. Indicare se ogni elemento del poset abbia un complemento

Risposta 5.

1. Rappresentare il diagramma di Hasse con un grafo orientato:



2. Il diagramma di Hasse rappresentato è un reticolo in quanto, per ogni coppia di vertici, è possibile trovare sia un join che un meet
3. In questo caso, guardando 2, possiamo già dire che non tutti i punti del diagramma di Hasse hanno complemento dato che non c'è nessun punto x per cui $2 \sqcap x = \underline{0}$ e $2 \sqcup x = \underline{1}$ dove $\underline{0} = 1$ e $\underline{1} = 12$

Esercizio 6. **Induzione**

Si dimostri per induzione la seguente proprietà:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Risposta 6.

Caso base: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2 * 1 - 1) = 1^2$$

$$2 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Caso passo: $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) =$$

$$n^2 + 2n + 2 - 1 =$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

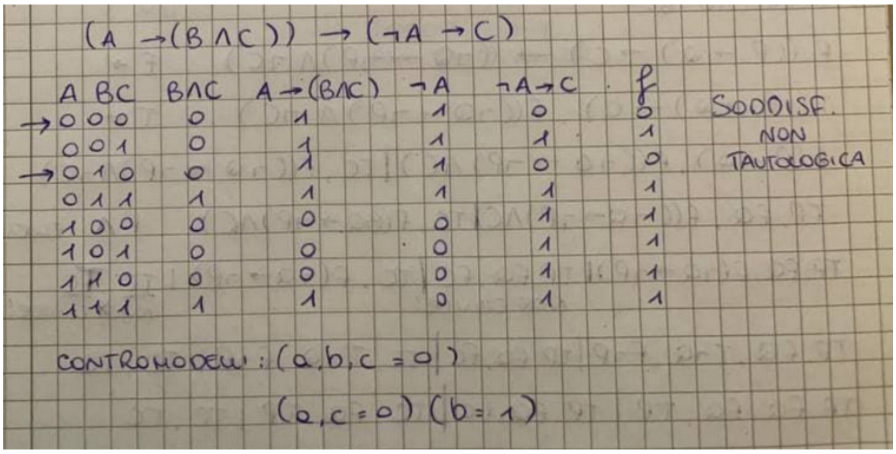
Esercizio 7. **Logica Proposizionale 1**

Si consideri la seguente formula:

$$(A \to (B \land C)) \to (\neg A \to C)$$

Si costruisca la tavola di verità e si dica se si tratti di una tautologia, di una formula soddisfacibile non tautologica o di una contraddizione. Mostrare eventuali contromodelli.

Risposta 7.



$(A \to (B \land C)) \to (\neg A \to C)$

A	B	C	$B \land C$	$A \to (B \land C)$	$\neg A$	$\neg A \to C$	f
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

SODDISF.
NON
TAUTOLOGICA

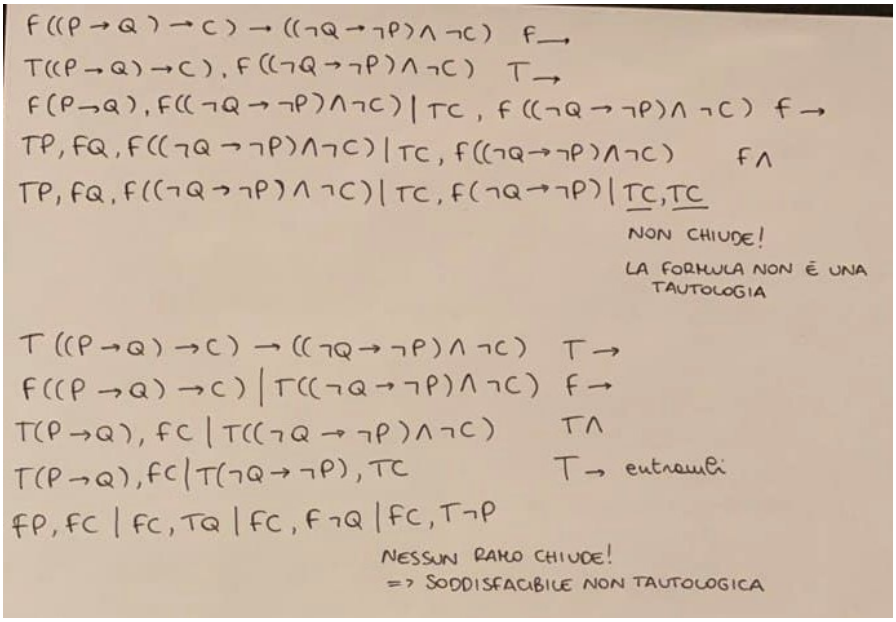
CONTROMODELLI: (a, b, c = 0)
(a, c = 0) (b = 1)

Esercizio 8. **Logica Proposizionale 2**

Si utilizzi il metodo dei tableux per valutare la seguente proposizione:

$$((P \to Q) \to C) \to ((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$$

Risposta 8.



$F((P \to Q) \to C) \to ((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $F\to$

$T((P \to Q) \to C), F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $T\to$

$F(P \to Q), F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C) \mid TC, F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $F\to$

$TP, FQ, F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C) \mid TC, F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $F\land$

$TP, FQ, F((\neg Q \to \neg P) \land \neg C) \mid TC, F(\neg Q \to \neg P) \mid \underline{TC}, \underline{TC}$

NON CHIUDE!

LA FORMULA NON È UNA TAUTOLOGIA

$T((P \to Q) \to C) \to ((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $T\to$

$F((P \to Q) \to C) \mid T((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $F\to$

$T(P \to Q), FC \mid T((\neg Q \to \neg P) \land \neg C)$ $T\land$

$T(P \to Q), FC \mid T(\neg Q \to \neg P), TC$ $T\to$ entrambi

$FP, FC \mid FC, TQ \mid FC, F\neg Q \mid FC, T\neg P$

NESSUN RAMO CHIUDE!

$\Rightarrow$ SODDISFACIBILE NON TAUTOLOGICA

Esercizio 9. **Logica Predicativa 1**

Si formalizzino le seguenti frasi definendo una opportuna segnatura della logica del primo ordine. Elencare costanti, predicati e funzioni utilizzati.

1. Tutte le barche hanno una poppa e una prua
2. La barca Santa Maria ha una vela grande e un albero alto
3. Il vento di grecale proviene da Nord-Est, mentre il vento di tramontana da Nord

---

Risposta 9.

- Predicati: $barca(x), prua(x), ha(x, y), vela(x), grande(x),$ $albero(x), alto(x), vento(x), provieneDa(x, y)$
- Costanti: $SantaMaria, Grecale, NordEst, Tramontana, Nord$

1. $\forall x(barca(x) \rightarrow \exists y \exists z(poppa(y) \wedge prua(z) \wedge ha(x, y) \wedge ha(x, z)$
2. $\exists x(x = SantaMaria \wedge barca(x) \wedge \exists y(vela(y) \wedge grande(y) \wedge ha(x, y)) \wedge \exists z(albero(z) \wedge alto(z) \wedge ha(x, z)))$
3. $\exists x(x = Grecale \wedge vento(x) \wedge provieneDa(x, NordEst)) \wedge \exists y(y = Tramontana \wedge vento(y) \wedge provieneDa(y, Nord))$

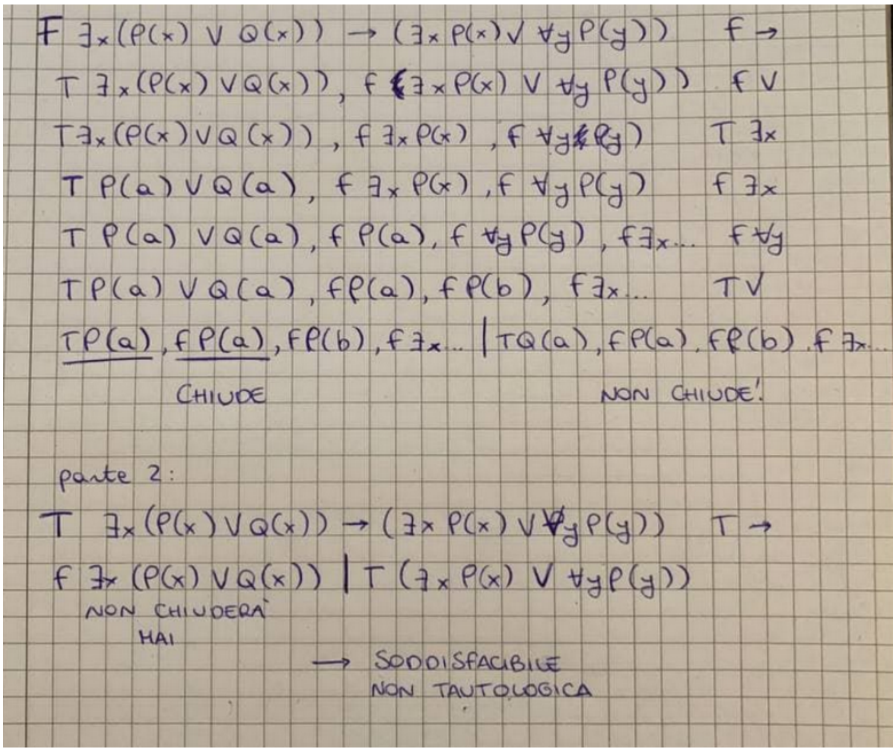
Esercizio 10. **Logica Predicativa 2**

Si consideri la seguente formula:

$$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \lor \forall y P(y))$$

Si utilizzi il metodo dei tableux per decidere se la proposizione sia una tautologia, una formula soddisfacibile o una contraddizione. Nel caso non sia una tautologia, specificare i modelli che non la soddisfano.

Risposta 10.



$F\ \exists x(P(x) \lor Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \lor \forall y P(y))$ $\quad F\rightarrow$

$T\ \exists x(P(x) \lor Q(x)),\ F\ (\exists x P(x) \lor \forall y P(y))$ $\quad F\lor$

$T\ \exists x(P(x) \lor Q(x)),\ F\ \exists x P(x),\ F\ \forall y P(y)$ $\quad T\exists x$

$T\ P(a) \lor Q(a),\ F\ \exists x P(x),\ F\ \forall y P(y)$ $\quad F\exists x$

$T\ P(a) \lor Q(a),\ F\ P(a),\ F\ \forall y P(y),\ F\exists x \ldots$ $\quad F\forall y$

$T\ P(a) \lor Q(a),\ F\ P(a),\ F\ P(b),\ F\exists x \ldots$ $\quad T\lor$

$\underline{T\ P(a)},\ \underline{F\ P(a)},\ F\ P(b),\ F\exists x \ldots \ \mid\ T\ Q(a),\ F\ P(a),\ F\ P(b),\ F\exists x \ldots$

CHIUDE NON CHIUDE!

parte 2:

$T\ \exists x(P(x) \lor Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \lor \forall y P(y))$ $\quad T\rightarrow$

$F\ \exists x(P(x) \lor Q(x)) \ \mid\ T\ (\exists x P(x) \lor \forall y P(y))$

NON CHIUDERÀ MAI

$\longrightarrow$ SODDISFACIBILE NON TAUTOLOGICA

Contromodello: $\langle D, I\rangle, D = \{a, b\}, Q^I = \{a\}, P^I = \emptyset$
