Teor 1.10 (Soluzioni di sistemi a scala)

Si consideri un sistema ridotto a scala della forma

$$Ax = b$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Si ha una sola delle seguenti possibilità:

1) $r(A) < r(A|b)$: il sistema non ha soluzioni

2) $r(A) = r(A|b) = n$: il sistema ammette un'unica soluzione.

3) $r(A) = r(A|b) = r < n$: il sistema ammette un'infinità di soluzioni dipendenti da

$n - r$ parametri.

Dim: Osserviamo che $(A|b)$ ridotta a scala, implica anche A ridotta a scala.

1) Se $r(A) \neq r(A|b)$ devo avere per forza

$$r(A|b) = r(A) + 1.$$

Questo si verifica se un pivot di $(A|b)$ corrisponde a una riga nulla di A, ovvero:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & \cdots & & & * & b_1 \\ & * & \cdots & \cdots & & * & b_2 \\ & & & \vdots & & * & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & b_{r+1} \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

con $b_{r+1} \neq 0$.

L'equazione corrispondente è

$$0 = b_{r+1} \quad (\neq 0)$$

2) Il sistema ha la seguente struttura:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & * & & * & b_1 \\ & a_{22} & & * & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

L'ultima equazione implica

$$\underset{\neq 0}{a_{nn}} x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

La penultima equazione:

$$a_{n-1\,n-1} x_{n-1} + a_{n-1\,n} x_n = b_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = (b_n - a_{n-1\,n} x_n)\, a^{-1}_{n-1\,n-1}$$

Procedendo a ritroso ottengo l'unica soluzione del sistema.

3)
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & * & & & * & * & b_1 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{r,l} & \cdots & a_{r,n} & b_r \\ & & & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Questo accade se $r<n$.
Ho l'equazione:

$$a_{r,l}x_l + \dots + a_{r,n}x_n = b_r$$

Assegnando $t_1, \dots, t_{n-r}$ parametri posso risolvere a ritroso il sistema.

Esempi del teorema:

<u>Es</u>: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice completa e':

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quest'ultima e' ridotta a scala e' $r(A) = r(A|b) = 3$, Ho un'unica soluzione data da: $(2, 1, 1)$.

Es:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

La matrice completa e':

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice e' ridotta a scale e:

$$r(A) = r(A|b) = 3 < 4.$$

Quindi ho infinite soluzioni

dipendenti da un parametro.
Infatti poniamo

$$x_3 = s \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 3s \\ x_2 = 4x_4 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$(6-3s, 4, s, 1) \quad s \in \mathbb{R}.$$

(1) <u>Domanda</u> Come facciamo per sistemi generici?

<u>Obiettivo:</u> Cerchiamo un algoritmo che, dato un sistema lineare

$$Ax = b$$

che produca uno equivalente

$$A'x = b',$$

ma ridotto a scala.

Operazioni ammesse sui sistemi:

1) Scambiare due equazioni

2) moltiplicare un'equazione per un reale $\neq 0$.

3) sostituire l'equazione i-esima Eq_i con

$$Eq_i + \alpha Eq_j$$

dove $\alpha \neq 0$ e Eq_j è la j-esima equazione.

Def 1.11: Una operazione elementare sulle righe di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Corrisponde a una di queste 3 possibilità:

1) Scambiare due righe

2) moltiplicare una riga per $\alpha \neq 0$.

3) sostituire la riga i-esima R_i con la somma

$$R_i + \alpha R_j$$

dove $\alpha \neq 0$ e R_j è la riga j-esima.

Algoritmo 1.12: (Algoritmo di Gauss)

Permette di passare da una matrice A a una matrice A_{sc} ridotta a scala attraverso operazioni elementari.

(1) Se $a_{11} = 0$ si cerca nella prima colonna un termine $\neq 0$ a partire dall'alto.
Se tale termine a_{i1} esiste, scambiamo la prima riga con la riga i-esima.
Altrimenti passiamo al punto 3.

(2) Si controllano i termini di prima colonna $\neq a_{11}$.
Nell'i-esima riga R_i ho due casi:

- $a_{i1} = 0$: non faccio niente.

- $a_{i1} \neq 0$: sostituisco la riga R_i con $R_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1$.

③ Tutti i termini di prima colonna $\neq a_{11}$ sono nulli. Si eliminano prima colonna e prima riga e si applica di nuovo passo ① .

Oss: L'algoritmo termina perché ho un numero finito di righe.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Il termine $a_{11} = 0$, mentre $a_{21} = 2 \neq 0$. Scambio R_1 e R_2 (passo ①).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Poichè $a_{13} \neq 0$ applico il passo (2) sostituendo R_3 con $R_3 - \frac{4}{2} R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora posso applicare il passo (3). Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Applico il passo (2) sostituendo R_2 con $R_2 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice ridotta a scala si ottiene riconsiderando le righe e colonne eliminate

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora possiamo risolvere qualunque sistema lineare $Ax = b$.

1) Considero la matrice completa

$$(A|b)$$

2) Riduco a scala con l'algoritmo di Gauss

3) Ottengo un nuovo sistema $A'x = b'$ equivalente e ridotto a scala.

4) Applico Teor 1.10.

Def 1.13: Il **rango per righe** di una matrice qualunque $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è il rango della matrice ridotta a scala tramite l'algoritmo di Gauss.

Teor 1.14 (Teor di Rouché Capelli)

Sia dato un sistema lineare $Ax = b$ con

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

Si ha:

1) se $r(A) \neq r(A|b)$ il sistema non è risolubile.

2) se $r(A) = r(A|b) = n$

esiste un'unica soluzione.

3) se $r(A) = r(A|b) = r < n$
esistono infinite soluzioni
dipendenti da $n-r$ parametri.

Es:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

La matrice completa e':

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Possiamo ridurre a scala:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta a scale.
Il nuovo sistema è:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Poichè $r(A) = r(A|b) = 3$ il sistema è risolubile con infinite soluzioni dipendenti da $4 - 3 = 1$ parametro.

Poniamo:

$$x_4 = s$$

$$x_3 = -1 - s$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} s$$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 = \overset{!}{=} 2 + \frac{4}{3} s.$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} s + 2 \\ -\frac{1}{3} s \\ -1 - s \\ s \end{pmatrix}$$

CAPITOLO 2: SPAZI VETTORIALI

Def 2.1: Date due matrici

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

definiamo la loro somma come una matrice $A+B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ che soddisfa:

$$(A+B)_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

dove $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.

Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, la moltiplicazione per scalare $\alpha A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è data da:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

Es: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Def 2.2: La matrice nulla in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è la matrice contenenti solo zeri.

Eser: Siano $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Verificare che:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$

2) $A + B = B + A$

3) Poniamo $-A := (-1) \cdot A$

$$A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$$

dove $\underline{0} = 0 \cdot A$.

4) $A + \underline{0} = \underline{0} + A$

5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B.$

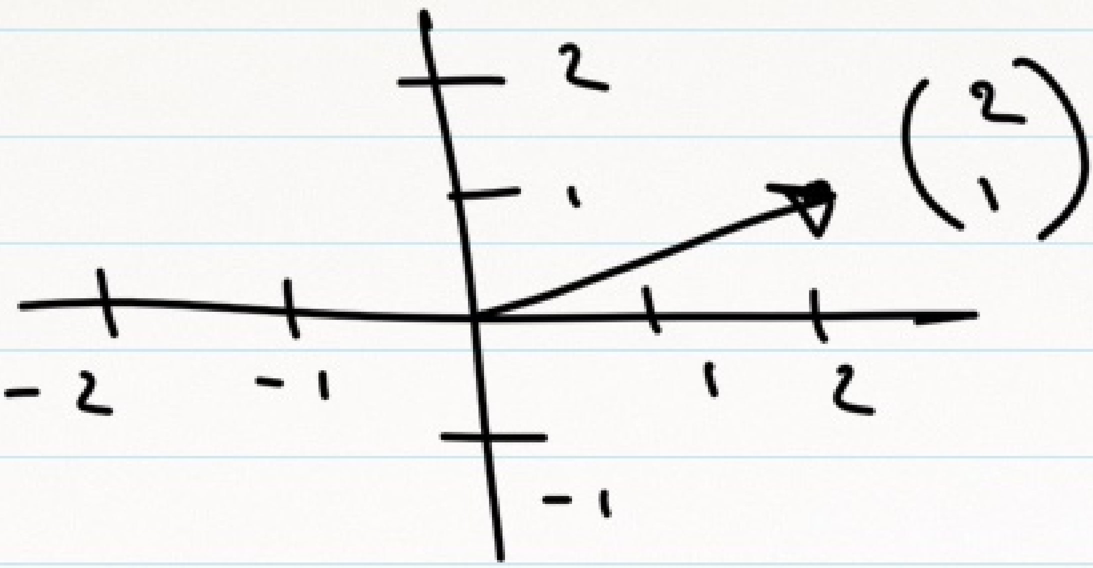
7) $\alpha \cdot (\beta A) = \alpha\beta \cdot A.$

Poniamo:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\} = M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Se $n = 2$ posso rappresentare ogni elemento su un piano.

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$



Posso pensare $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ come un segmento che inizia in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, l'origine, e che termina con una freccia in $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Chiamiamo tale oggetto vettore del piano.

Per tali vettori abbiamo una somma:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

e la moltiplicazione per un reale:

$$\alpha \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}.$$