

Fondamenti dell'Informatica

Simulazione Compitino + Soluzioni

1. Insiemi

Sia $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$.

Descrivere estensionalmente e intensionalmente $\wp(A)$, l'insieme delle parti di A.

Cercare poi due insiemi B e C che soddisfino le seguenti proprietà:

- $B \subseteq A$
- $C \not\subseteq A$
- $B \cap C = \{\emptyset\}$
- $B \cup C \supseteq A$
- $B \times C$ abbia 5 elementi (scriverlo esplicitamente in notazione estensionale)

SOLUZIONE:

$\wp(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{0, \{\emptyset\}\}, \{0, \emptyset\}, A\} = \{B \mid B \subseteq A\}$.

visto che $B \times C$ ha 5 elementi, (cardinalità di B) (cardinalità di C) = 5 e le uniche 2 possibilità sono $\text{card}(B) = 1$ e $\text{card}(C) = 5$ oppure $\text{card}(C) = 5$ e $\text{card}(B) = 1$; la seconda è impossibile perché $B \subseteq A$, quindi ha al più 3 elementi. Ma allora visto che $\text{card}(B) = 1$ e $B \cap C = \{\emptyset\}$ si conclude che $B = \{\emptyset\}$.

A questo punto, dovendo C soddisfare le condizioni $\text{card}(C)=5$, $B \cup C \supseteq A$ e $B \cap C = \{\emptyset\}$, C dovrà contenere tutti gli elementi di A più altri 2 a caso, ad esempio

$C = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$. Con queste scelte risulta

$B \times C = \{ \langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \emptyset, 0 \rangle \}$

2. Funzioni

Se A e B sono insiemi finiti, che condizione devono soddisfare le loro rispettive cardinalità perché possa esistere una funzione totale iniettiva $f: A \rightarrow B$?

E una funzione iniettiva $f: A \rightarrow B$ non necessariamente totale?

SOLUZIONE:

Per il principio della piccionaia deve essere $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ per la funzione totale iniettiva.

Per la funzione iniettiva non necessariamente totale, l'unica condizione è che non sia definita dall'insieme vuoto all'insieme vuoto, in altre parole $\text{card}(A) > 0$, $\text{card}(B) > 0$.

3. Relazioni

Siano A e B due insiemi e $R \subseteq A \times B$ una relazione.

Che condizione deve soddisfare R affinché R^{-1} sia una funzione (anche parziale)?

E affinché R^{-1} sia totale, ovvero abbia come dominio B, ma non sia una funzione?

SOLUZIONE:

R^{-1} è una funzione (anche parziale) se e solo se ogniqualvolta si trovino elementi $a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle \in R^{-1}$ deve risultare $a_1 = a_2$; in termini di R la frase si riformula dicendo che ogniqualvolta si trovino elementi $a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ deve risultare $a_1 = a_2$, o equivalentemente $a_1 \neq a_2$ implica che non esiste alcun $b \in B$ tale che

$\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ (si noti che nel caso particolare in cui R è una funzione questa condizione è precisamente l'iniettività di R).
 E affinché R^{-1} abbia come dominio B , ma non sia una funzione, il codominio di R deve essere tutto B e per la discussione precedente dobbiamo poter trovare $a_1, a_2 \in A, b \in B$ tali che $a_1 \neq a_2$ ma $\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \in R$ (ancora una volta, se R è una funzione ciò significa che deve essere non iniettiva).

Costruire un esempio di relazione fra 2 insiemi

- che non sia una funzione
- la cui relazione inversa sia una funzione totale

SOLUZIONE:

Prendiamo ad esempio $A = \{0\}$ e $B = \{1, 2\}$ e definiamo la relazione $R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\} \subseteq A \times B$.

R è una relazione non funzione e la sua inversa $R^{-1} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle\} \subseteq B \times A$ è la funzione totale $f: B \rightarrow A$ data da $f(1)=0, f(2)=0$.

Dati l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ e la relazione $R \subseteq A \times \{b, c, d\}$ definita da

$R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, c \rangle\}$, descrivere la composizione $R^{-1} \circ R$

Nota importante: l'esercizio sarà risolto con la convenzione che la prima relazione applicata è l'ultima scritta, dunque prima R poi R^{-1} .

SOLUZIONE:

$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle c, d \rangle\}$ e per ottenere la composizione

$R^{-1} \circ R \subseteq A \times A$ (che è ben definita perché il codominio della prima relazione da applicare, cioè R , coincide col dominio della seconda, cioè R^{-1}) ragioniamo elemento per elemento così:

- l'elemento a è in relazione R con b e c . b a sua volta è in relazione R^{-1} con a e c e questo ci dà le coppie $\langle a, a \rangle$ e $\langle a, c \rangle$. c invece è in relazione R^{-1} con a e d , perciò otteniamo le coppie $\langle a, a \rangle$ (che già avevamo) e $\langle a, d \rangle$.
- b non è in relazione R con alcun elemento, dunque la composizione non conterrà coppie il cui primo elemento è b .
- c è in relazione R con b e sappiamo che b a sua volta è in relazione R^{-1} con a e c e questo ci dà le coppie $\langle c, a \rangle$ e $\langle c, c \rangle$.
- d è in relazione R con c e d . Abbiám già visto che c è in relazione R^{-1} con a e d , perciò otteniamo le coppie $\langle d, a \rangle$ e $\langle d, d \rangle$. Infine d è in relazione R^{-1} solo con d , perciò otteniamo la coppia $\langle d, d \rangle$ (che già avevamo).

Riassumendo, $R^{-1} \circ R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, d \rangle\}$

4. Ordinamenti / Grafi / Alberi

Si disegni il grafo della struttura relazionale (A, R) sapendo che:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- R è relazione d'ordine parziale

(si utilizzino le convenzioni per i grafi generico o per i digrammi di Hasse).

Si individuino poi elementi massimali e minimali.

SOLUZIONE:

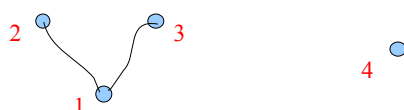
Una delle tante possibilità è scegliere come R l'ordinamento canonico dei naturali, cioè porre $R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$. l'unico elemento massimale è 4, l'unico minimale è 1.

In tal caso il diagramma di Hasse è



Altra possibilità (forse più interessante): $R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$. Elementi massimali sono 2,3,4; minimali sono 1 e 4.

Diagramma di Hasse:



5. Algebre e Algebra di Boole

Com'è fatta la più piccola algebra di Boole? (descrivere i suoi elementi con la notazione estensionale e con un diagramma di Poset).

SOLUZIONE:

$B = \{0, 1\}$ dove join e meet sono definiti così:

$0 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1 \quad 0 \vee 0 = 0, 1 \vee 0 = 1, 1 \vee 1 = 1$

e dove il complementare di 0 è 1 e viceversa. (è l'algebra dei valori di verità)

Diagramma di Hasse:



6. Induzione

Dimostrare che per ogni numero naturale non nullo n , n^2 è la somma dei primi n numeri dispari [suggerimento: i primi n dispari si possono scrivere come $2k-1$ con k che varia da 1 a n]

SOLUZIONE:

Utilizziamo il principio di induzione: se $n = 1$, $n^2 = 1$, che è la somma (banale) del primo numero dispari. Supponiamo allora che l'asserto valga per tutti i naturali non nulli fino a $n-1 > 0$, ossia

$$(n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

in tal caso

$$\begin{aligned} n^2 &= (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2(n-1) + 1 = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2n - 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) + 2n - 1 = \sum_{k=1}^n (2k-1) \end{aligned}$$

perciò il passo induttivo è completato.

7. Logica Proposizionale 1

Si costruisca una fbf con almeno 3 componenti che risulti, mediante verifica con le tavole di verità, una contraddizione.

SOLUZIONE:

Fra le infinite possibilità, si può ragionare così: sappiamo che per ogni fbf A , la fbf $A \wedge \neg A$ è la madre di tutte le contraddizioni (tant'è vero che la sua negazione, ovviamente una tautologia, è chiamata "principio di non-contraddizione"). A questo punto selezioniamo a caso altre 2 fbf, diciamo B e C , e non facciamo altro che congiungere il tutto: $(A \wedge (\neg A)) \wedge B \wedge C$; essendo la congiunzione vera se e solo se tutte le sue componenti lo sono, e essendo la sua prima componente sempre falsa, abbiamo trovato ciò che cercavamo. La verifica mediante tavole di verità è lasciata ai lettori.

8. Logica Proposizionale 2

Si costruisca una tavola attraverso il metodo dei tableaux per la seguente proposizione e si dica se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di una formula soddisfacibile non tautologica (in quest'ultimo caso si elenchino i modelli che la verificano e quelli che la falsificano)

$$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow B$$

SOLUZIONE:

vediamo il tableau:

<u>$F((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow B$</u>		
<u>$T((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)), FB$</u>		
<u>$TA \rightarrow B, TA \rightarrow \neg B, FB$</u>		
<u>$FA, TA \rightarrow \neg B, FB$</u>		TB , $TA \rightarrow \neg B$, FB
FA, FA, FB	<u>$FA, T\neg B, FB$</u>	(chiuso: non occorre proseguire)
	FA, FB, FB	
(non chiuso)	(non chiuso)	

Essendoci rami non chiusi, la fbf proposta non è una tautologia e in particolare il modello che la falsifica è l'assegnazione del valore di verità F a entrambe A e B . Tutti gli altri 3 modelli (quelli cioè in cui ad almeno una fra A e B è assegnato il valore di verità T) la verificano, perciò siamo in presenza di una formula soddisfacibile non tautologica.

9. Logica Predicativa 1

Si verifichi col metodo dei tableaux la validità della fbf $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$.

La semantica della logica predicativa esclude esplicitamente che il dominio di interpretazione sia l'insieme vuoto; in caso contrario cosa potrebbe accadere nella situazione data dalla fbf precedente? (quest'ultima risposta opzionale)

SOLUZIONE:

$$\begin{array}{l} \underline{F\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)} \\ \underline{T\forall x P(x), F\exists y P(y)} \\ \underline{TP(t), F\exists y P(y)} \\ TP(t), FP(t) \end{array}$$

e il tableau è chiuso, dunque si tratta di una tautologia; notiamo esplicitamente che quando applichiamo la regola $F\exists$ (ultimo passaggio) possiamo usare la stessa lettera t introdotta in precedenza dalla regola $T\forall$ e proprio questo rende il tableau chiuso.

Se usassimo un dominio di interpretazione vuoto, la fbf $\forall x P(x)$ sarebbe banalmente verificata, qualunque interpretazione si dia alla lettera predicativa P , semplicemente perché non ci sono elementi in gioco, dunque tutti quelli che ci sono soddisfano P ; Per lo stesso motivo, la fbf $\exists y P(y)$ risulterebbe banalmente falsa qualunque interpretazione si dia alla lettera predicativa P (non ci sono proprio elementi: come possono esserne alcuni che verifichino P ?).

Ma allora $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$ sarebbe un'implicazione con antecedente vero e conseguente falso, dunque sarebbe falsa, contro la dimostrazione fornita dal tableau sopra; non è difficile individuare che il problema sta proprio nell'applicazione della regola $F\exists$: se il dominio di interpretazione è vuoto, non possiamo trovare un suo elemento rappresentato da t . In conclusione, le regole dei tableaux predicativi sono state concepite per essere compatibili con domini di interpretazione non vuoti.

10. Logica Predicativa 2

Si costruisca una tavola attraverso il metodo dei tableaux per la seguente fbf e si dica se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di una formula soddisfacibile non tautologica (in quest'ultimo caso si costruisca un'interpretazione che la renda vera e una che la renda falsa)

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$$

SOLUZIONE:

$$\begin{array}{l} \underline{F\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))} \\ \underline{F\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), F\exists y (P(y) \wedge Q(y))} \\ \underline{FP(t) \rightarrow Q(t), F\exists y (P(y) \wedge Q(y))} \\ \underline{FP(t) \rightarrow Q(t), F P(t) \wedge Q(t)} \\ \underline{TP(t), FQ(t), F P(t) \wedge Q(t)} \end{array}$$

TP(t), FQ(t), FP(t) (chiuso)		TP(t), FQ(t), FQ(t) (non chiuso)
---------------------------------	--	-------------------------------------

Essendoci un ramo non chiuso, la fbf proposta non è una tautologia.
Un'interpretazione che la renda falsa si può costruire così: come dominio

dell'interpretazione scegliamo l'insieme $\{2\}$, come predicato rappresentato da P usiamo “essere pari” e come predicato rappresentato da Q usiamo “essere multiplo di 4”; ora il numero naturale rappresentato da t deve essere per forza 2 (non abbiamo altra scelta nel dominio di interpretazione) che è pari ma non multiplo di 4, pertanto $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists y (P(y) \wedge Q(y))$ sono ambedue falsi e così falso risulta anche $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$.

Se allarghiamo il dominio di interpretazione, portandolo a $\{2,4\}$ e manteniamo le nostre scelte su P e Q, $\exists y (P(y) \wedge Q(y))$ è vera (basta prendere 4 come y) e di conseguenza tutta $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y))$ è vera in questa nuova interpretazione.

Riassumendo, la fbf data è soddisfacibile ma non tautologica.