

La prof 2.24 ci dice che

$$W := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \}$$

si ottiene traslando il sottospazio

$$W_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

rispetto a una soluzione
particolare.

Es: $\{ x - y = 1 \}$

Ha matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

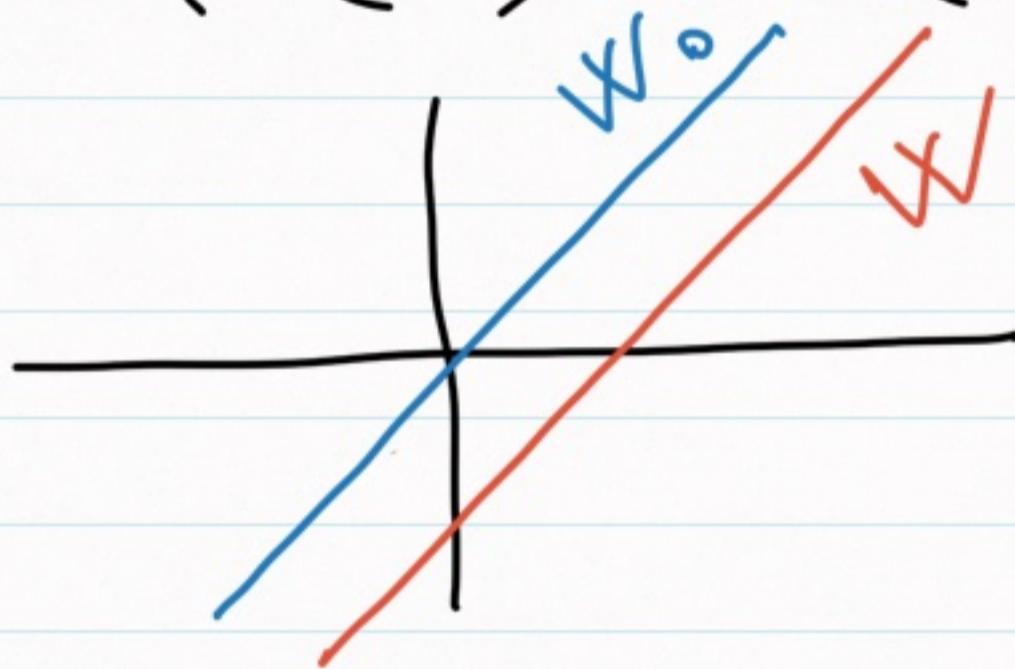
Il sistema omogeneo associato
e' :

$$\{ x - y = 0 \}$$

Una soluzione particolare del
sistema iniziale e' $(1, 0)$.

Quindi:

$$\begin{aligned} W &= \{x - y = 3\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{x - y = 0\} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right) \right\} \end{aligned}$$



Def 2.25: Dato il sottospazio

$$W := \{Ax = b \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

chi amiamo **giacitura** di W
il sottosp. vettoriale:

$$W_0 := \{ A x = 0 \mid x \in \mathbb{R}^n \}.$$

Le equazioni date dal sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right.$$

si chiamano **equazioni conforne** di W .

Se $\{u_1, \dots, u_{n-r}\}$ dove $r = r(A)$ è una base delle giacitura W_0 , le equazioni associate a:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \bar{x} + s_1 u_1 + \dots + s_{n-r} u_{n-r}$$

dove $A \bar{x} = b$ e $s_1, \dots, s_{n-r} \in \mathbb{R}$

si dicono **equazioni parametriche** di W .

DATE le eq. contestane

$$A \cdot x = b$$

per ottenere quelle parametriche
basta risolvere il sistema.

Es:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice completa ϵ' :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

IL range ϵ' 2 e le soluzioni
dipendono da 2 parametri.

$$x_3 = s_1 \quad x_2 = s_2$$

$$\Rightarrow x_4 = x_3 - 2 = s_1 - 2$$

$$x_1 = x_2 - x_3 = s_2 - s_1$$

Da cui le equazioni parametriche sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ -2 + s_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $(0, 0, 0, -2)$ è una soluzione particolare e

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio.

Dom: Come si passa da eq. parametriche a

eq. confezione?

Def 2.26: Data una matrice
 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
la matrice **trasposta** e'
la matrice
 $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$
i cui elementi sono

$$(A^T)_{ij} := A_{ji}.$$

Def 2.27: Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
lo **spazio delle**
colonne e' il sottosp. di \mathbb{R}^m
così definito:
 $\text{Col}(A) = \text{Span}\{\text{colonne di } A\}$

Lo spazio delle righe e'
è sottospazio di \mathbb{R}^n
definito da:

$$\text{Row}(A) := \text{Col}(A^T).$$

Fatto 2.28: Valgono le
seguenti
uguaglianze:

$$\begin{aligned} r(A) &= \dim \text{Col}(A) \\ &= \dim \text{Row}(A). \end{aligned}$$

Torniamo all'eq. parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + s_1 u_1 + \dots + s_\ell u_\ell$$

Questo equivale a dire che

$$x - y \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_e\}$$

ovvero:

$$\dim \text{Span}\{x - y, u_1, \dots, u_e\} =$$

$$\dim \text{Span}\{u_1, \dots, u_e\}.$$

Per il fatto 2.28, vale:

$$\begin{aligned} r(x - y | u_1, \dots, u_e) &= r(u_1, \dots, u_e) \\ &= r. \end{aligned}$$

Riducendo a scala la
matrice

$$(u_1 | \dots | u_e | x - y)$$

e imponendo range r si
ottengono le eq. costanti ame.

$$\text{Es: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} = (*)$$

Riducendo a scale:

$$(*) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 0 & 1 & y-z-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 0 & 1 & y-z-1 \\ 0 & 0 & x-y+z+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & z \\ 0 & 1 & y-z-1 \\ 0 & 0 & x-y+z+1 \end{pmatrix}$$

1) Dovendo avere rango 2

è' eq. cartesiana e':

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Oss:

Equazioni cartesiane e
parametriche sono comode
per studiare i SSV intersezioni
e somme.

Es: Dati

$$\begin{array}{l} \text{U: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$V := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinare base e dimensione
di $U \cap V$ e $U + V$.

Sol: Determiniamo le eq.
cartesiane di V .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_4 - R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \cap R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{array} \right)$$

Si ha che il range deve essere
2 dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

L'intersezione è data considerando il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

che am $U \cap V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Segue che:

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= \dim U + \dim W - \\ \dim U \cap W &= \\ &= 2 + 2 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Per trovare una base di $U + W$ considero prima una base di U .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Il rango 2 unisce

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 - s_1 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_1/2 \end{pmatrix} = \\ = s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la base di $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e' base di $U + W$.

CAPITOLO 3 : APPLICAZIONI LINEARI

Dato una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V , per definizione sappiamo che

$$V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Dunque dato $v \in V$, esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

Poiché B è lin. indipendente, gli a_i sono unici.

Questo definisce una funzione:

$$\overline{F}_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\overline{F}_{\mathcal{B}}(v) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Def 3.1: Dato $v \in V$,
chiamiammo
l'elemento

$$\overline{F}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

coordinate di v rispetto a \mathcal{B} .
Per brevità scriveremo alternativamente:

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

$\overline{F}_{\mathcal{B}}$ è una bizione, ma ha anche altre 2 proprietà

Eser: Verificare che:

$$1) \overline{F_B}(v_1 + v_2) = \overline{F_B}(v_1) + \overline{F_B}(v_2)$$

$$2) \overline{F_B}(\alpha v_1) = \alpha \overline{F_B}(v_1).$$

$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Def 3.2: Una funzione

$$\overline{F} : V \longrightarrow W$$

fra due sp. vettoriali si dice
applicazione lineare se valgono
le seguenti proprietà:

1) $\forall v_1, v_2 \in V :$

$$\overline{F}(v_1) + \overline{F}(v_2) = \overline{F}(v_1 + v_2)$$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in V :$

$$\overline{F}(\alpha v_1) = \alpha \overline{F}(v_1)$$

E.s.: Una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ definisce una app lineare
 $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $L_A(v) := Av$.

C.Es.: La funzione,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
 non e' lineare in quanto:

$$f(2x) = 4f(x) + 2f(x) -$$

Anche la funzione

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$
 non e' lineare:

$$x+y+1 = f(x+y) \neq f(x) + f(y)$$

Def 3.3: Sia $F: V \rightarrow W$ un'app. lineare.

Il **nucleo** di F è l'insieme:

$$\text{Ker } F := \{v \in V : F(v) = 0\}.$$

L'immagine di F è l'insieme:

$$\text{Im } F := \{w \in W : \exists v \in V, F(v) = w\}$$

Prop 3.4: Sia $F: V \rightarrow W$ applicazione lineare.

1) Il nucleo $\text{Ker } F$ è un sottosp. vettoriale di V

2) L'immagine $\text{Im } F$ è un sott. vettoriale di W .

Dim: 1) Dati $v_1, v_2 \in \text{Ker } F$ vale:

$$F(v_1 + v_2) \stackrel{F \text{ lineare}}{=} F(v_1) + F(v_2)$$

$v_1, v_2 \in \text{Ker } F$

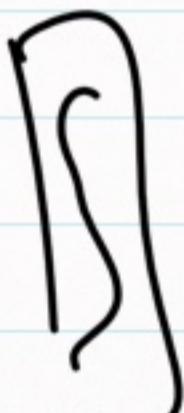
$$= 0 + 0 = 0$$

Analogamente se $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

$$F(\alpha v_1) \stackrel{F \text{ lineare}}{=} \alpha F(v_1) \stackrel{v_1 \in \text{Ker } F}{=} 0$$

1) Dunque $v_1 + v_2 \in \text{Ker } F$ e $\alpha v_1 \in \text{Ker } F$
 2) Da questo segue che $\text{Ker } F$ è un sottosp. vettoriale.

2) Per esercizio.



Ese: Prendiamo $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
 e consideriamo

$$L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Te michevi di questa applicazione

lineare, che per brevità chiameremo
nucleo di A e':

$$\text{Ker } A := \{ v \in \mathbb{R}^n : A v = 0 \}$$

|
= {sp. soluzioni del
sistema lineare
omogeneo}.

Nelle prop. successive vedremo
che se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ è la
base canonica, vale:

$$\text{Im } A := \text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$$

|
= \text{Span}\{A^1, \dots, A^n\}

|
= \text{Col}(A).

In particolare vale la relazione:

$n = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Col}(A)$
grazie a Rouché - Capelli.