6. Geometria affine

Questo ultimo capitolo sarà meno rigoroso dei precedenti, non volendo entrare nel dettaglio di varie tecnicalità.

Def 6.1: Sia V uno sp. vettoriale. Si consideri un insieme P. Diciamo che P è uno spazio affine se esiste una funzione

$$
\begin{aligned}
+ : V \times P &\longrightarrow P \\
(v, P) &\longrightarrow v + P
\end{aligned}
$$

tale che:

1) $w + (v + P) = (w + v) + P$
$\forall\, v, w \in V$

2) $\forall P, Q \in \mathcal{P}, \exists! \, v \in V:$

$$P = v + Q.$$

L'insieme $\mathcal{P}$ è l'insieme dei punti dello spazio affine, mentre V è la direzione vettoriale dello spazio affine.

Es: Dato $\mathcal{P} = V$, la somma

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

ci permette di vedere V come spazio affine rispetto a se stesso.

Es: Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Consideriamo:

$$\mathcal{P} : \stackrel{!}{=} \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \}$$

Se $b \neq 0$ sappiamo che non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

D'altra parte posto $V = \operatorname{Ker} A$, posso considerare:

$$+ : V \times P \longrightarrow P$$

$$(x_0, x) \longrightarrow x_0 + x.$$

Grazie alla Prop 2.24 sappiamo che $x_0 + x$ è una soluzione del sistema, quindi ho che:

Prop 6.2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, una matrice e $b \in \mathbb{R}^m$ un vettore.

L'insieme:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

è l'insieme di punti di uno spazio affine con direzione data da Ker A.

Dim: La proprietà della Definizione 6.1 (1) è valida grazie alle proprietà della somma vettoriale.
La proprietà in 6.1 (2) segue dalla Prop 2.24, cioè dal fatto che:

$$\mathcal{P} = \overline{x} + \operatorname{Ker} A. \quad \square$$

Notazione: Se $\mathcal{P}$ è uno sp. affine con direzione V, denotiamo con

$$P - Q \in V$$

il vettore determinato da 2 punti di $\mathcal{P}$.

Eserc: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V. Verificare:

1) $P - P = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}$
2) $P - Q = -(Q - P) \ \forall P, Q \in \mathcal{P}$
3) $(P - Q) + (Q - R) = P - R$ $\forall P, Q, R \in \mathcal{P}$.

Def 6.3: La **dimensione** di uno spazio affine $\mathcal{P}$ su V è la dimensione di V.

Se:
- $\dim V = 0$ allora $\mathcal{P}$ è un **punto**
- $\dim V = 1$ allora $\mathcal{P}$ è una **retta**
- $\dim V = 2$ allora $\mathcal{P}$ è un **piano**.

Def 6.4: Sia $\mathcal{P}$ uno sp. affine su V. Un sottoinsieme $Q \subseteq \mathcal{P}$ è un sottospazio affine se:

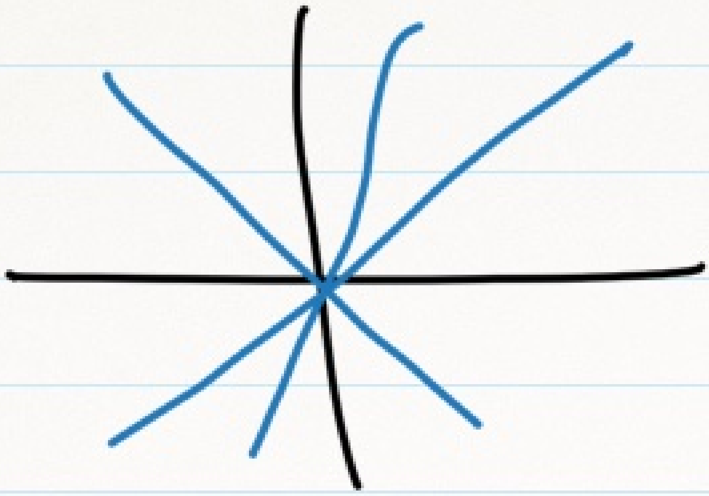
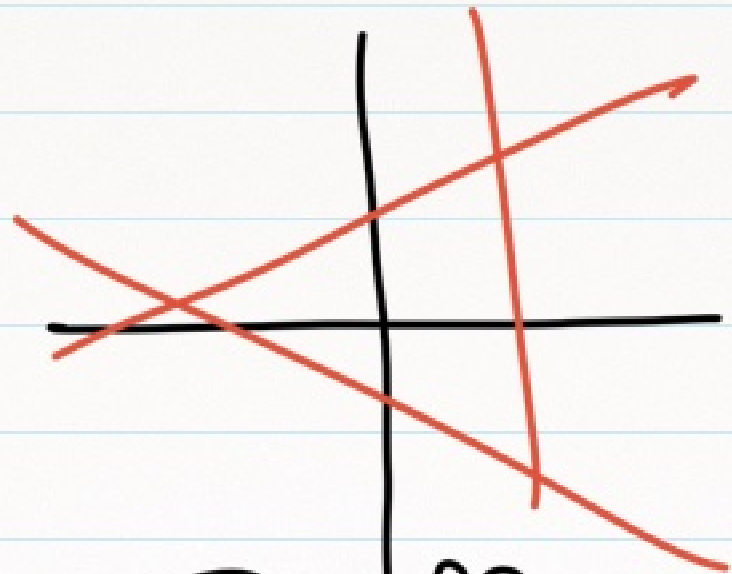
1) $U :\overset{!}{=} \{P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in Q\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

2) $\forall P \in Q, \forall u \in U : P + u \in Q$.

Es: Preso $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ con $V = \mathbb{R}$ ho che il punto $t \in \mathbb{R}$ è un sottospazio affine con direzione: $t - t = 0$.

Osserviamo che ho solo 2 sottospazi vettoriali: $\{0\}$, $\mathbb{R}$.

Es $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ $V = \mathbb{R}^2$

rette vettoriali = passanti per l'origine.

rette affini = rette non necessariamente passanti per l'origine.

Prop 6.5: Sia $\mathcal{P}$ uno sp. affine con direzione vettoriale V. Dato U sottosp. vettoriale di V e $P \in \mathcal{P}$ vale che:

$$P + U = \{ P + u \mid u \in U \}$$

è un sottospazio affine con direzione U.

Dim: Scriviamo $\mathcal{P}_U := P + U$

Per mostrare che è uno sp. affine mostriamo che:

$$W = \{ P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in P_U \}$$

è un sottosp. vettoriale.

$$P_1 = P + u_1 \qquad P_2 = P + u_2 .$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 \underset{|}{=} (P + u_2) - (P + u_1)$$
$$= u_2 - u_1 \in U .$$

Poiché: $u = (P + u) - P$

allora:

$$W = U .$$

e quindi è un sottosp. vettoriale per ipotesi.

Dato $Q \in P_U$, $u \in U$, verifichiamo che:

$$Q + u \in P_U .$$

Dato che $Q \in P_U$: $P + u_0 = Q$

$$\Rightarrow \; Q + u = P + \underbrace{(u_0 + u)}_{\in U} \in \mathcal{P}_U .$$

oss: Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Ponendo:

$$W := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \}$$

la Prop 2.4 ci dice che:

$$W = \bar{x} + \operatorname{Ker} A$$

dunque questo prova un'altra volta che W è sottosp. affine di $\mathbb{R}^n$.

Def 6.6: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V. Se $Q \subseteq \mathcal{P}$ è un sottospazio affine e $P \in \mathcal{P}$, diremo che Q è **passante** per P se $P \in Q$.

Def 6.7: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V. Dati $P_1 \dots P_k \in \mathcal{P}$ definiamo:

$$U := \mathrm{Span}\{P_i - P_j \mid 1 \leq i,j \leq k\}$$

e consideriamo:

$$\mathcal{P}_U := P_1 + U.$$

Questo è il sottosp. affine generato dai punti $P_1 \dots P_k$.

Prop 6.8: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V.
Sia Q sottospazio affine con $\dim Q = n$. Allora Q è generato da $n+1$ punti.

Dim: Sia $P \in Q$ e $\{u_1 \dots u_n\}$ base della direzione vettoriale di Q.
Allora:
$P, P+u_1, \dots, P+u_n$ generano Q.

Def 6.9: Sia $\mathcal{P}$ affine con direzione V.

Siano dati $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}$.

Questi sono

1) **allineati** se generano una retta affine.

2) **complanari** se generano un piano affine.

Eser: Mostrare che:

1) $P_1 \dots P_k$ sono allineati se $\dim \operatorname{Span}\{P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1\} \leq 1$.

2) $P_1 \dots P_k$ sono complanari se $\dim \operatorname{Span}\{P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1\} \leq 2$.

Grazie a quanto fatto nel capitolo 2.3 delle note sappiamo che i sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ sono dotati di due presentazioni: quella parametrica e quella cartesiana.
Inoltre sappiamo come passare dall'una all'altra.

Es: Trovare l'eq. parametrica e cartesiana della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per
$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sol: $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La giacitura della retta è generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Poiché passa per $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'eq. parametrica è:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per le eq. cartesiane:

$$r \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 1 & x_2 + 1 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1$$

Riducendo a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 1 & x_2 + 1 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 \\ 0 & x_2 - x_1 + 2 \\ 0 & x_3 - x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Es: Verificare che

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non sono allineati e determinare le equazioni cartesiane del piano generato da P_1, P_2, P_3.

Sol: $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che

$$\dim \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

i punti non sono allineati.
L'eq parametriche del piano sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle cartesiane si ottengono riducendo a scala:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & x_1 - 1 \\ 2 & 1 & x_2 + 1 \\ 2 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 + 2R_1 \\ R_3 + 2R_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & 2x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & -1 & 2x_1 + x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & 2x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $x_2 - x_3 + 1 = 0.$