

5.1 Proiezioni ortogonali e algoritmo di Gram - Schmidt.

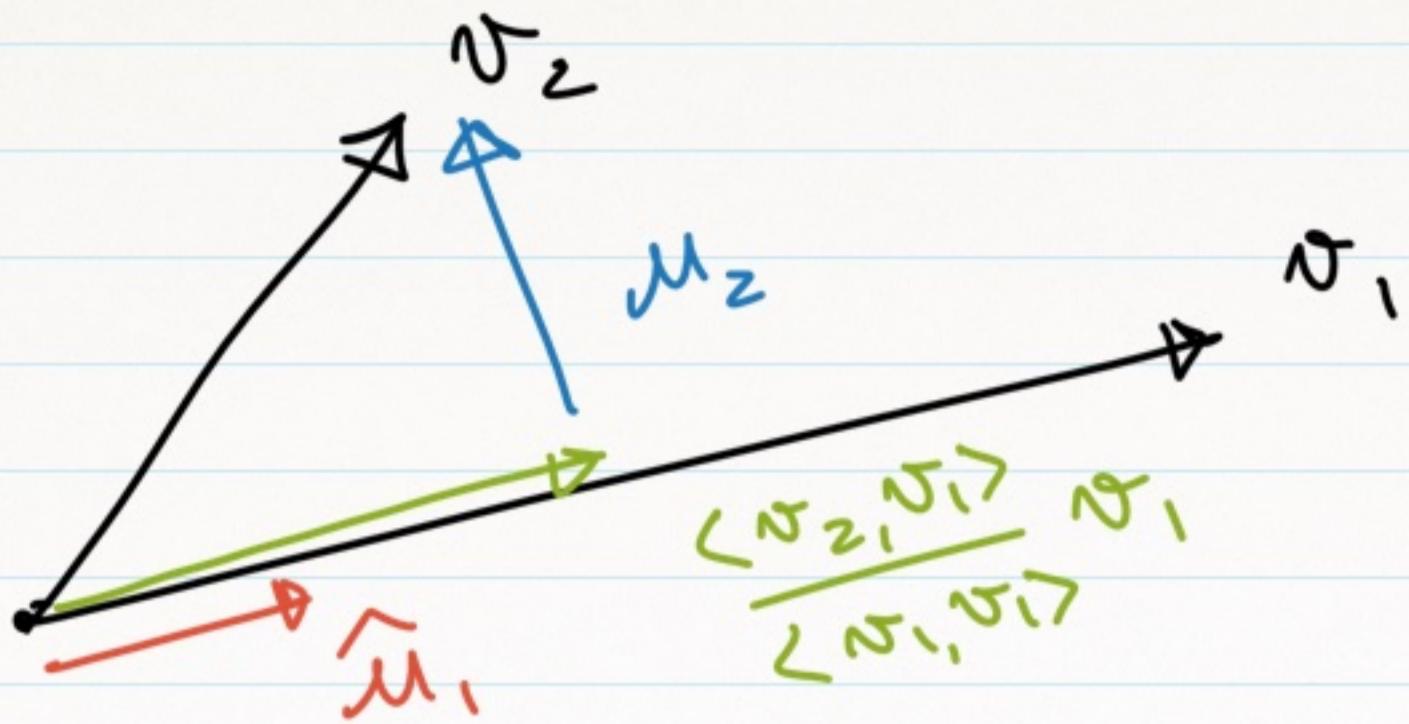
Teor 5.8: Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo. Partendo da una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è possibile ottenere una base \hat{B} che è ortonormale.

Dimm: Dimostrazione algoritmica = fornire un metodo per determinarla.

Poniamo $\hat{u}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$.

Analogamente definiamo:

$$\begin{aligned} u_2 &:= v_2 - \langle v_2, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 = \\ &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 \end{aligned}$$



Poniamo poi $\hat{m}_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$.

In generale poniamo :

$$m_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \hat{m}_i \rangle \hat{m}_i$$

$$\hat{m}_k := \frac{m_k}{\|m_k\|}$$

E s! Prendiamo la base di
 \mathbb{R}^3 date da :

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\widehat{\mu}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= v_2 - \langle v_2, \widehat{\mu}_1 \rangle \widehat{\mu}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\widehat{\mu}_2 := \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= v_3 - \langle v_3, \widehat{\mu}_1 \rangle \widehat{\mu}_1 - \langle v_3, \widehat{\mu}_2 \rangle \widehat{\mu}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$e \quad \widehat{\mu}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Def 5.9: Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo

Dato $U \subseteq V$ un sottosp. vettoriale, il **sottospazio ortogonale** a U e' definito come:

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Eser: Verificare che U^\perp e' un sottospazio vettoriale.

Prop 5.10: Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno sp. vettoriale euclideo.

Dato $U \subset V$ sottosp. vettoriale

i) Esiste una funzione lineare

$$P_U : V \longrightarrow U$$

che e' suriettiva e $\text{Ker } P_U = U^\perp$.

$$2) \dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

Dim: Sia $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ base di U . Posso supporre B ortonormale grazie al Teor 5.8.

Pongo:

$$P_U : V \longrightarrow U$$

$$P_U(v) := \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$$

Mostriamo che e' suriettiva.
Sia $v \in U$. Allora:

$v = \sum_{i=1}^k a_i m_i$ e vale :

$$P_U \left(\sum_{i=1}^k a_i m_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i P_U(m_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k a_i \left(\underbrace{\sum_{j=1}^k \langle m_i, m_j \rangle m_j}_{\text{" } m_i \text{ "}} \right) \\ &= m. \end{aligned}$$

Dunque su U ho simmetria
in quanto P_U e' l'identità.

Mostriamo che $\text{Ker } P_U = U^\perp$.

Se $v \in U^\perp$ allora :

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, m_i \rangle m_i = 0$$

quindi $v \in \text{Ker } P_U$.

Se $v \in \text{Ker } p_U$ allora

$$0 = p_U(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k \rangle u_k.$$

u_1, \dots, u_k base di $U \Rightarrow$

$$\langle v, u_1 \rangle = \cdots = \langle v, u_k \rangle = 0.$$

dovendo $v \in U^\perp$.

Eser: Verificare l'ultima
affermazione.

$$\begin{aligned} 2) \dim U^\perp &= \dim \text{Ker } p_U = \\ &= \dim V - \dim \text{Im } p_U \\ &= \dim V - \dim U. \end{aligned}$$

Oss: Vale: $V = U \oplus U^\perp$. 

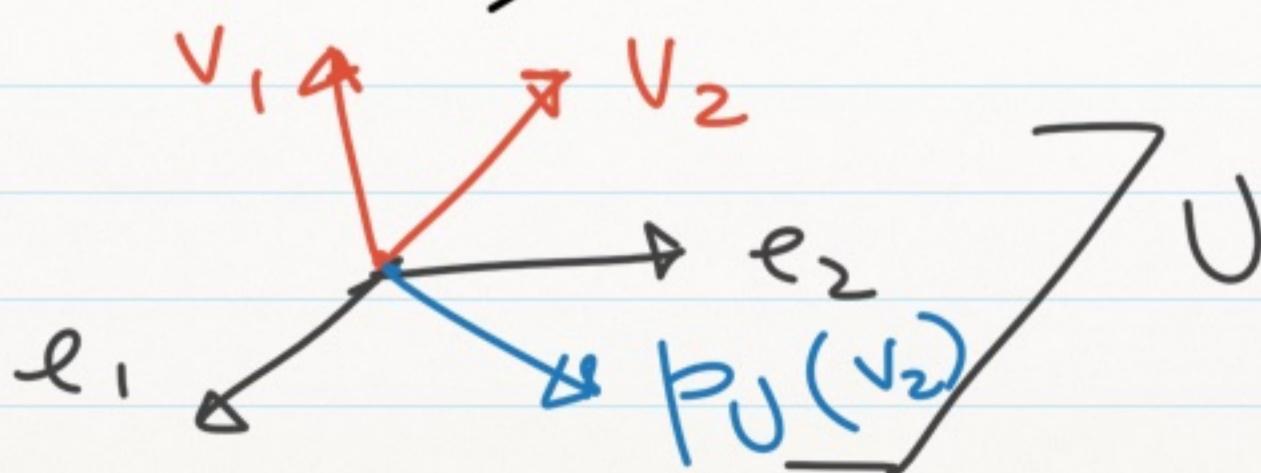
Def 5.11: Le funzione P_U definite nel
 Teor 5.10 si chiamano **proiezione**
ortogonale su U .

Ese Prendiamo $(\mathbb{R}^3, <, >)$
 con il prodotto scalare
 standard.

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_U(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_U(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Es: Calcoliamo in $(\mathbb{R}^4, <, >)$

di U^\perp una base ortonormale
dove

$$U := \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Per Teor 5.10 (2) so che:

$$\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 2 = 2.$$

Le equazioni cartesiane di U

Sono state ora:

$$0 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = x_1 + x_2$$

$$0 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = x_3 - x_4.$$

Quindi una base di U^\perp e':

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È ortogonale, basta dividere per le norme ciascun vettore.

5.2 Matrici e prodotti scalari

Def 5.12: Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp.

vettoriale euclideo.
Date una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$
di V , la matrice associate
a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto a B e'
una matrice

$$M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in M_n(\mathbb{R})$$

che ha nel posto (i,j) il

prodotto $\langle v_i, v_j \rangle$.

E s: $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Oss: Grazie al Teor 5.8 esiste sempre una base \widehat{B} ortonormale per $\langle \cdot, \cdot \rangle$, per cui vale:

$$M_{\widehat{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_{\text{dim } V}.$$

Prop 5.13: Siamo

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad D = \{w_1, \dots, w_n\}$$

due basi ortonormali di uno sp vettoriale euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
 Se

$$A = M_B^D(\text{id})$$

allora $A^T \cdot A = I_n$.

Dim: Per definizione vale:

$$w_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i \quad k=1 \dots n.$$

Calcoliamo,

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_e \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ik} v_i, \sum_{j=1}^n a_{je} v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik} a_{je} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ie} \end{aligned}$$

in quanto $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \theta_{ie} = (A^T \cdot A)_{ke}$$

$$\langle w_k, w_\ell \rangle = (I_n)_{ke}.$$

Oss: Se A soddisfa

$$A^T \cdot A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T.$$

Def 5.14 L'insieme delle matrici ortogonali è:

$$O(n) := \left\{ A \in M_m(\mathbb{R}) : A^T \cdot A = I_n \right\}$$

Eser: Mostrare che se
 $A \in O(n)$ allora
det $A = 1$.

Eser: Mostrare che se
 $AB \in O(n)$, allora
 $A^T B^{-1} \in O(n)$.

Prop 5.15: Le matrici di
 $O(2)$ hanno due
possibili forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$.

Dim: Omessa.