GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

Indirizzo mail:
alessio.savini@unimib.it

Esercitazioni: Prof.ssa Marina Avitabile
indirizzo mail: marina.avitabile@unimib.it

Lezioni
Martedì 8.50 - 10:30
Giovedì 9.00 - 11:30

Esami: Parte scritta, 90 minuti
domande a risposta multipla e numeriche
Soglia minima 14/30

Prova orale: per i voti compresi fra 14 – 17 è obbligatoria, altrimenti è facoltativa.

Per maggiori dettagli vedere pagine del corso.

Bibliografia: Testi pagine del corso + note settimanali

S La matematica è in primis un linguaggio. Per padroneggiarla dobbiamo impararne il vocabolario.

CAPITOLO 0: Insiemi e Funzioni

(Già visti in analisi 1 ma li rivediamo)

Un **insieme** è una collezione di oggetti con la medesima proprietà.
Uno di questi oggetti si chiama **elemento** dell'insieme.

Es: 1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
insieme dei numeri naturali

2) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$
insieme dei numeri interi

3) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{Z} \\ q \neq 0 \end{array} \right\}$
insieme dei numeri razionali

4) $\mathbb{R} = \{$ limiti di successioni razionali $\}$

Per dire che $\sqrt{2}$ è un elemento di $\mathbb{R}$ ma non di $\mathbb{Q}$

Scriviamo formalmente:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad , \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

simbolo di appartenenza — simbolo di non app.

Il numero di elementi di un insieme si chiama **cardinalità**.

Se la cardinalità è:

- zero, l'insieme è **vuoto**.
- un numero finito, l'insieme è **finito**.
- infinita, l'insieme è **infinito**

Es: 1) $A = \{$ insieme dei naturali divisibili per 2 $\}$

A è vuoto.

2) $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ è un insieme finito

3) $\mathbb{N}$ è un insieme infinito.

Un sottoinsieme è una sotto collezione di un insieme. Quest'ultimo viene detto insieme ambiente o universo.

Il complementare di un insieme A in un universo B corrisponde al sottoinsieme di elementi di B non in A.

In simboli

$$B \setminus A := \{ b \in B \mid b \notin A \}$$

Es: $A = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$$\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} = 2\mathbb{N}+1 = \{1, 3, 5, \dots\}$$

L'unione di due insiemi A, B è l'insieme che contiene gli elementi di A oppure quelli di B. In simboli

$m \in A \cup B$ se e solo se
$m \in A$ oppure $m \in B$.

L' intersezione di due insiemi A, B e' l'insieme che contiene gli elementi comuni ad A e B. In simboli:

$m \in A \cap B$ se e solo se
$m \in A$ e $m \in B$.

<u>Es:</u> $A = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$B = 3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$

$A \cap B = 6\mathbb{N} = \{0, 6, 12, \dots\}$

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$

Eser Dato un insieme X denotiamo con $\text{card}(X)$ la sua cardinalità.
Prendiamo X, Y insiemi di cardinalità finita.
Mostrare che:

$$\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(X \cap Y).$$

Eser: Dati 3 insiemi X, Y, Z verificare che:

1) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

2) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

3) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

4) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

5) $X-(Y\cap Z)=(X-Y)\cup(X-Z)$

6) $X-(Y\cup Z)=(X-Y)\cap(X-Z)$

Un quantificatore è un simbolo che si riferisce a quanti elementi di un insieme fissato soddisfano una proprietà.

Sono 4:

$\forall$ = per ogni $\quad$ $\exists!$ = esiste unico

$\exists$ = esiste $\quad$ $\nexists$ = non esiste

Es: 1) $A=4\mathbb{N}=\{0,4,8,\dots\}$

$\forall a\in A$: a è pari

2) $A=2\mathbb{N}+1=\{1,3,5\dots\}$

$\exists a\in A$: a è multiplo

di 3

3) $A = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$

$\exists !\, a \in A : 3 < a < 5$

4) $A = 2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, 7 \ldots\}$

$\nexists\, a \in A$: a è multiplo di 2.

Una funzione è una assegnazione

$f : A \longrightarrow B$

in cui ogni elemento di A $a \in A$ viene mandato in un unico elemento di B, denotato con $f(a)$.

L'insieme A si dice dominio

L'insieme B si dice codominio

La funzione si dice iniettiva se vale che:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

o equivalentemente:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

L'immagine di A tramite f è il sottoinsieme di B definito da:

$$f(A) := \{ b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b \}$$

La funzione è suriettiva se

$$f(A) = B$$

o equivalentemente:

$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

Se una funzione è sia iniettiva sia suriettiva si dice biettiva.

Es: 1) $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longrightarrow n$

è una funzione iniettiva ma non suriettiva

2) $j : \mathbb{R} \longrightarrow \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$

$j(x) = x^2$ è suriettiva ma non iniettiva.

3) Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$m_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$m_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ è una biezione

1) Date due funzioni

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad g : Y \longrightarrow Z$$

la composizione di f e g è la funzione definita da

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Es: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longrightarrow 2x$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad y \longrightarrow y^2$

$$(g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Chiamiamo identità la funzione

$$id_A : A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow a$$

Questa funzione e' chiaramente biettiva.

<u>Es:</u> Dati due insiemi A e B consideriamo

$$f : A \longrightarrow B$$

Mostrare che sono equivalenti:

- f è una funzione biettiva.
- Esiste una funzione $g : B \longrightarrow A$ t. c.

$$g \circ f = id_A \quad e \quad f \circ g = id_B .$$

.

Dati due insiemi X, Y, il loro prodotto cartesiano è

$$X \times Y = \{ \underset{\text{coppia ordinata}}{(x,y)} \mid x \in X, y \in Y \}$$

Es: $X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{a, b\}$

$$X \times Y = \{ (1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b) \}$$

Noi useremo molto:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \stackrel{!}{=} \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \}.$$