3.2 Matrici, determinante e applicazioni lineari

Abbiamo visto che l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno sp. vettoriale.
Vogliamo introdurre una nuova operazione.

Def 3.13: Date due matrici

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad B \in M_{n,e}(\mathbb{R})$$

il prodotto righe per colonne è una matrice

$$C \in M_{m,e}(\mathbb{R})$$

il cui termine di posto (i,j) è:

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

dove $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Quindi in generale

$$AB \neq BA$$

Eser: Verificare le proprietà:

1) $A(B+C) = AB + AC$

2) $(A+B)C = AB + AC$

3) $(AB)C = A(BC)$

oss: $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$
oppure $B = 0$.

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oss: Se prendo $A, B \in M_n(\mathbb{R})$
allora $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

Def 3.141 La **matrice identità** $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ è
la matrice:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, diciamo che A è **invertibile** se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$:

$$AB = BA = I_n.$$

In questo caso scriviamo $B = A^{-1}$.

Domanda: Quando A è invertibile? Se A è invertibile come si calcola l'inversa?

Fatto 3.15: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) A è invertibile

2) L_A è un isomorfismo

3) $n = r(A) = \dim col(A)$
$= \dim Row(A)$

Algoritmo 3.16: (Gauss - Jordan per l'inversa)

Supponiamo di avere $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile.

1) Affianchiamo A alla matrice identità:

$$(A \mid I_n)$$

2) Riduciamo a scala A con Gauss: questo modifica I_n.

3) Con le operazioni elementari per righe, si riduce la matrice A in forma diagonale.

4) Si moltiplica ogni riga per a_{ii}^{-1}.

Si ottiene: $\left(I_n \mid A^{-1}\right)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Considero:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 + R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2} R_2 \\ -R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esistono altri modi per verificare se una matrice è invertibile?

Def 3.17: (Sviluppo di Laplace)

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il **determinante** è una funzione RICORSIVA così definita.

1) Se $n = 1$ allora $A = (a_{11})$ e $\det A = a_{11}$

2) Se $n = 2$ allora $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

3) Per un qualunque n, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

lo sviluppo di Laplace rispetto

alla I^a riga è:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k}$$

dove A_{1k} è la matrice che si ottiene da A rimuovendo la prima riga e la k-esima colonna.

<u>Es.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = (+1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= 2 + 0 - (-2) = 4 \neq 0.$

Notiamo che le colonne di A (o equivalentemente le righe) sono linearmente indipendenti.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-4) \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 0.$

In questo caso le colonne sono lin. dipendenti.

Elenco proprietà:

1) Il ruolo della prima riga non è essenziale.
Precisamente, si può prendere l' i-esima riga!

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

dove A_{ik} è la matrice ottenuta rimuovendo la riga i-esima e la colonna k-esima.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rispetto alla 3^a riga:

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 .$$

2) A e' invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$

Quindi sono equivalenti:

- A invertibile
- $\det A \neq 0$
- $r(A) = n$
- L_A isomorfismo

3) $\det A = \det A^T$.

Come conseguenza otteniamo:

*) A invertibile se e solo se A^T e' invertibile.

*) Possiamo sviluppare il determinante rispetto a qualunque COLONNA:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \cdot \det A_{ki}$$

<u>Es:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Rispetto alla 2^a colonna:

$$\det A = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8.$$

4) Formula moltiplicativa di

Binet : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

da cui deduciamo che se :

$$\det AB \neq 0 \iff \det A \neq 0 \text{ e } \det B \neq 0$$

<u>Eser</u>: Mostrare che :

1) $\det I_n = 1$.

2) Se A e' invertibile :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

3) Date $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, se esiste X invertibile t.c :

$$A = X \cdot B \cdot X^{-1}$$

allora $\det A = \det B$.

5) Il determinante è una funzione:

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Poiché $M_n(\mathbb{R})$ è isomorfo a $(\mathbb{R}^n)^n$, possiamo vedere il determinante come una funzione delle colonne di A, cioè:

$$\det : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ scriviamo

$$A = (A^1 | A^2 | \dots | A^n)$$

dove A^i = i-esima colonna.

Allora il determinante è lineare rispetto a ogni singola variabile (una volta fissate le altre $n-1$ colonne).

Precisamente: dati $X \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\det\left(A^1 | \dots | A^i + X | \dots A^n\right) =$$

$$= \det\left(A^1 | \dots | A^i | \dots A^n\right) + \det\left(A^1 | \dots | X | \dots | A^n\right)$$

$$\det\left(A^1 | \dots | \alpha A^i | \dots A^n\right) =$$

$$= \alpha \det\left(A^1 | \dots | A^i | \dots | A^n\right)$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det A = -4.$

Le colonne sono:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \left(4A^1 \middle| 2A^1 - 3A^2 \middle| A^2 + A^3 \right)$$

$$= \det \left(4A^1 \middle| 2A^1 \middle| A^2 + A^3 \right) - \det \left(4A^1 \middle| 3A^2 \middle| A^2 + A^3 \right)$$

$$= 8 \det \left(A^1 \middle| A^1 \middle| A^2 + A^3 \right) - 12 \det \left(A^1 \middle| A^2 \middle| A^2 + A^3 \right) =$$

$$= 0$$

$$= -12 \det \left(A^1 \middle| A^2 \middle| A^2 \right) - 12 \det A$$

$$= -12 \det A = 48.$$

6) Scambiando fra loro due righe o due colonne il segno del determinante cambia.

Es: $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 1$.

7) (Criterio dei determinanti minori)

Facciamo una scelta di k righe e k colonne di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

L'intersezione di queste righe e colonne definisce una matrice quadrata di ordine k.

Se gli insiemi

$$I \subseteq \{1, \dots, m\} \quad J \subseteq \{1, \dots, n\}$$

corrispondono alle scelte fatte, denotiamo con A_{IJ} la matrice di ordine k ottenuta.

<u>Es:</u> $I = \{1, 2\}$ $J = \{2, 3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A_{IJ} ottenuta

$\Rightarrow$ dagli elementi comuni è

$$A_{IJ} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Teor 3.18! (Criterio dei determinanti minori)

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice qualunque.
Il rango di A è pari a k se esiste una scelta I di k righe e J di k colonne tale che

$$\det A_{IJ} \neq 0$$

e tutte le scelte I' di $(k+1)$-righe con $I \subset I'$ e J' di $(k+1)$-colonne con $J \subset J'$ soddisfano

$$\det A_{I'J'} = 0 .$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2$ in quanto
scegliendo

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

e

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$= 0.$