Il caso della distanza di un punto da una retta in $\mathbb{R}^3$ necessita di una nozione preliminare.

Prop 6,18: Sia $(V, \langle , \rangle)$ sp. vettoriale euclideo. Se $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare, $\exists !\, w \in V$:

$$\varphi(v) = \langle v, w \rangle \quad \forall v \in V.$$

Dim: Supponiamo di avere $w_1, w_2 \in V$:

$$\langle v, w_1 \rangle = \varphi(v) = \langle v, w_2 \rangle.$$

$\Rightarrow \forall v \in V: \quad \langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow w_1 - w_2 \in V^\perp = \{0\} \Rightarrow w_1 = w_2.$

Quindi w è unico.

Mostriamo che esiste. Se $\varphi = 0$ $\Rightarrow w = 0$ quindi supponiamo $\varphi \neq 0$.

$\Rightarrow \varphi$ e' suriettiva e

$$U := \operatorname{Ker} \varphi$$

ha dimensione $\dim V - 1$.

Prendiamo $\hat{w} \in V$ con:

$$\| \hat{w} \| = 1 \quad \text{e} \quad U^{\perp} = \operatorname{Span}\{\hat{w}\}.$$

Poniamo

$$w := \varphi(\hat{w}) \cdot \hat{w}$$

e consideriamo $u_1 \dots u_{n-1}$ base ortonormale di U.

Dato $v \in V$ si ha:

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + b w$$

$$\begin{aligned}
\varphi(v) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + b w \right) \\
&= \varphi(b w) = b \, \varphi(w) \\
&= b \cdot \varphi(\hat{w})^2 .
\end{aligned}$$

$$\langle v, w \rangle = b \langle w, w \rangle = b \, \varphi(\hat{w})^2 .$$

Oss: Per multilinearità, dati $x, y \in \mathbb{R}^3$ si ha che:

$$\det_{x,y} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longrightarrow \det(z, x, y)$$

è lineare. Per la Prop 6,18 vale: $\exists!\, w \in \mathbb{R}^3$.

$$\det_{x,y}(z) = \langle z, w \rangle .$$

Def 6,19: Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ chiamiamo prodotto esterno (o vettoriale) l'unico vettore $v \wedge w$ che

$$\det_{v,w}(x) = \langle v \wedge w, x \rangle .$$

Dati $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \langle v \wedge w, e_1 \rangle = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= b_1 c_2 - c_1 b_2$$

Facendo lo stesso con b_3, c_3 si ha:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

<u>Es:</u> $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Prop 6.20: Valgono le seguenti proprietà:

1) $u \wedge v = - v \wedge u \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$

2) $u \wedge v = 0$ sse sono lin. dip.

3) $u \wedge v \in \operatorname{Span}\{u, v\}^{\perp}$.

Dim: 1) Sia $x \in \mathbb{R}^3$. Vale:

$$\langle u \wedge v, x \rangle = \det(x | u | v) =$$

$$= - \det(x | v | u) =$$

$$= - \langle v \wedge u, x \rangle =$$

$$= \langle - v \wedge u, x \rangle.$$

$$\Rightarrow u \wedge v = - v \wedge u.$$

2) Se $\{u, v\}$ sono dipendenti

$v = a u$ per $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Preso $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle u \wedge v, x \rangle = \det(x \,|\, u \,|\, \overset{au}{\overset{\parallel}{v}}) = 0$$

$\Rightarrow u \wedge v \in (\mathbb{R}^3)^{\perp} = \{0\}$.

Se u, v sono indip. allora $\exists\, x \in \mathbb{R}^3 :$ u, v, x base.

$$\langle u \wedge v, x \rangle = \det(x \,|\, u \,|\, v) \neq 0.$$

$\Rightarrow u \wedge v \neq 0$.

3) Basta vedere che $u \wedge v$ è ortogonale a u e v.

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u \,|\, u \,|\, v) = 0.$$

$$\langle u \wedge v, v \rangle = \det(v \,|\, u \,|\, v) = 0.$$

Prop 6.20: Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ vale:
$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$

Dimm: Omessa.

oss: Abbiamo visto che:
$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos \vartheta_{u,v}.$$
Quindi:
$$\begin{aligned}\|u \wedge v\|^2 &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cos^2 \vartheta_{u,v} \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \vartheta_{u,v}) \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \sin^2 \vartheta_{u,v}.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \sin \vartheta_{u,v}$$

Prop 6.21: Sia L una retta

vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e sia $U = L^\perp$. Dato $x \in \mathbb{R}^3$ vale:

$$\| \pi_U (x) \| = \| x - \pi_L (x) \| = \frac{\| x \wedge v \|}{\| v \|}$$

dove $v \in L$, $v \neq 0$.

Dim: Poniamo

$$y = \pi_L (x) \quad , \quad z = \pi_U (x).$$

$$y = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

Grazie a Pitagora:

$$\| x \|^2 = \underline{\| y \|^2} + \| z \|^2.$$

Quindi:

$$\|\pi_U(x)\|^2 = \|z\|^2 =$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle^{\cancel{2}}}\,\cancel{\langle v, v\rangle} =$$

$$= \frac{\langle x, x\rangle\langle v, v\rangle - \langle x, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} =$$

$$= \frac{\|x \wedge v\|^2}{\|v\|^2}. \qquad \square$$

euclideo

<u>OSS:</u> Prendiamo A, B, C, D quattro punti complanari in $\mathbb{R}^3$ visto come spazio affine. Supponiamo A, B, C, D formino un parallelogramma. Poniamo:

$$H = \pi_{B-A}(C)$$

e siano $u = B - A$
$v = C - A$

$$\text{Area}(ABCD) =$$
$$\stackrel{!}{=} \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\theta_{u,v}$$
$$\stackrel{!}{=} \|u \wedge v\| =$$
$$\stackrel{!}{=} \|(B-A) \wedge (C-A)\| .$$

Analogamente:

$$\text{Area}(ABC) = \frac{\|(B-A) \wedge (C-A)\|}{2}$$

__Es:__ $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Area}(ABC) = $$

$$= \frac{\|(B-A)\wedge(C-A)\|}{2}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{2} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{2}$$

$$= \sqrt{6}/2 .$$

Torniamo alla proiezione ortogonale su una retta affine.

Scriviamo la retta in forma parametrica

$$r : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendiamo $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,

$Q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in r$ e $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Sappiamo che:

$$d(P_0, r) = \| \pi_\perp (P_0 - Q) \|$$

$$\overset{!}{=} \frac{\| (P_0 - Q) \wedge v \|}{\| v \|}$$

grazie alla prop 6.21.

<u>Es:</u> Sia $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ t-1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Determinare la distanza fra P_0 e r.

<u>Sol:</u> Sappiamo che

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

è un punto della retta.

$$P_0 - Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La direzione di r è generata da:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(P_0 - Q) \wedge V = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

.

$$\|(P_0 - Q) \wedge v\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad d(P_0, r) = 2\sqrt{\frac{5}{6}}.$$