

Architettura degli Elaboratori 2025-2026

Sistemi numerici

Prof. Elisabetta Fersini
elisabetta.fersini@unimib.it

Introduzione

- L'aritmetica svolta dai computer differisce dall'aritmetica a noi familiare: i motivi sono molteplici, ma quello principale è sicuramente da attribuire alla diversa modalità nella rappresentazione dei dati e delle informazioni.
- Se per noi il **sistema decimale** può sembrare scontata, non è certo lo stesso per i computer. Infatti i calcolatori lavorano, sfruttando il **sistema binario**. Sistema in cui le uniche cifre ammissibili per rappresentare numeri interi, decimali (ma anche stringhe, caratteri, booleani) sono 0 e 1.
- Una motivazione concreta e intuitiva può essere ricercata in ciò che alimenta i computer: la corrente elettrica. Come si potrebbero rappresentare 10 cifre diverse utilizzando la corrente? Magari è possibile, ma sarebbe molto più complesso che distinguere fra corrente sì e corrente no, ovvero 1 e 0.

Introduzione

- Come un computer è in grado di attribuire un **significato** ad una serie di 0 e di 1?
- Supponiamo che la seguente serie rappresenti un numero.

1101010

Come potrebbe un calcolatore capirne il valore per utilizzarlo nelle operazioni aritmetiche? E se invece questi 0 e 1 rappresentassero una stringa?

- Per ovviare a questi problemi sono stati definiti degli **standard di codifica**, ossia delle regole che vengono utilizzate nella rappresentazione dei dati in formato binario che vanno a coprire le più varie necessità di **rappresentazione dell'informazione**.

Bit e Configurazioni

- Come sappiamo, con il termine **bit** definiamo l'**unità di misura dell'informazione**. Un bit può assumere solo il valore di 0 o 1.
- Combinando tra loro più bit si ottengono strutture più complesse. In particolare:
 - byte, 8 bit
 - nybble, 4 bit
 - word, 32 bit
 - halfword, 16 bit
 - doubleword, 64 bit

Bit e Configurazioni

- Quante configurazioni diverse una sequenza di 2 bit può assumere?
- Chiamiamo **a** il primo bit e **b** il secondo bit.

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

- In totale 4 configurazioni. Più generalmente dati **k bit**, il numero di **configurazioni** ottenibili è pari a **2^k** .

Entità e Rappresentazioni

- Una **rappresentazione** è un modo per descrivere un'entità
- Sistemi numerici:
 - l'entità numero o valore
 - la rappresentazione
- *Esempio:* Per il valore “*sedici*”
 - la sua rappresentazione nel sistema decimale è 16_{10}
 - la sua rappresentazione nel sistema binario è 10000_2
 - 16_{10} e 10000_2 sono due rappresentazioni differenti della stessa entità

Sistemi numerici (1)

- Il **sistema numerico decimale**:
 - usa 10 cifre
 - è un **sistema posizionale**: ogni cifra assume un valore diverso a seconda della posizione che occupa all'interno del numero:
 - la posizione delle unità
 - la posizione delle decine
 - la posizione delle centinaia
 - ...
- Prendiamo le cifre 1 e 2.
 - Se scrivessimo **12**, significherebbe che abbiamo una decina e due unità.
 - Se invertissimo l'ordine delle due cifre scriveremmo **21**, indicando che abbiamo due decine e una unità.
- Quindi il valore che ha una cifra cambia a seconda della sua posizione nel numero.

Sistemi numerici (2)

- Un esempio di **sistema numerico non posizionale**?
- Il **sistema romano**:
 - non esistono le posizioni delle unità, decine, centinaia, ...
 - X è sempre 10, indipendentemente dalla sua posizione

Esempio: il numero IV = 4

“I” non è una decina, “V” non è un’unità (altrimenti si leggerebbe 15)

Sistemi numerici (3)

- Nei **sistemi numerici posizionali** un valore numerico N è caratterizzato dalla seguente **rappresentazione**:

$$N = d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1d_0, d_{-1}\dots d_{-m}$$

$$N = d_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + d_0 \cdot r^0 + d_{-1} \cdot r^{-1} + \dots + d_{-m} \cdot r^{-m}$$

$$N = \sum_{i=-m}^{n-1} d_i \cdot r^i$$

- Dove:
 - d rappresenta la singola cifra (*digit*)
 - r è la radice o base del sistema
 - n è il numero di cifre della parte intera (sinistra della virgola)
 - m è il numero di cifre della parte frazionaria (destra della virgola)

Sistema decimale

- Base $r = 10$
- Cifre $d = 0, 1, \dots, 9$
- Un valore numerico N si rappresenta come:

$$N = d_{n-1} \square 10^{n-1} + \dots + d_0 \square 10^0 + d_{-1} \square 10^{-1} + \dots + d_{-m} \square 10^{-m}$$

- Nota bene: tutte le volte che si farà riferimento ad un valore senza specificarne la base, lo si considererà in base 10
- In caso contrario la **base** verrà specificata come **pedice** della cifra di peso più basso: es. 1001011_2

Sistema decimale

- *Esempio* di rappresentazione nel sistema decimale:

$$123,45 = 1 \cdot \mathbf{10}^2 + 2 \cdot \mathbf{10}^1 + 3 \cdot \mathbf{10}^0 + 4 \cdot \mathbf{10}^{-1} + 5 \cdot \mathbf{10}^{-2}$$

Sistema binario

- Base $r = 2$
- Cifre $d = 0,1$
- Un valore numerico N si rappresenta come:

$$N = d_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + d_0 \cdot 2^0 + d_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots + d_{-m} \cdot 2^{-m}$$

- Nota bene:
 - Avendo a disposizione n bit posso codificare l'intervallo di valori $[0, 2^n - 1]_{10}$
 - Posso quindi definire 2^n codifiche binarie
- Cifra binaria: “*bit*” (*binary digit*)

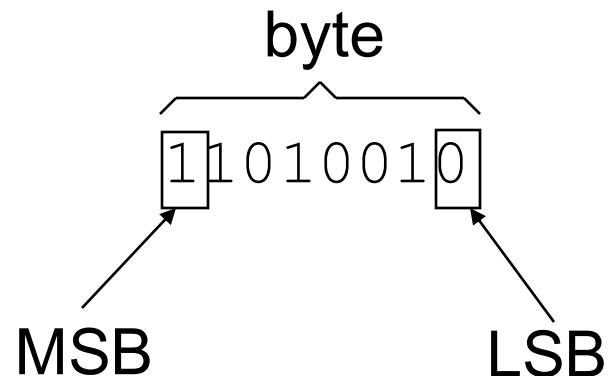
Sistema binario

- *Esempio* di rappresentazione nel sistema binario:

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10}$$

Sistema binario

- **Byte**: una sequenza di **otto bit** consecutivi:



- *Most Significant Bit* (MSB) - il bit più a sinistra
- *Least Significant Bit* (LSB) - il bit più a destra

Sistema ottale

- Base $r = 8$
- Cifre $d = 0, 1, \dots, 7$
- Un valore numerico N si rappresenta come:

$$N = d_{n-1} \cdot 8^{n-1} + \dots + d_0 \cdot 8^0 + d_{-1} \cdot 8^{-1} + \dots + d_{-m} \cdot 8^{-m}$$

- *Esempio:*

$$127_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 87_{10}$$

Sistema esadecimale

- Base $r = 16$
- Cifre $d = 0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$
- Un valore numerico N si rappresenta come:

$$N = d_{n-1} \square 6^{n-1} + \dots + d_0 \square 6^0 + d_{-1} \square 6^{-1} + \dots + d_{-m} \square 6^{-m}$$

- *Esempio:* $A1_{16} = A \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 161_{10}$
- Nota bene:
 - Spesso si usa il pedice $_H$ al posto del pedice $_{16}$ per indicare la base esadecimale oppure **0x** davanti al numero (e.g., **0xA1**)
 - Il sistema esadecimale viene spesso abbreviato come **esa** oppure **hex**

Sistema esadecimale

$$A_H = 10_{10} = 1010_2$$

$$B_H = 11_{10} = 1011_2$$

$$C_H = 12_{10} = 1100_2$$

$$D_H = 13_{10} = 1101_2$$

$$E_H = 14_{10} = 1110_2$$

$$F_H = 15_{10} = 1111_2$$

- Nota bene: più è grande il valore della base, più è **compatta** la rappresentazione di uno stesso valore (ossia il numero risultante è composto da meno cifre)

Sistema esadecimale

- Il grande vantaggio del sistema esadecimale è la **compattezza** dei suoi numeri, poiché la base 16 consente di utilizzare meno cifre per rappresentare un dato numero rispetto al formato binario o decimale.



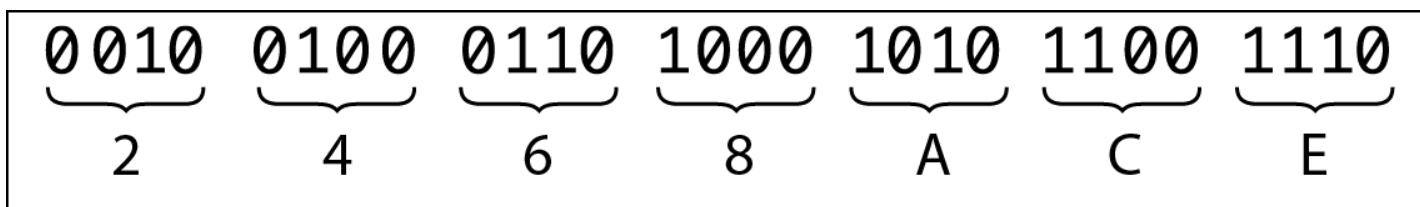
1111 0101 1100 1111 → F5CF

Sistema esadecimale

- La rappresentazione esadecimale è di **facile conversione**: passare dal binario all'esadecimale è semplice e immediato: basta raggruppare i bit in blocchi di 4.

0010010001101000101011001110

0010 – 0100 – 0110 – 1000 – 1010 – 1100 - 1110



Sistema esadecimale

- La rappresentazione esadecimale è caratterizzata da **maggior leggibilità** rispetto alle stringhe binarie molto lunghe

0xFF **vs** 11111111

Sistema esadecimale

- La rappresentazione esadecimale è lo **standard** nel mondo informatico:
 - rappresentazione di indirizzi di memoria

00000000 00000000 00000001 00001100

0x0000010C

Sistema esadecimale

- La rappresentazione esadecimale è lo **standard** nel mondo informatico:
 - codici macchina e linguaggi assembly

Esempio Assembly (MIPS)

addi \$t0, \$zero, 5

Codice macchina (binario a 32 bit)

001000 00000 01000 0000 0000 0000 0101

dove:

- 001000 → opcode per addi
- 00000 → registro sorgente \$zero
- 01000 → registro destinazione \$t0
- 0000 0000 0000 0101 → valore immediato 5

Codice macchina (esadecimale) 0x20080005

Sistema esadecimale

- La rappresentazione esadecimale è lo **standard** nel mondo informatico:
 - rappresentazione di colori in grafica (#RRGGBB)

Colore	Colore HEX	colore RGB
	# 000000	rgb (0,0,0)
	# FF0000	rgb (255,0,0)
	# 00FF00	rgb (0,255,0)
	# 0000FF	rgb (0,0,255)
	# FFFF00	rgb (255,255,0)
	# 00FFFF	rgb (0.255.255)
	# FF00FF	rgb (255,0,255)
	# C0C0C0	rgb (192,192,192)
	#FFFFFF	rgb (255,255,255)

Confronto tra rappresentazioni

$0_{\text{hex}} = 0_{\text{dec}} = 0_{\text{oct}}$	0 0 0 0
$1_{\text{hex}} = 1_{\text{dec}} = 1_{\text{oct}}$	0 0 0 1
$2_{\text{hex}} = 2_{\text{dec}} = 2_{\text{oct}}$	0 0 1 0
$3_{\text{hex}} = 3_{\text{dec}} = 3_{\text{oct}}$	0 0 1 1
$4_{\text{hex}} = 4_{\text{dec}} = 4_{\text{oct}}$	0 1 0 0
$5_{\text{hex}} = 5_{\text{dec}} = 5_{\text{oct}}$	0 1 0 1
$6_{\text{hex}} = 6_{\text{dec}} = 6_{\text{oct}}$	0 1 1 0
$7_{\text{hex}} = 7_{\text{dec}} = 7_{\text{oct}}$	0 1 1 1
$8_{\text{hex}} = 8_{\text{dec}} = 10_{\text{oct}}$	1 0 0 0
$9_{\text{hex}} = 9_{\text{dec}} = 11_{\text{oct}}$	1 0 0 1
$A_{\text{hex}} = 10_{\text{dec}} = 12_{\text{oct}}$	1 0 1 0
$B_{\text{hex}} = 11_{\text{dec}} = 13_{\text{oct}}$	1 0 1 1
$C_{\text{hex}} = 12_{\text{dec}} = 14_{\text{oct}}$	1 1 0 0
$D_{\text{hex}} = 13_{\text{dec}} = 15_{\text{oct}}$	1 1 0 1
$E_{\text{hex}} = 14_{\text{dec}} = 16_{\text{oct}}$	1 1 1 0
$F_{\text{hex}} = 15_{\text{dec}} = 17_{\text{oct}}$	1 1 1 1

Conversione tra sistemi numerici

- Consideriamo per il momento **solo valori interi** (o la parte intera di un valore frazionario)
- La **conversione** da qualsiasi base **r** a base **10** avviene come segue:

$$N_r = d_{n-1} \square r^{n-1} + \dots + d_0 \square r^0 = M_{10}$$

- *Esempi:*

$$1010_2 = (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)_{10} = 10_{10}$$

$$26_8 = (2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0)_{10} = 22_{10}$$

$$431_5 = (4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0)_{10} = 116_{10}$$

Conversione tra sistemi numerici

- Consideriamo per il momento **solo valori interi** (o la parte intera di un valore frazionario)
- La **conversione** da base 10 a qualsiasi base r avviene come segue:
 - ① Dividiamo il valore numerico N per la base r fino a quando l'ultimo quoziente è minore della base stessa (r)
 - ② Prendiamo l'ultimo quoziente e tutti i resti delle divisioni, e procedendo dall'ultimo resto al primo, li scriviamo da sinistra verso destra

Conversione tra sistemi numerici

- *Esempio:* Convertire il numero 12 da base 10 a base 2
- $12 : 2 = 6$ con resto=0
- $6 : 2 = 3$ con resto =0
- $3 : 2 = 1$ con resto =1
- $1 : 2 = 0$ con resto =1
- quindi:

$$12_{10} = 1100_2$$

Conversione tra sistemi numerici

- *Esempio:* convertire il numero 120 da Base 10 a Base 8
- $120 : 8 = 15$ con resto = 0
- $15 : 8 = 1$ con resto = 7
- $1 : 8 = 0$ con resto 1

quindi:

$$120_{10} = 170_8$$

Conversione tra sistemi numerici

- *Esempio:* convertire il numero 1253 da base 10 a base 16
- $1253 : 16 = 78$ con resto = 5
- $78 : 16 = 4$ con resto = 14 = E
- $4 : 16 = 0$ con resto 4

quindi:

$$1253_{10} = 4E5_{16}$$

Conversione tra sistemi numerici

- Alcune osservazioni:
 - La conversione dalla base 2 alla base 16 e/o 8, e viceversa, è più **semplice** e veloce di quella da decimale ad altre basi.
 - Infatti basta considerare che per rappresentare le sedici cifre diverse del codice esadecimale occorrono 4 bit mentre per rappresentare le otto cifre diverse del codice ottale occorrono 3 bit.
 - Ne risulta che per convertire un numero binario in esadecimale, è sufficiente raggruppare le cifre binarie rispettivamente in gruppi di quattro a partire da quelle "meno significative": si ricava immediatamente il numero grazie alla sostituzione dei bit così ricavati con la cifra esadecimale corrispondente.

Conversione tra sistemi numerici

- Esempio: conversione da binario in esadecimale

0111 1111 0001 1010 → 7 15 1 10 → 7F1A₁₆

- dove:
 - 1010 (conversione da binario a decimale) = 10 in esadecimale corrisponde ad A
 - 0001 (conversione da binario a decimale) = 1 in esadecimale corrisponde ad 1
 - 1111 (conversione da binario a decimale) = 15 in esadecimale corrisponde ad F
 - 0111 (conversione da binario a decimale) = 7 in esadecimale corrisponde ad 7

Conversione tra sistemi numerici

- Consideriamo per il momento solo valori interi (o la parte intera di un valore frazionario)
- La conversione da qualsiasi base p a qualsiasi base q avviene come segue:
 - ① Convertire il numero da base p a base 10
 - ② Convertire il risultato da base 10 a base q



Conversione tra sistemi numerici

- *Esempio:* Convertire il numero $AB2_{16}$ in binario.
- $A_{16} = 10_{10} = 1010_2$
- $B_{16} = 11_{10} = 1011_2$
- $2_{16} = 2_{10} = 0010_2$
- quindi

$$AB2_{16} = 101010110010_2$$

Conversione tra sistemi numerici

- *Esempio:* Convertire il numero $(516)_8$ in Binario.
- $5_8 = 5_{10} = 101_2$
- $1_8 = 1_{10} = 001_2$
- $6_8 = 6_{10} = 110_2$
- quindi

$$516_8 = 101001110_2$$

Conversione tra sistemi numerici

- E se dovessimo convertire un numero da base 2 a base 8?

$$101011_2 = ?????_8$$

- Oppure da base 8 a base 2?

$$5371_8 = ???_2$$

- E da base 8 a base 16?

$$742_8 = ???_{16}$$

HINT: consideriamo il numero di bit di cui ho bisogno in una base per rappresentare l'equivalente numero in un'altra base

Rappresentazione dei valori

- La rappresentabilità dei valori è legata al numero di **cifre disponibili**.
- Nei sistemi di elaborazione, come in generale in tutte le applicazioni pratiche, **il numero di cifre** impiegate nella rappresentazione di valori numerici **è limitato**.
- Si ha **overflow** quando si è nell'impossibilità di rappresentare il risultato di una operazione (e.g.,una somma o una sottrazione) con il numero di cifre a disposizione.

Rappresentazione dei valori

- Come anticipato, nel **sistema binario** abbiamo:

n numero di bit	2^n numero di valori	$2^n - 1$ max valore rappresentabile
1	2	1
2	4	3
3	8	7
4	16	15
5	32	31
6	64	63
...

Rappresentazione dei valori

- La rappresentazione dei valori nel sistema binario è quindi diversa rispetto al sistema decimale:

- **Kilo** non indica 1000, bensì:

$$2^{10} = 1024$$

- **Mega** indica la quantità:

$$2^{20} = 1048576$$

- **Giga** indica:

$$2^{30} = 1073741824$$