5 teoria   2 esercizi
lun

Logica Proposizionale p, q valore di verità V, F

Tabelle di verità formula $\mathcal{P} = \{ p : \text{proposizioni} \}$

$\neg : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $p \mapsto \neg p$ NEGAZIONE

$\wedge : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ CONGIUNZIONE $p \wedge q$

$\vee : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ DISGIUNZIONE (INCLUSIVA) $p \vee q$

$\to : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ IMPLICAZIONE FORMALE $p \to q$

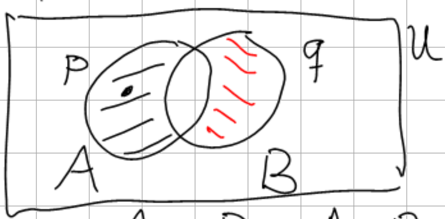
$\leftrightarrow : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ EQUIVALENZA LOGICA $p \leftrightarrow q$

p	$\neg p$
V	F
F	V

A A^c

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	p XOR q
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Diagrammi Eulero-Venn



$A \cap B$ $A \cup B$ $A \subseteq B$ $A = B$ $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$p \wedge q = q \wedge p$ commutativa di $\wedge$

Convertire questo linguaggio in forma algebrica

V $\to$ 1 p proposizione x il suo valore di verità
F $\to$ 0 q " y

$p \& q$, p AND q , $p \wedge q$ $\min(x, y)$ $x * y$ xy

$p \&\& q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

$x + y$

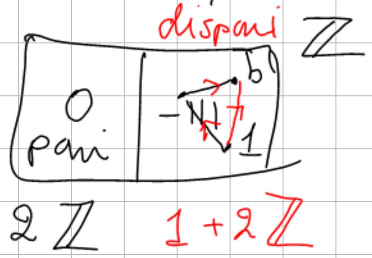
x	y	$x+y$
1	1	0 ??
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Imposizione su $\mathbb{Z}$

$1+1 = \boxed{2 \equiv 0}$ relazione di equivalenza

$R \subseteq A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

$R \subseteq A \times A = A^2$



$(a,b) \in R$

$aRb \iff$ $b-a$ è pari

$b + |1| = 2z \quad z \in \mathbb{Z}$

$b = -|1| + 2z$

disgiunzione esclusiva XOR

$(p \text{ XOR } q) \text{ XOR } t \qquad 1+1+1 \equiv 3 \equiv 1$

pari $\to 0$

dispari $\to 1$

$(q \text{ XOR } p) \text{ XOR } t$

x	$\neg x$
1	0
0	1

x	$1+x$
1	$2 \equiv 0$
0	1

Prop: $x \vee y = x + y + xy$

or

|

x	y	$x \vee y$	$x+y+xy$
1	1	1	1
1	0	1	$1+0+1\cdot 0 = 1$
0	1	1	1
0	0	0	0

Esercizio 1: Provare che $p \to q$ è logicamente equivalente a $(\neg p) \vee q$

p	q	$p \to q$	$(\neg p) \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

2: Tradurre $x \to y$ in termini algebrici

$$\underbrace{(1+x)}_{\neg x}+y+\underbrace{(1+x)}_{\neg x}y = 1+x+y+y+xy$$
$$= 1+x+2y+xy = 1+x+xy$$

Prop: Valgono le leggi distributive del prodotto rispetto alla somma $\forall x, y, z$

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \qquad z(x+y) = zx+zy$$

$z=1 \qquad x+y = x+y$

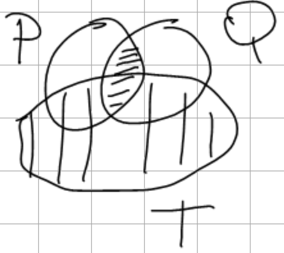
$z=0 \qquad 0 = 0+0=0$

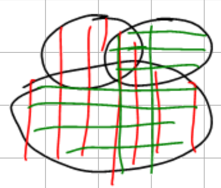
Ex: Valgono le leggi distributive delle somme rispetto al prodotto

$$(x\cdot y)+z = (x+z)\cdot(y+z) \quad \text{FALSA}$$

$$(p \wedge q) \text{ XOR } t = (p \text{ XOR } t) \wedge (q \text{ XOR } t)$$

$$(p\wedge q)\vee t = (p \vee t)\wedge(q\vee t)$$





SINTATTICA

SEMANTICA

STRUTTURA ALGEBRICA
LOGICA PROPOSIZIONALE

$x+y=y+x, \quad xy=yx$

distributive

$2b=0 \qquad 2(1+x+xy) = 2\cdot 1 + 2x + 2xy = 0$

In particolare $\quad b+b=0 \quad b=-b$

$$1+x+xy = x+xy+y$$

$$1+x+xy+x = x+xy+y+x$$

$$1+\underbrace{\cancel{2x}}_{0}+\cancel{xy} = \underbrace{\cancel{2x}}_{0}+\cancel{xy}+y$$

$$1=y$$

Valuto in $y=0 \qquad 1+x=x$

$$1+x+x = x+x$$

$$1+\cancel{2x} = \cancel{2x}$$

$$1=0 \quad \text{Assurdo}$$

$x^2=x \qquad$ Per ogni variabile associata ad ogni proposizione

$p \wedge p = p$

$B_0 = \{0,1\} \qquad +,\cdot \qquad$ funzioni costanti $\emptyset \to \{0,1\}$

$B_1 =$ funzioni in una variabile a valori in $\{0,1\}$

$$0,\ 1,\ x,\ 1+x$$

$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1+x$$

$$\underbrace{(\neg p)\wedge(\neg p)}_{\neg p \wedge \neg p} = \neg p$$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \underset{R_1}{\equiv} 1+x^2 \underset{R_2}{\equiv} 1+x$$

R_1: $\quad a \underset{R_1}{\equiv} b \iff b-a$ è pari

R_2: $\quad x^2 \underset{R_2}{\equiv} x$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \underset{R_1}{\equiv} 1+x+x^2+x^3 \underset{R_2}{\equiv} 1+x+x+x$$

$\neg p \wedge \neg p \wedge \neg p = \neg p$

$1 + x$

dove $x^3 = x^2 x \underset{R_2}{\equiv} x x \underset{R_2}{\equiv} x$

Teorema: Ogni polinomio in una variabile x si riduce usando R_1, R_2 nella forma

$a1 + bx \qquad a, b \in \{0, 1\}$. In particolare ho 4 polinomi

Dim: $a_{127}x^{127} + a_{126}x^{126} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{R_1}{\equiv}$

$b_{127}x^{127} + \qquad + b_0 \underset{R_2}{\equiv} \qquad b_i \in \{0, 1\}$

$x^0 ? \; x^0 := 1 \qquad x^n x^m = x^{n+m} \quad n, m > 0$

$(b_{127} + \qquad + b_1)x + b_0 \underset{R_1}{\equiv} ax + b_0$

$B_2 = \{ a + bx + cy + dxy : \; a, b, c, d = 0, 1\}$

Esercizio: Trasformare polinomi in formule Logica proposizionale