Definizione 1.11 *Per ogni $x, y \in W$ valgono*

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

e l'asserto duale

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y.$$

Esercizio 1.12 *Provare le Leggi di De Morgan usando il formalismo polinomiale.*

Notate che la somma corrisponde alla **differenza simmetrica** Δ di insiemi, $A\Delta B = (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ e la negazione al complementare di un insieme.

Esercizio 1.13 *Provare la precedente affermazione con il formalismo polinomiale.*

Esercizio 1.14 *Rappresentare i connettivi logici binari (a due argomenti) che avete visto nel corso di Fondamenti in termini polinomiali.*

In direzione opposta:

Esercizio 1.15 *Mostrare che ogni elemento di B_2 si può esprimere con formule in due variabili, x, y utilizzando solo $\neg, \vee$ e $\wedge$.*

Puntualizzo che, come già mostrano le Leggi di De Morgan, possono esistere più formule associate ad un fissato polinomio. Inoltre $\neg, \vee$ e $\wedge$ sono **ridondanti** poiché, ad esempio $\vee$ si può esprimere usando $\neg$ e $\vee$.

In WIMS propongo un esercizio in cui chiedo di convertire un polinomio booleano in formula coinvolgente solo $\neg$ e $\wedge$. WIMS lavora con stringhe per cui ignora che la congiunzione gode della proprietà commutativa e affermerà che $x \wedge y$ non è uguale a $y \wedge x$. Per ripristinare unicità nella risposta si introduce un ordine lessicografico sui monomi nelle variabili x, y imponendo ad esempio che

$$x \prec \neg x \prec y \prec \neg y.$$

Per cui $x \wedge y$ precede $y \wedge x$.

Probabilmente vi hanno accennato nel corso di Fondamenti che ogni formula ammette due forme normali.

Teorema 1.16 (CNF e DNF) *Ogni funzione booleana in n variabili si può esprimere come:*

CNF: congiunzione di disgiunzioni inclusive nelle variabili o nelle loro negazioni;

DNF: disgiunzione inclusiva di congiunzioni nelle variabili o nelle loro negazioni.

La dimostrazione non è molto complicata ma preferirei farvi giungere a questo teorema con un approccio sperimentale al fine di sfatare la convinzione che la Matematica è - per citare Kant - una scienza analitica a priori.

Esempio 1.17 *Per $n = 1$, ogni elemento di $B_1 = \{0, 1, x, 1 + x\}$ si esprime sia in CNF che DNF.*

Si indichino con $x_1, \ldots, x_n$ le variabili in B_n. Si ponga

$$V = \{(v_1, \ldots, v_n) : v_i = 0, 1\}.$$

Definiamo $d = d_o = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$ il polinomio ottenuto disgiungendo le variabili. Preso $v \in V$ poniamo

$$d_v = \bigvee_{i=1}^{n} v_i^*(x_i),$$

dove $v_i^* = \mathrm{id}$ sse $v_i = 0$, $\neg$ altrimenti. Quindi queste sono esattamente le funzioni booleane che compaiono come fattori in CNF. Si definisca per $W \subseteq V$,

$$p_W = \prod_W d_w = \bigwedge_W d_w.$$

In particolare $p_{\{v\}} = d_v$ per $v \in V$.

Teorema 1.18 *Sia f una formula ben formata della Logica Proposizionale. Allora f è sia disgiunzione inclusiva di congiunzioni che, dualmente, congiunzione di disgiunzioni inclusive.*

Dim. Sia n il numero di proposizioni coinvolte in f e si indichino con $x_1, \ldots, x_n$ le variabili che assumono i valori di verità attribuiti a queste proposizioni. Sia $W = \{v \in V : f(v) = 0\} \subseteq V$. Allora f ammette una CFN

$$f = \bigwedge_{w \in W} d_w.$$

Poniamo $g = \bigwedge_{w \in W} d_w$. Siccome $d_u(u) = 0$, $u \in W$ implica $g(u) = 0$. Viceversa $g(u) = 0$ solo se esiste $w \in W$ tale che $d_w(u) = 0$ ossia per ogni i $w_i^*(x_i)(u_i)$, da cui $u_i = w_i$ e $u = w \in W$.

Ne segue che

$$\neg f = \bigwedge_{u \in W^c} d_u,$$

dove W^c denota il complementare di W in V. Le Leggi di De Morgan implicano che

$$f = \bigvee_{u \in W^c} \neg d_u,$$

ossia esiste DNF per f □

Siccome ogni polinomio è somma di monomi si ottiene immediatamente

Teorema 1.19 *Sia f una formula ben formata della Logica Proposizionale. Allora f è sia disgiunzione esclusiva di congiunzioni.*

Al variare di $0 \leq j \leq 2^n$ sia $P_j = \{p_W : |W| = j\}$.

Esercizio 1.20

- *Elencare tali funzioni per $n = 2$ sotto forma di polinomi booleani.*
- *Determinare - magari con l'ausilio di* MAGMA *-* P_j *per* $0 \leq j \leq 4$.
- *Calcolare* $|P_j|$*. Cosa notate?*
- *Dal punto precedente* P_j *e* P_{4-j} *hanno la stessa cardinalità, quindi esiste una biezione tra loro. Individuarne una facilmente descrivibile e valida per ogni* j.
- *Calcolare* $|\{v \in V : f(v) = 0\}|$ *al variare di* $f \in P_j$, $0 \leq j \leq 4$.

Il precedente esperimento sembra mostrare molte regolarità. Magari è un caso dovuto al fatto che $n = 2$ è un valore piccolo.

Esercizio 1.21 *Ripetere il precedente esperimento con l'ausilio di* MAGMA *per* $n = 3, 4$ *ed enunciare delle congetture sui risultati.*