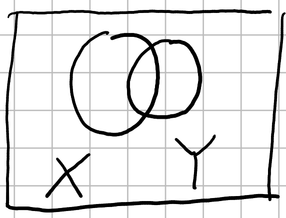
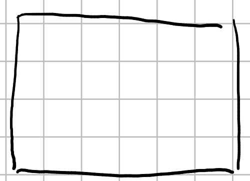
Leggi di De Morgan

$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ Duale $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$





$a = \neg x \quad \neg a = \neg\neg x = x$

$\neg(\neg x \wedge \neg y) \underset{\uparrow}{=} x \vee y$

Tesi

$\neg x \wedge \neg y \underset{\uparrow}{=} \neg(x \vee y)$

Tesi

$a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Metodo logico proposizionale

$1 + x + y + xy$

$\neg(x \vee y)$

$\neg x \wedge \neg y = (\neg x) \wedge (\neg y)$

$(1+x) \cdot (1+y) = (1+x) + (1+x) \cdot y$

$= 1 + x + y + xy$

Esercizio: Provare in forma algebrica II° legge di De Morgan

$1 + x + xy \quad x \to y \quad \neg x \vee y$

$\vee$ si ottiene mediante $\neg, \wedge \quad a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$

$\neg \vee \to a$

Teorema (CNF, DNF) Sia f una formula ben posta allora $f = \bigwedge$ disgiunzioni (CNF)

disgiunzioni $= t_1(x_1) \vee \quad \vee t_n(x_n)$

dove n è il numero di proposizioni coinvolte in f

$t_i = id, \neg$

$f = \bigvee$ congiunzione (DNF)

Esempio $B_0 = \{0, 1\}$ banale $\quad 2^{2^0} = 2^1 = 2$

$B_1 = \{0, 1, x, 1+x\} \quad 2^{2^1} = 2^2 = 4$

$0, 1, x, \neg x$

B_2 ? $2^{2^2} = 2^4 = 16$

$V = \{(v_1 \quad v_n) : v_i \in \{0,1\}\}$ $f = f(p_1 \quad p_n)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 \quad x_n$

prodotto cartesiano
di n copie di $B_0 = GF(2)$ campo

$$d = d_{\underline{0}} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee \quad \vee x_n$$

$$d_v = \bigvee_{i=1}^{n} v_i^*(x_i)$$

$$v_i^* = \begin{cases} id & v_i = 0 \\ \neg & v_i = 1 \end{cases}$$

Esempio: $n = 3$ $v = (0,0,1)$ $d_v = v_1^*(x_1) \vee v_2^*(x_2) \vee v_3^*(x_3)$

$= x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$

Quante sono le disgiunzioni distinte di x_1 x_3
o loro negazioni $8 = 2^3 = |V|$

Sia $W \subseteq V$ $W = \{v \in V : f(v) = 0\}$

Tesi $f = \bigwedge_{w \in W} d_w =: g$

Sia $w \in W$ $f(w) = 0$ $d_w(\underline{x}) = \bigvee w_i^*(x_i)$

$$d_w(w) = \bigvee_{i=1}^{n} w_i^*(w_i) = 0 \vee \quad \vee 0 = 0$$

$$w_i^*(w_i) = \left.\begin{cases} 0 & w_i = 0 \\ 0 & w_i = 1 \end{cases}\right\} \equiv 0$$

$$g(w) = \, ? \, ? \, \underset{w}{0} \, ? \, ? = 0$$

Viceversa sia $g(v) = 0$ esiste un fattore nullo
in g $\exists w \in W$ $d_w(v) = 0$ $w_i^*(v_i) = 0$

Se $v_i = 0 \quad w_i^*(0) = 0 \Rightarrow w_i^* = id \Rightarrow w_i = 0$

$v_i = 1 \quad w_i^*(1) = 0 \Rightarrow w_i^* = \neg \Rightarrow w_i = 1 \qquad \forall 1 \leq i \leq n$

$$W \ni w = v \quad f(v) = 0$$

f, g hanno la stessa tabella di verità

$f = g$ dimostra CNF

Dualità $\neg f = \bigwedge_{u \in W^c} d_u$

$$f = \bigwedge_{w \in W} d_w \qquad W = W_f = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

$$f = \neg\neg f = \neg\left(\bigwedge_{u \in W^c} d_u\right) = \bigvee_u \neg d_u = \bigvee_u c_u$$

$$\neg(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) = \neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$$

DNF

R_i, L_i, A_i

Algoritmi per la determinazione di DNF e CNF

$$f = (p \vee q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$$

p	q	r	$a = p \vee q$	$b = \neg q \wedge r$	$a \rightarrow b$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1

$$W = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0)\}$$

$p \leftrightarrow x$
$q \leftrightarrow y$
$r \leftrightarrow z$

$d_{(1,1,1)} = \neg x \vee \neg y \vee \neg z$

$d_{(1,1,0)} = \neg x \vee \neg y \vee z$

$d_{(1,0,0)} = \neg x \vee y \vee z$ $\qquad\qquad f = d_{(1,1,1)} \wedge \qquad \wedge d_{(0,1,0)}$

$d_{(0,1,1)} = x \vee \neg y \vee \neg z$

$d_{(0,1,0)} = x \vee \neg y \vee z$

Esercizio: Provare usando regole Logica Prop
che $f = d_{(1,1,1)} \wedge \qquad \wedge d_{(0,1,0)}$

WIMS: [ ] liste, n-ple Attenzione SINTASSI

$[x, y] \qquad (0, 1)$

Algebrica $\overset{a}{(p \vee q)} \rightarrow \overset{b}{(\neg q \wedge r)}$

$a \rightsquigarrow x + y + xy \qquad b \rightsquigarrow (1+y)z$

$a \rightarrow b \qquad 1 + a + ab$

$1 + x + y + xy + (x + y + xy)(1+y)z$

$(x + \cancel{y} + \cancel{xy} + \cancel{xy} + \cancel{y^2} + xy)z$

$1 + x + y + xz + xy + xyz$

$x = 0 \qquad 1 + y = 0 \quad y = 1 \qquad z$ arbitrario $\qquad (0,1,0)$

$(0,1,1)$

$x = 1 \qquad \cancel{y} + z + \cancel{y} + yz = z(1+y) = 0 \qquad (1,1,1)$

$(1,1,0)$

$(1,0,0)$