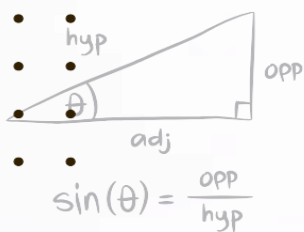


**Mathosphère**

# Série d'exercices sur la trigonométrie

Niveau 1S1



**Exercice 1 – (Identités et relations trigonométriques)**

1. Démontrer que pour tout réel  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$  :

$$\sqrt{1 + \cos 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|.$$

2. Démontrer que :

$$8 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{12} = 1.$$

3. L'équation  $x^2 - 4x + 2 = 0$  possède deux racines  $x_1$  et  $x_2$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $x_1 = \tan \alpha$  et  $x_2 = \tan \beta$ . Calculer  $\tan(\alpha + \beta)$ .

**Exercice 2 – (Équations trigonométriques)**

Résoudre dans  $I$  les équations suivantes :

1.  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad I = [0; 2\pi]$
2.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad I = \mathbb{R}$
3.  $\sin(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad I = \mathbb{R}$
4.  $4 \tan^2 x - 2 = 0, \quad I = [-\pi; \pi[$
5.  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \quad I = \mathbb{R}$
6.  $3 \sin^2 x + (2\sqrt{3} - 1) \sin x - \sqrt{3} = 0, \quad I = \mathbb{R}, \text{ puis } I = [0; 2\pi]$
7.  $\cos x + \sin x = 1, \quad I = \mathbb{R}$
8.  $\sqrt{2} \cos x + \sin x = 1, \quad I = \mathbb{R}$

**Exercice 3 – (Inéquations trigonométriques)**

Résoudre dans  $I$  les inéquations suivantes :

1.  $\sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 0, \quad I = [0; 2\pi]$
2.  $\sin x - \cos x \geq 0, \quad I = \mathbb{R}$
3.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x - \sqrt{2}} \geq 0, \quad I = [-\pi; \pi[$
4.  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \quad I = \mathbb{R}$

**Exercice 4 – (Relations dans un triangle)**

Soit  $ABC$  un triangle.

1. Montrer que :

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2}.$$

2. En déduire que :

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}.$$

**Exercice 5 – (Pentagone régulier)**

Soit  $ABCDE$  un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

1. En utilisant la relation :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0},$$

montrer que :

(a)  $1 + 2 \left( \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} \right) = 0$

(b) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{3\pi}{5}$  et  $\cos \frac{6\pi}{5}$ .

**Exercice 6 – (Expression et équation trigonométrique)**

1. Exprimer  $\sin 4x$  en fonction de  $\sin x$ .

2. On considère l'équation  $(E)$  :

$$\sin 4x + 3 \cos 2x = 0.$$

- (a) Montrer que  $(E)$  est équivalente à l'équation :

$$8 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 3 = 0.$$

- (b) Résoudre  $(E)$  puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

**Exercice 7 – (Identités trigonométriques)**

Démontrer les égalités suivantes :

1.  $(1 + \sin x - \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 - \cos x)$

2.  $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

3.  $\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

4.  $\frac{1 + \cos x + \sin x}{1 - \cos x + \sin x} = \frac{\sin x}{2}$

5.  $\sin 4x = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$

**Exercice 8 – (Loi des sinus)**

Soit  $ABC$  un triangle avec  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , et les angles opposés  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ .

1. En utilisant une projection orthogonale dans le triangle  $ABC$ , montrer que :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}.$$

2. En appliquant le même raisonnement dans une autre configuration, compléter la démonstration pour établir :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

**Exercice 9 – (Équations trigonométriques simples)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\cos x = \frac{1}{2}$
2.  $\tan x = -1$
3.  $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exercice 10 – (Inéquations trigonométriques)**

Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  les inéquations suivantes :

1.  $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2.  $\sin(x - \frac{\pi}{6}) \leq 0$
3.  $2 \sin x + 1 > 0$

**Exercice 11 – (Systèmes trigonométriques)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = 0 \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} \sin x = \cos y \\ \sin(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Exercice 12 – (Équations avec arguments multiples)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\sin(3x) = \sin x$
2.  $\cos(2x) + \cos x = 0$
3.  $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

**Exercice 13 – (Inéquations combinées)**

Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  les inéquations suivantes :

1.  $\sin x + \cos x \leq 1$
2.  $\tan x \geq 1$

**Exercice 14 – (Identités trigonométriques)**

Démontrer les égalités suivantes :

1.  $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$
2.  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

**Exercice 15 – (Équations quadratiques trigonométriques)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
2.  $3 \sin^2 x - 2 \sin x = 0$

**Exercice 16 – (Applications géométriques)**

Dans un triangle  $ABC$ , on donne  $\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$ .

1. Montrer que  $\sin \hat{C} = \sin(\hat{A} + \hat{B})$ .
2. En déduire une relation entre  $\cos \hat{A}$  et  $\cos \hat{B}$ .

**Exercice 17 – (Équations avec paramètres)**

Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  l'équation suivante admet-elle des solutions dans  $\mathbb{R}$  :

$$m \sin x + \cos x = 2$$

**Exercice 18 – (Inéquations avancées)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\sin(2x) \geq \cos(2x)$
2.  $\sqrt{2} \sin x + \cos x \leq 1$

**Exercice 19 – (Expressions trigonométriques)**

Exprimer les expressions suivantes en fonction de  $\sin x$  ou  $\cos x$  :

1.  $\sin 3x$
2.  $\cos 2x - \sin 2x$

**Exercice 20 – (Systèmes dans un triangle)**

Dans un triangle  $ABC$ , résoudre le système suivant pour  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  :

$$\begin{cases} \sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \\ \hat{A} + \hat{B} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

**Exercice 21 – (Équations trigonométriques complexes)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\sin x + \sin 2x = 0$
2.  $\cos 3x = \cos x$

**Exercice 22 – (Identités dans un polygone)**

Soit  $ABCDEF$  un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre  $O$ .

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^5 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0.$$

2. En déduire une relation pour les sinus correspondants.

**Exercice 23 – (Inéquations trigonométriques)**

Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  les inéquations suivantes :

1.  $2 \cos^2 x - \sin x \leq 1$
2.  $\sin x \leq \frac{1}{2} \cos x$