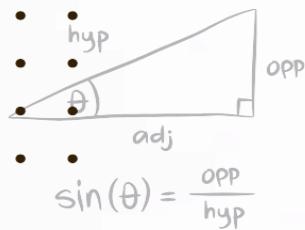


Mathosphère

Série d'exercices sur les équations, inéquations et systèmes

Niveau 1S1



Exercice 1 – (Équations et inéquations dans \mathbb{R})

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $(1 + \sqrt{2})x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} - 1 = 0$

2. $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 1) + 2 = 0$

3. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3} < 0$

4.

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

5. $-x^4 + 4x^2 + 3 \geq 0$

Exercice 2 – (Étude des racines paramétrées)

Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence et le signe des racines :

1. $(m - 1)x^2 + 3mx + m + 1 = 0$

2. $(m + 2)x^2 - (m - 1)x + m - 2 = 0$

3. $mx^2 - 3mx + m - 5 = 0$

4. $(m - 2)x^2 + (3m - 2)x + m + 1 = 0$

5. $(3m - 2)x^2 - (3m - 1)x + m + 4 = 0$

6. $m(m + 1)x^2 - (m + 1)x - m + 2 = 0$

Exercice 3 – (Équation quartique)

On considère l'équation (E) :

$$4x^4 + 3x^3 - 26x^2 + 3x + 4 = 0$$

1. (a) 0 est-il solution de (E) ?

(b) En posant $y = x + \frac{1}{x}$, démontrer que (E) est équivalente à :

$$4y^2 + 3y - 34 = 0 \quad (E')$$

2. (a) Résoudre (E') dans \mathbb{R} .

(b) En déduire les solutions de (E).

Exercice 4 – (Propriétés des racines)

1. Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de :

$$(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$$

2. Établir la relation indépendante de m qui existe entre les racines. Retrouver à l'aide de cette relation les racines doubles.

3. Calculer m pour que la somme des inverses des racines soit égale à $\frac{1}{4}$.

Exercice 5 – (Conditions sur les racines)

1. Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :

$$mx^2 - (3m - 5)x + m + 4 = 0$$

a-t-elle deux solutions positives ?

2. Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :

$$mx^2 - (3m + 2)x + m + 2 = 0$$

a-t-elle deux solutions négatives ?

3. Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation :

$$mx^2 - 2(3 + m)x + 12 + m = 0$$

a-t-elle deux solutions de signes contraires ?

Exercice 6 – (Équations et inéquations irrationnelles)

Résoudre les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1. $\sqrt{7 - 2x} = \sqrt{x^2 + 3x - 3}$

2. $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x^2 - x - 1}$

3. $\sqrt{16 - x^2} = 5 - x$

4. $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x^2 - 2x + 1$

5. $\sqrt{3x + 2} + 2 = 4x$

6. $3x + \sqrt{x^2 - 3x - 7} = 15$

7. $x^2 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2 \quad (\text{Poser } X = x^2 - 2x)$

8. $\sqrt{x + 3} \leq 2x - 1$

9. $\sqrt{5 - 4x} > x + 2$

10. $\sqrt{(2x^2 + 4x - 1)^2} \geq 5$

11. $\sqrt{x^2 + 2} \leq x + 3$

12. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} > x - 2$

13. $\sqrt{-4x^2 + 2x + 3} < 4x - 2$

14. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \geq x - 2$

Exercice 7 – (Systèmes d'équations)

Résoudre les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 3y = -3 \\ x + (\sqrt{2} - 1)y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 8 \\ 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 13 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 13 \\ 3x^2 + 7y^2 = 31 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2y - 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{5}{3} \\ 4y - 1 + \frac{2}{x+1} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = z \\ x + 2y + z = 52 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} 3|x| - 2|y| = 7 \\ 5|x| - 4|y| = 11 \end{cases}$$

Exercice 8 – (Systèmes par méthode du pivot)

Résoudre par la méthode du pivot chacun des systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -25 \\ -8x - 5y + 2z = -19 \\ 4x + 2y - 2z = 18 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -4x - 3y - 3z + t = 54 \\ 3y + 2z + t = -21 \\ 4y - 4z - t = -56 \\ 2x + 3y - 2z + t = -67 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 7x + 2y + z + 8t = 29 \\ 2x + y - 8z + 6t = 5 \\ -x + 2y - 5z + 4t = -2 \\ 5x - 3y + 3z - 5t = 21 \end{cases}$$

Exercice 9 – (Systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2)

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 10 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ (3x - 2)(3y - 2) = -13 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 3x - m^2y = -3 \end{cases}$$

(m est un paramètre réel)

Exercice 10 – (Équations quadratiques)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2x^2 - 5x + 3 = 0$
2. $(x + 1)^2 = 4x$
3. $x^2 + 6x + 10 = 0$

Exercice 11 – (Inéquations polynomiales)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$1. x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$2. \frac{x+2}{x-1} > 0$$

$$3. 2x^2 - 3x - 5 \geq 0$$

Exercice 12 – (Systèmes d'inéquations)

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes d'inéquations suivants :

1.

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 5 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 13 – (Équations irrationnelles)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+4} = x - 2$
2. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$
3. $\sqrt{x^2-4} = 3-x$

Exercice 14 – (Inéquations irrationnelles)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-2} \leq 3$
2. $\sqrt{4-x} > x$
3. $\sqrt{x^2+3} \geq x+1$

Exercice 15 – (Systèmes linéaires)

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 16 – (Équations paramétrées)

Pour chaque équation suivante, déterminer les valeurs de m pour lesquelles il existe des solutions réelles :

1. $mx^2 - 4x + m - 1 = 0$
2. $(m-1)x^2 + 2m^2x + m = 0$

Exercice 17 – (Systèmes non linéaires)

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Exercice 18 – (Inéquations avec valeurs absolues)

 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $|x - 3| \leq 2$
2. $|2x + 1| > 5$

Exercice 19 – (Équations avec valeurs absolues)

 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $|x - 2| = x + 1$
2. $|x + 3| = 2x - 1$

Exercice 20 – (Systèmes paramétrés)

 Pour chaque système suivant, déterminer les valeurs de m pour lesquelles il admet une solution unique :

1.

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx - y + z = 0 \\ x + y - mz = m \end{cases}$$

Exercice 21 – (Équations polynomiales)

 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Exercice 22 – (Inéquations rationnelles)

 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$
2. $\frac{2x+3}{x-4} < 0$

Exercice 23 – (Systèmes avec racines)

 Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 4 \\ x - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = y \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$$

Exercice 24 – (Inéquations polynomiales avancées)

 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $x^3 - x^2 - 2x \geq 0$
2. $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$