Mathosphère

Série d’exercices

Calcul Integral

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercices sur les intégrales

Exercice 1 (**)

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt \qquad I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x\ln x} \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$I_4 = \int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx \qquad I_5 = \int_0^1 \sqrt{x(x-2\sqrt{x})}\,dx \qquad I_6 = \int_0^2 x^4e^{-x^5}\,dx$$

$$I_7 = \int_0^{5/3} E(x)\,dx \qquad I_8 = \int_1^e (\ln s)^5\,ds \qquad I_9 = \int_0^{\ln^2 2} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2}\,dt$$

$$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3+1)^{2/3}\,dx \qquad I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-\frac{3}{s^2})}{s^3}\,ds \qquad I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\,dq$$

$$I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\,dz$$

Exercice 2 (**) : Intégration par parties

Calculer à l'aide d'intégrations par parties :

$$I_1 = \int_1^e x^2\ln x\,dx \qquad I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\,ds \qquad I_3 = \int_1^2 x^2(\ln x)^3\,dx$$

$$I_4 = \int_0^2 (2x^3+1)\ln x\,dx \qquad I_5 = \int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}\,dx \qquad I_6 = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\,dt$$

$$I_7 = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\,ds$$

Exercice 3 (**) : Changement de variable

Calculer en utilisant un changement de variable indiqué :

$$I_1 = \int_0^1 (t-2)(t+1)^5\,dt \qquad I_2 = \int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}\,dt \quad (u = t^3+8)$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx \quad (x = \frac{t}{1-t}) \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{1}{s(s^3+1)}\,ds \quad (u = s^3,\ \text{puis } u = \frac{1}{t})$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \quad (u = \sqrt{t}) \qquad I_6 = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t+1}}\,dt \quad (u = \ln t)$$

Exercice 4 (* à **)

Donner les primitives suivantes :

$$f_1(t) = 1 - 2e^{-t} \qquad f_2(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad f_3(t) = \frac{\ln t}{t}$$

Exercice 5 (*** à ****)

Calculs d'intégrales complexes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx \qquad K_2 = \int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$K_3 = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \qquad K_4 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$$
$$K_5 = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx \qquad K_6 = \int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x}\,dx \quad (0 < a < 1)$$

Exercice 6(***)

On considère, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx.$$

1. Calculer $I_{m,0}$ pour toute valeur de m.
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$.
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

Exercice 7 (**)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n \frac{e^x}{n!}\,dx.$$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que
$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$
3. En déduire que
$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 8 (*** à ****)

On définit deux suites d'intégrales de la façon suivante :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \quad (n > 1).$$

1. Calculer J_1 et montrer que $\forall n > 1, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de J_n.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

4. En déduire la convergence et la limite de (I_n).
5. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 9 (** à ***)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann :

- $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$
- $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
- $w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^1$

Exercice 10 (ESCP 92) (****)

Pour tout entier naturel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx}\,dt.$$

1.

(a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Étudier la suite $(f_k(0))_{k \geq 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$.

2.

(a) Soit $x > 0$. Établir que

$$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$$

pour tout $k \geq 0$.

(b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.

(c) Montrer que $f_0(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$.

(d) À l'aide de la relation établie en (c), montrer que pour tout k,

$$f_k(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

3.

(a) En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u}\, du.$$

En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

(b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.

(c) Montrer que pour tout réel $y > 0$, $1 - e^{-y} \leq y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?