**Mathosphère**

# Série d'exercices sur les équations et inéquations du second degré

Niveau $2^{nd}$ S

**Exercice 1 –** ***(Forme canonique des trinômes)***
Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

1. $x^2 + 3x + 2$
2. $x^2 - 6x + 10$
3. $x^2 - 2x - 15$
4. $3x^2 + 6x - 5$
5. $5x^2 + 4x - 2$
6. $-x^2 - 3x + 4$
7. $-x^2 + 2x - 6$
8. $-2x^2 - 8x + 12$

---

**Exercice 2 –** ***(Trinômes incomplets)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans utiliser le discriminant, les équations suivantes :

1. $3x^2 + 7x = 0$
2. $3x^2 - 64x = 0$
3. $(x+3)^2 - 5x - 12 = 0$
4. $x^2 - 16 + 2(x+4) = 0$
5. $5x^2 - 100 = 0$
6. $(x-7)^2 - 36 = 0$
7. $(2x-5)^2 - 3(x+2)^2 = 0$

---

**Exercice 3 –** ***(Équations du second degré)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 10x + 25 = 0$
2. $4x^2 + 16x = -16$
3. $3x^2 - 7x - 6 = 0$
4. $x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $2x^2 - 5x = 3$
6. $2x^2 - 8x + 5 = 0$
7. $-x^2 - 4x + 12 = 0$
8. $3x^2 + 7x + 10 = 0$
9. $-x^2 + 5x - 6 = 0$
10. $x^2 - 18x + 77 = 0$
11. $4x^2 + 5x - 9 = 0$
12. $3x^2 - 7x + 4 = 0$
13. $\dfrac{x^2}{3} - 2x + \dfrac{3}{2} = 0$
14. $\dfrac{x^2}{2} - x - 1 = 0$
15. $-x^2 + \dfrac{3}{4}x = \dfrac{5}{4}$

---

**Exercice 4 –** ***(Équations rationnelles)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{4}{x^2 - x - 2} = \dfrac{3-x}{x-2}$
2. $\dfrac{3x-2}{x+1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x^2+x}$
3. $\dfrac{1}{x^2+2x-3} = \dfrac{8}{x^2(x-1)}$
4. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{25}{8x-24}$

---

**Exercice 5 –** ***(Équations quadratiques et irrationnelles)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2. $16x^4 - 20x^2 + 4 = 0$
3. $3x^4 + 13x^2 + 10 = 0$
4. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$
5. $10x^4 - 7x^2 + 1 = 0$
6. $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$
7. $\left(3x + \dfrac{2}{x} - 5\right)^2 + 3\left(3x + \dfrac{2}{x} - 5\right) - 4 = 0$
8. $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$

---

**Exercice 6 –** ***(Discriminant réduit)***
On considère l'équation $(E)$ : $ax^2 + b'x + c = 0$, avec $a \neq 0$. On pose $\Delta' = b'^2 - ac$ ($\Delta'$ s'appelle le discriminant réduit).

1. Établir les résultats suivants :
   (a) Si $\Delta' < 0$, alors $(E)$ n'a pas de solution réelle.
   (b) Si $\Delta' = 0$, alors $(E)$ a une solution double $x_0 = -\dfrac{b'}{a}$.
   (c) Si $\Delta' > 0$, alors $(E)$ a deux solutions : $x' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x'' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant $\Delta'$ :
   (a) $x^2 + 10x + 24 = 0$
   (b) $x^2 + 6x + 10 = 0$
   (c) $x^2 - 8x + 14 = 0$
   (d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

---

**Exercice 7 –** ***(Équation paramétrée)***
On considère l'équation suivante : $(m-2)x^2 + 3mx + m - 1 = 0$ ($m$ paramètre réel).

1. Déterminer l'ensemble $E$ des valeurs de $m$ pour lesquelles cette équation est du second degré.
2. On suppose, pour la suite, que $m \in E$. Déterminer alors $m$ pour que l'équation :
   (a) n'admette aucune solution.
   (b) admette une solution double (qu'on déterminera).
   (c) admette deux solutions distinctes (qu'on calculera en fonction de $m$).

3. Reprendre les questions 1) et 2) pour les équations suivantes :
   (a) $x^2 - (3m+2)x + m^2 + 2m = 0$
   (b) $x^2 - 3(m+1)x - 3m - 2 = 0$
   (c) $mx^2 + 3(m-2)x + 3 - 2m = 0$
   (d) $(m+2)^2x^2 - 3(m+2)x + 2 - m = 0$
   (e) $m^2x^2 - 3m(m+2)x + 3m + 2 = 0$

---

**Exercice 8** – ***(Somme et produit des racines)***
Déterminer, s'ils existent, les nombres $x$ et $y$ dont on connaît la somme $S$ et le produit $P$ :

1. $S = 15$, $P = 56$
2. $S = -28$, $P = 192$
3. $S = 3$, $P = -2$
4. $S = -5$, $P = 16$
5. $S = \frac{17}{12}$, $P = \frac{5}{12}$
6. $S = -2$, $P = \frac{25}{36}$
7. $S = 150$, $P = 2249$

---

**Exercice 9** – ***(Expressions des racines)***
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est supposée avoir deux racines $x'$ et $x''$. Calculer en fonction de la somme et du produit des racines les expressions suivantes :

1. $E_1 = \frac{1}{(x')^2} + \frac{1}{(x'')^2}$
2. $E_2 = \frac{1}{(x')^3} + \frac{1}{(x'')^3}$
3. $E_3 = x' + \frac{3}{x''+1} + x'' + \frac{3}{x'+1}$
4. $E_4 = (x'-2)^3 + (x''-2)^3$

---

**Exercice 10** – ***(Existence et signe des racines)***
Étudier, suivant les valeurs de $m$, l'existence et le signe des solutions pour chacune des équations suivantes :

1. $(m+2)x^2 - 3mx + m - 2 = 0$
2. $(m-4)x^2 - 3(m-4)x + m - 1 = 0$
3. $(m-5)x^2 + (3m+2)x + m + 3 = 0$
4. $(m^2-9)x^2 - 3(m-3)x + 2 = 0$

---

**Exercice 11** – ***(Conditions sur les racines)***

1. Trouver $m$ pour qu'on ait deux solutions de signes contraires dans chacun des cas suivants :
   (a) $x^2 + 3mx + m - 2 = 0$
   (b) $(3m-4)x^2 + 2mx + 5 = 0$
   (c) $(m-3)x^2 + (5m-2)x - 3m + 2 = 0$
2. Déterminer $m$ pour qu'on ait deux solutions strictement positives dans chacun des cas suivants :
   (a) $(m-2)x^2 + (3m-2)x + m + 2 = 0$
   (b) $(m-5)x^2 - 3(m-3)x + m - 2 = 0$
3. Reprendre la question 2) dans le cas où les deux solutions sont strictement négatives.

---

**Exercice 12** – ***(Racines et relations)***
On considère l'équation suivante : $(m+2)x^2 + 3mx + m - 4 = 0$.

1. Étudier, suivant les valeurs du paramètre $m$, l'existence et le signe des solutions.
2. Déterminer $m$ tel qu'on ait deux solutions $x'$ et $x''$ vérifiant : $(3x'-1)(3x''-1) = 8$.
3. Lorsque l'équation admet deux solutions $x'$ et $x''$, montrer qu'il existe une relation indépendante de $m$ entre elles.
4. Former une équation du second degré ayant pour solutions : $X' = 2x' - 3$ et $X'' = 2x'' - 3$.

---

**Exercice 13** – ***(Existence et double racine)***
Soit l'équation : $x^2 - 3(m+2)x + m^2 + 3 = 0$.

1. Étudier, suivant les valeurs de $m$, l'existence des racines.
2. Déterminer $m$ pour que l'une des racines soit le double de l'autre.

---

**Exercice 14** – ***(Signe des fonctions)***

1. Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe des trinômes suivants :
   (a) $A = (3x-2)(x+5)$
   (b) $B = (x+2)(6-x)$
   (c) $C = x^2 - 9x + 14$
   (d) $D = -2x^2 + 5x + 3$
   (e) $E = -4x^2 + 3x - 1$
   (f) $F = 3x^2 - 2x + 2$
   (g) $G = -4x^2 + 8x - 4$
2. Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe des fractions rationnelles suivantes :
   (a) $H = \frac{2x-3}{3-x}$
   (b) $I = \frac{x^2+3x-18}{-3x^2+7x+6}$
   (c) $J = \frac{-4x+5}{3x^2+4x-4}$
   (d) $K = \frac{2x^2+3x-5}{5x^2-17x+6}$

---

**Exercice 15** – ***(Inéquations quadratiques)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
2. $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$
3. $-x^2 + 4x - 3 < 0$

**Exercice 16 –** ***(Systèmes d'équations)***
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

**Exercice 17 –** ***(Forme factorisée)***
Factoriser les trinômes suivants et déterminer leurs racines :

1. $x^2 - 7x + 12$
2. $3x^2 + 5x - 2$
3. $-2x^2 + 8x - 6$

**Exercice 18 –** ***(Équations avec racines carrées)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+5} = x - 1$
2. $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+4}$

**Exercice 19 –** ***(Inéquations rationnelles)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$
2. $\dfrac{2x+1}{x-4} < 0$

**Exercice 20 –** ***(Équation paramétrée simple)***
Pour quelles valeurs de $m$ l'équation suivante admet-elle des solutions réelles :

$$mx^2 - 4x + m - 2 = 0$$

**Exercice 21 –** ***(Somme des racines carrées)***
Soit une équation quadratique $x^2 + bx + c = 0$ avec deux racines $x'$ et $x''$. Déterminer la somme $\sqrt{x'} + \sqrt{x''}$ en fonction de $b$ et $c$, en supposant $x', x'' \geq 0$.

**Exercice 22 –** ***(Système avec contraintes)***
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$$