



Mathosphère

Série d'exercices sur le Calcul dans \mathbb{R}

Niveau 2nd S

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

Exercice 1 – (Calculs de fractions)

Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous forme de fraction irréductible :

$$1. X = \frac{5}{2} - 3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2} - \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - 2$$

$$2. Y = \left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} \right) \div \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$$

Exercice 2 – (Puissances et simplification)

1. Soient a , b , et c des réels non nuls. Mettre sous la forme a^n , $a^n b^p$, ou $a^n b^p c^q$ les réels suivants :

$$(a) A = a^4 a^7 \left(\frac{a}{a^3} \right)^{-3}$$

$$(b) B = a^{-3} a^2 a^4 a^{-5} a^2 a^3$$

$$(c) C = a^3 a^5 \left(a^2 \right)^{-3} a^4$$

$$(d) D = \left(a^2 b \right)^4 \left(a^3 b \right)^{-2}$$

$$(e) E = a^{-3} b^{-4} a^2 b^{-3}$$

$$(f) F = \left(a^3 b \right)^2 b^{-3} c^2 a^3 c \left(b c^3 \right)^3$$

$$(g) G = \left(a^3 b \right)^{-2} \times \left(b c^2 \right)^3 \times \left(a^{-3} b^4 c \right)^2 \left(b^3 c^2 a \right)^{-3} \times \left(a^{-2} b^5 \right)^3$$

$$(h) H = \left(a^{-3} c \right)^{-3} \times \left(-b^3 c \right)^4 \times \left(a^2 b c^{-2} \right)^{-3} \left(-a^3 b^{-2} c \right)^2 \times (-b)^5 \times \left(a^{-4} c \right)^3$$

2. Écrire sous la forme $2^m 3^n 5^p$ (avec m , n , et p entiers relatifs) les réels suivants :

$$(a) X = (0.04)^{-2} \times (0.25)^3 \times 125(0.008)^{-2} \times 270^2$$

$$(b) Y = (-8)^3 \times 45^{-2} \times (-5)^{-4} \times 9^3(-125)^2 \times 24^{-4} \times (-18)^2$$

Exercice 3 – (Développement et réduction)

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$1. A = (a+b)^2 + 3(a^3 + b^3) - 2(a+b)(a^2 + b^2)$$

$$2. B = (2x+3y)^3 + (2x-3y)^3$$

$$3. C = (2x^2 - 3y + z)^2$$

$$4. D = (a+b)^3 + a^3 + b^3 - 3(a^2 + ab + b^2)^2$$

$$5. E = (x-y)(x+y-z) + (y-z)(y+z-x) + (z-x)(z+x-y)$$

$$6. F = (a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$$

Exercice 4 – (Factorisation)

Factoriser les expressions suivantes :

$$1. A = (a^2 + b^2 - 16)^2 - 9a^2 b^2$$

$$2. B = (a^2 + b^2 - 7)^2 - (3ab + 4)^2$$

$$3. C = (ax+by)^2 - (ay+bx)^2$$

$$4. D = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

$$5. E = a^4 - b^4 + 3ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + a^2b - ab^2$$

$$6. F = a^2(x^2 + b^3) - b^2(x^2 + a^3)$$

$$7. G = (a^2b^2 + x^2y^2) - (b^2x^2 + a^2y^2)$$

$$8. H = 16x^2 - 20x + 4 + (x-4)^2 - (3x+2)^2$$

$$9. I = (x+y)^3 - x^3 - y^3$$

$$10. J = 9x^2 + 6xy - 3xz - 2yz$$

Exercice 5 – (Simplification de fractions)

Les dénominateurs étant supposés non nuls, écrire le plus simplement possible les réels suivants :

$$1. A = \frac{1}{3x(3x-2)} + \frac{3x}{3x-2} + \frac{3x-2}{3x}$$

$$2. B = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$3. C = \frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \frac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$$

$$4. D = \frac{a - \frac{a-b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}$$

$$5. E = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c} \times \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + c}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + c}$$

Exercice 6 – (Simplification d'expressions avec radicaux)

Simplifier :

$$1. A = (\sqrt{12} - \sqrt{27})(\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{18})$$

$$2. B = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$3. C = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)^2 - \sqrt{9}(1 - \sqrt{5})^2$$

$$4. D = \sqrt{8} + \sqrt{8 + \sqrt{8 + \sqrt{16}}}$$

$$5. E = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{15}} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$6. F = (\sqrt{x+y} + \sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x+y} - \sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$7. G = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$$

$$8. H = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

Exercice 7 – (Rationalisation du dénominateur)

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

$$1. x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$$

$$2. y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{8} - 1}$$

$$3. z = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$4. s = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$$

Exercices sur les fonctions et équations

1. Montrer que si $a+b+c = 0$, alors $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ac)$.
 2. Montrer que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.
-

Exercice 20 – (Simplification de radicaux)

1. Soit $x = \sqrt{15} - 2\sqrt{14} - \sqrt{15} + 2\sqrt{14}$.
 - (a) Donner le signe de x .
 - (b) Calculer x^2 .
 - (c) Donner une écriture simplifiée de x .
2. Simplifier l'écriture de :

$$y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

3. Donner une écriture simplifiée de :

$$z = \frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{50}} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{50}}$$

Exercice 21 – (Équations algébriques)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+3}{x-1}$
 2. $\sqrt{2x+3} = x-1$
 3. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-4}$
-

Exercice 22 – (Sommes télescopiques)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right)$
 2. $\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
-

Exercice 23 – (Simplification de fractions complexes)

Simplifier les expressions suivantes, en supposant les dénominateurs non nuls :

1. $A = \frac{x}{\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1}} - \frac{x}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$
 2. $B = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$
-

Exercice 24 – (Inéquations avec radicaux)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+4} \geq x$

$$2. \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \leq 0$$

Exercice 25 – (Identité avec puissances)

Montrer que pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4$$

Exercice 26 – (Factorisation avancée)

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4$
 2. $B = (x+y)^4 - (x-y)^4$
-

Exercice 27 – (Calcul de produits)

Calculer et simplifier :

$$P = \prod_{k=2}^{100} \left(1 + \frac{1}{k^2-1} \right)$$

Exercice 28 – (Simplification avec exposants fractionnaires)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \left(\frac{a^2b^{-3}}{a^{-1}b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^3b}{ab^{-2}} \right)^{\frac{2}{3}}$
 2. $B = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \div \left(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} \right)^3$
-

Exercice 29 – (Équations avec puissances)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2^{x+1} = 3 \cdot 2^x - 4$
 2. $x^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{x}$
-

Exercice 30 – (Identité avec fractions)

Montrer que pour tous réels a, b, c non nuls tels que $a+b+c \neq 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2+b^2+c^2+abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Exercice 31 – (Calcul de racines carrées imbriquées)

Simplifier l'expression suivante, pour $x \geq 0$:

$$A = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

Exercice 32 – (Développement avec plusieurs variables)

Développer et réduire :

$$A = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

Exercice 33 – (*Rationalisation multiple*)

Rendre rationnel le dénominateur de :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$$

Exercice 34 – (*Produit de nombres premiers*)

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$$A = \frac{(2^3 \times 3^2)^4 \times (5^2 \times 7^{-1})^3}{(2^{-1} \times 3^2 \times 5)^2 \times (7^2 \times 3^{-3})^3}$$

Exercice 35 – (*Sommes infinies approximatives*)

Approximer à 10^{-3} près la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$
