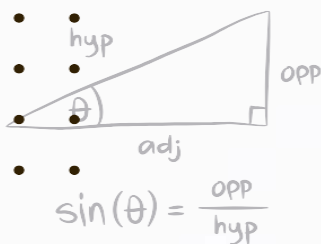


**Mathosphère**

# Série d'exercices Sur les Equations Différentielles

Niveau TS2



**Exercice 1 – (Équation différentielle avec condition initiale)**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = \cos(x).$$

Déterminer la solution vérifiant  $y(0) = 1$ .

**Exercice 2 – (Modélisation physique)**

Un objet est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. Sa vitesse  $v(t)$ , en m/s, satisfait l'équation :

$$v'(t) + kv(t) = g,$$

où  $k > 0$  est une constante et  $g$  une constante positive.

1. Résoudre cette équation.
2. Déterminer la solution vérifiant  $v(0) = 0$ .
3. Étudier la limite de  $v(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Interpréter.

**Exercice 3 – (Fonction exponentielle et tracé de courbe)**

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 3y = e^{2x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Trouver une solution particulière de l'équation complète.
3. En déduire l'ensemble des solutions.
4. Tracer la courbe représentative de la solution vérifiant  $y(0) = 0$ .

**Exercice 4 – (Méthode de variation de la constante)**

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la méthode de variation de la constante :

$$y' + y = xe^{-x}.$$

**Exercice 5 – (Équation différentielle avec logarithme)**

Résoudre sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle :

$$xy' + y = \ln x.$$

1. Identifier la nature de l'équation.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire la solution générale.

**Exercice 6 – (Théorème des accroissements finis et EDO)**

Soit  $f$  définie et dérivable sur  $[0; 1]$  telle que  $f'(x) + f(x) = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

1. Déterminer l'expression de  $f$ .
2. En déduire  $f(1)$  en fonction de  $f(0)$ .
3. Montrer qu'il existe  $c \in ]0; 1[$  tel que  $f(1) - f(0) = f'(c)$ .
4. Conclure sur la valeur de  $c$ .

**Exercice 7 – (Application avec trigonométrie)**

Résoudre l'équation :

$$y' + 2y = \sin(2x).$$

Puis déterminer la solution particulière telle que  $y(0) = 0$ . Tracer la courbe sur  $[0; 2\pi]$ .

**Exercice 8 – (Croissance et décroissance de solutions)**

Considérons l'équation différentielle :

$$y' - y = -e^x.$$

1. Résoudre l'équation.
2. Étudier le signe de la dérivée de la solution  $y$  vérifiant  $y(0) = 1$ .
3. En déduire la croissance ou décroissance de cette solution.

**Exercice 9 – (Problème inversé – retrouver l'EDO)**

On donne que la fonction  $y(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

1. Calculer  $y'(x)$ .
2. En déduire les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$ .

**Exercice 10 – (Étude complète d'une EDO – niveau avancé)**

On considère l'équation :

$$y' + y = x^2.$$

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Trouver une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
3. Déterminer la solution vérifiant  $y(1) = 0$ .
4. Étudier le signe de cette solution sur  $\mathbb{R}$ .