Mathosphère

Série d’exercices
Suites
Numeriques

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercices de Mathématiques – Terminale S1

Inspiré par Mathosphère

27 juillet 2025

Suites

Exercice 1 : Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\sqrt{n+n} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.
2. En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Exercice 2 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(U_n^2 - U_n + \frac{1}{2}\right)}$.

On pose $V_n = U_n^2 - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq 1$.
2. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique.
3. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Exercice 3 : $(U_n)_n$ est une suite réelle telle que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+15U_n}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n > \frac{1}{3}$.
2. Étudier la monotonie de $(U_n)_n$, et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \leq 1$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_{n+1} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}\left(U_n - \frac{1}{3}\right)$.
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.
5. On pose $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$, pour tout entier naturel n. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.
6. Calculer V_n puis U_n, en fonction de n.
7. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Déterminer S_n en fonction de n.
8. En déduire que $T_n = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$.

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty}(n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^5-5n^2+2}{4-n^3}$
3. $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3 - n} + 4 - n)$
4. $\lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}\sqrt{n} + 6$
5. $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$
6. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - \frac{2}{n^3}}\right)$
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^4}}{\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^5}}$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n}{8}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.
2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$.

4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
5. Exprimer u_n en fonction de n, puis donner $\lim(u_n)$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n}{8}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 < u_n < 4$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$.
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Puis déterminer $\lim(u_n)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$.

5. Établir que la suite (v_n) est géométrique, dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
7. Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

8. Exprimer S_n en fonction de n, puis conclure $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n| < \varepsilon$.

1. Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $|S_n| < \frac{M(n_0-1)}{n} + \varepsilon$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = (-1)^n$.

3. Que dire de S_n ? Qu'en déduisez-vous ?

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Bonne chance pour vos révisions !
Visitez Mathosphère pour plus de ressources.