Chapter 1

Nombres Complexes

1.1 Exercice 1

Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 - (1-2i)z + (1+5i) = 0.$$

2. On suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$ et $z_B = -1+i$.

a)

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 7 et (C') le cercle de centre B et de rayon 1.

i. Montrer que tout point de (C') est intérieur à (C).

ii. Soit (C'') un cercle de centre Γ, extérieurement tangent à (C') et intérieurement tangent à (C). Justifier que $\Gamma A + \Gamma B = 8$.

b)

O' désigne le milieu du segment $[AB]$; on pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{AB}$ et on désigne par $\vec{j}$ le vecteur unitaire tel que $(O'; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct auquel le plan est maintenant rapporté.

On pose $\overrightarrow{O'\Gamma} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $x \in [-4; 4]$ et on désigne par (D), la droite d'équation :

$$x = \frac{32}{5}.$$

i. Justifier que $\Gamma A = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$ et $\Gamma B = \sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$.

ii. Montrer que : $\Gamma A + \Gamma B = 8 \implies \Gamma A = -\frac{5}{8}x + 4$.

iii. En déduire que si $\Gamma A + \Gamma B = 8$ alors $\frac{\Gamma A}{\ldots} = \frac{5}{\ldots}$ et donner la nature

(b) Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?

3. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages, associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3

α désigne un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. Le plan complexe orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 \cos^2(\alpha) - z \sin^2(\alpha) + 1 = 0.$$

On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation ; z_1 désigne la solution dont la partie imaginaire est positive. A et B désignent les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

2. Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier votre réponse.

3.
   (a) Calculer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

   (b) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})$.

Exercice 4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$$z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0,$$

où d est un nombre complexe donné de module 2.

(a)

   i. Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation (E).

   ii. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

(b) Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M, et N d'affixes respectives :

$$2i, \quad -i, \quad -i + d, \quad \text{et} \quad -i - d.$$

   i. Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$.

ii. En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

iii. Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

iv. En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

4. Résoudre l'équation différentielle :

$$(\cos^2(\alpha))f'' - (\sin^2(\alpha))f' + f = 0$$

sachant que f est une fonction numérique d'une variable réelle x vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\tan(\alpha)$.

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6\,\text{cm}$. ∇_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; ∇_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, et ∇_2^{-1} est la transformation réciproque de ∇_2. Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par ∇_1 et M_2 l'image du point M par ∇_2.

1. On pose $\{ = \nabla_1 \circ \nabla_2^{-1}$.

   (a) Montrer que $\{$ est une symétrie centrale et déterminer $\{(M_2)$.

   (b) En déduire que le milieu I du segment $[M_1M_2]$ est le centre de la symétrie $\{$.

2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives -3 et $+3$; on note z, z_1 et z_2 les affixes respectives des points M, M_1 et M_2.

   (a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z.

   (b) Montrer que si M est distinct de A et de B, on a :

$$\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3}\frac{z - 3}{z + 3}.$$

   (c) En déduire que :

$$(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) \equiv (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

   (d) Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec une unité d'axe de $1,5\,\text{cm}$. On considère l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^3 - 7iz^2 - 15z + 25i = 0 \quad \text{définie dans} \quad \mathbb{C}.$$

1.
   (a) Montrer que l'équation (E) admet le nombre complexe $z_0 = 5i$ comme solution.

   (b) Résoudre l'équation (E).

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+i$, $5i$ et $-2+i$. La droite (D) d'équation $y = 2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L.

   Γ et Γ' sont les cercles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en O et K en L, et soit Ω le centre de S.

   (a) Montrer que Ω appartient à Γ et Γ' et qu'il est distinct de A.

   (b) Donner l'écriture complexe de S et en déduire l'affixe de Ω.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'unité graphique est de $2\,\text{cm}$.

1. On note (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que :

   $$14z\overline{z} + 16i(z - \overline{z}) = z^2 + \overline{z}^2.$$

   Démontrer que M appartient à (C) si et seulement si :

   $$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0.$$

2.
   (a) Justifier que (C) est une ellipse. On note $\mathcal{F}$ son centre.

   (b) Préciser les coordonnées de $\mathcal{F}$.

   (c) Déterminer une équation de l'axe focal de (C).

(d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives :

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i, \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}+i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}+i, \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}+i.$$

Justifier que A et A' sont les sommets de (C) situés sur son axe focal. Justifier que F et F' sont les foyers de (C).

3. Construire l'ellipse (C).

4. On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

   (a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :

   $$3x^2 - y^2 = 1.$$

   (b) Tracer les asymptotes de (H).

   (c) Construire (H).

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. À tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que :

   $$z' = z^2 - 4z.$$

   Calculer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées (x, y) du point M.

2. Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole. Préciser dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).

3. Construire (H).

4. Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$. Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit un parallélogramme.

Exercice 8

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points M_0, M_1, et M_2 d'affixes respectives $z_0 = -4 + i$, $z_1 = -2 - 3i$ et $z_2 = 1 + 4i$.

1.

(a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que : $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

(b) Établir que l'écriture complexe de S est :

$$z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}.$$

(c) En déduire le rapport et l'angle ω du centre Ω de la similitude S.

(d) On considère le point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image $M' = S(M)$ d'affixe z'. Vérifier la relation $\omega - z' = -i(z - z')$. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point M_n a pour affixe z_n. Et le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = S(M_n)$ et on pose $u_n = M_nM_{n+1}$.

   (a) Placer les points M_0, M_1, M_2 et construire géométriquement les points M_4, M_5 et M_6.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

   (a) Exprimer v_n en fonction de n.

   (b) Déterminer la limite de la suite (v_n).

4.

   (a) Calculer, en fonction de n, la longueur ΩM_n, notée r_n.

   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $r_n < 0,001$.

Exercice 9=probleme

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A.

1. Soit $F_{a,b}$ l'application de P vers P qui, au point M de coordonnées d'affixe $z = x+iy$ associe le point M' dont l'affixe est $z' = x'+iy'$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

   a) Établir les formules qui expriment les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

   b) Suivant les valeurs de a et b, rechercher les points invariants de $F_{a,b}$.

c) Si $|a| \neq -1$, établir que $F_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. Soit $G_{c,d}$ l'application de P vers P qui, au point N de coordonnées d'affixe $z = x + iy$, associe le point N' d'affixe $z' = cx + id$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de c et d, la nature de $G_{c,d}$.

B.

1. Dans cette question, $|a| \neq 1$ et le point M_1 d'affixe $u_1 = x + iy$. On pose $M_2 = F_{a,b}(M_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $M_{n+1} = F_{a,b}(M_n)$.

a) Montrer que M_n a pour affixe :

$$u_n = \frac{a^n + ib}{1 - (-a)^n} \frac{1 + a}{.}$$

b) Montrer que les points u_n appartiennent à la réunion de deux droites dont l'une D_1 passe par le point $A(0, \frac{b}{1+a})$ et M_1, alors que l'autre D_2 est la transformée de D_1 par $F_{a,b}$.

2. Dans cette question, on pose $c \neq 1$ et le point N_1 d'affixe $u_1 = c + id$. On pose $N_2 = G_{c,d}(N_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $N_{n+1} = G_{c,d}(N_n)$.

1. Montrer que N_n a pour affixe :

$$v_n = \frac{c^n + id}{1 - c^n} \frac{1 - c}{.}$$

2. Montrer que les points N_n, n éléments de $\mathbb{N}^*$, appartiennent à une droite A passant par le point $B(0, \frac{d}{1-c})$ et N_1.

3. On considère le cas particulier $d = -a$ et $d = b$ avec $|a| \neq 1$. Montrer que $A = D_2$.

C.

Soit φ_1 la fonction numérique définie par :

$$\varphi_1(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x - 2}.$$

1. Étudier les variations de φ_1 et construire sa courbe représentative (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On montrera que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_1).

2. On considère $c = 2$ et $d = 1$. Pour tout n entier naturel, on note φ_{n+1} la fonction dont la courbe représentative (C_{n+1}) est l'image de la courbe (C_n) de φ_n par $G_{1,2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x)$ est donnée par :

$$\varphi_n(x) = \frac{xe^{2n-1}}{x - 2n - 1 - 1}.$$

3.

a) Montrer que pour tout n, entier naturel non nul, les courbes (C_n) ont même asymptotes.

Exercice 10

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{i|z|}z$$

1.

Déterminer l'affixe des points A' et B' images respectifs du point A d'affixe π et du point B d'affixe 2π.

2.

Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $OM = 2k\pi$. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par f.

3.

Soit C le point d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et Δ la demi-droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O (demi-droite ouverte $]OC[$). Soit M un point de Δ d'affixe z et M' son image par f.

Déterminer $|z|$ pour que M et M' soient symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

4.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_k$ le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$, $\mathcal{D}_k$ la couronne délimitée par les cercles $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$ et a_k l'aire de la couronne $\mathcal{D}_k$.

a) Calculer a_k.

b) Déterminer la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer les points de $\Delta \cap \mathcal{D}_k$ qui sont symétriques avec leur image par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

b) Montrer que tout point de $\mathcal{D}_k$ a son image par f dans $\mathcal{D}_k$.

BONUS

Soit $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ un polynôme complexe où a, b, c, d sont des nombres complexes. On suppose que les racines de P sont des points du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

1. **Montrer que les coefficients a, b, c, d doivent satisfaire certaines relations spécifiques.**

   (a) En utilisant la propriété des racines du polynôme sur le cercle unité, exprimer a en fonction des racines de P.

   (b) Exprimer les coefficients b, c, et d en fonction des racines.

2. **Établir la forme canonique du polynôme $P(z)$ lorsque toutes ses racines sont distinctes et appartiennent à l'ensemble des racines de l'unité.**

   (a) Montrer que si les racines de P sont les n-ièmes racines de l'unité, alors $P(z)$ peut être écrit comme un produit de facteurs cycliques.

   (b) En utilisant les racines $\omega_k = e^{2\pi i k/n}$ (où $k = 0, 1, \ldots, n-1$), déterminer la forme de $P(z)$ et simplifier l'expression.

3. **Trouver les transformations géométriques associées aux coefficients a, b, c, d dans le plan complexe, et discuter de leur signification.**

   (a) Considérer le cas particulier où $n = 4$ et les racines sont $\pm 1, \pm i$. Déterminer les coefficients a, b, c, d pour ce cas spécifique.

   (b) Étudier comment la transformation associée à $P(z)$ agit sur le plan complexe en termes de rotations, translations, et homothéties.

4. **Étudier les propriétés de $P(z)$ en tant que fonction holomorphe sur le cercle unité.**

   (a) Montrer que $P(z)$ est une fonction holomorphe sur le cercle unité et en déduire des propriétés importantes.

   (b) Analyser les singularités potentielles de $P(z)$ à l'intérieur du cercle unité.

5. **Analyser le comportement de $P(z)$ au voisinage des racines et discuter des applications potentielles en théorie du contrôle ou en géométrie complexe.**

   (a) Étudier le comportement de $P(z)$ autour de chaque racine en utilisant la série de Taylor.

   (b) Discuter des implications en termes de stabilité et de contrôle lorsque $P(z)$ est utilisé pour modéliser des systèmes dynamiques.

Correction de l'exercice sur les polynômes complexes

Énoncé : Soit le polynôme complexe $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$. Les racines de $P(z)$ sont sur le cercle unité.

1. Relations entre les coefficients

a. Expression de a en fonction des racines

Soit z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de $P(z)$. On a :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Développons ce produit :

$P(z) = z^4-(z_1+z_2+z_3+z_4)z^3+(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4)z^2-(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4)z+$

Comparons cette expression avec $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$. On obtient :

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$
$$b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4$$
$$c = -(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)$$
$$d = z_1z_2z_3z_4$$

b. Expression de b, c, et d

Les expressions de b, c, et d sont données directement par les produits des racines comme montré ci-dessus.

2. Forme canonique du polynôme $P(z)$

a. Cas des racines de l'unité

Les n-ièmes racines de l'unité sont $\omega_k = e^{2\pi ik/n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Si les racines de P sont les n-ièmes racines de l'unité, alors :

$$P(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$$

Pour $n = 4$, les racines sont ± 1 et $\pm i$. On a alors :

$$P(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

Calculons ce produit :

$$(z-1)(z+1) = z^2 - 1$$
$$(z-i)(z+i) = z^2 + 1$$
$$P(z) = (z^2-1)(z^2+1) = z^4 - 1$$

3. Transformations géométriques

a. Cas $n = 4$

Pour les racines ± 1 et $\pm i$, les coefficients sont :

$$a = 0, \quad b = -2, \quad c = 0, \quad d = -1$$

b. Nature de la transformation

La transformation associée à $P(z) = z^4 - 1$ est une rotation de 90° suivie d'une homothétie de facteur $\sqrt{2}$.

4. Fonction holomorphe

a. Holomorphie sur le cercle unité

Le polynôme $P(z)$ est holomorphe partout dans $\mathbb{C}$ et donc aussi sur le cercle unité.

b. Singularités potentielles

Il n'y a pas de singularités sur le cercle unité puisque $P(z)$ est un polynôme.

5. Comportement autour des racines

a. Série de Taylor

Le comportement autour des racines peut être étudié en développant $P(z)$ en série de Taylor autour de chaque racine. La forme locale est :

$$P(z) \approx (z - z_i)^4 \text{ près de } z_i$$

b. Applications en théorie du contrôle

En théorie du contrôle, les racines du polynôme déterminent la stabilité d'un système. Les racines sur le cercle unité indiquent des pôles sur le bord de la stabilité.