Mathosphère

Série d’exercices sur les Fonctions

Niveau 1S1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 – *(Ensembles de définition)*
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$
3. $f(x) = \sqrt{1-x}$
4. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+7}}$
5. $f(x) = \sqrt{2x - \dfrac{5}{x-3}}$
6. $f(x) = \sqrt{|-x|}$
7. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$
8. $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-13x-5}$
9. $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-|13x-5|}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$
11. $f(x) = \dfrac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2+13x+5}{\sqrt{2x-3}}}$

Exercice 2 – *(Nature des applications)*
Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des applications :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - \sqrt{x}$
3. $h : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2}$
4. $i : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$
5. $j : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \dfrac{1}{x^2+2x-3}$
6. $k : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$
7. $l : [0;0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
8. $m :]-\infty;0[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x-1}{x-3}$

Exercice 3 – *(Injectivité et surjectivité)*
Dans chacun des cas suivants, étudier si l'application f de E vers F est injective, surjective ou bijective.

1. $E = F = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2+2$
2. $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad F = \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
3. $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad F = \mathbb{R}\setminus\{2\}, \quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$
4. $E = \mathbb{R}^+, \quad F = \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2-4$
5. $E = \mathbb{R}, \quad F = [-3;+\infty[, \quad f(x) = 2x^2-3$
6. $E = F = \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \text{ pair} \\ x+1 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$
7. $E = F = \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$
8. $E = F = \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \text{ pair} \\ 2x+1 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$

Exercice 4 – *(Analyse d'une fonction)*
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$.

1. Déterminer son ensemble de définition D.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, où y est un paramètre réel. L'application $f : D \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles, pour que l'application $g : E \to F, x \mapsto f(x)$ soit bijective. Définir alors g^{-1}.

Exercice 5 – *(Fonction affine et application sur $\mathbb{Z}$)*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x+3$.

1. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que f est bijective et déterminer l'application réciproque.
3. La restriction de f à $\mathbb{Z}$ est-elle une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$?

Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x \text{ pair} \\ x^2 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

4. Déterminer l'image par g de chacun des entiers $-2, -1, 1, 2, 3$.
5. L'application g est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 6 – *(Composée de fonctions affines)*
Soient f et g deux fonctions affines telles que : $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$.

1. Trouver une relation entre a, b, c, d caractérisant la propriété : $f \circ g = g \circ f$.
2. Soient D et D' les droites d'équations $y = ax+b$ et $y = cx+d$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ équivaut à :
   (a) D et D' est égale à Δ, soit

(b) D et D' sont strictement parallèles à Δ, soit

(c) D, D' et Δ sont concourantes.

Exercice 7 – ***(Représentation graphique)***
Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe C représentative de la fonction f relativement à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. On sait que :
   (a) f est impaire,
   (b) si $x \in [0; 4]$, alors $f(x) = x$; si $x \in]4; +\infty[$, alors $f(x) = 2$.
2. On sait que :
   (a) f est paire,
   (b) si $x \in [0; 3[$, alors $f(x) = 2$; si $x \in [3; +\infty[$, alors $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
3. On sait que :
   (a) f est périodique, de période 2,
   (b) si $x \in [0; 2[$, alors $f(x) = -x + 1$.

   Tracer C sur l'intervalle $[-4; 8[$.
4. On sait que :
   (a) f est impaire,
   (b) f est périodique, de période 2,
   (c) si $x \in [0; 1[$, alors $f(x) = x$.

   Tracer C sur l'intervalle $]-1; 1[$ puis sur l'intervalle $]-3; 5[$. Connaît-on la valeur de $f(-1)$? de $f(3)$?
5. On sait que :
   (a) f est paire,
   (b) f est périodique, de période 2,
   (c) si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) = x$.

   Tracer C sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Exercice 8 – ***(Propriétés d'une fonction)***
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.
4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour (C_f) en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer (C_f).

Exercice 9 – ***(Analyse d'une fonction rationnelle)***
On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 27}{2x^2}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x > 3 \Leftrightarrow x^3 > 27$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de f.
   (c) Étudier le signe de f'.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 10 – ***(Fonction trigonométrique)***
On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est 2π-périodique.

Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Déterminer les limites de f en :
   (a) $-\dfrac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
   (b) $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer (C_f) sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 11 – ***(Fonction avec partie entière)***
Soit n un entier donné supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - n\frac{x}{n}$$

1. Démontrer que cette fonction est périodique.
2. En déduire que, quel que soit $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) < n$.

Exercice 12 – ***(Problème : Étude complète d'une fonction)***
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et vérifier s'il est symétrique par rapport à l'origine.
2. Étudier la parité de f. En déduire une propriété de (C_f).
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, c'est-à-dire en $-\infty$, -1, 1, et $+\infty$. Identifier les éventuelles asymptotes (verticales ou horizontales).
4. Montrer que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - 1 + \sqrt{x^2+1}} + 1$. En déduire l'existence d'une asymptote horizontale.
5. Étudier l'injectivité de f en résolvant $f(x) = f(y)$.
6. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
7. Tracer la courbe (C_f) en utilisant les informations précédentes.
8. Déterminer si f est surjective sur $\mathbb{R}$. Sinon, trouver l'ensemble image de f.

Exercice 13 – ***(Problème : Fonction périodique et bijection)***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.
On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est 2π-périodique.
2. Calculer $f(x+\pi)$ et en déduire une relation entre $f(x)$ et $f(x+\pi)$.
3. Sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$, étudier les limites de f en $-\pi$ et π. Identifier les asymptotes verticales de (C_f).
4. Résoudre l'équation $f(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R}$ sur $]-\pi;\pi[$. En déduire si $f :]-\pi;\pi[\to \mathbb{R}$ est injective et surjective.
5. Calculer la dérivée $f'(x)$ sur $]-\pi;\pi[$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
6. Tracer (C_f) sur $]-3\pi;3\pi[$ en tenant compte de la périodicité.
7. Trouver un intervalle $E \subset \mathbb{R}$ et un ensemble $F \subset \mathbb{R}$, les plus grands possibles, tels que $f : E \to F$ soit bijective. Déterminer f^{-1} sur cet intervalle.
8. Étudier si la composée $f \circ f$ est définie. Si oui, donner son expression simplifiée.