Mathosphère

Série d'exercices Derivation

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 (Étude de fonction polynomiale) – Soit $f(x) = x^2 - x$.
Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 2 (Centre de symétrie) – Soit $f(x) = x - \sin x \cos x$.
Montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

Exercice 3 (Étude complète de fonction rationnelle) – Soit $f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
6. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 (Fonction définie par morceaux et asymptotes) – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) + 3 \cdot \sqrt[3]{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)\left(1 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est continue en $x = 1$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en $x = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. (a) Calculer les limites suivantes :
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
   (b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $\Delta : y = x$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
3. (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 1]$.
   (b) Donner le tableau de variation de f' sur $K = [1; +\infty[$, et en déduire les variations de f sur K.

Exercice 5 (Fonction trigonométrique) – Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$.
3. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 6 (Fonction trigonométrique et périodicité) – Soit la fonction $f(x) = 4\sin x + \cos 2x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f.
3. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de f en $x = 0$.
5. Calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$.
6. Déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.

"Les mathématiques ne sont pas une simple discipline, mais une clé pour comprendre l'univers dans toute sa beauté." – Anonyme

"Les défis mathématiques ne sont pas des obstacles, mais des occasions de repousser les limites de notre réflexion et de notre créativité." – Ndao