



**Mathosphère**

# Série d'exercices Nombre Complex

Niveau TS1

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

## Exercice 1 – Linéarisation et identités trigonométriques (Formules d'Euler)

On considère les identités trigonométriques issues des formules d'Euler.

- En utilisant la formule d'Euler, montrer que :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- Montrer que :

$$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$$

- Montrer que :

$$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- Montrer que :

$$\sin^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$$

- Linéariser les expressions suivantes :

- (a)  $\sin^5 \theta$
- (b)  $\cos^2 \theta \cdot \sin^3 \theta$

## Exercice 2 – Géométrie complexe et équation

Soit les points  $A, B, C$  d'affixes respectives  $z_A = 1, z_B = j$ , et  $z_C = j^2$ , où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

- Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct.
- Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z \in \mathbb{C}$ . On considère la transformation complexe suivante :

$$z' = \frac{z - 1}{z + 1}$$

- (a) Déterminer l'ensemble image par cette transformation des points du cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon 1.
  - (b) Montrer que cette transformation conserve les cercles.
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos(3\theta)$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  est un paramètre réel fixé. Déduire les solutions complexes de l'équation.

- Montrer que si  $z \in \mathbb{C}$  vérifie  $|z| = 1$ , alors on a :

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta)$$

où  $z = e^{i\theta}$  pour un certain  $\theta \in \mathbb{R}$ .

## Exercice 3 — Équation complexe à paramètres

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = 1$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\theta)$$

- Montrer que les solutions de cette équation sont les nombres complexes de module 1 et d'argument  $\theta$  ou  $-\theta$ .
- En déduire l'ensemble des solutions sous forme exponentielle.
- Donner une interprétation géométrique des solutions dans le plan complexe.

## Exercice 4 : Relations géométriques et arguments des nombres complexes

Soient  $a, b$ , et  $c$  des nombres complexes tels que :

—  $abc = 1$ ,

—  $a \neq c$ ,

—  $b \neq c$ .

- Montrer que  $\frac{a-b}{a-c}$  est un nombre complexe non nul.

- En utilisant les arguments des nombres complexes, montrer que :

$$\arg(a - b) - \arg(a - c) \equiv \arg(c - b) - \arg(c - a) \pmod{2\pi}.$$

- En déduire que les différences d'arguments respectent une certaine relation entre les points  $a, b$ , et  $c$ .

- Montrer que si  $abc = 1$ , alors les points  $a, b$ , et  $c$  sont situés sur un cercle du plan complexe, et déterminer le rayon de ce cercle.

## Exercice 5 : Résolution d'équations complexes

Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe où  $a$  et  $b$  sont des réels. Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{C}$ .

- Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 + (1 - 2i)z + 2 = 0.$$

- Résoudre l'équation suivante :

$$z^3 - 4z + 5i = 0.$$

- Résoudre l'équation suivante :

$$(z - 1)^2 = 3z - 4i.$$

- Résoudre l'équation suivante dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^4 - 4z^2 + 5 = 0.$$

- Résoudre l'équation suivante en utilisant la forme trigonométrique :

$$z^2 = 2 + 2i.$$

**6)** Résoudre l'équation suivante :

$$z^3 + (3 - 4i)z^2 + (2 + i)z - 1 = 0.$$

**Exercice 6 :**

Soient  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = -1 + 4i$ , et  $z_3 = -3 - i$  des nombres complexes représentant trois points dans le plan complexe. Soit  $M$  et  $N$  les milieux des segments  $[z_1 z_2]$  et  $[z_2 z_3]$ , respectivement.

On applique les transformations suivantes :

1. Une rotation de  $\alpha = 120^\circ$  autour du point  $O = 1 + i$ .
2. Une translation de vecteur  $t = -3 + 2i$ .
3. Une réflexion par rapport à la droite  $D : y = -x$ .

**Questions :**

1. Montrer que les points  $M$  et  $N$  sont invariants sous la composition des trois transformations successives.
2. Calculer les images des points  $z_1$ ,  $z_2$ , et  $z_3$  après chaque transformation. Indiquer les coordonnées des points transformés après chaque étape.
3. Vérifier que la composition des transformations est une isométrie en montrant que les distances entre les points avant et après la transformation sont conservées. Calculer les distances avant et après chaque transformation pour les points  $z_1$ ,  $z_2$ , et  $z_3$ .
4. Montrer que l'angle entre les segments  $[z_1 z_2]$  et  $[z_2 z_3]$  reste invariant après les transformations. Calculer l'angle avant et après la composition des transformations.
5. Que se passe-t-il si, au lieu de la réflexion par rapport à la droite  $D : y = -x$ , on applique une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées ? Résoudre le problème et comparer les résultats.

**Exercice 7 :**

Soit le nombre complexe  $z = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ .

On pose :

$$S = z^2 + z^4 + z^6$$

et

$$T = z^3 + z^5 + z^6$$

1. Montrer que les nombres  $S$  et  $T$  sont conjugués.
  2. Montrer que :
- $\operatorname{Im}(S) > 0$
3. Calculer  $S + T$  et  $S \times T$ .
  4. En déduire les nombres  $S$  et  $T$ .