Mathosphère

# Série d'exercices sur les Transformations du plan

Niveau 1S1

www.Mathosphère.com

**Exercice 1 –** ***(Application et transformation)***
Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$. Au point $M(x, y)$, on fait correspondre $M'(x', y')$ tel que :

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels donnés.

1. Cette correspondance est-elle une application de $P$ vers $P$ ? À quelle condition est-ce une transformation de $P$ ? Déterminer alors la transformation réciproque.
2. On suppose la condition précédente vérifiée pour l'application $f_1$, correspondant aux réels $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ et pour l'application $f_2$, correspondant aux réels $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$. Montrer que $f_2 \circ f_1$ est une transformation de $P$.

---

**Exercice 2 –** ***(Correspondance dans le plan)***
Dans le plan $P$ rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$, on fait correspondre au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$. Cette correspondance est-elle une application de $P$ vers $P$ ? De $P$ privé de certains points ?

1. $x' = x^2 + y^2, \quad y' = x^2 - y^2$
2. $x' = \sqrt{x}, \quad y' = \sqrt{y}$
3. $x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
4. $x' = x^2 + y^2, \quad y' = x - y$

---

**Exercice 3 –** ***(Application affine)***
Soit $f$ l'application du plan dans lui-même définie par : $f(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, où $A$ est un point fixé du plan.

1. Montrer que $f$ est une application affine.
2. Déterminer les points fixes de $f$.
3. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?

---

**Exercice 4 –** ***(Affinité)***
Soit deux droites sécantes $D$ et $\Delta$ et un réel $k \neq 0$. Par un point quelconque $M$ du plan, on trace la parallèle à $\Delta$ qui coupe $D$ en $H$ et on construit le point $M'$ tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.

1. Montrer qu'on a ainsi défini une transformation $f$ du plan.
2. Déterminer les points invariants par $f$ et les droites globalement invariantes par $f$.
3. Déterminer l'image par $f$ d'une droite.
4. Soit un point $A$ et son image $A'$ par $f$. Utiliser le résultat précédent pour construire simplement l'image $M'$ d'un point $M$ quelconque donné.
5. Déterminer $f^{-1}$.
6. En choisissant un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ convenable, donner une expression analytique de $f$.

---

**Exercice 5 –** ***(Transformation définie par projection)***
Dans le plan rapporté au repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$, on considère les droites $D$ et $D'$ d'équations : $D : 3x + 2y - 6 = 0$, $D' : x - 4y + 4 = 0$. Soit un point $M(x, y)$ du plan. La parallèle à $D$ menée par $M$ coupe l'axe $x'x$ en $H$ ; la parallèle à $D'$ menée par $M$ coupe l'axe $y'y$ en $K$. Soit $M'(x', y')$ le point qui se projette en $H$ sur $x'x$ et en $K$ sur $y'y$.

1. Montrer que $M'$ est l'image de $M$ dans une application $f$ de $P$ dans $P$. $f$ est-elle une transformation de $P$ ?
2. Donner une expression analytique de $f$.
3. Existe-t-il des points invariants par $f$ ?
4. Reprendre les questions précédentes avec $D : x + y = 0$ et $D' : x - y = 0$.

---

**Exercice 6 –** ***(Affinité dans un triangle)***
Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. On considère l'affinité $f$ qui transforme $A$ en $A$, $B$ en $B$ et $C$ en le milieu $I$ de $[AB]$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de $f$.
2. Quelle est l'image par $f$ du cercle circonscrit à $ABC$ ?
3. Construire l'image d'un carré inscrit dans $ABC$ par cette affinité.

---

**Exercice 7 –** ***(Translation entre triangles)***
Dans une figure où $ABC$ et $EFG$ sont deux triangles rectangles de mêmes dimensions, $(AB)$ et $(EF)$ sont parallèles. Quelle est l'image de chacun des points $E$, $F$ et $G$ par la translation qui transforme $G$ en $C$ ?

---

**Exercice 8 –** ***(Translations dans un triangle)***
Soit $ABC$ un triangle.

1. Construire l'image de ce triangle par la translation de vecteur :
   (a) $\overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{CA}$
   (d) $\overrightarrow{V}$ quelconque
2. On note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.
3. Soit $A'$, $B'$, $C'$ les images de $A$, $B$, $C$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$. Quelle est la nature des quadrilatères $ABA'C$, $BCC'B'$, $ABB'C$ ?
4. Le quadrilatère $ABA'C$ peut-il être un losange ? Un carré ?

---

**Exercice 9 –** ***(Translation et parallélogramme)***
Soit un parallélogramme $ABCD$. On considère la translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer l'image du parallélogramme $ABCD$ par $t$.
2. Montrer que la composée $t \circ t$ est une translation dont on précisera le vecteur.

3. Soit $M$ un point quelconque du plan. Construire son image par $t \circ t_{\overrightarrow{AD}}$.

**Exercice 10** – ***(Translation entre cercles)***
Soit deux cercles $C_1$ et $C_2$ de centres respectifs $O_1$ et $O_2$, de rayons $r_1$ et $r_2$ ($r_1 = r_2$).

1. Montrer qu'il existe une unique translation transformant $C_1$ en un cercle tangent à $C_2$.
2. Dans le cas où $r_1 = r_2$, qu'en déduit-on ?

**Exercice 11** – ***(Translation entre droites)***
Soit deux droites parallèles distinctes $D_1$ et $D_2$, et un point $A$ n'appartenant à aucune des deux.

1. Combien existe-t-il de translations transformant $D_1$ en $D_2$ ?
2. Parmi ces translations, déterminer celle qui minimise la distance $AA'$ où $A'$ est l'image de $A$.
3. Application : $D_1 : y = 2x + 1$, $D_2 : y = 2x - 3$, $A(0, 0)$. Calculer le vecteur de cette translation.

**Exercice 12** – ***(Homothéties dans un triangle)***
Soit un triangle $ABC$. Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ dans les cas suivants :

1. $O = A$ et $k = -1$
2. $O = A$ et $k = 2$
3. $O$ est le milieu de $[BC]$ et $k = 2$
4. $O$ et $k$ sont quelconques

**Exercice 13** – ***(Homothétie unique)***
Soit $A$, $B$, $C$ trois points distincts tels que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$. Démontrer qu'il existe une unique homothétie qui transforme $A$ en $B$ et $B$ en $C$.

**Exercice 14** – ***(Triangles et transformations)***
Soit deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ dont les côtés $(AB)$ et $(A'B')$, $(BC)$ et $(B'C')$, $(CA)$ et $(C'A')$ sont parallèles.

1. On suppose que $AB = A'B'$. Montrer que l'un de ces triangles est l'image de l'autre dans une translation ou dans une symétrie centrale que l'on précisera. (On distinguera les deux cas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$).
2. On suppose que $AB \neq A'B'$. Montrer que l'un de ces triangles est l'image de l'autre dans une homothétie que l'on précisera.

**Exercice 15** – ***(Composée de symétries)***
Montrer que la composée de deux symétries centrales est une translation.

**Exercice 16** – ***(Homothétie et cercle)***
Soit $C$ un cercle et soit $A$ et $B$ deux points extérieurs au cercle, $I$ étant le milieu de $[AB]$.

1. À tout point $M$ de $C$, on associe le point $N$ centre de gravité de $ABM$. Montrer que $N$ est l'image de $M$ par une homothétie bien choisie. Déterminer et construire l'ensemble des points $N$ lorsque $M$ parcourt $C$.
2. À tout point $M$ de $C$, on associe le point $P$ tel que $AMBP$ soit un parallélogramme. Montrer que $P$ est l'image de $M$ par une transformation que l'on précisera. Déterminer et construire l'ensemble des points $P$ lorsque $M$ parcourt $C$.

**Exercice 17** – ***(Composée d'homothéties)***
Soit un quadrilatère $ABCD$ et $k$ un réel non nul. On considère les homothéties : $h_1(A, k)$, $h_2(B, k)$, $h_3(C, k)$, $h_4(D, k)$.

1. Montrer que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. Déterminer la nature de la transformation $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$.
3. Application : $ABCD$ carré, $k = 2$. Construire l'image d'un point $M$ par cette transformation.

**Exercice 18** – ***(Rotations dans un triangle)***
Dans un plan orienté, on considère un triangle $ABC$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par $\zeta$ le cercle circonscrit à ce triangle et par $O$ son centre.

1. Faire une figure.
2. Soit $E = \{M \in P \mid (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]\}$.
   (a) Vérifier que $A \in E$ puis déterminer et construire $E$.
   (b) Déterminer et construire le point $I$ tel que $IB = IC$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \dfrac{\pi}{3}[\pi]$.
3. Soit $P$ le point du segment $[AC]$ tel que $CP = AB$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique rotation $R$ telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$, quel est son angle ?
   (b) Déterminer le centre de la rotation $R$.
4. Donner la nature du triangle $IAP$ et en déduire que : $AC = AI + AB$.
5. Soit $M$ un point variable de l'ensemble $F$ et $G$ le centre de gravité du triangle $MBC$. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point $G$ lorsque $M$ parcourt $E$.

**Exercice 19** – ***(Rotation entre carrés)***
Soit deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ de même sens disposés avec $E \in [AB]$.

1. Montrer qu'il existe une rotation transformant $D$ en $G$ et $C$ en $F$.
2. Déterminer précisément cette rotation (centre, angle).
3. En déduire que les droites $(BG)$, $(CF)$ et $(DE)$ sont concourantes.

**Exercice 20** – ***(Problème synthèse)***
Soit un carré $ABCD$ de centre $O$. On considère les transformations suivantes :

— $r$ : la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$,
— $h$ : l'homothétie de centre $A$ et de rapport 2,
— $t$ : la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer les images des points $A$, $B$, $C$, $D$ par chacune de ces transformations.
2. Montrer que la composée $h \circ r$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Déterminer la nature de la transformation $f = t \circ r \circ h$.
4. Soit $M$ un point du segment $[AB]$. Construire son image par $f$.
5. On considère maintenant le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au carré $ABCD$.
   (a) Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par $h$.
   (b) Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par $r \circ t$.
   (c) Montrer que la composée de trois symétries centrales est une symétrie centrale.
6. Soit $E$ le symétrique de $A$ par rapport à $B$, $F$ le symétrique de $B$ par rapport à $C$, et $G$ le symétrique de $C$ par rapport à $D$.
   (a) Montrer qu'il existe une symétrie centrale transformant $A$ en $G$.
   (b) En déduire la nature du quadrilatère $AEFG$.