Mathosphère

Série d’exercices

Arithmetique

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 : Diviseurs communs et suites entières :
Soient les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$a_n = 2n + 1 \quad \text{et} \quad b_n = 5n + 4$$

Questions :

1. Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.
2. Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n.

Exercice 2 : Divisibilité et puissances Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid (4^n - 1)$$

Exercice 3 : Divisibilité et puissances
Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid (4^n - 1)$$

Exercice 4 : Quotient et division euclidienne
Soient n, a et b des entiers naturels. On note q le quotient de la division euclidienne de n par a, et q' le quotient de la division euclidienne de q par b.
Démontrer que q' est aussi le quotient de la division euclidienne de n par ab.

Exercice 5 : Arithmétique et conditions sur un entier
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux nombres :

$$A = 2n + 3 \quad \text{et} \quad B = n + 2$$

1. Montrer que $\gcd(A, B) = \gcd(n + 2, 2n + 3) = \gcd(n + 2, 7)$.
2. Déterminer tous les entiers naturels n tels que :

$$\frac{2n + 3}{n + 2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 6 : Plus grand commun diviseur
Soit $a \in \mathbb{N}$. On considère les deux nombres :

$$A = 35a + 57 \quad \text{et} \quad B = 45a + 76$$

Montrer que :

$$\gcd(A, B) = 1 \quad \text{ou} \quad \gcd(A, B) = 19$$

Exercice 7 : Divisibilité et équation diophantienne
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation :

$$15n + 1 \mid n^3 + 100$$

Déterminer tous les entiers naturels n tels que le nombre $15n+1$ divise $n^3 + 100$.

Exercice 8 : Congruences et reste de divisions
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$a \equiv 17 \pmod{19} \quad \text{et} \quad b \equiv 15 \pmod{19}$$

Déterminer le reste de la division euclidienne par 19 des expressions suivantes :

1. $a + b$
2. $a^2 + b^2$
3. $a^5 + b^2$

Exercice 9 : Puissances, congruences et chiffres des unités

1. Déterminer et discuter, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 10.
2. En déduire le chiffre des unités du nombre $3^{2020^{2019}}$.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que :

$$3^n \equiv 5 \pmod{10}$$

Exercice 10 : Congruences et puissances

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

2. Montrer que :

$$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7 \equiv 3 \pmod{10}$$

Exercice 11 : Divisibilité et congruences

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872 par 9.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614 par 13.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, l'expression

$$n^2 + n + 2n + 3 + 2$$

   est divisible par 7.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, l'expression

$$5n + 3$$

   est divisible par 6.
5. Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors $6n - 1$ est un multiple de 7.
6. Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $(n+2)^2+5$ est divisible par 6.

Exercice 12 : Congruences avancées et puissances
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le nombre $A_n = 7^n + 3^n + 2^n$.

1. Montrer que la suite $(A_n \mod 5)$ est périodique.
2. Déterminer le reste de la division de A_n par 5 pour tout entier n.
3. En déduire tous les entiers n tels que A_n soit divisible par 5.

4. Démontrer que pour tout entier n, $A_n \equiv 0 \pmod 5$ si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 4$.

Exercice 13 : Divisibilité et équation diophantienne

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \equiv 4 \pmod 7$ et $b \equiv 5 \pmod 7$.

1. Déterminer le reste de $a^3 + b^4$ modulo 7.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $11^n + 6^n$ est divisible par 5 si n est impair.
3. Soit $S_n = 2^n + 3^n + 5^n$. Déterminer une condition sur n pour que $S_n \equiv 0 \pmod{10}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 5$$

et donner toutes les paires $(x, y) \in 0, 4^2$ qui satisfont cette congruence.