Mathosphère

Série d’exercices sur les angles orientés

Niveau 1S1

Exercice 1 – ***(Mesures des angles orientés)***
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites et α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ en radians. Dans chacun des cas suivants, donner la mesure principale et la plus petite mesure positive de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$:

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{25\pi}{6}; \quad \alpha = -\frac{41\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{415\pi}{6}; \quad \alpha = -\frac{23\pi}{3}.$$

Exercice 2 – ***(Cercles sécants et parallélisme)***
Deux cercles (C) et (C') sont sécants en A et B. Une droite passant par A recoupe (C) en P et (C') en Q. Une droite passant par B recoupe (C) en R et (C') en S. Montrer que les droites (PR) et (QS) sont parallèles.

Exercice 3 – ***(Tangente et parallélisme)***
Deux cercles (C) et (C') sont sécants en A et B. M est un point de (C). On trace la tangente (T) à (C) en M. La droite (MA) recoupe (C') en P' et (MB) recoupe (C') en Q'. Montrer que $(P'Q')$ et (T) sont parallèles.

Exercice 4 – ***(Cercle trigonométrique et angles)***

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Placer sur le cercle trigonométrique d'origine O les points M, N, et P tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{29\pi}{4} + 2k\pi; \quad (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = x \text{ avec } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

2. Soit (C) un cercle de centre A. Soit B un point de (C).
   (a) Construire les points C, D, E, et F du cercle (C) tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}; \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}; \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = \frac{5\pi}{6}.$$

   (b) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}); \quad (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}); \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}); \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}).$$

Exercice 5 – ***(Construction et angles dans des triangles)***
ACE est un triangle isocèle rectangle en A tel que $AC = 4$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

1. Construire le triangle AEF équilatéral direct et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}); \quad (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}); \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}); \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}).$$

Exercice 6 – ***(Cocyclité dans des cercles sécants)***
Deux cercles (C) et (C') sont sécants en A et B. Soit P un point de (C), Q un point de (C') n'appartenant pas à la droite (AP). Une droite passant par B recoupe (C) en M et (C') en N. Soit R le point d'intersection de (PM) et (QN). Montrer que les points A, P, Q, et R sont cocycliques.

Exercice 7 – ***(Lieu géométrique des points)***
A, B, et C sont trois points distincts du plan. Déterminer puis représenter l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[\pi]; \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi];$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}[\pi]; \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi];$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]; \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0[2\pi];$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[\pi]; \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi].$$

Exercice 8 – ***(Carré et colinéarité)***
Soit $ABCD$ un carré direct. Soient E et F les points tels que ABE et BCF soient des triangles équilatéraux directs.

1. (a) Déterminer la nature du triangle DEA puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE})$.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})$.
2. Déterminer la nature du triangle CDF puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC})$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = [\pi]$. Conclure.

Exercice 9 – ***(Orthocentre et cocyclité)***
Soit ABC un triangle non rectangle et H son orthocentre. Soit H' le symétrique orthogonal de H par rapport à (BC).

1. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi].$$

2. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})[2\pi].$$

3. Montrer que les quatre points A, B, C, et H' sont cocycliques.
4. Nommer deux autres points sur ce cercle.

Exercice 10 – ***(Équation d'angle dans un triangle)***
Dans un triangle ABC, on sait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$. De plus, la longueur $BC = 6$. Résoudre pour trouver les longueurs possibles de AB et AC si l'angle $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 11 – ***(Inéquation de distance)***
Soit $A(1,2)$ et $B(-1,-1)$. Trouver l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que la distance $MA \leq MB$.

Exercice 12 – ***(Système pour coordonnées)***
Soit un triangle ABC avec $A(0,0)$, $B(2,0)$, et $C(0,3)$. Trouver les coordonnées du point $M(x,y)$ tel que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad MA = MB.$$

Exercice 13 – ***(Équation de cercle)***
Soit un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 5. Trouver les coordonnées des points $M(x,y)$ sur le cercle tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{3}$, où $A(5,0)$.

Exercice 14 – ***(Inéquation angulaire)***
Dans un cercle trigonométrique centré en O, soit P un point fixe tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = \dfrac{\pi}{6}$. Trouver les points M sur le cercle tels que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) \geq \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 15 – ***(Système dans un triangle)***
Dans un triangle équilatéral ABC de côté 4, trouver les coordonnées du point $M(x,y)$ tel que :

$$MA = MB \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 16 – ***(Équation de tangente)***
Soit un cercle de centre $O(1,-1)$ et de rayon 3. Trouver l'équation de la tangente au cercle passant par le point $P(4,2)$.

Exercice 17 – ***(Inéquation de distances)***
Soit $A(2,1)$ et $B(-2,-1)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $MA^2 + MB^2 \leq 16$.

Exercice 18 – ***(Système pour angles)***
Soit un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1. Soient A et B deux points sur le cercle tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{3\pi}{4}$. Trouver les points M sur le cercle tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad OM = 1.$$

Exercice 19 – ***(Équation de lieu)***
Soit $A(3,0)$ et $B(0,4)$. Trouver l'équation du lieu des points $M(x,y)$ tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 20 – ***(Inéquation géométrique)***
Dans un triangle ABC avec $BC = 5$, trouver les valeurs possibles de $x = AB$ telles que l'angle $\widehat{BAC} \geq \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 21 – ***(Système de coordonnées)***
Soit un carré $ABCD$ avec $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$. Trouver les coordonnées du point $M(x,y)$ tel que :

$$MA = MC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 22 – ***(Équation de droite)***
Soit un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2. Soient $P(2,0)$ et Q un point sur le cercle tel que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Trouver l'équation de la droite PQ.

Exercice 23 – ***(Système géométrique)***
Dans un triangle rectangle ABC avec $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, $AB = 3$, et $AC = 4$, trouver les coordonnées du point $M(x,y)$ tel que :

$$MB = MC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}.$$
