Mathosphère

Série d'exercices sur les Polynômes

Niveau 2nd S

www.Mathosphère.com

Exercice 1 – ***(Identification des polynômes)***
Les fonctions suivantes sont-elles des polynômes ? Justifier votre réponse.

1. $f(x) = |-2x^2 + 4x - 3|$
2. $f(x) = |3x^2 - 5x + 2|$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
4. $f(x) = \sqrt{(x^2 - 3x + 2)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Exercice 2 – ***(Factorisation par un polynôme)***
Dans chacun des cas suivants, dire si $f(x)$ est factorisable par $g(x)$. Si oui, déterminer une factorisation de $f(x)$.

1. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 14x + 8$, $g(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x + 6$, $g(x) = 2x + 3$
3. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x + 4$, $g(x) = 4x + 1$

Exercice 3 – ***(Développement, factorisation et équations)***
On donne $P(x) = (2x - 3)(x + 4) - (x - 1)^2$.

1. Développer et réduire $P(x)$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Utiliser la forme convenable pour résoudre les équations :
   (a) $P(x) = 0$
   (b) $P(x) = -12$
   (c) $P(x) = 5x + 3$
4. Calculer $P(-2)$ et $P\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 4 – ***(Factorisation et inéquations)***
On donne $f(x) = x^5 - 12x^3 + 35x$.

1. Calculer $f(\sqrt{5})$ et $f(-\sqrt{5})$.
2. Factoriser $f(x)$ au mieux.
3. Résoudre $f(x) < 0$.

Exercice 5 – ***(Racines et factorisation)***
Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

1. Montrer que -2 est une racine de f.
2. En déduire une factorisation complète de $f(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{x^2 - 3} < 0$.

Exercice 6 – ***(Polynôme de degré 2 et somme)***

1. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 5$, $P(3) = 10$.
2. En déduire une expression de $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)$.

Exercice 7 – ***(Polynôme de degré 3 et somme)***

1. Déterminer le polynôme P de degré 3 vérifiant $P(1) = 4$, $P(2) = 12$, $P(3) = 24$, $P(4) = 40$.
2. En déduire une expression de $S_n = 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + \cdots + 2n(n+1)$ en fonction de n.
3. Calculer $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \cdots + 200 \cdot 101$.

Exercice 8 – ***(Relations entre racines)***
Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. On suppose que $P(x) = 0$ admet trois racines α, β, et δ. Sans calculer ces racines, donner les valeurs de :

1. $\alpha + \beta + \delta$
2. $\alpha\beta\delta$
3. $\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta$
4. $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\delta}$
5. $\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$

Exercice 9 – ***(Divisibilité d'un polynôme)***
Soit le polynôme $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$.

1. Déterminer a et b pour que $Q(x)$ soit divisible par $x^2 - 4$.
2. (a) Factoriser $Q(x)$.
   (b) Résoudre $Q(x) = 0$ et $Q(x) > 0$.
   (c) Résoudre $Q(x^2 + 2) = 0$.

Exercice 10 – ***(Factorisation avec paramètres)***
Soit le polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$.

1. Déterminer a et b pour que $f(x)$ soit factorisable par $x^2 - 2x - 8$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 11 – ***(Reste de division)***
Un polynôme $x^3 + px^2 + q$ divisé par $x - 3$ a pour reste 4, et divisé par $x + 1$ a pour reste 2. Déterminer p et q.

Exercice 12 – ***(Polynôme factorisable)***
Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 3m$.

1. Pour quelle valeur de m, P est-il factorisable par $x + 2$?
2. Trouver le polynôme Q tel que $P(x) = (x + 2) \times Q(x)$.
3. Pour cette valeur de m, résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $P(x) = 0$
   (b) $P(x) \geq 0$

Exercice 13 – ***(Racine et factorisation)***
Soit $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 7x + 4$.

1. Montrer que 1 est une racine de P.
2. Factoriser $P(x)$ puis résoudre $P(x) = 0$.

3. Résoudre $-3(x^2-4)^3+2(x^2-4)^2+7(x^2-4)+4=0$.

Exercice 14 – ***(Divisibilité multiple)***
Déterminer a et b pour que x^5+ax^4+b soit divisible par $(x-2)^2$.

Exercice 15 – ***(Divisibilité et solutions)***

1. Déterminer les réels p et q pour que x^4+px^2+q soit divisible par x^2-4x+3.
2. Pour ces valeurs de p et q, résoudre $x^4+px^2+q=0$.

Exercice 16 – ***(Ensemble de définition)***
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
3. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$

Exercice 17 – ***(Polynômes et fraction rationnelle)***
Soient les polynômes $P(x)=x^3+ax^2-5x+2$, $R(x)=x^3+bx^2+cx+d$, et $Q(x)=x^3+2x^2+cx+d$.

1. (a) Trouver le réel a pour que 3 soit une racine de P.
   (b) En déduire la factorisation complète de $P(x)$.
2. Trouver les réels b, c, et d pour que $R(x)=Q(x)$.
3. Soit la fraction rationnelle $T(x)=\dfrac{P(x)}{(x-1)(x+2)}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de $T(x)$.
   (b) Simplifier $T(x)$.
   (c) Résoudre $T(x)=0$ et $T(x)<0$.

Exercice 18 – ***(Degré et coefficient dominant)***

1. Calculer le degré et le coefficient dominant de $P=(2+x)^2+(2-x)^2$.
2. Calculer le degré et le coefficient dominant de $P=(2+x)^3+(2-x)^3$.
3. Soit n un entier naturel non nul. Calculer le degré et le coefficient dominant de $P=(2+x)^n+(2-x)^n$.

Exercice 19 – ***(Polynôme quadratique simple)***
Soit $P(x)=x^2-5x+6$.

1. Factoriser $P(x)$.
2. Résoudre $P(x)=0$ et $P(x)\leq 0$.
3. Calculer $P(4)$ et $P(-1)$.

Exercice 20 – ***(Équation polynomiale)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^3-5x^2+x+2=0$
2. $x^4-5x^2+4=0$

Exercice 21 – ***(Factorisation simple)***
Factoriser les polynômes suivants :

1. $P(x)=x^3-7x+6$
2. $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$

Exercice 22 – ***(Polynôme et reste)***
Un polynôme $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ divisé par $x-1$ a pour reste 3, et divisé par $x+2$ a pour reste 0. Déterminer a et b.

Exercice 23 – ***(Inéquation polynomiale)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3-4x>0$.

Exercice 24 – ***(Racines multiples)***
Soit $P(x)=x^3-6x^2+12x-8$.

1. Montrer que 2 est une racine multiple de P.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x)=0$.

Exercice 25 – ***(Polynôme linéaire et divisibilité)***
Déterminer a pour que $P(x)=x^3+ax^2-2x+5$ soit divisible par $x-1$.

Exercice 26 – ***(Fraction rationnelle simple)***
Soit $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Simplifier $f(x)$.
3. Résoudre $f(x)=1$.

Exercice 27 – ***(Polynôme et évaluation)***
Soit $P(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

1. Calculer $P(0)$, $P(1)$, et $P(-1)$.
2. Montrer que $P(x)$ n'a pas de racine entière positive.

Exercice 28 – ***(Polynôme de degré 2 et racines)***
Soit $P(x)=x^2+kx+4$. Déterminer k pour que $P(x)=0$ ait deux racines réelles distinctes.

Exercice 29 – ***(Factorisation par racine connue)***
Soit $P(x)=x^3+4x^2-x-4$. Sachant que 1 est une racine, factoriser $P(x)$ et résoudre $P(x)=0$.

Exercice 30 – ***(Polynôme et somme des racines)***
Soit $P(x)=x^3-5x^2+kx+3$. Déterminer k pour que la somme des racines de $P(x)=0$ soit égale à 8.

Exercice 31 – ***(Polynôme et produit des racines)***
Soit $P(x)=2x^3+x^2-5x+k$. Déterminer k pour que le produit des racines de $P(x)=0$ soit égal à -2.

Exercice 32 – ***(Polynôme et substitution)***
Soit $P(x)=x^3-3x+2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x^2-1)=0$.
