Mathosphère

Série d'exercices Sur le Calcul Intégral

Niveau TS2

Exercice 1 – ***(Petites manipulations !)***

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}},\quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx,\quad \text{et}\quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par :
$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2}).$$
Calculer $f'(x)$.
2. En déduire I.
3. Vérifier que $J+2I=K$.
4. À l'aide d'une intégration par parties sur K, montrer que
$$K=\sqrt{3}-J.$$
5. En déduire J et K.

Exercice 2 – ***(Integrales Classiques)***
On considère
$$I=\int_0^{\pi/4}\cos^4 x\,dx,\quad \text{et}\quad J=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx.$$

1. (a) Montrer que
$$I=\int \cos x(\cos x-\cos x\sin^2 x)\,dx.$$
Et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx-\frac{J}{3}.$$
(b) Montrer de même que
$$J=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx-\frac{I}{3}.$$
En déduire les valeurs de I et J.
2. Calculer les intégrales suivantes :
(a)
$$\int_1^2 (x+5)^4\,dx.$$
(b)
$$\int_0^1\left(2x^2-1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx.$$
(c)
$$\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx.$$

Exercice 3 – ***(Suite définie par une Integrale)***
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$I_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

1. Calculer les deux premiers termes de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que :
$$1-\frac{1}{1+n}\leq I_n\leq 1.$$
6. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

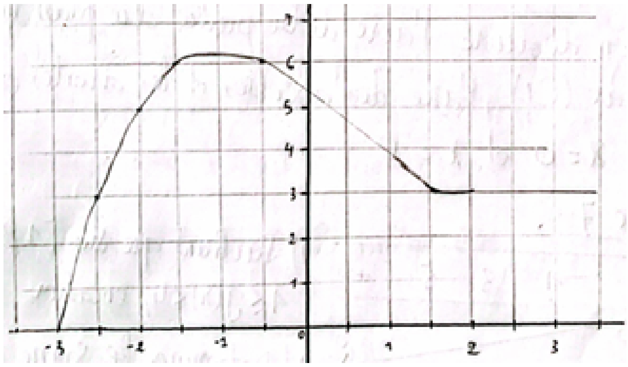
Exercice 4 – Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$I_0=\int_0^1 x\mathrm{d}x\quad \text{et}\quad \forall n\geq 1,\quad I_n=\int_0^1 x(lnx)^n\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n\geq 1,\quad 2I_n+nI_{n-1}=e^2.$$
3. En déduire I_1.
4. Démontrer que (I_n) décroît.
5. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall n\geq 1,\quad \frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$$
et calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 5 – ***(Juste quelques etapes pour y aboutir !)***

1. Calculer l'intégrale :
$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\,|ln(x)|\mathrm{d}x.$$
2. Déterminer les réels a et b pour que :
$$\frac{2t}{1+t}=a+\frac{b}{1+t}.$$
3. Calculer l'intégrale :
$$J=\int_2^7\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}\mathrm{d}x.$$
4. En utilisant une intégration par parties, calculer :
$$I=\int_1^2\ln x\mathrm{d}x.$$
5. Calculer :
$$J=\int_0^{ln4} x\sqrt{e^x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 – Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-3;+\infty[$, croissante sur $[-3;-1]$ et sur $[2;+\infty[$, et décroissante sur $[-1;2]$. La courbe représentative de f est tracée ci-dessous.



Est-il vrai que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x > 7?$$