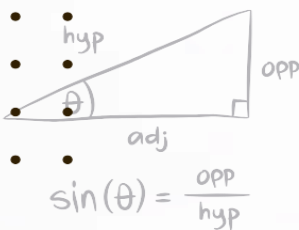


**Mathosphère**

# Série d'exercices sur les équations, inéquations et systèmes

Niveau 1S1



**Exercice 1 – (Équations et inéquations dans  $\mathbb{R}$ )**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(1 + \sqrt{2})x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} - 1 = 0$
2.  $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 1) + 2 = 0$
3.  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3} < 0$
4. 
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$$
5.  $-x^4 + 4x^2 + 3 \geq 0$

**Exercice 2 – (Étude des racines paramétrées)**

Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence et le signe des racines :

1.  $(m - 1)x^2 + 3mx + m + 1 = 0$
2.  $(m + 2)x^2 - (m - 1)x + m - 2 = 0$
3.  $mx^2 - 3mx + m - 5 = 0$
4.  $(m - 2)x^2 + (3m - 2)x + m + 1 = 0$
5.  $(3m - 2)x^2 - (3m - 1)x + m + 4 = 0$
6.  $m(m + 1)x^2 - (m + 1)x - m + 2 = 0$

**Exercice 3 – (Équation quartique)**

On considère l'équation (E) :

$$4x^4 + 3x^3 - 26x^2 + 3x + 4 = 0$$

1. (a) 0 est-il solution de (E) ?  
 (b) En posant  $y = x + \frac{1}{x}$ , démontrer que (E) est équivalente à :  

$$4y^2 + 3y - 34 = 0 \quad (E')$$
2. (a) Résoudre (E') dans  $\mathbb{R}$ .  
 (b) En déduire les solutions de (E).

**Exercice 4 – (Propriétés des racines)**

1. Discuter suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines de :  

$$(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$$
2. Établir la relation indépendante de  $m$  qui existe entre les racines. Retrouver à l'aide de cette relation les racines doubles.
3. Calculer  $m$  pour que la somme des inverses des racines soit égale à  $\frac{1}{4}$ .

**Exercice 5 – (Conditions sur les racines)**

1. Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  l'équation :

$$mx^2 - (3m - 5)x + m + 4 = 0$$

a-t-elle deux solutions positives ?

2. Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  l'équation :

$$mx^2 - (3m + 2)x + m + 2 = 0$$

a-t-elle deux solutions négatives ?

3. Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  l'équation :

$$mx^2 - 2(3 + m)x + 12 + m = 0$$

a-t-elle deux solutions de signes contraires ?

**Exercice 6 – (Équations et inéquations irrationnelles)**

Résoudre les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1.  $\sqrt{7 - 2x} = \sqrt{x^2 + 3x - 3}$
2.  $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x^2 - x - 1}$
3.  $\sqrt{16 - x^2} = 5 - x$
4.  $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x^2 - 2x + 1$
5.  $\sqrt{3x + 2} + 2 = 4x$
6.  $3x + \sqrt{x^2 - 3x - 7} = 15$
7.  $x^2 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2 \quad (\text{Poser } X = x^2 - 2x)$
8.  $\sqrt{x + 3} \leq 2x - 1$
9.  $\sqrt{5 - 4x} > x + 2$
10.  $\sqrt{(2x^2 + 4x - 1)^2} \geq 5$
11.  $\sqrt{x^2 + 2} \leq x + 3$
12.  $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} > x - 2$
13.  $\sqrt{-4x^2 + 2x + 3} < 4x - 2$
14.  $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \geq x - 2$

**Exercice 7 – (Systèmes d'équations)**

Résoudre les systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 3y = -3 \\ x + (\sqrt{2} - 1)y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 8 \\ 4\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 13 \end{cases}$$
3. 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 13 \\ 3x^2 + 7y^2 = 31 \end{cases}$$
4. 
$$\begin{cases} 2y - 1 - \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{3} \\ 4y - 1 + \frac{1}{x + 1} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = z \\ x + 2y + z = 52 \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} 3|x| - 2|y| = 7 \\ 5|x| - 4|y| = 11 \end{cases}$$

---

**Exercice 8 – (Systèmes par méthode du pivot)**

Résoudre par la méthode du pivot chacun des systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -25 \\ -8x - 5y + 2z = -19 \\ 4x + 2y - 2z = 18 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} -4x - 3y - 3z + t = 54 \\ 3y + 2z + t = -21 \\ 4y - 4z - t = -56 \\ 2x + 3y - 2z + t = -67 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} 7x + 2y + z + 8t = 29 \\ 2x + y - 8z + 6t = 5 \\ -x + 2y - 5z + 4t = -2 \\ 5x - 3y + 3z - 5t = 21 \end{cases}$$

---

**Exercice 9 – (Systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ )**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 10 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ (3x - 2)(3y - 2) = -13 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x - y = -m \\ 3x - m^2y = -3 \end{cases}$$

( $m$  est un paramètre réel)

---

**Exercice 10 – (Équations quadratiques)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $2x^2 - 5x + 3 = 0$
2.  $(x + 1)^2 = 4x$
3.  $x^2 + 6x + 10 = 0$

---

**Exercice 11 – (Inéquations polynomiales)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
2.  $\frac{x+2}{x-1} > 0$
3.  $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

---

**Exercice 12 – (Systèmes d'inéquations)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les systèmes d'inéquations suivants :

1. 
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 5 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

---

**Exercice 13 – (Équations irrationnelles)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\sqrt{x+4} = x - 2$
2.  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$
3.  $\sqrt{x^2-4} = 3 - x$

---

**Exercice 14 – (Inéquations irrationnelles)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\sqrt{x-2} \leq 3$
2.  $\sqrt{4-x} > x$
3.  $\sqrt{x^2+3} \geq x + 1$

---

**Exercice 15 – (Systèmes linéaires)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

---

**Exercice 16 – (Équations paramétrées)**

Pour chaque équation suivante, déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles il existe des solutions réelles :

1.  $mx^2 - 4x + m - 1 = 0$
2.  $(m - 1)x^2 + 2m2x + m = 0$

---

**Exercice 17 – (Systèmes non linéaires)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x + y^2 = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

**Exercice 18 – (Inéquations avec valeurs absolues)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $|x - 3| \leq 2$

2.  $|2x + 1| > 5$

**Exercice 19 – (Équations avec valeurs absolues)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $|x - 2| = x + 1$

2.  $|x + 3| = 2x - 1$

**Exercice 20 – (Systèmes paramétrés)**

Pour chaque système suivant, déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles il admet une solution unique :

1.

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx - y + z = 0 \\ x + y - mz = m \end{cases}$$

**Exercice 21 – (Équations polynomiales)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

**Exercice 22 – (Inéquations rationnelles)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0$

2.  $\frac{2x + 3}{x - 4} < 0$

**Exercice 23 – (Systèmes avec racines)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 4 \\ x - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} = y \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$$

**Exercice 24 – (Inéquations polynomiales avancées)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^3 - x^2 - 2x \geq 0$

2.  $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$