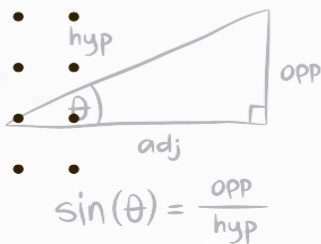


**Mathosphère**

# **Série d'exercices**

## **Similitudes, géométrie et transformations complexes**

Niveau TS1



## Série Mathématique

Ndao - Mathosphere

*Classe : Terminale S1*

---

### Instructions

- Répondez aux questions en justifiant toutes vos étapes.
- Utilisez une écriture claire et ordonnée.
- La calculatrice est **autorisée/interdite**.

### Exercices 1 : Étude paramétrique et symétrie d'une courbe plane

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1 cm. On définit la courbe  $(\mathcal{C})$  paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = t + 2 \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t, \\ y(t) = (1 + \cos t)^2. \end{cases}$$

1. Comparer la position des points  $M(t)$  et  $M(-t)$ . En déduire un axe de symétrie pour la courbe  $(\mathcal{C})$ .
2. Soit  $M$  un point de paramètre  $t$  et  $M'$  un point de paramètre  $t + 2\pi$ . Déterminer le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$ . En déduire que  $M'$  est l'image de  $M$  par une translation d'un vecteur  $\vec{u}$  que l'on précisera.
3. On appelle  $(\mathcal{C}_1)$  l'arc de la courbe  $(\mathcal{C})$  correspondant à  $t \in [0, \pi]$ , et  $(\mathcal{C}_2)$  la partie de  $(\mathcal{C})$  correspondant à  $t \in [-\pi, 3\pi]$ . Montrer que  $(\mathcal{C}_2)$  peut se déduire de  $(\mathcal{C}_1)$  par une réflexion suivie d'une translation de vecteur  $\vec{u}$ .
4. Étudier les variations de  $x$  et  $y$  sur  $[0, \pi]$  et résumer les résultats dans un tableau de variations commun.
5. Tracer l'arc  $(\mathcal{C}_1)$  de  $(\mathcal{C})$ . En déduire le tracé de la courbe  $(\mathcal{C}_2)$ . (On admettra qu'au point de paramètre  $\pi$ , la tangente a pour vecteur directeur  $\vec{i}$ .)

### Exercice 2 : Applications affines et suites géométriques dans le plan

Le plan affine euclidien  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .  $\theta$  est un nombre réel.

## Partie A

Pour tout nombre réel  $\theta$ , on définit l'application  $f_\theta$  de  $P$  dans  $P$ , qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  vérifiant :

$$\begin{cases} x' = (\theta + 1)x + (\theta - 1)y, \\ y' = (\theta + 2)y + (\theta - 2)x. \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles l'application  $f_\theta$  est bijective.
2. On suppose que l'application  $f_\theta$  est bijective.
  - (a) Déterminer l'application réciproque de  $f_\theta$ , notée  $f_\theta^{-1}$ , en donnant les coordonnées de  $M$  en fonction de  $M'$ .
  - (b) Déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles l'application  $f_\theta$  est involutive ( $f_\theta \circ f_\theta = \text{id}_P$ ).
3. Déterminer, suivant les valeurs de  $\theta$ , l'ensemble des points invariants par  $f_\theta$ .
4. Déterminer la nature des éléments caractéristiques de  $f_\theta$  pour  $\theta = \frac{1}{2}$ .
5. Dans cette question, on prend  $\theta = 0$  et on s'intéresse à l'application  $f_0$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M'$  qui sont images par  $f_0$  d'au moins un point  $M$  de  $P$ .
  - (b) Un point  $M'$  de  $(\Delta)$  étant donné, déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $P$  tels que  $f_0(M) = M'$ .
  - (c) Montrer que  $f_0$  est la composée d'une application affine et d'une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques.
6. On pose  $f_\theta^2 = f_\theta \circ f_\theta$  et, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f_\theta^n = f_\theta \circ f_\theta^{n-1}$ . Soit  $A_0$  le point de coordonnées  $(1, 1)$ . On pose  $A_1 = f_\theta(A_0)$  et, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $A_n = f_\theta^n(A_0)$ . On note  $(x_n, y_n)$  les coordonnées de  $A_n$ . Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = y_n = P_n(\theta)$ , où  $P_n(\theta)$  est un polynôme en  $\theta$  de degré  $n$  que l'on précisera.

## Partie B

Dans cette partie, on prend  $\theta \in ]0, \pi[$ . On considère la suite de points  $(M_n)$  de  $P$  définie de la manière suivante :  $M_0 = O$ ,  $M_1$  a pour affixe 1, et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\begin{cases} \|M_n M_{n+1}\| = (\sin \theta) \|M_{n-1} M_n\|, \\ (\overrightarrow{M_{n-1} M_n}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \theta. \end{cases}$$

On note  $z_n$  l'affixe de  $M_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. (a) Vérifier que le nombre complexe  $(\sin \theta)e^{i\theta}$  n'est pas un réel.  
 (b) En déduire que  $1 - (\sin^n \theta)e^{in\theta} \neq 0$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. On pose  $a_n = z_{n+1} - z_n$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_n = (\sin \theta)e^{i\theta} a_{n-1}$ .
  - (b) En déduire que  $a_n = (\sin^n \theta)e^{in\theta}$ .
3. (a) Montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ .  
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$z_n = \frac{1}{1 - (\sin \theta)e^{i\theta}} - \frac{(\sin^n \theta)e^{in\theta}}{1 - (\sin \theta)e^{i\theta}}.$$

4. Vérifier que la relation

$$z_n = \frac{1}{1 - (\sin \theta)e^{i\theta}} - \frac{(\sin^n \theta)e^{in\theta}}{1 - (\sin \theta)e^{i\theta}}$$

est valable pour  $n = 0$ .

5. (a) Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe  $S$  telle que  $S(M_0) = M_1$  et  $S(M_1) = M_2$ .  
 (b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$ .  
 (c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S(M_n) = M_{n+1}$ .

**NB :** La partie A et la partie B sont indépendantes l'une de l'autre.

### Exercice 3 : Nombres complexes

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  du plan  $P$  de coordonnées  $(x, y)$ , on associe son affixe  $z = x + iy$ . On appelle  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  satisfait la relation :

$$\left| \frac{z + i\bar{z}}{2} \right| = \left| z - \frac{1}{2}(1 + i) \right|.$$

#### 1. Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- a) En remplaçant  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$ , déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ .

#### 2. Changement de repère

Soit  $(O, \vec{a}, \vec{b})$  le repère image de  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  dans la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . On désigne par  $(x, y)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et par  $(X, Y)$  ses coordonnées dans  $(O, \vec{a}, \vec{b})$ .

- a) Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .  
 b) Déterminer une équation de  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{a}, \vec{b})$ .

#### 3. Étude géométrique de $(\Gamma)$

- a) Montrer que  $(\Gamma)$  est une parabole de sommet  $\Omega$ , dont on précisera les coordonnées dans le repère  $(O, \vec{a}, \vec{b})$ .  
 b) Donner les coordonnées du foyer et une équation cartésienne de la directrice dans le repère  $(O, \vec{a}, \vec{b})$ .  
 c) Construire  $(\Gamma)$ , en prenant  $\|\vec{u}\| = 5 \text{ cm}$ .

## Exercice 4 : Étude d'une courbe paramétrée liée à une parabole

Dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on considère la courbe  $(\mathcal{C})$  définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t}, \\ y(t) = 1 - \tan^2 x(t), \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### 1. Étude des symétries et périodicité

- (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , comparer les points  $M(t + 2\pi)$  et  $M(t)$ , puis  $M(t)$  et  $M(-t)$ .
- (b) On note  $(\mathcal{C}_1)$  la partie de  $(\mathcal{C})$  obtenue lorsque  $t$  décrit l'ensemble  $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Quelle relation y a-t-il entre  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}_1)$  ?

### 2. Étude des propriétés sur des sous-intervalles

- (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , comparer les points  $M(\pi - t)$  et  $M(t)$ .
- (b) Soit  $(\mathcal{C}_2)$  la partie de  $(\mathcal{C})$  obtenue lorsque  $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . Comment obtient-on  $(\mathcal{C}_1)$  à partir de  $(\mathcal{C}_2)$  ?

### 3. Étude analytique

- (a) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions  $x : t \mapsto \frac{1}{\cos t}$  et  $y : t \mapsto 1 - \tan^2 x$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .
- (b) Montrer que  $(\mathcal{C}_2)$  est une partie de la parabole  $(P)$  d'équation  $y = 2 - x^2$  que l'on précisera.

### 4. Tangente à $(\mathcal{C})$

1. Déterminer une équation de la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point correspondant au paramètre  $t = \frac{\pi}{4}$ .

### 5. Construction

1. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ , en prenant soin de représenter ses symétries et ses relations avec la parabole  $(P)$ .

## Exercice : Transformations géométriques sur un carré

Soit  $ABCD$  un carré orienté dans le sens direct et de centre  $O$ .

### Partie A : Rotations, translations et symétries

On considère :

- $R$  : la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,
- $T$  : la translation du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ ,
- $S$  : la symétrie centrale de centre  $C$ .

Ainsi, on note :

$$R = R\left(A; \frac{\pi}{2}\right), \quad T = T_{\overrightarrow{AC}}, \quad S = S_C.$$

1. **Étude de  $R$  et  $T \circ R$**

- (a) Déterminer la droite  $(\Delta)$  telle que  $R = S_{(\Delta)} \circ S_{AD}$ .
- (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $T \circ R$ .

1. **Étude de  $S \circ T \circ R$**

- (a) Calculer  $(S \circ T \circ R)(A)$  et  $(S \circ T \circ R)(D)$ .
- (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S \circ T \circ R$ .

**Partie B : Étude géométrique avec  $M$ ,  $N$  et  $J$**

Soient  $M$  un point appartenant à la droite  $(DC)$ ,  $N$  le point d'intersection de la droite  $(BC)$  avec la perpendiculaire à  $(AM)$  passant par  $A$ , et  $J$  le milieu du segment  $[MN]$ .

On considère :

- $R'$  : la rotation de centre  $A$  telle que  $R'(D) = B$ ,
- $S'$  : la similitude directe de centre  $A$  telle que  $S'(D) = I$ .

2. **Étude du triangle  $AMN$**

- 1. Montrer que  $J = R'(M)$ . En déduire la nature du triangle  $AMN$ .

2. **Étude de  $S'$**

- (a) Déterminer l'image de  $C$  par  $S'$ .
- (b) Démontrer que  $J = S'(M)$ .
- (c) En déduire le lieu géométrique des points  $J$  lorsque  $M$  décrit la droite  $(DC)$ .

2. **Étude de l'ensemble  $(T)$**

- (a) Donner la nature de l'ensemble  $(T)$  des points  $M$  du plan tels que

$$d(M, C) = \frac{1}{\sqrt{2}} d(M, (BD)).$$

- (b) Donner la nature, l'excentricité, une directrice et un foyer de l'image  $(T')$  de  $(T)$  par  $S'$ .

## Exercice 6 : Application géométrique $Q$ et étude analytique

Dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$ , on considère l'application  $Q$  définie par :

$$Q(O) = O,$$

et pour tout point  $M \neq O$ ,  $Q(M) = M'$  tel que

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}.$$

**Partie A**

- (1) (a) Montrer que pour tout point  $M \in (P)$ , on a

$$Q \circ Q(M) = M.$$

- (b) Justifier que l'ensemble des points  $M \neq O$  tels que  $Q(M) = M$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 2.
- (2) Soit  $(d)$  une droite quelconque de  $(P)$ ,  $D$  un point fixé de  $(d)$  distinct de  $O$ , et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $(d)$ . On pose

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On donne

$$\overrightarrow{OD} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2.$$

- (a) Justifier que  $(d)$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que

$$z = a + it, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (3) Soient  $M$  et  $M'$  deux points de  $(P)$ , tous deux distincts de  $O$  et d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

- (a) Montrer que

$$Q(M) = M' \iff z' = \frac{4}{z}.$$

- (b) En posant

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2,$$

montrer que

$$Q(M) = M' \iff \begin{cases} x' = \frac{4a}{a^2 + t^2}, \\ y' = \frac{4t}{a^2 + t^2}. \end{cases}$$

- (c) Vérifier que dans ce cas,

$$(x' - 2/a)^2 + y'^2 = 4/a^2.$$

- (d) En déduire que si  $M \in (d)$ , alors  $Q(M)$  appartient au cercle  $(C_1)$  de diamètre  $[OH']$ , où  $H'$  est l'image par  $Q$  du projeté orthogonal  $H$  de  $O$  sur  $(d)$ .

- (4) Soit l'application affine  $h$  qui à tout point  $M(x, y)$  associe  $M_1(x_1, y_1)$  telle que

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = \frac{2}{3}y. \end{cases}$$

Montrer que l'image de  $(C_1)$  par  $h$  est une ellipse dont on donnera l'excentricité.

## Partie B

Dans le plan vectoriel  $\vec{P}$  associé à  $(P)$ , on considère l'application  $\varphi$  telle que :

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}, \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{u}) = \frac{4}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \quad \text{si } \vec{u} \neq \vec{0}.$$

- (1) Soit  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Exprimer

$$\varphi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}\right)$$

en fonction de  $\vec{v}$  et en déduire que  $\varphi$  n'est pas linéaire.

- (2) (a) Déterminer l'ensemble  $\text{Inv}(\varphi)$  des vecteurs  $\vec{u}$  tels que  $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ .  
 (b) Soient  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  tels que  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 2$  et

$$\text{Mes}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\pi}{3}.$$

Calculer  $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|$  et en déduire que  $\text{Inv}(\varphi)$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\vec{P}$ .

- (3) Soit  $\text{Opp}(\varphi)$  l'ensemble des vecteurs tels que

$$\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}.$$

Déterminer  $\text{Opp}(\varphi)$  et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $\vec{P}$ .

## Exercice 7 : Étude géométrique sur un carré et lieux géométriques associés

L'unité de longueur est le centimètre. Dans le plan orienté, on considère un carré  $ABCD$  de centre  $K$  tel que  $AB = 3$ . On note  $E$  le milieu du segment  $[BC]$  et  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, 4)$ ,  $(B, -1)$  et  $(D, -1)$ .

1.

- (a) Démontre que  $A$  est le milieu du segment  $[KG]$ .  
 (b) Justifie que :  $GB^2 = \frac{45}{2}$ .  
 (c) Justifie que :  $GB = GD$ .  
 (d) Détermine et construis l'ensemble  $(\Gamma_1)$  des points  $M$  du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9.$$

2.

- (a) Justifie que :  $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ .  
 (b) Démontre que pour tout point  $M$  du plan :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\vec{MA} \cdot \vec{AE}.$$

- (c) Détermine et construis l'ensemble  $(\Gamma_2)$  des points  $M$  du plan tels que :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63.$$

## Exercice 8 : Étude géométrique d'un losange et isométries planes

L'unité graphique est le centimètre. Dans le plan orienté, on considère un losange  $OABC$  tel que :  $OA = 7$  et  $\text{Mes}(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{3}$ .  $E$  est le point du segment  $[OB]$  tel que  $OE = OA$ .  $F$  est le point de la demi-droite  $[OC)$  tel que  $CF = EB$  et  $C \in [OF]$ . On désigne par  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des côtés  $[OA]$ ,  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[OC]$ . On désigne par  $(\Delta)$  la médiatrice du segment  $[OA]$  et par  $(\Delta')$  celle de  $[BC]$ .

**1.**

Fais une figure.

**2.**

- (a) Justifie que les droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles.
- (b) Justifie que le triangle  $AOC$  est équilatéral.
- (c) Justifie que :  $OB = OF$ .

**3.**

Soit  $R_1$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , et  $R_2$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ .  
On pose :  $f = R_1 \circ R_2$

- (a) Détermine  $f(O)$  et  $f(A)$ .
- (b) Démontre que  $f$  est une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
- (c) Dédus de ce qui précède que  $(EF) \perp (OA)$  et  $EF = OA$ .
- (d) Construis le centre  $\Omega$  de  $f$ .

**4.**

- (a) Justifie qu'il existe une isométrie  $g$  et une seule telle que :  $g(O) = A$ ,  $g(A) = C$  et  $g(C) = B$ .
- (b) Justifie que  $g$  est un antidéplacement.
- (c) Démontre que  $g$  est une symétrie glissée.

**5.**

Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée  $g$ . Soit  $R$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  et  $S$  la symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$ .

- (a) Démontre que :  $g = R \circ S$ .
- (b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale  $S_1$  telle que  $R = S(AB) \circ S_1$ .
- (c) Dédus de ce qui précède que :  $g = S(AB) \circ T_{\vec{u}}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur que l'on caractérisera.
- (d) En utilisant la relation  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}$ , détermine les éléments caractéristiques de  $g$ .

## Exercice 9 : Étude d'une variable aléatoire discrète et interprétation géométrique de la variance

On désigne par  $Y$  une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- $Y$  prend les valeurs 1,  $-1$  et 2 avec les probabilités respectives  $e_a$ ,  $e_b$  et  $e_c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  tels que :

$$a = b - r \quad \text{et} \quad c = b + r.$$

- L'espérance mathématique  $E(Y)$  de  $Y$  est égale à 1.

**1.**

(a) Justifie que le couple  $(b, r)$  est solution du système  $(S)$  :

$$\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$$

(b) Résous le système  $(S)$ .

(c) Déduis de ce qui précède que :

$$a = \ln\left(\frac{1}{7}\right) \quad \text{et} \quad c = \ln\left(\frac{4}{7}\right).$$

**2.**

Justifie que la variance  $V(Y)$  de  $Y$  est égale à :

$$\frac{12}{7}.$$

**3.**

On marque sur une droite graduée  $(D)$  les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'abscisses respectives 1,  $-1$  et 2. On désigne par  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 2)$  et  $(C, 4)$ . On note  $(\mathcal{R})$  l'ensemble des points  $M$  de la droite  $(D)$  tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$$

et on pose :

$$h(M) = \frac{1}{7} (MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2).$$

(a) Calcule l'abscisse du point  $G$ .

(b) Démontre que :

$$h(G) = V(Y).$$

(c) Détermine l'ensemble  $(\mathcal{R})$ .

## Exercice 10 : Barycentres dans l'espace et étude d'un lieu géométrique

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  orthonormal. On donne  $A, B, C, D, E$  des points de  $\mathcal{E}$  définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants :  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; 0; 1)$ ,  $C(1; 1; 0)$  et  $D(2; 0; 1)$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On désigne par  $P$  le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés respectivement des coefficients  $1a$  et  $a$ . Enfin, on appelle  $G$  le barycentre des points  $P$  et  $Q$  affecté respectivement des coefficients  $1 + b$  et  $1b$ .

1. (a) Calculer, en fonction de  $a$ , les coordonnées des points  $P$  et  $Q$ .

(b) Montrer que  $G$  a pour coordonnées  $(a + b; ab; ab)$ .

2. (a) Le réel  $a$  étant supposé fixé ( $a \neq 0$ ), montrer que l'ensemble des points  $G$  obtenus quand  $b$  varie est une droite  $D'_a$  dont on donnera les équations paramétrées en fonction de  $a$  et un vecteur directeur.
- (b) Le réel  $b$  étant supposé fixé ( $b \neq 0$ ), montrer que l'ensemble des points  $G$  obtenus quand  $a$  varie est une droite  $D'_b$  dont on donnera les équations paramétrées en fonction de  $b$  et un vecteur directeur.
3. (a) Montrer que l'ensemble  $S$  des points  $G$  obtenus lorsque  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est partie de l'ensemble  $S'$  des points dont les coordonnées vérifient  $x^2 y^2 = 4z$ .
- (b) On désigne par  $\Pi$  le plan d'équation  $z = 1$ . Déterminer la nature et l'excentricité de  $S' \cap \Pi$ .

## Exercice 11 : Barycentre et géométrie dans l'espace

Soit dans l'espace les points suivants :

$$A(2; 1; 0), \quad B(-1; 1; 1), \quad C(1; 2; 3)$$

1. Calculer les coordonnées du barycentre  $H$  du système de points pondérés :

$$\{(A; 2), (B; 1), (C; 2)\}$$

2. Reproduire cette figure et construire le point  $H$ .
3. Montrer que le vecteur  $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$  est indépendant du point  $M$ . Calculer ses coordonnées.
4. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}\|$$

5. (a) Vérifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.
- (b) Vérifier que le vecteur  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ . En déduire une équation de ce plan.
- (c) Soit  $Q$  le plan dont une équation est :

$$5x + y + 3 = 0$$

Montrer que les plans  $Q$  et  $(ABC)$  sont perpendiculaires et déterminer leur intersection.

## Exercice 12 : Transformations géométriques et affixes complexes

Dans le plan orienté, on considère un triangle  $OIJ$  tel que :  $OI = OJ$  et  $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ . Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les milieux respectifs des segments  $[IJ]$ ,  $[JO]$  et  $[OI]$ .

Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , et  $t$  la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ .

On pose :

$$F = r \circ o \quad \text{et} \quad G = t \circ or$$

1. **Faites une figure.** (On prendra :  $OI = 8$  cm).
2. **a)** Déterminez  $F(C)$  et  $G(B)$ .
3. **b)** Déduisez de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations  $F$  et  $G$ .
4. On désigne par  $F^{-1}$  la réciproque de la transformation  $F$ .
  - a)** Déterminez la nature de la transformation  $G \circ F^{-1}$ .
  - b)** Déterminez  $(G \circ F^{-1})(O)$ , puis caractérisez la transformation  $G \circ F^{-1}$ .
  - c)** Déterminez  $(G \circ F)(I)$ , puis déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $G \circ F$ .
5. On munit le plan du repère orthonormé  $(O, I, J)$  tel que défini précédemment. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $-2$ . On pose :

$$S = h \circ r$$

- a)** Écrivez l'abscisse de chacun des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- b)** Déterminez l'écriture complexe de  $h$  et celle de  $r$ .
- c)** Soit  $g$  l'application complexe associée à  $S$ . Montrez que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i.$$

- d)** Déduisez de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .

## Exercice 13 : Coniques dans le plan complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . L'unité graphique est de 2 cm.

1. On note  $(C)$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  (avec  $z = x + iy$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) tels que :

$$14zz + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2.$$

**Démontrer que**  $M$  appartient à  $(C)$  si et seulement si :

$$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0.$$

2. **a)** Justifier que  $(C)$  est une ellipse. On note  $\mathcal{F}$  son centre.
- b)** Préciser les coordonnées de  $\mathcal{F}$ .
- c)** Déterminer une équation de l'axe focal de  $(C)$ .
- d)** On note  $A, A', F$  et  $F'$  les points d'affixes respectives :

$$A = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i, \quad A' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + i, \quad F = -\frac{\sqrt{3}}{3} + i, \quad F' = \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que  $A$  et  $A'$  sont les sommets de  $(C)$  situés sur son axe focal. Justifier que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de  $(C)$ .

3. **Construire l'ellipse**  $(C)$ .
4. On considère l'hyperbole  $(H)$  de foyers  $A$  et  $A'$  et de sommets  $F$  et  $F'$ .
  - a)** Démontrer qu'une équation cartésienne de  $(H)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est :

$$3x^2 - y^2 = 1.$$

- b)** Tracer les asymptotes de  $(H)$ .
- c)** Construire  $(H)$ .

## Exercice 14 : Nombres complexes, transformation du plan et coniques

### Partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . L'unité graphique est 2 cm.

On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2i, \quad z_B = \sqrt{3} + i, \quad z_C = \sqrt{3} + 2i$$

1. a) Calculer le module et l'argument principal de

$$\frac{z_A}{z_B}$$

1. b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments  $[OB]$  et  $[AB]$ .

$r$  est la rotation de centre  $J$  d'affixe  $i$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{PQ}$ .

On pose :  $f = t \circ r$

2. a) Déterminer l'image par  $f$  du point O.

2. b) Démontrer que  $f$  est une rotation dont on donnera l'angle.

2. c) Construire le centre  $K$  de  $f$

### Partie II

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . On pose  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

On note  $H$  le point d'affixe  $x + 3i$ .

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$2|z| = |y - 3|$$

1. a) Démontrer que :  $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$ .
1. b) Justifier que  $(\Gamma)$  est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.
1. c) Démontrer que  $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ .
1. d) Préciser les coordonnées du centre  $\Omega$  de  $(\Gamma)$  et les coordonnées des sommets de  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
1. e) Tracer  $(\Gamma)$ .
2. Soit  $(\Gamma')$  l'image de  $(\Gamma)$  par  $f$ .
2. a) Démontrer que  $(\Gamma')$  est une ellipse d'excentricité  $\frac{1}{2}$ .
2. b) Préciser un foyer et la directrice associée.

## Exercice : Similitude, géométrie et transformations dans le plan complexe

L'unité de longueur est le centimètre. Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{6}.$$

### I-

1. On considère la similitude directe  $S$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $A$ .
  - a) Faire une figure en prenant  $AC = 7$ . (On complètera la figure au fur et à mesure).
  - b) Justifier que  $S$  n'est pas une translation.
  - c) Justifier que l'angle de la similitude directe de  $S$  est  $-\frac{\pi}{2}$ .
  - d) Déterminer le rapport de  $S$ .
2. On note  $W$  le centre de  $S$ .
  - a) Démontrer que  $W$  appartient aux cercles  $(C')$  et  $(C)$  de diamètres respectifs  $[AB]$  et  $[AC]$ .
  - b) Justifier que  $W$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .
3. Soit  $(D)$  une droite passant par  $A$  et ne passant pas par  $W$ .

$(D')$  est la perpendiculaire à  $(D)$  passant par  $C$ . On appelle  $B'$  et  $C'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $B$  et  $C$  sur  $(D)$ .

  - a) Déterminer les images respectives de  $(D)$  et  $(D')$  par  $S$ .
  - b) En déduire l'image du point  $C'$  par  $S$ .
  - c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre  $[B'C']$  passe par un point fixe lorsque la droite  $(D)$  varie. Préciser ce point fixe.

**II-**

1. Placer le point  $I$  de la demi-droite  $[AC)$  tel que :  $AB = AI$ .

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$ .

a) Démontrer que l'abscisse du point  $C$  est  $\sqrt{3}$ .

b) Soit  $M$  un point d'abscisse  $z$  et  $M'$  le point d'abscisse  $z'$ , image de  $M$  par  $S$ . Justifier que :

$$z' = -i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i.$$

c) Déterminer l'abscisse du centre  $W$  de  $S$ .

**3.**

a) Déterminer l'ensemble  $(G)$  des points  $M$  d'abscisse  $z$  tel que  $|z'| = 1$ .

b) Tracer  $(G)$ .

+