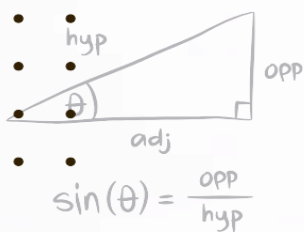


Mathosphère

Série d'exercices sur le Calcul dans \mathbb{R}

Niveau 2nd S



Exercice 1 – (Calculs de fractions)

Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous forme de fraction irréductible :

1. $X = \frac{5}{2} - 3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2} - \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - 2$
2. $Y = \left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} \right) \div \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$

Exercice 2 – (Puissances et simplification)

1. Soient a , b , et c des réels non nuls. Mettre sous la forme a^n , $a^n b^p$, ou $a^n b^p c^q$ les réels suivants :

- (a) $A = a^4 a^7 \left(\frac{a}{a^3} \right)^{-3}$
- (b) $B = a^{-3} a^2 a^4 a^{-5} a^2 a^3$
- (c) $C = a^3 a^5 (a^2)^{-3} a^4$
- (d) $D = (a^2 b)^4 (a^3 b)^{-2}$
- (e) $E = a^{-3} b^{-4} a^2 b^{-3}$
- (f) $F = (a^3 b)^2 b^{-3} c^2 a^3 c (bc^3)^3$
- (g) $G = (a^3 b)^{-2} \times (bc^2)^3 \times (a^{-3} b^4 c)^2 (b^3 c^2 a)^{-3} \times (a^{-2} b^5)^3$
- (h) $H = (a^{-3} c)^{-3} \times (-b^3 c)^4 \times (a^2 b c^{-2})^{-3} (-a^3 b^{-2} c)^2 \times (-b)^5 \times (a^{-4} c)^3$

2. Écrire sous la forme $2^m 3^n 5^p$ (avec m , n , et p entiers relatifs) les réels suivants :

- (a) $X = (0.04)^{-2} \times (0.25)^3 \times 125(0.008)^{-2} \times 270^2$
- (b) $Y = (-8)^3 \times 45^{-2} \times (-5)^{-4} \times 9^3 (-125)^2 \times 24^{-4} \times (-18)^2$

Exercice 3 – (Développement et réduction)

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A = (a + b)^2 + 3(a^3 + b^3) - 2(a + b)(a^2 + b^2)$
2. $B = (2x + 3y)^3 + (2x - 3y)^3$
3. $C = (2x^2 - 3y + z)^2$
4. $D = (a + b)^3 + a^3 + b^3 - 3(a^2 + ab + b^2)^2$
5. $E = (x - y)(x + y - z) + (y - z)(y + z - x) + (z - x)(z + x - y)$
6. $F = (a + b + c)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$

Exercice 4 – (Factorisation)

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (a^2 + b^2 - 16)^2 - 9a^2 b^2$
2. $B = (a^2 + b^2 - 7)^2 - (3ab + 4)^2$
3. $C = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2$
4. $D = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
5. $E = a^4 - b^4 + 3ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + a^2 b - ab^2$
6. $F = a^2(x^2 + b^3) - b^2(x^2 + a^3)$
7. $G = (a^2 b^2 + x^2 y^2) - (b^2 x^2 + a^2 y^2)$

$$8. H = 16x^2 - 20x + 4 + (x - 4)^2 - (3x + 2)^2$$

$$9. I = (x + y)^3 - x^3 - y^3$$

$$10. J = 9x^2 + 6xy - 3xz - 2yz$$

Exercice 5 – (Simplification de fractions)

Les dénominateurs étant supposés non nuls, écrire le plus simplement possible les réels suivants :

1. $A = \frac{1}{3x(3x - 2)} + \frac{3x}{3x - 2} + \frac{3x - 2}{3x}$
2. $B = \frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - c)(b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$
3. $C = \frac{xy}{ab} + \frac{(x - a)(y - a)}{a(a - b)} + \frac{(x - b)(y - b)}{b(b - a)}$
4. $D = \frac{a - \frac{a - b}{a}}{1 + \frac{a}{b}}$
5. $E = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c} \times \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + c}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + c}$

Exercice 6 – (Simplification d'expressions avec radicaux)

Simplifier :

1. $A = (\sqrt{12} - \sqrt{27})(\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{18})$
2. $B = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
3. $C = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)^2 - \sqrt{9}(1 - \sqrt{5})^2$
4. $D = \sqrt{8} + \sqrt{8 + \sqrt{8 + \sqrt{16}}}$
5. $E = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{15}} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$
6. $F = (\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y})(\sqrt{x + y} - \sqrt{x} + \sqrt{y})$
7. $G = \frac{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}$
8. $H = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$

Exercice 7 – (Rationalisation du dénominateur)

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

1. $x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$
2. $y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{8} - 1}$
3. $z = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$
4. $s = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

Soient a et b deux réels de même signe et non nuls. Calculer la

Calculer, lorsqu'il existe, le carré de $A = \sqrt{a} + \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - c^2}}$.

Mathosphère

1. Montrer que si $a+b+c = 0$, alors $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ac)$.
2. Montrer que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.

Exercice 20 – (Simplification de radicaux)

1. Soit $x = \sqrt{15} - 2\sqrt{14} - \sqrt{15} + 2\sqrt{14}$.
 - (a) Donner le signe de x .
 - (b) Calculer x^2 .
 - (c) Donner une écriture simplifiée de x .
2. Simplifier l'écriture de :

$$y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

3. Donner une écriture simplifiée de :

$$z = \frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{50}} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{50}}$$

Exercice 21 – (Équations algébriques)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+3}{x-1}$
2. $\sqrt{2x+3} = x-1$
3. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-4}$

Exercice 22 – (Sommes télescopiques)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right)$
2. $\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

Exercice 23 – (Simplification de fractions complexes)

Simplifier les expressions suivantes, en supposant les dénominateurs non nuls :

1. $A = \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x}}$
2. $B = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

Exercice 24 – (Inéquations avec radicaux)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+4} \geq x$

$$2. \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \leq 0$$

Exercice 25 – (Identité avec puissances)

Montrer que pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

Exercice 26 – (Factorisation avancée)

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 4$
2. $B = (x+y)^4 - (x-y)^4$

Exercice 27 – (Calcul de produits)

Calculer et simplifier :

$$P = \prod_{k=2}^{100} \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1} \right)$$

Exercice 28 – (Simplification avec exposants fractionnaires)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \left(\frac{a^2b^{-3}}{a^{-1}b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^3b}{ab^{-2}} \right)^{\frac{2}{3}}$
2. $B = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \div \left(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} \right)^3$

Exercice 29 – (Équations avec puissances)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2^{x+1} = 3 \cdot 2^x - 4$
2. $x^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{x}$

Exercice 30 – (Identité avec fractions)

Montrer que pour tous réels a, b, c non nuls tels que $a+b+c \neq 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2+b^2+c^2+abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Exercice 31 – (Calcul de racines carrées imbriquées)

Simplifier l'expression suivante, pour $x \geq 0$:

$$A = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Exercice 32 – (Développement avec plusieurs variables)

Développer et réduire :

$$A = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

Exercice 33 – (*Rationalisation multiple*)

Rendre rationnel le dénominateur de :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$$

Exercice 34 – (*Produit de nombres premiers*)

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$$A = \frac{(2^3 \times 3^2)^4 \times (5^2 \times 7^{-1})^3}{(2^{-1} \times 3^2 \times 5)^2 \times (7^2 \times 3^{-3})^3}$$

Exercice 35 – (*Sommes infinies approximatives*)Approximer à 10^{-3} près la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$
