Mathosphère

Série d’exercices Equations Differentielles

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E) : $y' = 3y$
2. (E) : $y' - y = 0$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2y'' - 4y' - 3 = 0$$

Exercice 3 : Considérons les équations différentielles

$$(E_0) : y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : y' - y = 2x^2 + x$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0)
2. (a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P afin que P soit une solution de (E) ?
   (b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)
   (c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $y-P$ est solution de (E_0)
   (d) En déduire la solution générale de l'équation (E)
   (e) Déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 2$

Exercice 4 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + y = 2x$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution particulière y_p qui vérifie la condition initiale : $y(0) = 1$
3. Étudier les variations de cette solution y_p
4. Tracer la courbe représentative de y_p sur l'intervalle $[0; 2]$

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

1. Résoudre l'équation homogène associée :
$$(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$$
2. On cherche une solution particulière de l'équation (E) sous la forme :
$$y_p(x) = A \ln x + B$$
   Déterminer les constantes A et B.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la solution y de (E) qui vérifie :
$$y(1) = 0 \quad \text{et} \quad y'(1) = 1$$

Exercice 6 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée : $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. En déduire une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante ou par la méthode d'annulation
3. En déduire la solution générale de (E)
4. Trouver la solution vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
5. Étudier les variations de cette solution particulière

Exercice 7 : On considère un objet de masse m en chute verticale dans un fluide (air ou eau), soumis à la gravité et à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse.

On note $v(t)$ la vitesse de l'objet à l'instant t, g l'accélération de la pesanteur, et $\lambda > 0$ une constante liée au frottement.

Le mouvement est modélisé par l'équation différentielle :

$$(E) : m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v(t)$$

1. Mettre l'équation sous la forme : $\frac{dv}{dt} + av = b$, en précisant a et b.
2. Résoudre cette équation différentielle en posant $v(0) = 0$.
3. Déterminer la limite de $v(t)$ quand $t \to +\infty$ et interpréter ce résultat physiquement.
4. Déterminer la position $x(t)$ de l'objet en fonction du temps, en supposant que $x(0) = 0$.
5. Tracer les courbes qualitatives de $v(t)$ et $x(t)$.