Mathosphère

Série d'exercices Logarithme Exponentielle

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 (Domaines de définition des fonctions logarithmiques) – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x)$ avec $x > 1$.
2. $g(x) = \ln(x^2 - 3x - 2)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{x}{ln(x)}$.
4. $k(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.
5. $m(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)$.

Exercice 2 (Résolution d'équations et d'inéquations exponentielles) – Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{1-x} \times e^{2x} = e$
2. $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$
3. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
4. $e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$
5. $e^{x^2} = e^{2x+3}$

Exercice 3 – **Exercice 4 (Résolution d'un système logarithmique)** – Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3\ln(x) + \ln(y) = 2 \\ 2\ln(x) - \ln(y) = 3 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(\ln x)^n}{x^2}, \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0$$

et $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. (a) Étudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.
   (b) En déduire les positions relatives des deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$; puis construire $(\mathcal{C}_2)$.
6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
   (b) Pour $x \in]1, +\infty[$, calculer le rapport $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{(n+1)/2})$$
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_n \leq \frac{1}{2^n e}$$
   et en conclure la $\lim\limits_{n\to+\infty}$

Exercice 5 (Calcul des limites) – Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+4x^2+x+3}$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{e^{sinx}-1}{x}$
4. $\lim_{x\to1} \frac{e^{x+1}-e}{x}$

Exercice 6 (Résolution d'équations logarithmiques) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\log(2x) \times \log(x-1) = 0.35$
2. $2\log(x) - \log(19) - \log(10) = 0$
3. $\log\left(\frac{x}{2} - 1\right) \geq \frac{1}{2}$
4. $\log_4(x+2) = \log_4(16x)$

Exercice 7 – [Étude d'une fonction rationnelle avec logarithme] Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$.
5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le domaine d'étude.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
7. Soit la suite (u_n) définie par :
   $$u_0 = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle est convergente.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).