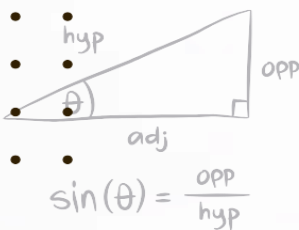


Mathosphère

Série d'exercices sur les systèmes d'équations et d'inéquations

Niveau 2nd S



Exercice 1 – (Résolution par la méthode de Cramer)

En utilisant la méthode de Cramer, résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} 3x + 4y + 2 = -5 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 4x - 5y = 11 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x - 12 = 6y \\ 10y = 4x - 8 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 7x - 12y = -3 \\ 5x - 8y = 6 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5x + 6y = 12 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = \sqrt{2} \\ x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \\ x + y\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x - \frac{y}{4} - 2 = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{10} = -1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 6x - 4(y + 2) = 7(x - 1) + 3y \\ 8(x + 2) - 5y = 10(x + 4) + 10(y - 1) \end{cases}$
10. $\begin{cases} \frac{x}{240} + \frac{y}{180} = \frac{1}{90} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2(2 + \sqrt{5})y = \sqrt{2} \\ (2 - \sqrt{5})x + (\sqrt{3} - 1)y = 1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 6x - 1 + 2y - 1 = 3(x - 2)(y - 1) \\ 4x + 1 + 3y = 2y(x + 2) \end{cases}$

Exercice 2 – (Résolution avec changement d'inconnues)

Résoudre les systèmes suivants après avoir fait un changement d'inconnues adéquat :

1. $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{3x-1}{2x-1} + \frac{4y+1}{3y+1} = -5 \\ \frac{x+1}{x+1} - \frac{y-1}{y-1} = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3(x^2 - 1) + 4(y^2 - 2) = -5 \\ 2(x^2 - 1) - 3(y^2 - 2) = 10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3(2x - 1) + 4(3y + 1) = 17 \\ 2(4x - 2) - 3(6y + 2) = 14 \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x - 2)^2 + y - 1 = 6 \\ 2(x - 2)^2 + 4y - 4 = -8 \end{cases}$

Exercice 3 – (Systèmes et équations avec paramètres)

1. Déterminer a et b pour que le système :

$$\begin{cases} (3a - 2)x + by = 5 \\ (a - 1)x + (b - 2)y = 3 \end{cases}$$

admette pour solution le couple $(2, -1)$.

2. Déterminer les réels p et q pour que l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$ admette pour ensemble de solutions $S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$.

Exercice 4 – (Systèmes à trois inconnues)

Résoudre dans \mathbb{R}^3 les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 5x + y - 3z = -2 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$

Exercice 5 – (Systèmes avec paramètre)

Résoudre les systèmes suivants en discutant selon les valeurs de m . (On utilisera la méthode de Cramer) :

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 3mx - (m - 2)y = m + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m + 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3mx - 2y = m + 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = m - 1 \\ (m + 1)x - 3y = m^2 - 3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} mx + y = (m + 2)^2 \\ 3x - y = 2 + 3m \end{cases}$
6. $\begin{cases} (m + 2)x - y = 3m + 2 \\ (2m + 1)x - 3y = 5m + 4 \end{cases}$

Exercice 6 – (Systèmes triangulaires)

Résoudre les systèmes triangulaires suivants :

1.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + 2y = 4 \\ x + 6y = 13 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + 2y = 4 \\ x + 6y = 14 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ x - y = -3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = 1 \\ mx - (m - 2)y = 4 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} -x + 3y = -5 \\ 3x - y = 7 \\ (m + 2)x + (m - 1)y = -2 \end{cases}$$

N.B. Pour 4) et 5), discuter suivant les valeurs de m .

Exercice 7 – (Droites et systèmes)

On considère les droites D_1 , D_2 , D_3 , et D_4 d'équations respectives :

$$(1) y = -x + 3, \quad (2) x = 2, \quad (3) x + y = 1, \quad (4) 3x = -3y + 6$$

1. Tracer ces quatre droites dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.
2. En déduire, en justifiant par des arguments graphiques, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$(E) \begin{cases} y = -x + 3 \\ x = 2 \end{cases} \quad (E') \begin{cases} y = -x + 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (E'') \begin{cases} 3x = -3y + 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

3. Résoudre les systèmes (E) , (E') , et (E'') .

Exercice 8 – (Systèmes d'inéquations graphiques)

Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

1.
$$\begin{cases} 3|x| - y + 2 > 0 \\ x - 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} |x| + |y - 2| - 3 \leq 0 \\ y - x > 0 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 3x - y + 2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 9 – (Résolution par substitution)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants par la méthode de substitution :

1.
$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 – (Systèmes linéaires simples)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants par la méthode de votre choix :

1.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

Exercice 11 – (Systèmes avec fractions)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \frac{2x + y}{5} = 2 \\ \frac{x - 2y}{3} = -3 \end{cases}$$

Exercice 12 – (Systèmes et géométrie)

Les droites d'équations $y = 2x - 1$ et $y = -x + 4$ se coupent en un point M .

1. Déterminer les coordonnées de M en résolvant le système associé.
2. Vérifier graphiquement en traçant les droites (unité : 2 cm).

Exercice 13 – (Systèmes homogènes)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes homogènes suivants et discuter les solutions :

1.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 – (Inéquations linéaires)

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 15 – (Systèmes avec racines)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{3}x - 2y = \sqrt{3} \\ 2x + \sqrt{3}y = 2 \end{cases}$$

Exercice 16 – (Systèmes dépendants)

Pour chaque système suivant, déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système a une solution unique, aucune solution, ou une infinité de solutions :

$$1. \begin{cases} x + 2y = 3 \\ kx - y = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + ky = 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

Exercice 17 – (Systèmes et paramètres)

Déterminer a pour que le système :

$$\begin{cases} 2x + ay = 4 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

admette pour solution $(1, 1)$.

Exercice 18 – (Inéquations avec valeurs absolues)

Résoudre graphiquement le système d'inéquations :

$$\begin{cases} |x - 1| + y \leq 2 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 19 – (Systèmes triangulaires simples)

Résoudre les systèmes triangulaires suivants :

$$1. \begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + y = 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 20 – (Systèmes et équations quadratiques)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Exercice 21 – (Systèmes avec substitution)

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants par substitution :

$$1. \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$$

Exercice 22 – (Problème : Budget de production)

Une entreprise produit deux types de produits, A et B. Chaque unité de A coûte 5 € à produire et chaque unité de B coûte 3 €. Le budget total est de 150 €. De plus, pour des raisons de stockage, le nombre total d'unités produites ($A + B$) ne doit pas dépasser 40.

1. Écrire le système d'équations et d'inéquations représentant ces contraintes.
2. Résoudre graphiquement pour déterminer les combinaisons possibles de production.
3. Combien d'unités de A et B peut-on produire pour dépenser exactement 150 € tout en respectant la contrainte de stockage ?