PROBLEME DE SYNTHESE/ PREPA CONCOURS-OLYMPIADES/ MATHOSPHERE

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle par des fractions rationnelles.

Partie A : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des fonctions numériques f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0.$$

1. Montrer que la fonction f_0 définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = e^{x/2}$ appartient à l'ensemble E_0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n une fonction appartenant à E_n. On définit la fonction f_{n+1} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}(x) = 2[(2n+1)f_n(x) - xf_n'(x)].$$

   a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}'(x) = \frac{-x}{2} f_n(x)$.
   b) Montrer que la fonction f_{n+1} appartient à l'ensemble E_{n+1}.
3. On définit donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in E_n$, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = e^{x/2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) = 2[(2n+1)f_n(x) - xf_n'(x)].$$

   a) Expliciter les fonctions f_1 et f_2.
   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2}(x) = 2(2n+3)f_{n+1}(x) + x^2 f_n(x)$.
   c) En déduire la fonction f_3.

Partie B : Étude d'une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = f_n(x)e^{-x/2}$.

1. Expliciter les fonctions P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+2}(x) = 2(2n+3)P_{n+1}(x) + x^2 P_n(x)$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction P_n est un polynôme à coefficients entiers.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\infty, 2[\quad P_n(x) > 0$.
6. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Partie C : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) = (-1)^n[f_n(x) - f_n(-x)]$.

1. Montrer que g_n est une fonction impaire.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_{n+1}(x) = \dfrac{x}{2} g_n(x)$.
3. En déduire par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} e^{x/2}.$$

.

Partie D : Étude d'une suite de rationnels

Dans la suite du problème, on pose :

$u_n(x) = \dfrac{P_n(-x)}{P_n(x)}$ pour tout entier naturel n et pour tout réel x qui n'est pas racine du polynôme P_n.

D'après B-5), $u_n(x)$ est au moins définie pour $x < 2$. La question 4) étudiera l'existence de la suite pour $x \geq 2$ avant d'étudier sa convergence.

1. Si x n'est pas racine de P_n, montrer que :

$$u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{g_n(x) e^{x/2}}{P_n(x)}.$$

2. **Étude de la convergence de la suite si $x \leq 0$.**
   a) À l'aide de B-2), démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) \geq \quad P_n(0) \quad \text{pour } x \leq 0.$$

   b) Déduire des résultats précédents que :

   $$\forall x \in]-\infty, 0] \quad \left|u_n(x) - e^{-x}\right| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

   c) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $x \leq 0$.
3. **Étude de la convergence de la suite si $0 < x < 2$.**
   a) Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $0 < x < 2$.
   b) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $0 < x < 2$.
4. **Étude de la convergence de la suite si $x \geq 2$.**
   a) Démontrer que si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) > 0$. On le démontrera d'abord pour $x \leq 0$, puis, en utilisant la fonction g_n, pour $x > 0$. En déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ si n est pair.
   b) On suppose que n est impair : $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
      (1) À l'aide du A-2)a), étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$.
      (2) En déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution a_p sur $\mathbb{R}$.

(3) En déduire le signe de $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose que n est pair : $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes les variations de f_n sur $\mathbb{R}$.

d) On revient au cas où $n = 2p + 1$ pour étudier la suite (a_p).

(1) Montrer en utilisant **A-3)b)** et le signe de $f_{2p+3}(a_p)$, que la suite (a_p) est strictement croissante.

(2) On suppose que la suite (a_p) converge et on pose $\ell = \lim_{p\to+\infty} a_p$. Déterminer $\lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}(-\ell)$, puis $\lim_{p\to+\infty} \frac{f_{2p+1}(\ell)}{f_{2p+1}(-\ell)}$. Montrer que ce résultat est absurde et en déduire que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$.

(3) En déduire que pour tout $x \geq 2$, il existe un entier p_x tel que, pour tout $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.

e) Pour $x \geq 2$ et $n \geq 2p_x$, exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ et en déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $x \geq 2$.

Dans la suite du problème, on se placera dans le cas où $u_n(x)$ existe, c'est-à-dire pour $n \geq 2p_x$ si $x \geq 2$.

Partie E : Vitesse de convergence de la suite

(a) **Recherche d'un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

a) On suppose que $n \geq 1$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(0) - \frac{x^2}{4} f_{n-1}(0) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

b) En déduire que, pour tout x fixé, $P_n(x)$ équivaut à $P_n(0)e^{-x/2}$ lorsque n tend vers l'infini. On commencera par le démontrer pour $x \leq 0$, puis pour $x > 0$ en utilisant la suite de terme général $u_n(x)$.

(b) **Majoration de $|u_n(x) - e^{-x}|$.**

a) Déduire du D-1) que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|u_n(x) - e^{-x}\right| \leq \left|u_{n+1}(x) - u_n(x)\right|.$$

b) Déduire du B-2) que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x) = 2(-1)^n x^{2n+1}.$$

c) En déduire enfin que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|u_n(x) - e^{-x}\right| \leq \frac{2|x|x^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)}.$$

(c) **Recherche d'un équivalent de $u_n(x) - e^{-x}$.**

On suppose x réel non nul fixé.

a) Déterminer un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0.$$

c) En *admettant* la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

montrer que :

$$u_n(x) - e^{-x} \sim (-1)^{n+1} e^{x-1} \left(\frac{ex}{4n}\right)^{2n+1} \quad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Fin de l'Epreuve !