



Mathosphère

Série d'exercices sur les limites et continuité

Niveau 1S1

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

Exercice 1 – (Étude des limites)

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite en x_0 de la fonction f :

$$1. f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = 2$$

$$2. f(x) = -x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 1$$

$$3. f(x) = \frac{x-2}{x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$4. f(x) = \frac{2x+1}{5x-3}, \quad x_0 = 1$$

$$5. f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad x_0 = 2$$

$$6. f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$7. f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}, \quad x_0 = -1$$

$$8. f(x) = \frac{x^2-x-2}{2x^2-x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$9. f(x) = \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}, \quad x_0 = 16$$

$$10. f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}, \quad x_0 = 4$$

$$11. f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}, \quad x_0 = 2$$

$$12. f(x) = \frac{x\sqrt{1+x}-2}{x}, \quad x_0 = 0$$

$$13. f(x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt{x+5}-3}, \quad x_0 = 4$$

$$14. f(x) = \frac{3x-\sqrt{x+2}-5}{(x-2)(x-1)}, \quad x_0 = 2$$

$$15. f(x) = \frac{x-\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1}-2}, \quad x_0 = 1$$

$$16. f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{3x-\sqrt{5x^2+1}}, \quad x_0 = 0$$

$$17. f(x) = \frac{3x^2-2-1}{x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$18. f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{x-3}, \quad x_0 = 3$$

Exercice 2 – (Limites à l'infini)

Trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{2x^4+x-2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+4x-1}{x+2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-x+3}{2x-1}$$

Exercice 3 – (Limite près de zéro)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2+x}$$

A-t-elle une limite lorsque x est arbitrairement proche de 0 ?

Exercice 4 – (Limites à l'infini avec racines)

Trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x-1} - (x-1))$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4+x^2+2} - (x^2+x+1))$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4+x^2+2} - (x^2+x+1))$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2-1})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+3x}}{x-\sqrt{x^2+x-3}}$$

Exercice 5 – (Limites d'une fonction rationnelle)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$$

Calculer :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Exercice 6 – (Limites de fonctions composées)

Étudier les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+1} - x)$$

Exercice 7 – (Continuité d'une fonction par morceaux)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est \mathbb{R} .
2. Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en $x = -1$.
3. Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en $x = 1$.
4. Déterminer a et b pour que f soit continue en $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 8 – (Continuité avec valeur absolue)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la continuité de f en $x = 0$, $x = 2$, et $x = -2$.

Exercice 9 – (Continuité d'une fonction trigonométrique)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(\pi x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier la continuité de f en $x = 0$.
3. Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 10 – (Continuité avec racine)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Exercice 11 – (Continuité par morceaux)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer a et b pour que f soit continue en $x = 1$.
2. Déterminer a et b pour que f soit continue en $x = 2$.
3. Existe-t-il des valeurs de a et b rendant f continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 12 – (Continuité et limites)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

2. Peut-on définir $f(1)$ pour rendre f continue en $x = 1$?
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 13 – (Continuité d'une fonction composée)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 14 – (Continuité avec paramètres)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
2. Déterminer a et b pour que f soit continue en $x = 0$.
3. Pour ces valeurs de a et b , f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 15 – (Problème : Limites et continuité)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\sin(\pi(x-3))}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f en $x = 2^-$ et $x = 3^+$. Que peut-on en déduire sur le comportement de (C_f) ?
3. Déterminer a , b , et c pour que f soit continue en $x = 2$.
4. Déterminer a , b , et c pour que f soit continue en $x = 3$.
5. Existe-t-il des valeurs de a , b , et c rendant f continue sur \mathbb{R} ? Si oui, les déterminer.
6. Pour les valeurs de a , b , c rendant f continue sur \mathbb{R} , calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire les éventuelles asymptotes.
7. Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} pour ces valeurs de a , b , c .
8. Tracer (C_f) en utilisant les informations précédentes.