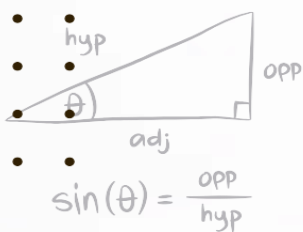


Mathosphère

Série d'exercices sur les dérivées

Niveau 1S1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Exercice 1 – (Dérivabilité par la définition)

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 . Dans les cas où f est dérivable en x_0 , écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point M_0 d'abscisse x_0 . Dans les cas où f n'est pas dérivable, interpréter géométriquement les résultats. Construire les tangentes et demi-tangentes correspondantes.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$, $x_0 = -1$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 3$
3. $f(x) = \sqrt{x+5}$, $x_0 = 4$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$, $x_0 = -2$
5. $f(x) = \frac{x+3}{x}$, $x_0 = -2$
6. $f(x) = |x(x-1)|$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$
7. $f(x) = x|x-3|$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$
9. $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$
10. $f(x) = x^2 - |x|$, $x_0 = 0$

Exercice 2 – (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$
2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$
3. $f(x) = \sqrt{4x+1}$
4. $f(x) = \sin(3x^2)$
5. $f(x) = e^{x^2+2x}$

Exercice 3 – (Dérivées de fonctions composées)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(1+x^2)$
2. $f(x) = \cos(\sqrt{x+2})$
3. $f(x) = e^{\sin(2x)}$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + \ln(x^2+1)}$
5. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Exercice 4 – (Conditions sur la tangente)

Soit a, b , et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$$

Déterminer a, b, c pour que (C_f) :

1. admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

2. coupe la courbe Γ de la fonction g définie par $g(x) = -2x^2 + x + 5$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ et admette en ce point la même tangente que Γ .

Exercice 5 – (Continuité et dérivabilité)

Soit a et b deux paramètres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{2x+3} - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x_0 = 3$.

Exercice 6 – (Dérivées d'ordre supérieur)

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée seconde $f''(x)$:

1. $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
3. $f(x) = e^{2x} \sin(x)$

Exercice 7 – (Dérivabilité de fonctions par morceaux)

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points indiqués :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Exercice 8 – (Dérivées implicites)

Pour chacune des équations suivantes, calculer $\frac{dy}{dx}$ par dérivation implicite :

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $xy + \sin(y) = 1$
3. $e^{xy} - y^2 = x$

Exercice 9 – (Tangentes à une courbe)

Pour chaque fonction suivante, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse donné :

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 0$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = 2$

Exercice 10 – (Dérivées logarithmiques)

Utiliser la dérivation logarithmique pour calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$
2. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$

Exercice 11 – (Dérivées de fonctions trigonométriques)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \tan(2x)$
2. $f(x) = \sin(x) \cos(3x)$
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

Exercice 12 – (Dérivabilité et monotonie)

Pour chaque fonction suivante, calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour déterminer les intervalles de monotonie :

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Exercice 13 – (Dérivées de fonctions exponentielles)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = xe^{-x}$
2. $f(x) = 2^x \ln(x)$
3. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 14 – (Dérivées de fonctions inverses)

Pour chaque fonction suivante, calculer la dérivée de la fonction inverse $f^{-1}(x)$ au point indiqué :

1. $f(x) = x^3 + 1$, $y_0 = 2$
2. $f(x) = \ln(x + 1)$, $y_0 = 0$

Exercice 15 – (Dérivées et tangentes)

Pour la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, déterminer :

1. La dérivée $f'(x)$.
2. Les points où la tangente à (C_f) est horizontale.
3. L'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 16 – (Dérivabilité avec paramètres)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a et b pour que f soit dérivable en $x = 0$.
2. Pour ces valeurs, f est-elle deux fois dérivable en $x = 0$?

Exercice 17 – (Dérivées de fonctions rationnelles)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes et simplifier le résultat :

1. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}$

$$2. f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Exercice 18 – (Dérivabilité et comportement)

Pour la fonction $f(x) = |x^2 - 4|$:

1. Déterminer les points où f est dérivable.
2. Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.
3. Interpréter géométriquement les points de non-dérivabilité.

Exercice 19 – (Dérivées de fonctions composées)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$
2. $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$
3. $f(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$

Exercice 20 – (Dérivées et équations de tangentes)

Pour la fonction $f(x) = x \ln(x)$, où $x > 0$:

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x = e$.

Exercice 21 – (Dérivabilité d'une fonction par morceaux)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

Exercice 22 – (Dérivées et monotonie)

Pour la fonction $f(x) = x^2 e^{-x}$:

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de monotonie.

Exercice 23 – (Problème : Étude complète d'une fonction)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \sin(\pi x)$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Calculer les limites de f en $x = 2^-$ et $x = 2^+$. Peut-on définir $f(2)$ pour rendre f continue en $x = 2$? Si oui, donner la valeur de $f(2)$.
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition après extension éventuelle.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire le comportement asymptotique de (C_f) .
5. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f .
6. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ et étudier son signe pour déterminer les intervalles de convexité de f .
7. Déterminer les points où la tangente à (C_f) est horizontale. Donner leurs équations.
8. À l'aide des informations précédentes, tracer la courbe (C_f) .