Mathosphère

Série d'exercices Sur les Nombres Complexes

Niveau TS2

Exercice 1 – ***(Équation complexe à paramètres)***
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2(a+ib)z + (a^2+b^2+1) = 0$$

Étudier la nature des racines selon les valeurs de a et b réels.

Exercice 2 – ***(Lieux géométriques)***
Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 3 – ***(Triangle équilatéral et affixe)***
Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = z$. Déterminer z pour que ABC soit équilatéral.

Exercice 4 – ***(Rotation complexe)***
On considère $f(z) = e^{i\theta}(z-a) + a$.
1. Montrer que f est une rotation.
2. Déterminer son centre et son angle.
3. Étudier la composée de deux rotations.

Exercice 5 – ***(Résolution d'une équation complexe)***
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = -8$.
Puis représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 6 – ***(Problème de module et argument)***
Soit z tel que $|z-2| = 3|z+1|$.
1. Déterminer l'ensemble des points z.
2. Représenter.
3. Montrer qu'il s'agit d'un cercle, et en donner les éléments.

Exercice 7 – ***(Produit scalaire et orthogonalité)***
Soient A, B, C trois points d'affixes z_A, z_B, z_C.
1. Donner une condition pour que $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.
2. En déduire une équation de cercle passant par A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit droit.

Exercice 8 – ***(Alignement et argument)***
Montrer que A, B, C sont alignés ssi :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right) \in \pi\mathbb{Z}$$

Interpréter géométriquement cette propriété.

Exercice 9 – ***(Inversion complexe)***
On définit $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.
1. Montrer que f envoie un cercle passant par l'origine en une droite.
2. Étudier le cas général.
3. Représenter l'image du cercle de centre 0 et rayon 2.

Exercice 10 – ***(Cercle circonscrit – application)***
Soient $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$.
1. Montrer que le triangle est rectangle en A.
2. Déterminer l'affixe du milieu de $[BC]$.
3. Montrer que la médiatrice de $[BC]$ est donnée par $|z - z_B| = |z - z_C|$.
4. En déduire l'affixe du centre du cercle circonscrit.

Exercice 11 – ***(Forme algébrique et trigonométrique)***
On considère le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$.

1. Représenter z dans le plan complexe.
2. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.
3. Donner l'écriture trigonométrique de z.
4. Calculer z^6 sous forme algébrique.
5. Vérifier que z^6 est un réel.
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $w^3 = z$.

Exercice 12 – ***(Équations complexes difficiles)***
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 2z + 5 = 0$
2. $z^4 = -16$
3. $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$
4. $|z-1| = |z+1|$
5. $|z+1| + |z-1| = 4$

Représenter les ensembles solutions dans le plan complexe lorsque c'est pertinent.

Exercice 13 – ***(Affixes et géométrie)***
Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2$.

1. Placer les points A, B, C dans un repère orthonormé.
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.
5. Déterminer une rotation qui transforme A en B et B en C.
6. Donner son centre et son angle.

Exercice 14 – ***(Transformations géométriques complexes)***
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est une similitude.
2. Déterminer la nature de f si $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = 1+i$.
3. Calculer l'image du point $z = 2$.
4. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de la transformation.
5. Étudier le cas où $|a| = 1$ et $b = 0$.

6. Montrer que dans ce cas, f est une rotation.

Exercice 15 – ***(Exercices sur les racines n-ièmes)***

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.
2. Représenter les solutions dans le plan complexe.
3. Calculer la somme des racines.
4. Montrer qu'elles forment un polygone régulier.
5. Quelle est leur moyenne géométrique ?

Exercice 16 – ***(Produit scalaire complexe)***
Soient z_1, z_2 deux affixes de points A et B.

1. Donner une expression du produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ en fonction de z_1 et z_2.
2. Montrer que si $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ alors l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$ est nul.
3. Appliquer à $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.
4. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 17 – ***(Résolution complète d'un problème géométrique complexe)***
Dans un repère orthonormé d'origine O, soient les points A, B, C d'affixes : $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = -1 - i$.

1. Placer les points A, B, C.
2. Calculer les longueurs AB, BC, CA.
3. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
4. Déterminer la rotation r qui transforme A en B.
5. Écrire la formule complexe de r.
6. En déduire $r(C)$.

Exercice 18 – ***(Exponentielle complexe)***
On définit $z = e^{i\theta}$.

1. Montrer que $|z| = 1$.
2. Montrer que l'ensemble des points d'affixe z est le cercle trigonométrique.
3. Écrire z^n sous forme exponentielle.
4. Montrer que $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$.
5. En déduire les formules d'Euler.
6. Appliquer pour calculer $\cos(5\theta)$ à l'aide des nombres complexes.

Exercice 19 – ***(Polynômes complexes)***
Soit $P(z) = z^3 - 3z + 2$.

1. Montrer que $z = 1$ est racine de P.
2. Factoriser $P(z)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
4. Étudier la nature des racines.
5. Représenter les racines dans le plan complexe.

Exercice 20 – ***(Problème de synthèse complexe)***
Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 dans le plan complexe. On place trois points A, B, C sur $\mathcal{C}$ d'affixes z_A, z_B, z_C.

1. Montrer que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$.
2. Montrer que $z_A\overline{z_B}$ est sur le cercle.
3. Étudier la nature du triangle ABC si $z_A + z_B + z_C = 0$.
4. Montrer que le produit vectoriel des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ est imaginaire pur.