Mathosphère

Série d’exercices sur les angles – Trigonométrie

Niveau 2nd S

Exercice 1 – ***(Placement géométrique sur le cercle)***
Donner un moyen géométrique de placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes : $\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{8}$, $-\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{8}$.

Exercice 2 – ***(Points périodiques sur le cercle)***
Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

1. $\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$
2. $\dfrac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
3. $-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$
4. $\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 3 – ***(Réduction d'angles)***
Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

1. 80π
2. 65π
3. $-\dfrac{45\pi}{2}$
4. $\dfrac{15\pi}{4}$

Exercice 4 – ***(Conversion degrés-radians)***
Compléter le tableau suivant :

°	45	30	60	15	72	120	135
rad		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{12}$			
°	150	180	90	108	225	270	360
rad			$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{5\pi}{4}$		π

Exercice 5 – ***(Mesures d'angles)***
Pour chacune des mesures suivantes, déterminer :

- La mesure principale (en degrés ou radians, selon le cas).
- La mesure dans $[0,2\pi[$ ou $[0°,360°[$.
- La mesure dans $]-2\pi,0[$ ou $[-360°,0°[$.

1. $\dfrac{2015\pi}{4}$
2. $\dfrac{33\pi}{5}$
3. $\dfrac{29\pi}{3}$
4. $-\dfrac{17\pi}{4}$
5. $-300°$
6. -15π
7. $1080°$
8. $-2160°$
9. $-\dfrac{\pi}{6}$
10. $\dfrac{7\pi}{8}$
11. $\dfrac{13\pi}{4}$
12. $-\dfrac{19\pi}{5}$
13. $240°$
14. $-390°$
15. $-5040°$
16. $\dfrac{19\pi}{2}$

Exercice 6 – ***(Angles dans un triangle)***
On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=40°$. Soit O et A' les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$. Trouver la mesure principale en radians des angles orientés :

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'});\quad(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA'});\quad(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC});\quad(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$$

Exercice 7 – ***(Angles dans un triangle équilatéral)***
ABC est un triangle équilatéral direct. On construit à l'extérieur le carré $ABED$. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC});\quad(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD});\quad(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE});$$
$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE});\quad(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB});\quad(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD});$$
$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD});\quad(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})$$

Exercice 8 – ***(Angles dans un losange)***
On considère un losange $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O et tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})=-60°$. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés :

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD});\quad(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD});\quad(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC});$$
$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC});\quad(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC});\quad(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB});$$
$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$$

Exercice 9 – ***(Angles dans un triangle rectangle isocèle)***
ABC est un triangle rectangle isocèle en A de sens indirect. On construit le triangle équilatéral BCE tel que E appartient au demi-plan de frontière (BC) contenant A. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC});\quad(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE});\quad(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB});$$
$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC});\quad(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC});\quad(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE});$$
$$(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB});\quad(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB})$$

Exercice 10 – ***(Construction de demi-droites)***
On donne dans le plan orienté P, une demi-droite Ox.

1. Construire les demi-droites Oy, Oz, Ot telles que :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \frac{3\pi}{4}, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) = -\frac{7\pi}{8}, \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ot}) = \frac{\pi}{6}$$

2. Calculer la mesure principale en radians des angles orientés $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$, $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ot})$, $(\overrightarrow{Ot}, \overrightarrow{Oy})$.

Exercice 11 – ***(Constructions dans un carré)***
On considère un carré $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Construire les demi-droites Ax, Cy, Cz telles que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ax}) = \frac{\pi}{8}, \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{Cy}) = \frac{\pi}{8}, \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{Cz}) = -\frac{\pi}{8}$$

2. Ax et Cy se coupent en E. Démontrer que (Ax) et (Cy) sont orthogonales. En déduire que le quadrilatère $ABEC$ est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Ax et Cz se coupent en R. Démontrer that R is equidistant from A and C. En déduire que les points B, R, D sont alignés.

Exercice 12 – ***(Constructions dans un rectangle)***
On considère un rectangle $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note α la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Construire les demi-droites Dx et Dy telles que :

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{Dx}) = \alpha, \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{Dy}) = -\alpha$$

2. Démontrer que les droites (Dx) et (AC) sont orthogonales, et qu'il en est de même des droites (Dy) et (DB).
3. Les demi-droites Dx et Dy coupent respectivement (AC) en E et (DB) en F. Démontrer que (BD) est tangente au cercle passant par D, E, F. Démontrer que (DF) est tangente au cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.
4. Exprimer en fonction de α les mesures des angles non orientés $E\hat{D}F$, $D\hat{F}E$, $D\hat{A}E$.

Exercice 13 – ***(Calculs trigonométriques)***

1. Soit $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{5}$ et $\sin t < 0$. Calculer $\sin t$ et $\tan t$.
2. Soit $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\sin t = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos t$ et $\tan t$.
3. Soit $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\tan t = -\sqrt{2}$. Calculer $\cos t$ et $\sin t$.
4. Sachant que $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{21\pi}{10}\right)$.
5. Sachant que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 14 – ***(Calcul de*** $\cos \frac{\pi}{7}$ ***et*** $\cos \frac{2\pi}{7}$
On considère un triangle ABC, isocèle en A, tel que $BC = a$ et $\hat{B} = \frac{2\pi}{7}$. La bissectrice de l'angle $\hat{B}$ coupe $[AC]$ en D.

1. Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que $DA = DB = a$.
2. Démontrer que $AB = 2a\cos\frac{\pi}{7}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{7}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}$.
3. Démontrer that $BC = BD\cos\frac{\pi}{7} + CD\cos\frac{2\pi}{7}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{4}$.
4. Poser $x = \cos\frac{\pi}{7}$, $y = \cos\frac{2\pi}{7}$. Sachant que $x - y = \frac{1}{2}$ et $xy = \frac{1}{4}$, calculer $x + y$ using $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, et en déduire x et y.

Exercice 15 – ***(Mesures et valeurs trigonométriques)***

1. Déterminer la mesure principale de :

$$\frac{29\pi}{4}, \quad \frac{85\pi}{6}, \quad -\frac{77\pi}{3}$$

2. Donner les valeurs exactes de :
   (a) $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{27\pi}{6}$, $\sin\frac{27\pi}{6}$, $\sin\frac{5\pi}{3}$, $\sin\frac{211\pi}{4}$, $\cos-\frac{65\pi}{4}$
   (b) $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

Exercice 16 – ***(Transformations trigonométriques)***
Transformer les expressions suivantes :

1. $A = 2\cos(-x) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 5\sin x + 2\cos x$
2. $B = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\cos(\pi - x) - 2\sin(-x) - \cos x$
3. $C = -\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4. $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. $E = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi + x\right) - 3\sin(x - \pi) + 4\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$

Exercice 17 – ***(Identités trigonométriques)***
Établir les égalités suivantes :

1. $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
2. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$

3. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

Exercice 18 – ***(Longueur d'arc)***
Donner la longueur d'un demi-cercle de rayon 3 cm, et d'un quart de cercle de rayon 5 cm.

Exercice 19 – ***(Arc et angle en degrés)***
Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle α mesuré en degrés :

l	$\frac{\pi R}{5}$	$\frac{3\pi R}{8}$			$\frac{\pi R}{3}$
α	45		90	120	

Exercice 20 – ***(Arc et angle en radians)***
Compléter le tableau suivant, où l désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle α mesuré en radians :

l	$\frac{\pi R}{8}$	$\frac{7\pi R}{12}$			$\frac{2\pi R}{5}$
α	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	

Exercice 21 – ***(Angles dans un pentagone)***
On considère un pentagone régulier $ABCDE$ orienté dans le sens direct.

1. Calculer la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

Exercice 22 – ***(Calcul trigonométrique avec contrainte)***
Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t + \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Calculer $\sin t \cos t$.
2. En déduire $\sin t$ et $\cos t$.

Exercice 23 – ***(Réduction d'angles grands)***
Pour chaque angle, déterminer la mesure principale et la mesure dans $[0, 2\pi[$:

1. $\frac{101\pi}{6}$
2. $-\frac{89\pi}{4}$
3. $720°$

Exercice 24 – ***(Identité géométrique)***
Dans un triangle ABC, on sait que $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$. Calculer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 25 – ***(Construction et angles)***
Dans un plan orienté, soit une demi-droite Ox. Construire une demi-droite Oy telle que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \frac{5\pi}{6}$. Calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox})$.

Exercice 26 – ***(Valeurs trigonométriques exactes)***
Donner les valeurs exactes de :

1. $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ sachant que $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\tan \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 27 – ***(Longueur d'arc dans un secteur)***
Un secteur circulaire de rayon 6 cm a un angle au centre de $\frac{\pi}{5}$ radians. Calculer la longueur de l'arc correspondant.