Arithmétique

Exercice 1 : Division euclidienne

Soit p un entier relatif. On pose $a = 4p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}^2$. On désigne par (D) la droite d'équation $87x + 31y - 2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

1. (a) En utilisant l'égalité de Bézout, démontrer que a et b sont premiers entre eux.

   (b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux.

   (c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tels que $87u_0 + 31v_0 = 2$.

2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E).

3. Déterminer les points de (D) dont les coordonnées (x, y) vérifient les conditions suivantes :

   (a) x et y sont des entiers naturels.

   (b) $0 \leq x \leq 100$.

   Indication : On pourra remarquer que $M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement si $(x, -y)$ est solution de (E).

Exercice 2 : Critères de divisibilité

1.

a) Vérifier que le couple $(5; -7)$ est une solution de l'équation (E) : $13x + 7y = 16$.

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).

2.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $42n \equiv 1 \pmod 5$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 20142015 par 5.

3. p désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2p$ boules numérotées de 1 à $2p$, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, sans remise, 2 boules de cette urne.

a) Quel est le nombre de résultats possibles ?

Si les boules tirées portent des numéros pairs, il gagne 800 F CFA. Si les boules tirées sont de parités différentes, il gagne 400 F CFA et il perd 800 F CFA si elles portent des numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.

b) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p.

c) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de p.

d) Calculer p pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240 F CFA.

Exercice 3 : On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$. (On rappelle que $m = 102a + 10b + c$.)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$.

2. On suppose que $m \equiv 0 \pmod{27}$.

   i. Démontre que : $m = 102a + \overline{bc} \equiv 0 \pmod{27}$.

   ii. Déduis-en que : $\overline{bc} + a \equiv 0 \pmod{27}$.

   iii. Justifie que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B Dans cette partie, on suppose que $a > c$. On pose : $p = \overline{cba}$, $u = a$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$.

2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.

3. On suppose que : $b = a + c$.

   i. Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.

   ii. Justifie que : $m = 110b + 101c$.

   iii. Démontre que les entiers naturels m qui ne sont pas premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b + c$ n'est pas divisible par 3, et b et c sont premiers entre eux.

   iv. Déduis des questions précédentes tous les entiers naturels m premiers avec d.

Exercice 4 : Plus grand commun diviseur (PGCD) Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontre que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose : $A = n+3$, $B = 2n+1$ et $d = \text{PGCD}(A; B)$.

   a) Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d.

   b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.

   c) Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$. Justifie que S et P sont divisibles par $n-1$.

3. On pose : $\delta = \text{PGCD}(n(n+3); 2n+1)$.

   a) Démontre que d divise δ.

   b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.

   c) Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d.

   d) Détermine le $\text{PGCD}(S; P)$ en fonction de n.

4. Détermine $\text{PGCD}(S; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

Exercice 5 : Congruences

I.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(a; b)$ d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.

2. Soit l'équation (E) : $45x - 16y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

   a) Justifier que le couple $(10; 28)$ est une solution particulière de (E).

   b) Résoudre (E).

II.

Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises. Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours. Le navire A accoste un jour J_0 au port. Quatre jours plus tard, B accoste à son tour. On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1. Soient u et v le nombre d'entrées au port effectuées régulièrement par A et B entre J_0 et J_1 (J_0 non compris). Démontrer que le couple $(u; v)$ est une solution de (E).

2. Déterminer le couple $(U; v)$.

3. Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

Exercice 6 : Détermination du nombre d'hommes et de femmes dans l'association ARETI

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 FCFA pour les hommes et 700 FCFA pour les femmes. Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000 FCFA. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

1. On considère l'équation $(E) : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ 9x + 7y = 1$.

   a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E). Démontrer que $2x \equiv 1 \pmod 7$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $2x \equiv 1 \pmod 7$.

   c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :

   $$\{(4 + 7k, -5 - 9k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Résoudre l'équation $(E') : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ 9x + 7y = 200$.

3. En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

Exercice : Étude des suites x_n et y_n

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1, \\ y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{cases}$$

1. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a) Calculer le PGCD de x_8 et x_9 puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9, d'une part, et pour x_{2002} et x_{2003}, d'autre part ?

   b) Les termes x_{n+1} et x_n sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

   b) Exprimer y_n en fonction de n.

   c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier le reste de la division euclidienne de 2^p par 5 en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

   d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice : Étude de résultats en arithmétique et en algèbre

1. **Somme de termes combinatoires :** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k)\binom{n}{k} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. **Divisibilité :** Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'expression suivante est divisible par 111 :
$$10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1.$$

3. **Décomposition en facteurs premiers et résolution d'une équation :**

   a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.

   b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :
$$x^3 - y^3 = 469.$$

Exercice : Étude de congruences et d'équations diophantiennes

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

   a) Donner une solution particulière de (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers naturels vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1, \\ N = 5b + 2. \end{cases}$$

   a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

   b) Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice : Géométrie et théorème de divisibilité

Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux. Le plan est muni d'un repère $(O; i; j)$.

1. **a)** Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs, alors l'entier $35x - 30y$ est divisible par 5.

2. **b)** Existe-t-il un point de la droite d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{2}{5}$ dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

3. Etant donnés deux entiers relatifs p et q premiers entre eux, on considère la droite $(D_{p,q})$ d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{p}{q}$. On dit que $(D_{p,q})$ est une droite rationnelle. Le but de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que la droite rationnelle $(D_{p,q})$ comporte au moins un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4. On suppose ici que la droite $(D_{p,q})$ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

(a) **a)** Démontrer que q divise le produit $6p$.

(b) **b)** En déduire que q divise 6.

5. Réciproquement, on suppose que q divise 6 et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{7}{6}x_0 - \frac{p}{q}$.

   (a) **a)** On pose $6 = qr$ où r est un entier relatif. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que : $7u - qrv = 1$.

   (b) **b)** En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{7}{6}x_0 - \frac{p}{q}$.

6. Soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{7}{6}x - \frac{8}{3}$.

   (a) **a)** Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ?

   (b) **b)** Déterminer tous les points de (Δ) à coordonnées entières.

Exercice : Petit Théorème de Fermat et équations diophantiennes

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$".

1. **a)** Démontrer que 193 est un nombre premier.

2. **b)** Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1 \pmod{193}$.

3. On considère l'équation

$$(E) : 83x - 192y = 1 \quad \text{où} \quad x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   (a) **a)** Vérifier que le couple $(155, 67)$ est solution de (E).

   (b) **b)** Résoudre l'équation (E).

4. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :

   - À tout entier a de A, $f(a)$ associe le reste de la division euclidienne de $83a$ par 193.

- À tout entier a de A, $g(a)$ associe le reste de la division euclidienne de $155a$ par 193.

(a) **a)** Démontrer que $g(f(a)) \equiv 83 \times 155a \pmod{193}$. En déduire que pour tout $a \in A$, on a :

$$g(f(a)) = a.$$

(b) **b)** Déterminer $f \circ g$.

Exercice 26 - Intervalles sans nombres premiers

Soit $q \geq 1$ un entier. Trouver un intervalle de longueur q ne contenant pas de nombres premiers.

Correction - Intervalle sans nombres premiers

Soit $n \geq 1$ et $I = \{n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n\}$. Prenons un entier $m = n! + k$ dans I. Alors k est un diviseur strict de m, puisque $1 < k < m$, et $k \mid k$, $k \mid n!$ puisque $k \leq n$, donc $k \mid m$. Ainsi, I est un intervalle de $(n-1)$ entiers ne comportant pas de nombres premiers. Si on a choisi $n = q + 1$, alors on a répondu au problème posé par l'énoncé.