Mathosphère

# Série d'exercices sur les suites numériques

Niveau 1S1

www.Mathosphère.com

**Exercice 1 –** ***(Suites arithmétiques et géométriques)***

1. Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_1$, telle que $u_{12} = 85$. Calculer $u_1$ et $S_{12} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$.
2. Soit $(v_n)$ une suite arithmétique de raison $r'$ et de premier terme $v_0$, telle que $v_{15} = 47$ et $S'_{15} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15} = 315$. Calculer $v_0$ et $r'$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant où $a$, $b$, et $c$ sont en progression géométrique dans cet ordre :

$$\begin{cases} a+b+c = 21 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{13}{12} \end{cases}$$

---

**Exercice 2 –** ***(Propriétés d'une suite définie par récurrence)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

---

**Exercice 3 –** ***(Démonstrations par récurrence)***
Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

1. $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$
3. $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

---

**Exercice 4 –** ***(Relation linéaire dans une suite)***
Les lettres $a$, $b$, et $c$ désignant trois nombres réels donnés, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = a + bn + c3^n$. Montrer qu'il existe trois nombres réels $A$, $B$, et $C$, indépendants de $a$, $b$, $c$, et $n$, tels que :

$$u_{n+3} = Au_{n+2} + Bu_{n+1} + Cu_n$$

---

**Exercice 5 –** ***(Suites couplées)***
On donne deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que pour tout entier naturel $n$ :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

On définit deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ par : $x_n = u_n + v_n$ et $y_n = u_n - v_n$.

1. Montrer que $(x_n)$ est une suite géométrique et $(y_n)$ est une suite constante.
2. En déduire $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 6 –** ***(Suite définie par récurrence)***
On considère la suite $(u_n)$ telle que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + \frac{n\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3}, \quad u_0 = \sqrt{3}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. On pose $v_n = u_n - \sqrt{3}n$. Montrer que $v_n$ est une suite géométrique.
3. En déduire $u_n$ en fonction de $n$.
4. Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 7 –** ***(Problèmes sur les suites)***

1. $x$, $y$, et $z$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 15 et la somme de leurs carrés est 95.
2. $a$, $b$, et $c$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 42 et la somme de leurs inverses est $\dfrac{13}{36}$.

---

**Exercice 8 –** ***(Suite géométrique)***
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer $u_5$ et $u_{10}$.
2. Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de $n$.
3. Pour quelle valeur de $n$ la somme $S_n$ dépasse-t-elle 10000 ?

---

**Exercice 9 –** ***(Suite arithmético-géométrique)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 3$, avec $u_0 = 1$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$, et $u_3$.
2. Montrer que la suite $(v_n)$, définie par $v_n = u_n + \dfrac{3}{2}$, est géométrique.
3. En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

---

**Exercice 10 –** ***(Convergence d'une suite)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $u_2$, et $u_3$.
2. Montrer que $(u_n)$ est décroissante et minorée.

3. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

---

**Exercice 11** – ***(Suite définie par récurrence)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, et conjecturer une expression pour $u_n$.
2. Montrer par récurrence que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

---

**Exercice 12** – ***(Propriétés d'une suite)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$.

1. Montrer que $(u_n)$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
2. En déduire que $(u_n)$ est une suite géométrique généralisée.

---

**Exercice 13** – ***(Somme d'une suite)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = 3n - 1$.

1. Montrer que $(u_n)$ est arithmétique et préciser sa raison.
2. Calculer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de $n$.
3. Pour quelle valeur de $n$ la somme $S_n$ dépasse-t-elle 500 ?

---

**Exercice 14** – ***(Suite définie par récurrence)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
2. Montrer que $(u_n)$ est bornée par 2.
3. En déduire que $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

---

**Exercice 15** – ***(Suites géométriques)***
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_1 = 4$ et telle que $u_5 = 64$.

1. Calculer la raison $q$ de la suite.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

---

**Exercice 16** – ***(Récurrence linéaire)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 2$$

1. Calculer $u_2$, $u_3$, et $u_4$.
2. Montrer que $(u_n)$ peut s'écrire sous la forme $u_n = A + B \cdot 2^n$, et déterminer $A$ et $B$.

---

**Exercice 17** – ***(Induction sur une somme)***
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

---

**Exercice 18** – ***(Problème sur les suites)***
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et telle que $S_{10} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 110$.

1. Calculer $u_1$.
2. Calculer $u_{10}$.
3. Déterminer $n$ tel que $u_n = 0$.

---

**Exercice 19** – ***(Suite définie explicitement)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$.

1. Montrer que $(u_n)$ peut s'écrire sous la forme $u_n = n - 1 + \dfrac{2}{n+1}$.
2. Montrer que $(u_n)$ est croissante pour $n \geq 2$.

---

**Exercice 20** – ***(Convergence d'une suite)***
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)$ est minorée par 1.
3. En déduire que $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

---