Mathosphère

Série d'exercices

Probablités

Niveau TS1

www.Mathosphère.com

Exercice 1 : Probabilités sur un lancer de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces simultanément. On note Ω l'univers des issues possibles, sous forme de couples (x, y) où x est le résultat du premier dé et y celui du second dé.

1. Décrire de façon ensembliste les événements suivants :
   — A : « On obtient deux fois le même résultat » ;
   — B : « La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 4 ».
2. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(A), \quad P(B), \quad P(A \cup B), \quad P(A \cap B)$$

Exercice 2 : Tirage sans remise dans un coffre de pierres précieuses

Un coffre contient 10 diamants, 15 émeraudes et 20 rubis. On tire simultanément, au hasard, quatre pierres précieuses sans remise.

1. Calculer la probabilité que les quatre pierres soient du même type.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux diamants et deux rubis.
3. Calculer la probabilité d'obtenir autant de diamants que de rubis.

Pour chaque question, donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3 : Expérience aléatoire à deux étapes

Un sac contient 5 boules rouges, 4 boules vertes et 3 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire successivement deux boules sans remise.

1. Décrire l'univers de cette expérience.
2. Soit A l'événement « Les deux boules tirées sont de la même couleur ». Calculer $P(A)$.
3. Soit B l'événement « La première boule est rouge et la deuxième est bleue ». Calculer $P(B)$.
4. Soit C l'événement « Une seule boule verte est tirée ». Calculer $P(C)$.
5. Calculer la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes.

Exercice 4 : Jeu aléatoire à tours successifs

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant :
— A lance une pièce. S'il obtient Pile, il gagne immédiatement.
— Sinon, B lance une pièce. S'il obtient Face, il gagne.
— Sinon, c'est à nouveau à A de lancer, et ainsi de suite...

On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ième lancer ».

1. Calculer la probabilité de A_k et de B_k pour tout entier $k \geq 1$.
2. On suppose désormais que le jeu s'arrête après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :
   — Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce ;

Exercice 5 : Répartition aléatoire de boules dans des boîtes

On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables. Chaque boule est placée indépendamment dans l'une des boîtes.

(a) Combien existe-t-il de rangements différents possibles ?
(b) Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans une seule et même boîte ?
(c) Quelle est la probabilité que exactement deux boîtes soient vides ?
(d) Quelle est la probabilité qu'une seule boîte soit vide ?
(e) En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.
(f) Retrouver cette dernière probabilité en utilisant directement la formule de Poincaré (ou formule de dénombrement d'inclusion-exclusion).

Exercice 6 : Tournoi de tennis et tirage aléatoire

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug lors du tirage au sort entraîne une affectation complètement aléatoire des joueurs dans le tableau, sans considération pour les têtes de séries.

(a) Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
(b) Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 7 : Stratégie optimale et variable aléatoire

Un joueur participe à un jeu de pile ou face. À chaque lancer :
— S'il obtient Pile, il gagne 1 euro.
— S'il obtient Face, il perd 1 euro.

Le joueur commence avec une fortune de 3 euros. Il décide d'arrêter de jouer dès qu'il atteint soit 0 euro (ruine), soit 6 euros (objectif).

(a) Modéliser ce jeu par une chaîne de Markov à états $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Déterminer les probabilités de transition.

(b) Soit p_i la probabilité, en partant de i euros, d'atteindre 6 euros avant la ruine. Montrer que $p_0 = 0$, $p_6 = 1$, et donner une relation de récurrence vérifiée par p_i pour $1 \leq i \leq 5$.

(c) Résoudre cette récurrence et calculer p_3.

(d) En déduire l'espérance du nombre d'étapes de jeu, en partant de 3 euros.