Mathosphère

Série d'exercices sur les Fonctions

Niveau 2nd S

www.Mathosphère.com

Exercice 1 – ***(Taux de variation et tableau de variation)***
Déterminer les taux de variation des fonctions suivantes et dresser leur tableau de variation :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^2 - 4x + 2$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $k(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$
5. $m(x) = \dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$
6. $f_1(x) = x^3 - 4x$

Exercice 2 – ***(Parité des fonctions)***
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x\sqrt{x^2-4}$
3. $h(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$
4. $k(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

Exercice 3 – ***(Étude d'une fonction linéaire)***
Soit la fonction $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 2$.

1. Établir le tableau de variation de f.
2. Faire la représentation graphique de f.
3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) \leq 0$.
4. Établir un lien entre le calcul et la représentation graphique.
5. Résoudre $f(x) \geq 0$.
6. On a montré que :
$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ \text{si } x \leq 3, \text{ alors } f(x) \geq 0 \\ \text{si } x \geq 3, \text{ alors } f(x) \leq 0 \end{cases}$$
Rassembler ces informations dans un tableau de signe.
7. Établir le tableau de signe de $4x - 2$.

Exercice 4 – ***(Étude d'une fonction rationnelle)***
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-x+5}{x+2}$, et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. Quelle est son ensemble de définition ?
2. Montrer que f est décroissante lorsque $x < -2$. Qu'en est-il lorsque $x > -2$?
3. Déterminer par le calcul la position de C_f par rapport à la droite $D : y = x$.
4. Tracer D et C_f.
5. Déterminer graphiquement la position de C_f par rapport à l'axe (Ox).
6. Quelles inéquations doit-on résoudre pour répondre par le calcul à la question 5 ?
7. Vérifier que $f(x) = -\dfrac{x^2+x-10}{x+2}$, puis que $-x^2 - x + 10 = -\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{41}{4}\right]$. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 0$ et conclure quant à la question 5.

Exercice 5 – ***(Comparaison de fonctions)***
Soient les fonctions $f(x) = 6 - x^3$ et $g(x) = -3x + 6$.

1. Représenter les courbes des fonctions f et g.
2. (a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
3. Factoriser l'expression $f(x) - g(x)$.
4. Résoudre par le calcul l'équation et l'inéquation du 2.

Exercice 6 – ***(Symétrie des fonctions)***
Soit $f(x) = \dfrac{3x^2-7x-1}{x-2}$ et $g(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

1. Montrer que $I\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est le centre de symétrie pour C_f.
2. Montrer que la courbe représentative de g admet la droite d'équation $x = \dfrac{7}{6}$ comme axe de symétrie.

Exercice 7 – ***(Tableau de variation simple)***
Soit $f(x) = 2x - 5$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Résoudre $f(x) > 0$ et représenter graphiquement la solution.

Exercice 8 – ***(Parité et domaine)***
Étudier la parité des fonctions suivantes et préciser leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
3. $h(x) = \sqrt{x^2-9}$

Exercice 9 – ***(Étude d'une fonction quadratique)***
Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Résoudre $f(x) \leq 0$.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 10 – ***(Fonction rationnelle simple)***
Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est décroissante sur chaque intervalle de son domaine.
3. Résoudre $f(x) = 2$.

Exercice 11 – ***(Tableau de signe)***
Établir les tableaux de signe des expressions suivantes :

1. $2x+3$
2. x^2-4
3. $\dfrac{x-1}{x+2}$

Exercice 12 – ***(Comparaison graphique)***
Soient $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x - 1$.

1. Tracer les courbes de f et g dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).
2. Résoudre graphically $f(x) = g(x)$ et $f(x) < g(x)$.
3. Vérifier analytiquement les solutions using $f(x) - g(x)$.

Exercice 13 – ***(Symétrie d'une fonction)***
Soit $f(x) = x^3 + 2x$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que l'origine $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f.
3. Établir le tableau de variation de f.

Exercice 14 – ***(Fonction linéaire et inéquations)***
Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le tableau de variation de f.
2. Résoudre $f(x) \geq 1$.
3. Représenter graphiquement la solution.

Exercice 15 – ***(Fonction cubique)***
Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Résoudre $f(x) > 0$.

Exercice 16 – ***(Fonction rationnelle et asymptotes)***
Soit $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Trouver les asymptotes (verticales et horizontales) de f.
3. Établir le tableau de variation de f.

Exercice 17 – ***(Position relative)***
Soit $f(x) = \dfrac{-x+4}{x-1}$, et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer par le calcul la position de C_f par rapport à la droite $y = -x$.
2. Vérifier graphiquement using a sketch.

Exercice 18 – ***(Inéquation rationnelle)***
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 1$.

Exercice 19 – ***(Fonction et intersection)***
Soient $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = x + 2$.

1. Trouver les points d'intersection des courbes C_f et C_g.
2. Résoudre analytiquement $f(x) = g(x)$.

Exercice 20 – ***(Variation d'une fonction quadratique)***
Soit $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

1. Déterminer le sommet de la parabole C_f.
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Résoudre $f(x) \leq 3$.

Exercice 21 – ***(Fonction et signe)***
Soit $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Établir le tableau de signe de f.
3. Résoudre $f(x) \geq 0$.