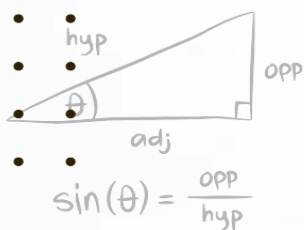


**Mathosphère**

# Série d'exercices sur les limites et continuité

Niveau 1S1



**Exercice 1 – (Étude des limites)**

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite en  $x_0$  de la fonction  $f$  :

1.  $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = 2$
2.  $f(x) = -x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 1$
3.  $f(x) = \frac{x-2}{x+3}, \quad x_0 = -2$
4.  $f(x) = \frac{2x+1}{5x-3}, \quad x_0 = 1$
5.  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad x_0 = 2$
6.  $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, \quad x_0 = 1$
7.  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}, \quad x_0 = -1$
8.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{2x^2-x-1}, \quad x_0 = 1$
9.  $f(x) = \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}, \quad x_0 = 16$
10.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}, \quad x_0 = 4$
11.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}, \quad x_0 = 2$
12.  $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x}-2}{x}, \quad x_0 = 0$
13.  $f(x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt{x+5}-3}, \quad x_0 = 4$
14.  $f(x) = \frac{3x-\sqrt{x+2}-5}{(x-2)(x-1)}, \quad x_0 = 2$
15.  $f(x) = \frac{x-\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1}-2}, \quad x_0 = 1$
16.  $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{3x-\sqrt{5x^2+1}}, \quad x_0 = 0$
17.  $f(x) = \frac{3x^2-2-1}{x-1}, \quad x_0 = 1$
18.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{x-3}, \quad x_0 = 3$

**Exercice 2 – (Limites à l'infini)**

Trouver les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+3x^2-1}{2x^4+x-2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+4x-1}{x+2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-x+3}{2x-1}$

**Exercice 3 – (Limite près de zéro)**

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2+x}$$

A-t-elle une limite lorsque  $x$  est arbitrairement proche de 0 ?

**Exercice 4 – (Limites à l'infini avec racines)**

Trouver les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x-1} - (x-1))$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4+x^2+2} - (x^2+x+1))$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4+x^2+2} - (x^2+x+1))$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2-1})$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+x+1}}{2x - \sqrt{4x^2+x}}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+x+1}}{2x - \sqrt{4x^2+x}}$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+3x}}{x - \sqrt{x^2+x-3}}$

**Exercice 5 – (Limites d'une fonction rationnelle)**

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$$

Calculer :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Exercice 6 – (Limites de fonctions composées)**

Étudier les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

**Exercice 7 – (Continuité d'une fonction par morceaux)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
2. Trouver une relation entre  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = -1$ .
3. Trouver une relation entre  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 1$ .
4. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = -1$  et  $x = 1$ .

**Exercice 8 – (Continuité avec valeur absolue)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  en  $x = 0$ ,  $x = 2$ , et  $x = -2$ .

**Exercice 9 – (Continuité d'une fonction trigonométrique)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(\pi x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  en  $x = 0$ .
3. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 10 – (Continuité avec racine)**

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  sur son domaine de définition.

**Exercice 11 – (Continuité par morceaux)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 1$ .
2. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 2$ .
3. Existe-t-il des valeurs de  $a$  et  $b$  rendant  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 12 – (Continuité et limites)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

2. Peut-on définir  $f(1)$  pour rendre  $f$  continue en  $x = 1$  ?
3. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Exercice 13 – (Continuité d'une fonction composée)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14 – (Continuité avec paramètres)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .
2. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 0$ .
3. Pour ces valeurs de  $a$  et  $b$ ,  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 15 – (Problème : Limites et continuité)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\sin(\pi(x-3))}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  en  $x = 2^-$  et  $x = 3^+$ . Que peut-on en déduire sur le comportement de  $(C_f)$  ?
3. Déterminer  $a$ ,  $b$ , et  $c$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 2$ .
4. Déterminer  $a$ ,  $b$ , et  $c$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 3$ .
5. Existe-t-il des valeurs de  $a$ ,  $b$ , et  $c$  rendant  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  ? Si oui, les déterminer.
6. Pour les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  rendant  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . En déduire les éventuelles asymptotes.
7. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  pour ces valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
8. Tracer  $(C_f)$  en utilisant les informations précédentes.