Mathosphère

Série d'exercices sur le barycentre

Niveau 2nd S

www.Mathosphère.com

Exercice 1 – ***(Barycentre de deux points)***
A et B sont deux points distincts.

1. Justifier qu'il existe un point G barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 4)$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer G.

Exercice 2 – ***(Comparaison de barycentres)***
G est le barycentre de $(A, \frac{1}{4})$ et $(B, -\frac{3}{5})$. G' est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -4)$. Comparer G et G'.

Exercice 3 – ***(Barycentre sur une droite)***
Sur une droite, on donne trois points A, B, et G tels que $\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{GB}$. Trouver des réels a et b tels que G soit le barycentre du système $(A, a), (B, b)$.

Exercice 4 – ***(Concurrence des médianes)***
À l'aide des barycentres, démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et retrouver la position du centre de gravité sur les médianes.

Exercice 5 – ***(Point sur un segment)***
Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB.

Exercice 6 – ***(Condition vectorielle)***
Soit A, B, C trois points du plan. Déterminer les points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

Exercice 7 – ***(Concurrence dans un tétraèdre)***
Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I, J, K, L, M, et N les milieux des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, et $[BD]$, et par G_1, G_2, G_3, et G_4 les centres de gravité des triangles BCD, CDA, ABD, et ABC. Démontrer que les sept droites (AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL), et (MN) sont concourantes.

Exercice 8 – ***(Construction de barycentres)***
Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de $(A, 4)$ et $(B, 3)$.

1. **Méthode du parallélogramme** : Soit M un point n'appartenant pas à (AB). Construire les points A_1, B_1, et S tels que :
$$\overrightarrow{MA_1} = 4\overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{MB_1} = 3\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1}$$
Montrer que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G.
2. **Méthode des parallèles** : Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{MA}$. Construire les points A' et B' tels que :
$$\overrightarrow{AA'} = 3\vec{u}, \quad \overrightarrow{BB'} = -4\vec{u}$$
Montrer que les droites $(A'B')$ et (AB) sont sécantes en G.

Exercice 9 – ***(Barycentres et relations vectorielles)***
Soient A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels α et β tels que G soit le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$.

1. $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GB}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{GA}$
3. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$

Exercice 10 – ***(Barycentre d'un point donné)***
Dans chacun des cas suivants, trouver des réels α et β tels que A soit le barycentre de $(B, \alpha), (C, \beta)$.

1. $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC}$
3. $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA}$

Exercice 11 – ***(Barycentres dans un parallélogramme)***
Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AC]$, et G défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer α et β pour que G soit le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$.
2. Donner les coordonnées de A, B, C, D, I, et G dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
3. Donner les coordonnées de A, B, C, D, I, et G dans le repère $(B; \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$.
4. Donner les coordonnées de A, B, C, D, I, et G dans the repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Exercice 12 – ***(Barycentres et distances)***
On donne deux points A et B tels que $AB = 12$. Soit C le barycentre de $(A, 3), (B, 4)$ et D le barycentre de $(A, 4), (B, 3)$.

1. Construire C et D.
2. Démontrer que $[AB]$ et $[CD]$ ont le même milieu, noté E.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 12$$
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$$

Exercice 13 – ***(Parallélogramme de barycentres)***
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Définir vectoriellement et placer les points I, J, K, et L définis par :
   — I : barycentre de $(A, 4), (B, -3)$
   — J : barycentre de $(B, 2), (C, -3)$

— K : barycentre de $(C, -4), (D, 3)$
— L : barycentre de $(D, -2), (A, 3)$

2. Démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme de centre O.

Exercice 14 – ***(Barycentre d'un triangle)***
Dans un triangle ABC, soit G le centre de gravité.

1. Montrer que G est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$.
2. Exprimer $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Exercice 15 – ***(Barycentre sur une droite)***
Soit A, B, C trois points alignés, avec C entre A et B, tels que $AC = 4$, $CB = 6$. Trouver le barycentre G du système $(A, 2), (B, 3), (C, 5)$.

Exercice 16 – ***(Construction géométrique)***
Soit A et B deux points distincts, et G le barycentre de $(A, 5), (B, 2)$. Construire G à l'aide de la méthode du parallélogramme.

Exercice 17 – ***(Barycentre et rapport vectoriel)***
Soit A, B, C trois points non alignés. Trouver les réels α, β, γ tels que C soit le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ avec $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$.

Exercice 18 – ***(Propriété des diagonales)***
Dans un quadrilatère $ABCD$, montrer que le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ est le barycentre du système $(A, 1), (C, 1), (B, 1), (D, 1)$.

Exercice 19 – ***(Barycentre et coordonnées)***
Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, et $C(-2, 4)$. Trouver les coordonnées du barycentre G du système $(A, 2), (B, -1), (C, 3)$.

Exercice 20 – ***(Barycentre et parallélogramme)***
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit P le barycentre de $(A, 2), (C, 3)$ et Q le barycentre de $(B, 2), (D, 3)$. Montrer que PQ est parallèle à $[AC]$.

Exercice 21 – ***(Barycentre d'un segment)***
Soit A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Montrer que C est le barycentre de $(A, 3), (B, 2)$.

Exercice 22 – ***(Propriété des milieux)***
Dans un triangle ABC, soient I, J, K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer que le barycentre de $(I, 1), (J, 1), (K, 1)$ coïncide avec le centre de gravité de ABC.

Exercice 23 – ***(Barycentre et distances)***
Soit A et B deux points tels que $AB = 8$. Trouver le point G barycentre de $(A, 1), (B, -2)$ et calculer les distances AG et BG.

Exercice 24 – ***(Barycentre dans un quadrilatère)***
Dans un quadrilatère $ABCD$, soit G le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Exercice 25 – ***(Construction avec rapports)***
Soit A et B deux points distincts. Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}$ en utilisant la méthode des parallèles.

Exercice 26 – ***(Barycentre et alignement)***
Soit A, B, C trois points alignés. Si G est le barycentre de $(A, 2), (B, -1), (C, 3)$, montrer que G est sur la droite (ABC).

Exercice 27 – ***(Barycentre d'un triangle équilatéral)***
Dans un triangle équilatéral ABC, soit G le centre de gravité. Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
