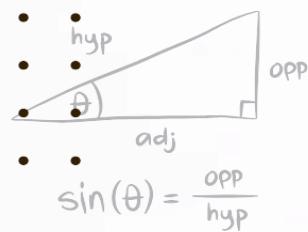


Mathosphère

Série d'exercices sur la trigonométrie

Niveau 1S1



Exercice 1 – (Identités et relations trigonométriques)

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1 + \cos 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|.$$

2. Démontrer que :

$$8 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{12} = 1.$$

3. L'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$ possède deux racines x_1 et x_2 .

Soient α et β deux réels tels que $x_1 = \tan \alpha$ et $x_2 = \tan \beta$.

Calculer $\tan(\alpha + \beta)$.

Exercice 2 – (Équations trigonométriques)

Résoudre dans I les équations suivantes :

$$1. \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad I = [0; 2\pi]$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$3. \sin(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad I = \mathbb{R}$$

$$4. 4 \tan^2 x - 2 = 0, \quad I = [-\pi; \pi[$$

$$5. 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \quad I = \mathbb{R}$$

$$6. 3 \sin^2 x + (2\sqrt{3} - 1) \sin x - \sqrt{3} = 0, \quad I = \mathbb{R}, \text{ puis } I = [0; 2\pi]$$

$$7. \cos x + \sin x = 1, \quad I = \mathbb{R}$$

$$8. \sqrt{2} \cos x + \sin x = 1, \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice 3 – (Inéquations trigonométriques)

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

$$1. \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 0, \quad I = [0; 2\pi]$$

$$2. \sin x - \cos x \geq 0, \quad I = \mathbb{R}$$

$$3. \frac{1 - \cos x}{\sin x - \sqrt{2}} \geq 0, \quad I = [-\pi; \pi[$$

$$4. \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice 4 – (Relations dans un triangle)

Soit ABC un triangle.

1. Montrer que :

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \sin \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2}.$$

2. En déduire que :

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}.$$

Exercice 5 – (Pentagone régulier)

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

1. En utilisant la relation :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0},$$

montrer que :

$$(a) 1 + 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} \right) = 0$$

$$(b) \text{En déduire les valeurs exactes de } \cos \frac{3\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{6\pi}{5}.$$

Exercice 6 – (Expression et équation trigonométrique)

1. Exprimer $\sin 4x$ en fonction de $\sin x$.

2. On considère l'équation (E) :

$$\sin 4x + 3 \cos 2x = 0.$$

(a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation :

$$8 \sin^4 x - 12 \sin^2 x + 3 = 0.$$

(b) Résoudre (E) puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 7 – (Identités trigonométriques)

Démontrer les égalités suivantes :

$$1. (1 + \sin x - \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 - \cos x)$$

$$2. \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$3. \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$4. \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 - \cos x + \sin x} = \frac{\sin x}{2}$$

$$5. \sin 4x = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

Exercice 8 – (Loi des sinus)

Soit ABC un triangle avec $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, et les angles opposés \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} .

1. En utilisant une projection orthogonale dans le triangle ABC , montrer que :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}.$$

2. En appliquant le même raisonnement dans une autre configuration, compléter la démonstration pour établir :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Exercice 9 – (Équations trigonométriques simples)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$
2. $\tan x = -1$
3. $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 10 – (Inéquations trigonométriques)

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(x - \frac{\pi}{6}) \leq 0$
3. $2 \sin x + 1 > 0$

Exercice 11 – (Systèmes trigonométriques)

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \sin x = \cos y \\ \sin(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 12 – (Équations avec arguments multiples)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sin(3x) = \sin x$
2. $\cos(2x) + \cos x = 0$
3. $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

Exercice 13 – (Inéquations combinées)

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ les inéquations suivantes :

1. $\sin x + \cos x \leq 1$
2. $\tan x \geq 1$

Exercice 14 – (Identités trigonométriques)

Démontrer les égalités suivantes :

1. $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$
2. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

Exercice 15 – (Équations quadratiques trigonométriques)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
2. $3 \sin^2 x - 2 \sin x = 0$

Exercice 16 – (Applications géométriques)

Dans un triangle ABC , on donne $\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$.

1. Montrer que $\sin \hat{C} = \sin(\hat{A} + \hat{B})$.
2. En déduire une relation entre $\cos \hat{A}$ et $\cos \hat{B}$.

Exercice 17 – (Équations avec paramètres)

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation suivante admet-elle des solutions dans \mathbb{R} :

$$m \sin x + \cos x = 2$$

Exercice 18 – (Inéquations avancées)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\sin(2x) \geq \cos(2x)$
2. $\sqrt{2} \sin x + \cos x \leq 1$

Exercice 19 – (Expressions trigonométriques)

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\sin x$ ou $\cos x$:

1. $\sin 3x$
2. $\cos 2x - \sin 2x$

Exercice 20 – (Systèmes dans un triangle)

Dans un triangle ABC , résoudre le système suivant pour \hat{A} et \hat{B} :

$$\begin{cases} \sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \\ \hat{A} + \hat{B} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Exercice 21 – (Équations trigonométriques complexes)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sin x + \sin 2x = 0$
2. $\cos 3x = \cos x$

Exercice 22 – (Identités dans un polygone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O .

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^5 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0.$$

2. En déduire une relation pour les sinus correspondants.

Exercice 23 – (Inéquations trigonométriques)

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2 \cos^2 x - \sin x \leq 1$
2. $\sin x \leq \frac{1}{2} \cos x$