Mathosphère

Série d'exercices Sur les Suites Numériques

Niveau TS2

Exercice 1 – ***(Étude de suites)***

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 9, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3, \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6.$$

1. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_n > 0$.
   (c) Calculer, en fonction de n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, puis $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer les limites des suites (S_n) et (S'_n).
2. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = \ln(v_n)$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Calculer, en fonction de n, $S''_n = \sum\limits_{i=0}^{n} w_i$, puis déterminer la limite de (S''_n).
3. Calculer, en fonction de n, $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$. En déduire la limite de (P_n).

Exercice 2 – ***(Sommes de suites)***

On considère deux suites numériques définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3^n - 6n + 4}{3}, \quad v_n = \frac{3^n + 6^n - 4}{3}.$$

1. Soit $a_n = u_n - v_n$.
   — Montrer que la suite (a_n) est arithmétique.
   — Calculer $a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}$.
2. Soit $b_n = u_n + v_n$.
   — Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
   — Calculer $b_0 + b_1 + \cdots + b_{10}$.
3. En déduire les sommes :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} \quad \text{et} \quad v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}.$$

Exercice 3 – ***(Étude avancée d'une suite récurrente)***

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n \cdot u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. Montrer que $u_n^2 > u_{n-1}^2 + \frac{2}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. En déduire que $u_n^2 > 2\ln(n)$ pour tout $n \geq 2$.
4. En remarquant que $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{n^2 u_n^2}$, établir un encadrement de u_n^2 par deux fonctions asymptotiquement équivalentes. En déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.
5. Définir la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2\ln n}}$. Montrer que (v_n) admet une limite que l'on déterminera.
6. Peut-on en déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ converge ou diverge ? Justifier rigoureusement.

Exercice 4 – ***(Comparaison de suites et convergence)***

1. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :
$$U_n = \frac{1}{n^2}.$$
   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.
   (a) Calculer S_1, S_2 et S_3.
   (b) Démontrer que la suite (S_n) est croissante.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :
$$V_n = \frac{2}{n(n+1)}.$$
   On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$.
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1, \quad T_n = 2 - \frac{2}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (T_n) est majorée.
   (c) Démontrer que $\forall n \geq 1, \quad U_n \leq V_n$.
   (d) En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ.
3. On considère la suite (W_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :
$$W_n = S_n + \frac{1}{n}.$$
   (a) Démontrer que les suites (S_n) et (W_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire que (S_n) converge vers un nombre réel ℓ.

Exercice 5 – ***(Atténuation sonore et suites géométriques)***

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 1000 décibels.

Une plaque d'isolation phonique absorbe 45% de l'intensité du son.

Soit $f(n)$ l'intensité du son, mesurée en décibels, après la traversée de n plaques du type précédent. On a donc :

$$f(0) = 1000,$$

et $f(1)$ est l'intensité après la traversée d'une plaque, etc.

1. Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. Exprimer $f(n+1)$ en fonction de $f(n)$.
3. Reconnaître la nature de la suite $n \mapsto f(n)$.
4. La suite est-elle croissante ou décroissante ?
5. Déterminer le nombre minimal de plaques que doit traverser le son pour que son intensité soit inférieure ou égale au dixième de sa valeur initiale.

Exercice 6 – ***(Suite définie par récurrence, convergence et somme)***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Calculer les premiers termes de la suite : u_1, u_2, u_3.
2. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) (croissance, bornes, convergence...).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
7. Montrer que $S_n \leq n + 1$ et conclure sur la convergence ou la divergence de (S_n).

%

Exercice 7 – ***(Suites trigonométriques et convergence)***

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Calculer les valeurs approchées de u_1, u_2, u_{10} et u_{100} à 10^{-3} près.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe et déterminer sa valeur.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.
4. En déduire un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to \infty$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < n$.
6. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
