



Mathosphère

Série d'exercices Sur les Equations Différentielles

Niveau TS2

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

Exercice 1 – (*Équation différentielle avec condition initiale*)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = \cos(x).$$

Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 2 – (*Modélisation physique*)

Un objet est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. Sa vitesse $v(t)$, en m/s, satisfait l'équation :

$$v'(t) + kv(t) = g,$$

où $k > 0$ est une constante et g une constante positive.

1. Résoudre cette équation.
2. Déterminer la solution vérifiant $v(0) = 0$.
3. Étudier la limite de $v(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Interpréter.

Exercice 3 – (*Fonction exponentielle et tracé de courbe*)

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 3y = e^{2x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Trouver une solution particulière de l'équation complète.
3. En déduire l'ensemble des solutions.
4. Tracer la courbe représentative de la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 4 – (*Méthode de variation de la constante*)

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la méthode de variation de la constante :

$$y' + y = xe^{-x}.$$

Exercice 5 – (*Équation différentielle avec logarithme*)

Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$xy' + y = \ln x.$$

1. Identifier la nature de l'équation.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire la solution générale.

Exercice 6 – (*Théorème des accroissements finis et EDO*)

Soit f définie et dérivable sur $[0; 1]$ telle que $f'(x) + f(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1]$.

1. Déterminer l'expression de f .
2. En déduire $f(1)$ en fonction de $f(0)$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f(1) - f(0) = f'(c)$.
4. Conclure sur la valeur de c .

Exercice 7 – (*Application avec trigonométrie*)

Résoudre l'équation :

$$y' + 2y = \sin(2x).$$

Puis déterminer la solution particulière telle que $y(0) = 0$. Tracer la courbe sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 8 – (*Croissance et décroissance de solutions*)

Considérons l'équation différentielle :

$$y' - y = -e^x.$$

1. Résoudre l'équation.
2. Étudier le signe de la dérivée de la solution y vérifiant $y(0) = 1$.
3. En déduire la croissance ou décroissance de cette solution.

Exercice 9 – (*Problème inversé – retrouver l'EDO*)

On donne que la fonction $y(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

1. Calculer $y'(x)$.
2. En déduire les fonctions $a(x)$ et $b(x)$.

Exercice 10 – (*Étude complète d'une EDO – niveau avancé*)

On considère l'équation :

$$y' + y = x^2.$$

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Trouver une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
3. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 0$.
4. Étudier le signe de cette solution sur \mathbb{R} .