Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes September 2019

20 September – 23 September 2019

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
4. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
5. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
6. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
7. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
9. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
10. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
11. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
12. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
13. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
14. Pada $\triangle ABC$:
    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi garis BC menjadi dua bagian yang sama panjang.
    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.
    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.
    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

(e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

(f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

(g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen BC, CA, dan AB.

15. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

16. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

17. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

18. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

19. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

20. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

21. Rata-rata kuadratik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Berapakah jumlah semua bilangan bulat n yang memenuhi $2^n = n^2$?

2. Diberikan sebuah segitiga siku-siku ABC di A dengan $AB = 20$ dan $AC = 15$. Misalkan D ialah kaki tinggi dari A ke BC, E kaki tinggi D ke AB dan F kaki tinggi D ke AC. Misalkan $DE + DF$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan $FPB(p, q) = 1$. Hitunglah nilai dari $100p + q$

3. Misalkan suku pertama dari sebuah barisan aritmetika adalah 50, selisih antar kedua suku berurutan di barisan ini adalah bilangan bulat. Jika diketahui suku kesebelas barisan ini adalah bilangan positif yang tak lebih dari 200, berapakah jumlah dari semua suku kesebelas yang mungkin?

4. Misakan 1 set kartu bridge dan 1 joker ditumpuk diatas meja dan diambil 1 per 1 dari paling atas. Jika peluang terambil joker tetapi tidak ada bilangan prima yang muncul sebelumnya adalah $\frac{p}{q}$ dimana p dan q adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai $p + q$

5. Misalkan $ABCD$ merupakan sebuah persegi dengan panjang sisi 4. Misalkan E, F ialah titik tengah BC dan AB dan G ialah titik tengah DF. BG memotong AE di J dan CF di I. AE memotong CF di H. Jika luas HIJ sama dengan x, berapakah nilai dari $\lfloor 100x \rfloor$?

6. $\frac{13}{24}$ dalam desimal dapat direpresentasikan sebagai 0.353535... dalam basis-k (untuk suatu bilangan asli k). Berapakah nilai k ?

7. Di suatu kelas terdapat 57 murid. Diketahui bahwa banyak cara memilih 2 murid cowok adalah 3 kali banyaknya cara memilih 2 murid cewek. Tentukan berapa banyak murid cowok yang harus dikeluarkan dari kelas sehingga banyaknya cara memilih 2 murid cowok sama dengan banyaknya cara memilih 2 murid cewek.

8. Diberikan barisan bilangan real $a_1, a_2, ..., a_n$ yang memenuhi

$$a_n - a_{n-1} + a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 0 \text{ untuk } n \geq 3$$

   Jika $a_1 = 1$ dan $a_2 = 40$, tentukan nilai dari $a_{20} - 20a_{19}$

9. Diberikan sebuah fungsi yang berlaku untuk setiap x bilangan real sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[2019]{1 - x^{2019}}}$$

   Tentukan 3 digit terakhir dari

$$(f(f(...(f(3))...)))^{2019}$$

   dengan f muncul sebanyak 2019 kali

10. Diketahui barisan $X_{n\geqslant 0}$ memenuhi $X_0 = a$ dimana $|a| \leq 1$, dan $X_n = 16X_{n-1}^5 - 20X_{n-1}^3 + 5X_{n-1} \forall n \geqslant 1$. Misalkan k adalah banyaknya nilai a berbeda sehingga $X_{2019} = 0$. Berapakah sisa k ketika dibagi oleh 8?

11. Misalkan X merupakan banyaknya barisan $a_1, a_2, ..., a_{10}$ dengan $a_i \in \{0, 1, 2\}$ $\forall i = 1, 2, ..., 10$, serta untuk setiap $i = 1, 2, ..., 9$, jika $a_i = 1$, maka $a_{i+1} \neq 2$. Tentukan nilai dari X $(mod\ 1000)$.

12. Diagonal segiempat $ABCD$ berpotongan di X dan membentuk sudut α. O_1, O_2, O_3,dan O_4 adalah berturut-turut pusat lingkaran luar $\Delta ABX, \Delta BCX, \Delta CDX$, dan ΔDAX. Jika $tan\ \alpha = 11$. Perbandingan luas $ABCD$ dan luas $O_1O_2O_3O_4$ dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan asli relatif prima, tentukan nilai $p - q$.

13. Diberikan sebuah $\triangle ABC$ dengan sisi-sisi a, b, c. Jika nilai $a^2 + b^2 + c^2 = 2016$ dan $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = 14$. Tentukan luas $\triangle ABC$.

14. Definisikan untuk $n \geqslant 2$, $f(n)$ sebagai faktor prima terkecil dari n dan $\tau(n)$ sebagai banyak faktor dari n. Kita sebut $n \geqslant$ keren jika memenuhi ketaksamaan $\tau(n)+\phi(n)+f(n) \geqslant n$. Misal k merupakan hasil dari penjumlahan semua bilangan keren komposit kurang dari 563. Berapakah penjumlahan dari semua digit dari k?

15. Tentukanlah nilai minimum dari ekspresi

$$\lfloor \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_1} \rfloor + \lfloor \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_2} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_9}{a_{10}} \rfloor$$

, dengan $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ bilangan real positif.

16. Untuk sebuah 7-tupel (a, b, c, d, e, f, g), kalikan setiap dua bilangan bersebelahan di permutasi tersebut, lalu jumlahkan semua bilangan yang didapat. Bilangan ini disebut sebagai *jumlah kali* dari (a, b, c, d, e, f, g). Sebagai contoh, jumlah kali dari $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ adalah $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots 6 \cdot 7 = 112$.

    Genkun menuliskan semua permutasi yang mungkin dari $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, dan menghitung jumlah kali dari masing-masing permutasi tersebut. Kemudian Genkun menjumlahkan semua bilangan yang telah ia dapatkan. Berapa nilai yang akan diperoleh Genkun pada akhirnya?

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Budi punya sebuah papan catur berukuran 8×8 dan takhingga banyaknya tiap jenis bidak catur. Aturan gerak bidak catur dapat dilihat di tautan ini : https://id.wikipedia.org/wiki/Catur.

   a) Budi ingin meletakkan kuda sebanyak-banyaknya di papan catur sehingga tidak ada kuda yang bisa menyerang kuda lain. Berapa banyak kuda maksimal yang dapat diletakkan di papan catur Budi? (Hint : Perhatikan warna papan catur dan pergerakan kuda. Anda harus membuktikan dua hal, jawaban anda dapat dikonstruksi dan semua angka di jawaban anda tidak memungkinkan).

   b) Budi ingin meletakkan pion sebanyak-banyaknya di papan catur sehingga tidak ada pion yang bisa menyerang pion lain. Berapa banyak pion maksimal yang dapat diletakkan di papan catur Budi?

   c) Budi ingin meletakkan raja sebanyak-banyaknya di papan catur sehingga tidak ada raja yang bisa menyerang raja lain. Berapa banyak raja maksimal yang dapat diletakkan di papan catur Budi?

   d) Budi bosan dengan set caturnya. Ia membuat sebuah bidak baru, yaitu *pelompat*. Sebuah pelompat dapat menyerang kotak yang ada di tepat dua kotak ke arah lurus (seperti benteng). Sebagai contoh, pelompat di c3 bisa menyerang kotak c5, c1 e3 dan a3. Pelompat, seperti namanya, dapat melompati bidak lain untuk menyerang. Budi ingin meletakkan pelompat sebanyak-banyaknya di papan catur sehingga tidak ada pelompat yang bisa menyerang pelompat lain. Berapa banyak pelompat maksimal yang dapat diletakkan di papan catur Budi?

2. Diberikan segitiga ABC dengan titik D, E, dan F berturut-turut merupakan titik tengah AB, BC, dan AC. Misalkan titik P adalah sembarang titik di segmen DF, dimana $P \neq D$ dan $P \neq F$. Diketahui bahwa garis BP memotong garis AC dan EF berturut-turut di titik S dan Q, sementara garis CP memotong garis AB dan DE di titik T dan R. Selanjutnya, definisikan $[XYZ]$ adalah luas segitiga XYZ. Buktikan bahwa
$$[AQS] + [ART] = [BPT] + [CPS]$$

3. Misalkan x, y, z ialah bilangan real nonnegatif. Buktikan bahwa
$$\sqrt{x^3 + y^3 + 1} + \sqrt{y^3 + z^3 + 1} + \sqrt{z^3 + x^3 + 1} \geq 2 + \sqrt{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 1}$$
dan tentukan semua triplet (x, y, z) sehingga kesamaan terjadi.

4. Tentukan semua (p, q, r, s) prima sehingga $\sqrt{p^2 + q} + \sqrt{r^2 + s}$ juga prima.