Задача 4. Длина кривой

Источник:	основная
Имя входного файла:	`input.txt`
Имя выходного файла:	`output.txt`
Ограничение по времени:	разумное
Ограничение по памяти:	разумное

В компьютерной графике и геометрическом моделировании активно используются NURBS-кривые. Чтобы уметь с ними работать, надо хорошо понимать, как работают полиномиальные сплайны. В этой задаче мы будем иметь дело с кубическими сплайновыми кривыми — это лишь простый частный случай из класса NURBS-кривых. От вас требуется найти длину заданной кривой.

Параметрическая кривая в 3D-пространстве определяется тремя координатными функциями $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Здесь t — это какой-то абстрактный параметр (например время), а значения функций x, y, z определяют координаты точки в 3D-пространстве. У кривой есть также интервал определения $[a, b]$. Если плавно увеличивать значение t от $t = a$ (начало) до $t = b$ (конец), то при этом точка с координатами $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ пройдёт по всей заданной кривой, без остановок и разворотов.

В этой задаче вам дана кубическая сплайновая кривая. Это означает, что интервал её определения разбивается на N подынтервалов, которые называются *спанами*. Если рассматривать кривую на любом отдельном спане, то координатные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ являются кубическими многочленами от t. При этом на каждом спане эти кубические многочлены свои, и между спанами могут не совпадать. Гарантируется, что многочлены на соседних спанах согласованы, так что кривая непрерывная — без скачков и разрывов.

Нужно найти длину заданной кривой в 3D пространстве.

Формат входных данных

В первой строке дано одно целое число N — количество спанов ($1 \leqslant N \leqslant 1\,000$). Далее идут описания N спанов в порядке увеличения параметра t.

Описание каждого спана начинается с двух чисел l и r, которые определяют подынтервал. То есть приведённые далее многочлены действуют лишь при значениях параметра $t \in [l, r]$. Разумеется, выполняется $l < r$ и число l совпадает с числом r предыдущего спана.

Далее в описании спана задаются функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, каждая функция задана многочленом в отдельной строке. Каждый многочлен $p(t)$ задан четырьмя числами c_0, c_1, c_2, c_3 и определяется так:

$$p(t) = c_0 + c_1(t - l) + c_2(t - l)^2 + c_3(t - l)^3$$

Обратите внимание, что параметр t сдвигается на l влево перед тем, как вычисляется кубический многочлен.

Все числа в описании спана вещественные. Числа будут лежать в разумных пределах, спаны будут иметь разумную длину, и в целом кривая будет хорошо себя вести =) Гарантируется, что соседние спаны непрерывно соединяются, то есть дыр между спанами нет.

Формат выходных данных

Нужно вывести одно вещественное число — длину заданной кривой. Рекомендуется выводить число с максимальной точностью.

Абсолютная или относительная ошибка вашего ответа **не** должна превышать 10^{-8}.

Пример

input.txt	output.txt
3 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 5 0 0 0 1 1.5 1 0 6 -4 1 3 0 -4 5 0 0 0 1.5 4 2 0.4 0 0 2 0 0 0 5 0 0 0	3.54886798803189495999

Пояснение к примеру

На отрезке $t \in [0, 1]$ кривая определяется функциями:

$$x(t) = 1;\ y(t) = t;\ z(t) = 5$$

На отрезке $t \in [1, \frac{3}{2}]$ действуют функции:

$$\begin{aligned} &x(t) = 1 + 6(t-1)^2 - 4(t-1)^3; \\ &y(t) = 1 + 3(t-1) - 4(t-1)^3; \\ &z(t) = 5 \end{aligned}$$

На отрезке $t \in [\frac{3}{2}, 4]$ координаты изменяются так:

$$x(t) = 2 + \frac{4}{10}\left(t - \frac{3}{2}\right);\ y(t) = 2;\ z(t) = 5$$

Комментарий

Чтобы решить задачу, нужно заметить, что длина кривой вычисляется как интеграл:

$$L = \int\limits_{t=a}^{b} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

Здесь $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ — это производные координатных функций.

Вместо того, чтобы пытаться проинтегрировать это выражение математически, лучше вычислить интеграл численно. Для этого рекомендуется использовать правило Симпсона — оно даёт хорошую точность. Чтобы его применить, достаточно научиться вычислять подынтегральное выражение при любом значении t.

Учтите, что правило Симпсона даёт хорошую точность только на гладких функциях, а на стыке спанов производные кривой могут иметь скачок. По этой причине следует вычислить интеграл по правилу Симпсона отдельно на каждом спане, а потом сложить результаты.