Проблема гашения вынужденных колебаний упругих динамических систем в задачах вычислительной аэродинамики

И.Е. Михайлов, Н.А. Таран

On the solution of a beam oscillation deadening problem in applications of the computational aerodynamics

I.E. Mihailov[1], N.A. Taran[2]

[1] *Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow;* mikh igor@mail.ru
[2] *"MAI" – Rusian State Technological University named S.E.Orzhonikidze, Moscow;* n1cktaran@rambler.ru

Целью данного доклада является исследование управляемости упругих систем, описываемых гиперболическими по Петровскому уравнениями четвертого порядка. Рассматривается задача гашения колебаний балки с помощью одной или нескольких управляющих актюаторов. Такие задачи гашения колебаний актуальны прежде всего при моделировании и разработке трубопроводов ракет-носителей и космических антенн.

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем начали интенсивно развиваться в 70-х годах XX века. Наиболее значимой была работа Д. Лагнесса, в которой исследовалась возможность гашения поперечных колебаний струны или балки, описываемых начально-краевой задачей. Так, в частности, колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t,x), (t,x) \in \Pi = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\} \qquad (1.1)$$

Начальные отклонение и скорость перемещения балки

$$u|_{t=0} = h_0(x), u_t|_{t=0} = h_1(x), 0 \le x \le l \qquad (1.2)$$

мы будем рассматривать как начальные возмущения.

Будем искать управляющую функцию $g(t,x) \in L_2(\Pi)$, переводящую балку из состояния (1.2) в состояние

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, 0 \le t \le T \qquad (1.3)$$

за оптимальное время T, предполагая что $h_0(x) \in W, h_1(x) \in L_2(\Pi)$.

Решение задачи (1.1) – (1.3) рассматривается обобщенное (т.е. выполняется для интегрального тождества), и для него определен интеграл энергии

$$E(t) = \int_0^l \left[u_t^2(t,x) + a^4 u_{xx}^2(t,x)\right] dx \qquad (1.4)$$

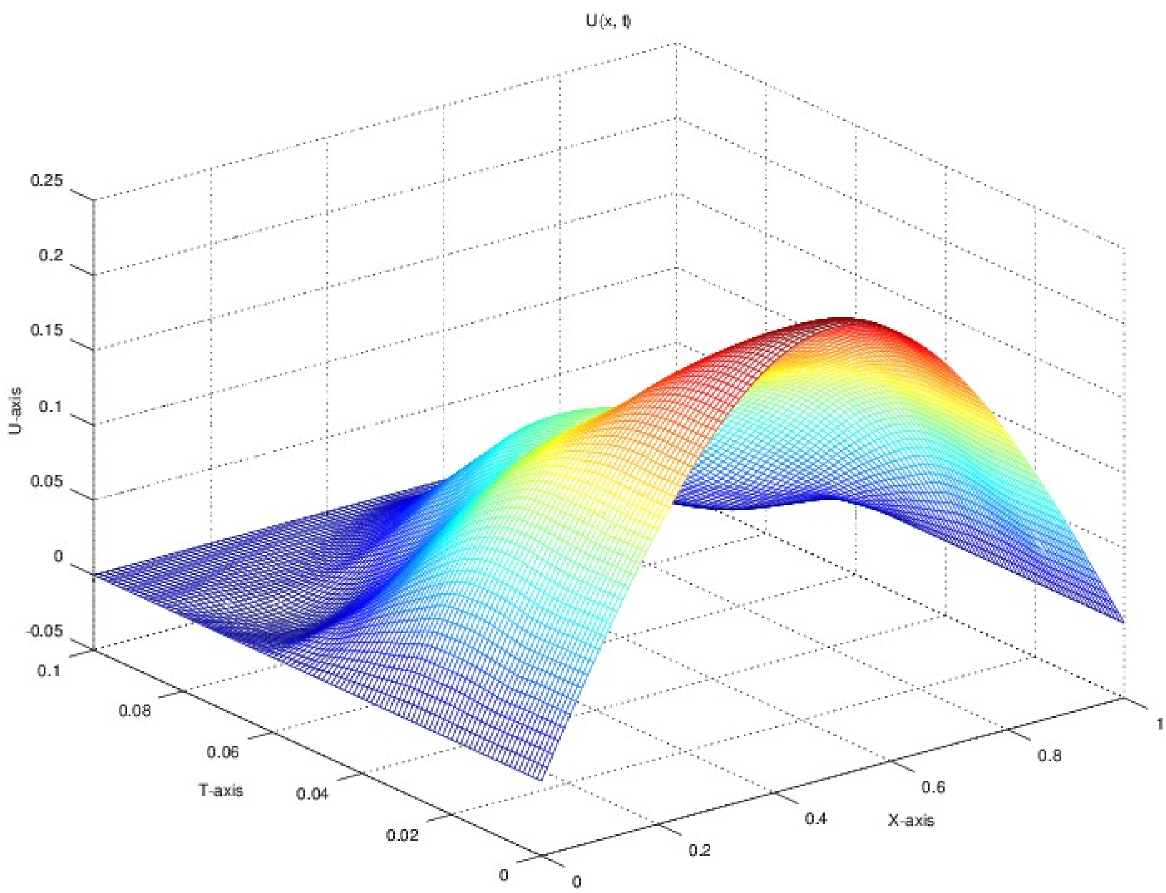
который при $g(t,x) \equiv 0$ тождественно равен

$$E(0) = \|h_0(x)\|^2_{W(0,l)} + \|h_1(x)\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (1.5)$$

Д. Рассел предложил использовать только одну управляющую функцию, т.е. взять $g(t,x) = w(t)f(x), 0 \le x \le l, 0 < t$, где $f(x)$ - некоторая заданная функция. В данном исследовании мы задаем управляющую функцию следующим образом

$$g(t,x) = w(t)\delta(x - x_0), x_0 \in (0,l) \qquad (1.6)$$

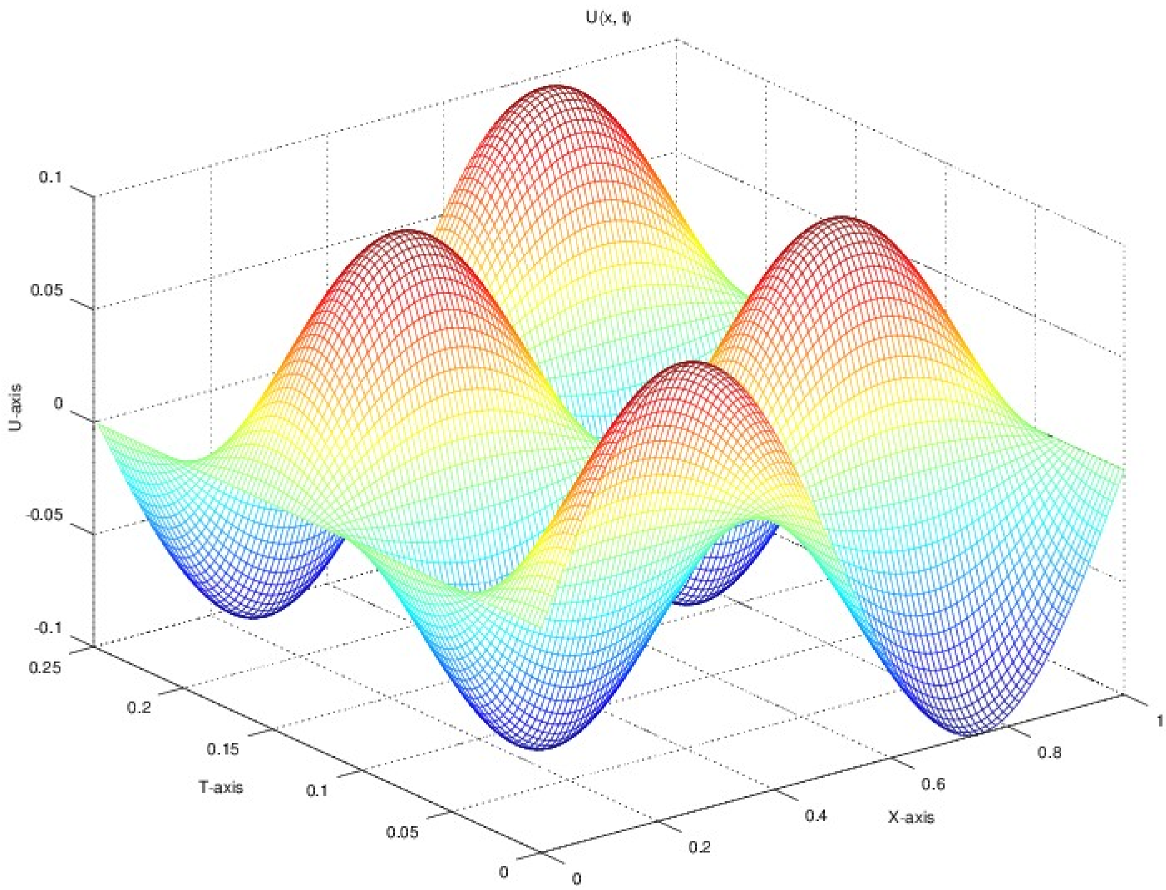
В качестве примера мы зададим начальное возмущение, как $h_0(x) = 0.25\sin(\pi x), h_1(x) = 0, x_0 = 0.5$ без начальной скорости перемещения балки. Входные параметры $l = 1, a = 1$, размер сетки $k \times n = 64 \times 160$, следовательно, $h_x = 0.006250, h_t = 0.0015625$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $E(T) \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$. На рисунке (1) изображен процесс изменения значений функции $u(x,t)$ при гашении первоначального возмущения балки.



Таким образом, время, требуемое для гашения, равно $T \approx 0.1$

Для иллюстрации теперь мы примем начальное отклонение $h_0(x) = 0.1\sin(2\pi x), h_1(x) = 0, x_0 = 0.5$. Актюатор, установленный в точку $x_0 = 0.5$ не может погасить колебания балки, поскольку в самой точке $x_0 = 0.5$

колебаний не происходит, и функция управления принимает вид $w(t) \equiv 0$. Это наглядно видно на рис (2)

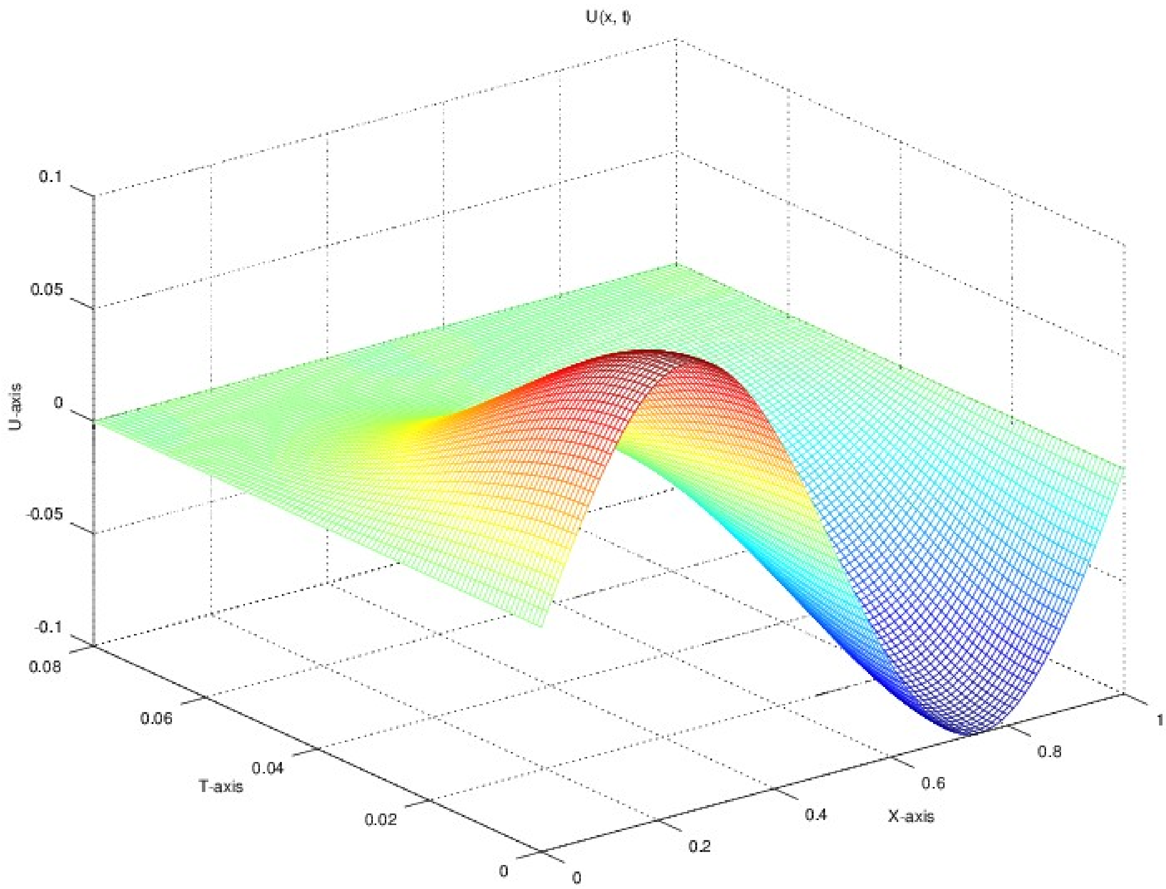


В данном исследовании мы доказываем, что использование нескольких точечных актюаторов, помещенных в точки максимума амплитуды начального возмущения позволяет решить задачу. Функция $g(t,x)$ принимает вид

$$g(t,x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\delta(x - x_i) \qquad (1.7)$$

где x_i - точки неподвижных актюаторов и $\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$ $w_i(t)$ - управляющие функции.

Процесс гашения колебаний представлен на рис (3)



Таким образом, при использовании нескольких точечных актюаторов задача гашения колебаний балки решается за конечное время.

Целью данной работы является разработка метода демпфирования балки конечной ширины с помощью нескольких точечных статичных актюаторов, а также рассмотрение случая, когда на управляющую функцию накладываются ограничения. Последний случай является более приближенным к практической реализации, т.к. нам известно, что при уменьшении T нахождение прибиженного оптимального управления, строго говоря, лишь усложняется, но сходимость методов минимизации при этом не достигается. Однако также в этом случае амплитуда колебаний каждой из управляющих функций начинает неконтролируемо расти, и следовательно возникает необходимость проведения дополнительных расчетов для каждой из управляющих функций. Для решения задачи гашения задачи гашения колебаний с условным управлением используется метод штрафных функций с использованием метода Марквардта для решения соответствующей задачи поиска безусловного минимума.