

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 17  
2016  
№ 9

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

## Редакционный совет:

CHYI-YEU LIN, PhD, prof.  
GROUMPOS P. P., prof.  
JEN-HWA GUO, PhD, prof.  
KATALINIC B., PhD, prof.  
SUBUDHI B., PhD, prof.  
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.  
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.  
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.  
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.  
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.  
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.  
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

## Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

## Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.  
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.  
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

## Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

## Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.  
АНТОНОВ Б. И.  
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.  
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.  
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.  
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д. т. н., доц.  
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.  
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.  
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.  
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.  
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.  
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс. н., с. н. с.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.  
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.  
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

## Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Фуртат И. Б.** Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления . . . . . 579

**Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А.** Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами . . . . . 587

### ЭРГАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

**Сергеев С. Ф.** Нейроадаптивные биоморфные интерфейсы в эргатических системах: проблемы и решения . . . . . 599

**Лохин В. М., Манько С. В., Александрова Р. И., Романов М. П., Диане С. А. К.** Принципы построения и программно-алгоритмическое обеспечение человеко-машинного интерфейса для автономных роботов и мультиагентных робототехнических систем . . . . . 606

### ЭЛЕКТРОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

**Жуков А. А., Аджибеков А. А., Кудров М. А., Зудов К. А., Гелиев А. В., Веселаго В. Г.** Метаматериалы в бортовых беспроводных системах приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств . . . . . 615

**Неусыпин К. А., Сизых В. В., Шахтарин Б. И., Шевцев В. А.** Анализ системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при наличии аддитивных гармонических помех и широкополосного шума методом кумулянтов . . . . . 621

### УПРАВЛЕНИЕ В АВИАКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 . . . . . 633

**Шибанов Г. П.** Автоматизация процесса защиты газотурбинных двигателей от пожара . . . . . 644

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

### Editorial Council:

ALIEV T. A., prof., Azerbaijan, Baku  
 ANSHAKOV G. P., Russia, Samara  
 BOLOTNIK N. N., Russia, Moscow  
 CHENTSOV A. G., Russia, Ekaterinburg  
 CHERNOUSKO F. L., Russia, Moscow  
 CHYI-YEU LIN, PhD, Prof., Taiwan, Taipei  
 FEDOROV I. B., Russia, Moscow  
 GROUMPOS P. P., prof., Greece, Patras  
 JEN-HWA GUO, PhD, Prof., Taiwan, Taipei  
 KALYAEV I. A., Russia, Taganrog  
 KATALINIC B., PhD, Prof., Austria, Vienna  
 KRASNEVSKIY L. G., Belarus, Minsk  
 KUZNETSOV N. A., Russia, Moscow  
 LEONOV G. A., Russia, S.-Peterburg  
 MATVEENKO A. M., Russia, Moscow  
 MIKRIN E. A., Russia, Moscow  
 PESHEKHONOV V. G., Russia, S.-Peterburg  
 REZCHIKOV A. F., Russia, Saratov  
 SCHERBATYUK A. F., Russia, Vladivostok  
 SEBRYAKOV G. G., Russia, Moscow  
 SIGOV A. S., Russia, Moscow  
 SOJFER V. A., Russia, Samara  
 SOLOMENTSEV Yu. M., Russia, Moscow  
 SOLOVJEV V. A., Russia, Moscow  
 SUBUDHI B., PhD, Prof., India, Sundargarh  
 VASILYEV S.N., Russia, Moscow  
 YUSUPOV R. M., Russia, S.-Peterburg

### Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Russia, Moscow

### Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Russia, Moscow  
 PUTOV V. V., Russia, S.-Peterburg  
 YUSCHENKO A. S., Russia, Moscow

### Responsible Secretary:

BEZMEENOVA M. Yu., Russia, Moscow

### Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Russia, Moscow  
 ANTONOV B. I., Russia, Moscow  
 ARSHANSKY M. M., Russia, Tver  
 BUKOV V. N., Russia, Zhukovsky  
 ERMOLOV I. L., Russia, Moscow  
 FILARETOV V. F., Russia, Vladivostok  
 FRADKOV A. L., Russia, S.-Peterburg  
 FURSOV V. A., Russia, Samara  
 GRADETSKY V. G., Russia, Moscow  
 ILYASOV B. G., Russia, Ufa  
 IVCHENKO V. D., Russia, Moscow  
 KOLOSOV O. S., Russia, Moscow  
 KOROSTELEV V. F., Russia, Vladimir  
 LEBEDEV G. N., Russia, Moscow  
 LOKHIN V. M., Russia, Moscow  
 PAVLOVSKY V. E., Russia, Moscow  
 PROKHOROV N. L., Russia, Moscow  
 PSHIKHOPOV V. Kh., Russia, S.-Peterburg  
 RAPOPORT E. Ya., Russia, Samara  
 SERGEEV S. F., Russia, S.-Peterburg  
 VITTIKH V. A., Russia, Samara  
 YUREVICH E. I., Russia, S.-Peterburg

### Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V., Russia, Moscow

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Furtat I. B.** Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal . . . . . 579
- Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A.** The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems . . . . . 587

### ERGATIC CONTROL SYSTEMS

- Sergeev S. F.** Biomorphic Neuroadaptive Interfaces in the Ergatic Systems: Problems and Solutions . . . . . 599
- Lokhin V. M., Manko S. V., Alexandrova R. I., Romanov M. P., Diane S. A. K.** Man-Machine Interface for Autonomous Robots and Multi-Agent Robotic Systems . . . . . 606

### ELECTRONIC COMPONENTS OF MECHATRONIC SYSTEMS

- Zhukov A. A., Adzhibekov A. A., Kudrov M. A., Zudov K. A., Geliev A. V., Veselago V. G.** Metamaterials in the Onboard Wireless Reception Systems and Conversion of the Microwave Energy of the Mobile Autonomous Devices . . . . . 615
- Neusypin K. A., Sizykh V. V., Shakhhtarina B. I., Shevtsev V. A.** Cumulant Analysis of the Costas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise . . . . . 621

### CONTROL IN AEROSPACE SYSTEMS

- Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2 . . . . . 633
- Shibanov G. P.** Process of Automation the Protect Gas-Turbine Engine from the Surge . . 644

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

(Bobtsov A. A. Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 363–368).

4. Bobtsov A. A., Shavetov S. V. *Upravlenie po vyhodu lineinym parametricheski neopredelennym objektom v usloviyah vozmushhajushhih vozdeystvii i neuchtennoj dinamiki* (Output control of linear parametrically uncertain plant under disturbances and unaccounted dynamics), *Nauchno-tehnicheskij vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2011, no. 1 (71), pp. 33–39.

5. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija nestacionarnym lineinym objektom s kompensaciej vozmushhenij* (An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation), *Izv. RAN. TiSU*, 2008, no. 4, pp. 33–40 (Tsykunov A. M. An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 527–534).

6. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija lineinymi mi-cheskimi objektami po vyhodu* (Algorithm for linear robust control of chemical facilities to overcome), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2010, no. 3, pp. 9–14.

7. Lozier J. C. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems, *IRE Trans. on Automatic Control*, 1956, May, pp. 19–39.

8. Kapasouris P., Athans M. Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies, *American Control Conf. Boston*, 2004, pp. 1579–1584.

9. Edwards C., Postlethwaite I. Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes, *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 199–210.

10. Monopoli R. Adaptive Control for Systems for Hard Saturation, *14th IEEE Conf. on Decision and Control*. Houston, TX, 1975, pp. 841–842.

11. Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H. Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1672–1678.

12. Schwager M., Annaswamy A. M. Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains, *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville*, Spain, 2005, pp. 783–788.

13. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Robustnoe upravlenie nestacionarnymi nelineinymi strukturno neopredelennymi objektami* (Robust control of unsteady nonlinear structurally undefined objects), *Problemy Upravlenija*, 2008, no. 5, pp. 2–7.

14. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Adaptivnoe upravlenie objektami s neizvestnoj otnositel'noj stepen'ju* (Adaptive control of plants of unknown relative degree), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2010, no. 6, pp. 109–118. (Furtat I. B., Tsykunov A. M. Adaptive control of plants of unknown relative degree, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 6, pp. 1076–1084).

15. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 557–569.

16. Narendra K. S., Valavani L. S. Stable Adaptive Controller Design — Direct Control, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 570–583.

УДК 681.51

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

**А. Ж. Атамуратов**, канд. техн. наук, вед. спец., goofydog@mail.ru,

ООО Пепсико Холдинг,

**И. Е. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр., mikh\_igor@mail.ru,

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,

**Л. А. Муравей**, д-р физ.-мат. наук, проф., l\_muravey@mail.ru,

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

## Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами<sup>1</sup>

Рассматривается классическая проблема моментов, возникающая в задачах управления упругими динамическими системами, моделируемыми уравнениями в частных производных четвертого порядка, гиперболическими по Петровскому. Задача управления заключается в нахождении минимального времени, за которое можно погасить колебания, возникающие в системах вследствие начальных возмущений. Доказывается существование минимального значения времени и оптимального управления на примере гашения колебаний балок и пластин, являющихся типичными элементами различных механических конструкций, таких как трубопроводы, антенны и несущие элементы космических платформ. При этом время гашения колебаний и оптимальное управление найдено в явном виде. Для получения приближенных решений введены так называемые точечные движущиеся демпферы и стационарные узкие демпферы, упрощающие разработку вычислительных алгоритмов на основе метода редукции и координатного спуска.

**Ключевые слова:** гашение колебаний, тригонометрическая проблема моментов, ортогональные системы и базис Рисса, асимптотическая проблема моментов, стационарные и движущиеся демпферы, метод редукции, метод координатного спуска

### Введение

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем, таких как струны и мембраны, начали интенсивно развиваться в 70-х годах прошлого столетия. Наиболее значимой была работа Д. Лагнесса [1], в которой исследовалась возможность гашения поперечных колебаний струны

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00425).

$u(t, x)$ , описываемых следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{1}{2} u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = g(t, x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = h_0(x), \quad u_t|_{t=0} = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t, \quad (1.3)$$

где начальные данные  $h_0(x)$ ,  $h_1(x)$  рассматриваются как начальные возмущения, а функция  $g(t, x)$  — как

функция управления. При этом предполагается, что потенциал  $q(x)$  — непрерывная функция на  $[0, l]$  (заметим, что условия закрепления струны на концах (1.3) можно заменить на более общие условия  $\alpha_0 u + \beta_0 u_x|_{x=0} = \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=l} = 0$  при некоторых ограничениях на коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1$ ). Решение задачи (1.1)—(1.3) рассматривается обобщенное (т. е. выполняется для интегрального тождества), и для него определен интеграл энергии

$$E(t) = \int_0^l [u_t^2(t, x) + a^2 u_x^2(t, x)] dx,$$

который при  $g(t, x) \equiv 0$  тождественно равен

$$E(0) = \|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2,$$

где  $L_2(0, l)$  — пространство измеримых на  $(0, l)$  функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на промежутке  $(0, l)$ , а  $W_2^1(0, l)$  — соболевское пространство функций  $v(x)$  из  $L_2(0, l)$ , имеющих обобщенные производные  $v'(x) \in L_2(0, l)$ , и таких, что  $v(0) = v(l) = 0$ .

### Постановка задачи

Задача управления заключается в возможности перевести систему (1.1)—(1.3) из начального состояния (1.2) в произвольное состояние

$$u|_{t=T} = \tilde{h}_0(x), \quad u_t|_{t=T} = \tilde{h}_1(x).$$

Следуя Ж. Лионсу [2], данное свойство системы будем называть *строгой управляемостью*.

Задача гашения колебаний заключается в нахождении минимального времени  $T > 0$  такого, что для любых начальных возмущений  $h_0(x) \in W_2^1(0, l)$ ,  $h_1(x) \in L_2(0, l)$  найдется оптимальная управляющая функция  $g(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, l))$ , такая что

$$E(T) = 0, \quad (1.4)$$

или, что то же самое, в момент времени  $t = T$  решение задачи (1.1)—(1.3) принимает следующие значения:

$$u|_{t=T} = 0, \quad u_t|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.5)$$

Отметим, что для задачи Штурма—Лиувилля

$$-v_{xx} + q(x)v = \lambda v, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.6)$$

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (1.7)$$

хорошо известны собственные значения, образующие монотонную последовательность  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ , а отвечающие им собственные функции  $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_n(x), \dots$  образуют ортонормированный базис в  $L_2(0, l)$ . При этом

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{a\pi}{l}n + c_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

что позволяет разложить функции  $u(t, x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $h_0(x)$ ,  $h_1(x)$  в ряды Фурье по системе  $\{v_n(x)\}$ .

### Тригонометрическая проблема моментов

Выполнение условий (1.5) приводит нас к системе интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T g_n(t) \cos \omega_n t dt &= b_n, \\ \int_0^T g_n(t) \sin \omega_n t dt &= -a_n \omega_n, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

которую принято называть тригонометрической проблемой моментов. Здесь  $a_n, b_n, g_n(t)$  — коэффициенты Фурье разложения функций  $h_0(x), h_1(x), g(t, x)$  в ряды по ортонормированному базису  $\{v_n(x)\}$ .

Отметим, что фундаментальные результаты по исследованию разрешимости проблемы моментов для более сложных систем, чем тригонометрические, но конечномерных в  $L_p(0, T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , были получены М. Крейном, Н. Ахиезером, И. Глазманом, М. Красносельским [3—6] и др.

Что касается случаев, рассматриваемых в данной работе, они отличаются тем, что тригонометрическая система бесконечномерная в  $L_2(0, T)$ , и при этом время  $T$  является неизвестной величиной. Основу исследований составляет установление асимптотики соответствующих значений  $\omega_n$ , позволяющей использовать известные теоремы Н. Левинсона [7] и Р. Беллмана [8].

Продолжим исследование задачи Д. Лагнесса. Из асимптотики (1.8) вытекает существование положительного предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\omega_n} = \frac{l}{a\pi}$ . Полагая  $\frac{l}{a\pi} = \frac{T}{2\pi}$ , в силу теоремы Н. Левинсона [7] заключаем, что при

$$T = \frac{2l}{a} \quad (1.10)$$

тригонометрическая система  $\{\sin \omega_n t, \cos \omega_n t\}$  образует базис Рисса в  $L_2(0, T)$ , следовательно, для нее существует биортогональная в  $L_2(0, T)$  система функций  $\{\varphi_n(t), \psi_n(t)\}$ . Поэтому существует решение проблемы моментов (1.9) — оптимальное управление  $w(t) \in L_2(0, T)$ , такое что

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \omega_n \varphi_n(t) - b_n \psi_n(t)), \quad (1.11)$$

причем для него справедлива оценка

$$\|w(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \leq \text{const} (\|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2). \quad (1.12)$$

### Управление в подобласти

Д. Лагнессом также была решена задача гашения колебаний струны, если управление  $g(t, x)$  сосредото-

точено в произвольной области  $[\alpha, \beta]$ , т. е.  $g(t, x) \in L_2(0, T) \times [\alpha, \beta]$ . Эта задача эквивалентна проблеме моментов

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^T \int_\alpha^\beta g(t, x) \cos \omega_n t dx dt = -\beta_n, \\ & \int_0^T \int_\alpha^\beta g(t, x) \sin \omega_n t dx dt = \alpha_n \omega_n, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

В этом случае искомая функция

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 (\omega_n a_n \varphi_n(t) - b_n \psi_n(t)) v_n(x) \chi_{[\alpha, \beta]}(x), \quad (1.14)$$

где  $\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$  — характеристическая функция отрезка

$$[\alpha, \beta], \text{ а } A_n^2 = \left( \int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx \right)^{-1}, \text{ причем } \inf_n \int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx > 0,$$

так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx = \beta - \alpha$  (что легко проверить

интегрированием умноженного на  $v_n$  уравнения (1.6) для  $\lambda = \lambda_n$  и  $v = v_n$ ). Следовательно, справедлива аналогичная (1.12) оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\alpha^\beta (g(t, x))^2 dx dt \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{\beta - \alpha} (\|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Заметим, что из соотношения (1.15) не вытекает возможность использовать так называемый точечный демпфер, так как при  $\beta - \alpha \rightarrow 0$  эта оценка  $\rightarrow \infty$ .

Результаты Д. Лагнесса имеют важное практическое значение для определения времени  $T$  гашения колебаний, однако весьма затруднительно построить приближенное оптимальное управление, так как приходится решать бесконечную систему интегральных уравнений для нахождения сопряженных функций и суммировать бесконечный ряд (1.14). Следовательно, для нахождения приближенных решений необходимо существенно сузить класс управляющих функций.

### О классах управлений

Д. Рассел [9] предложил использовать только одну управляющую функцию, т. е. взять

$$g(t, x) = w(t)f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t, \quad (1.16)$$

где  $f(x)$  — некоторая заданная функция. Однако, даже в случае управления колебаниями струн ( $q \equiv 0$ ),

когда  $\lambda_n$  и  $v_n(x)$  имеют явный вид  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ,  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ ,

$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ , для нахождения оптимального

управления  $w(t)$  мы снова имеем бесконечную проблему моментов:

$$\int_0^T e^{i\frac{\pi a n t}{l}} w(t) dt = \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l}}{f_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

где

$$f_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \neq 0. \quad (1.18)$$

Заметим, что  $e^{i\frac{\pi a n t}{l}} = \left(e^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n$ , поэтому из предельного соотношения Н. Левинсона (1.10) полу-

чаем сразу  $T = \frac{2l}{a}$ , система  $\left\{\left(e^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n\right\} = \left\{\left(e^{i\frac{2\pi a t}{T}}\right)^n\right\}$

образует ортогональный базис в комплексном пространстве  $L_2(0, T)$ , и оптимальная функция управления  $w(t)$  представляется в виде ряда

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{a\pi n t}{l}} \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l} a_n}{f_n}. \quad (1.19)$$

Если  $f(x) \in L_2(0, l)$ , то  $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ , откуда

$|f_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Значит, ряд (1.19), вообще говоря, не сходится в  $L_2(0, T)$ . Если положить все  $f_n = 1$ , то получим, что

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \delta(x), \quad (1.20)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

### Точечный демпфер

Исследованию проблемы моментов для управления вида

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0), \quad x_0 \in (0, l) \quad (1.21)$$

(так называемый точечный демпфер) посвящен ряд работ А. Бутковского [10, 11]. Из них вытекает,

в частности, что для  $f_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)$  точки  $x_0 = \frac{k}{n}l$ ,

$k, n = 1, 2, \dots, k < n$ , образуют множество точек неуправления системы (1.1)–(1.3), в этом случае возникают решения, соответствующие однородной системе в виде стоячих волн (энергия которых по-

стоянна), и это множество  $\left\{\frac{k}{n}l\right\}$  всюду плотно на

промежутке  $(0, l)$ . Это затрудняет для остальных точек промежутка  $(0, l)$ , называемых точками управляемости, построение устойчивых алгоритмов численного (приближенного) решения задачи гашения

колебаний. При этом принадлежность оптимального управления  $w(t)$  пространству  $L_2(0, T)$  требует значительной гладкости начальных возмущений.

### Точечный движущийся демпфер

Заметим однако, что множество точек неуправляемости имеет лебегову меру нуль на промежутке  $(0, l)$ . Поэтому естественно рассматривать (Л. Муравей, [12–13]) управление в виде

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0 - s(t)) \quad (1.22)$$

(так называемый точечный движущийся демпфер) в предположении ограниченной вариации производной функции  $s(t)$  на отрезке  $[0, T]$ . Введение второй управляющей функции позволяет почти для всех  $t \in [0, T]$  находиться в точках управляемости и, тем самым, избежать появления стоячих волн. Проблема моментов для простейшего демпфера типа

$$(1.22), x_0 = 0 \text{ и } s(t) = \begin{cases} bt, & 0 \leq t \leq \frac{l}{b}; \\ \frac{2l}{b} - t, & \frac{l}{b} \leq t \leq \frac{2l}{b}; \end{cases} \text{ была ис-}$$

следована в работах Б. Билалова и Л. Муравья [14–15], где было доказано, что система

$$\left\{ e^{i\frac{\pi a n t}{l}} \sin \frac{\pi b n t}{l} \right\} \quad (1.23)$$

при  $b > a$  образует базис Рисса в  $L_2(0, T)$  на отрезке  $[0, T]$ , где  $T = \frac{2l}{b}$ . Чтобы пояснить этот результат, заметим, что

$$e^{i\frac{\pi a n t}{l}} \sin \frac{\pi b n t}{l} = \frac{1}{2} \left( e^{i\frac{(a+b)\pi n t}{l}} - e^{i\frac{(b-a)\pi n t}{l}} \right), t \in [0, T],$$

поэтому систему (1.23) можно заменить системой

$$\{(\varpi(t))^n\}, t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],$$

где

$$\varpi(t) = \begin{cases} e^{i\sigma(t)}, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; \\ e^{i\delta(t)}, & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right], \end{cases}$$

$$\sigma(t) = i\frac{\pi}{l}(a+b)t, \delta(t) = i\frac{\pi}{l}(b-a)t, b > a. \quad (1.24)$$

Следовательно, функция  $\varpi(t)$  непрерывно возрастает на отрезке  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , и предельное условие Н. Левинсона принимает вид

$$\frac{\pi}{l}(a+b)\frac{T}{2} + \frac{\pi}{l}(b-a)\frac{T}{2} = 2\pi, \text{ откуда } T = \frac{2l}{b}. \quad (1.25)$$

Значит, время гашения колебаний точечным движущимся демпфером, вообще говоря, меньше времени гашения колебаний методом Д. Лагнесса.

### О численном решении задач гашения колебаний

Отметим, что использование точечного движущегося демпфера (1.22) при ограничениях  $\alpha \leq x_0 + s(t) \leq \beta$ , где  $(\alpha, \beta) \in [0, l]$ , а также метода характеристик решения задачи (1.1)–(1.3) позволило разработать эффективные численные методы гашения колебаний струны и прямоугольной мембраны (А. Махмудов, Л. Муравей [16]; С. Асланов, И. Михайлов, Л. Муравей [17]; А. Атамуратов [18]).

**Пример 1.** Рассмотрим задачу гашения колебаний струны при  $a = 2$ , заключающуюся в нахождении оптимальных управляющих функций  $w(t)$ ,  $s(t)$  и времени гашения колебаний  $T$ . Начальные возмущения  $h_0(x)$ ,  $h_1(x)$  представлены на рис. 1 и рис. 2.

На рис. 3 и рис. 4 изображены оптимальные управляющие функции  $w(t)$  и  $s(t)$  соответственно.

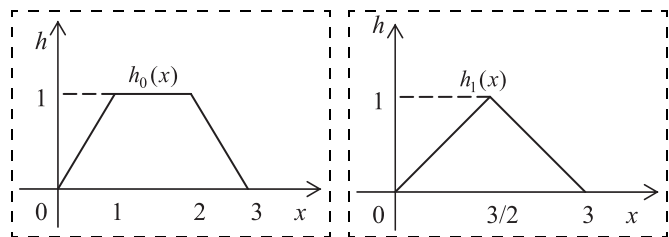


Рис. 1. Начальное возмущение  $h_0(x)$  Рис. 2. Начальное возмущение  $h_1(x)$

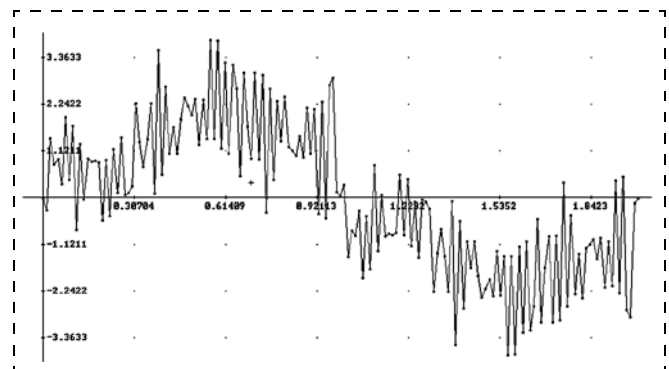


Рис. 3. Оптимальная управляющая функция  $w(t)$

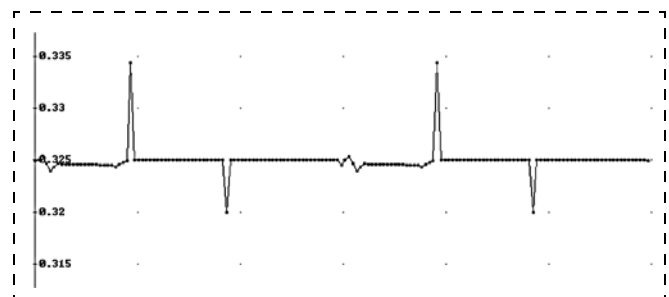


Рис. 4. Оптимальная управляющая функция  $s(t)$

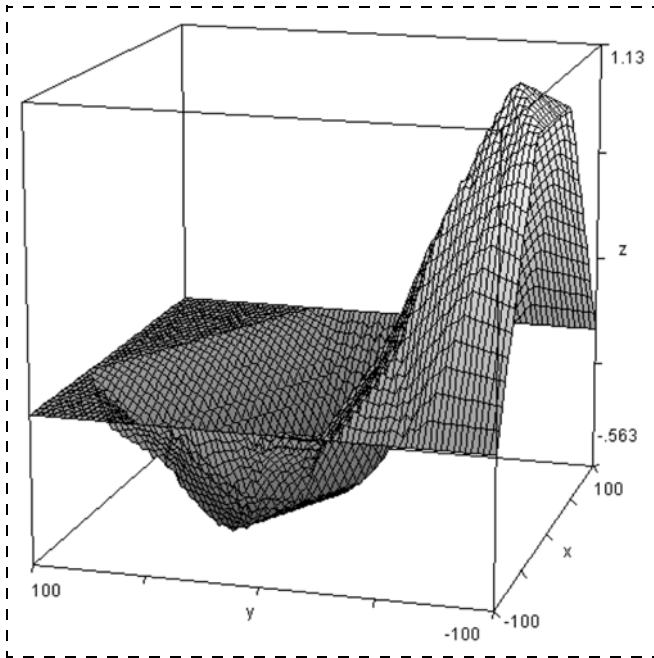


Рис. 5. Вид функции  $u(t, x)$

На рис. 5 изображен вид функции  $u(t, x)$  (ось  $t$  направлена справа налево). За время  $T = 3$  происходит практически полное гашение колебаний.

Результаты работ [16—18] показали, что если  $\beta - \alpha$  достаточно мало, то управление  $w(t)\delta(x - x_0 - s(t))$  можно с большой точностью заменить управлением  $w(t)\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$  (так называемый узкий демпфер). Поэтому аналогичные демпферы будут использоваться в дальнейшем при исследовании задачи гашения колебаний балки и прямоугольной пластины.

Целью данной работы является исследование управляемости упругих систем, описываемых гиперболическими по Петровскому уравнениями четвертого порядка. Типичными объектами являются балки (трубопроводы, космические антенны) и пластины, являющиеся элементами многочисленных конструкций (космические платформы).

### Гашение колебаний балки

Колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t, x), \quad (t, x) \in \Pi = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}. \quad (2.1)$$

Начальные отклонение и скорость перемещения балки

$$u|_t = 0 = h_0(x), \quad u_t|_t = 0 = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.2)$$

мы снова будем рассматривать как начальные возмущения. На концах балки наложим условия нежесткого закрепления

$$u|_x = 0 = u_{xx}|_x = 0, \quad u|_x = l = u_{xx}|_x = l = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Будем искать управляющую функцию  $g(t, x) \in L_2(\Pi)$ , переводящую балку из состояния (2.2) в состояние

$$u|_t = T = 0, \quad u_t|_t = T = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

за минимальное время  $T$ , предполагая что  $h_0(x) \in W_2^0(\Pi)$ ,  $h_1(x) \in L_2(\Pi)$ .

Соответствующая системе (2.1)—(2.4) задача Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} -a^2 u_{xxxx} = \lambda v, & x \in [0, l]; \\ v(0) = v_{xx}(0) = 0, & v(l) = v_{xx}(l) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

имеет последовательность собственных чисел  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4$  и отвечающую ей ортонормированную последовательность собственных функций  $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Аналогично изложенному выше получаем следующую проблему моментов:

$$\int_0^T g_n(t) e^{ia\omega_n^2 t} dt = b_n - ia\omega_n^2 a_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $g_n(t)$  — коэффициенты Фурье функций  $h_0(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $g(t, x)$  по ортонормированному в  $L_2(0, l)$

базису  $\{v_n(x)\}$ , где  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi^2}{l^2} n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Система экспонент

$$\left\{ e^{ia\omega_n^2 t} \right\} = \left\{ \left( e^{ia\frac{\pi^2}{l^2} t} \right)^{n^2} \right\} \quad (2.7)$$

является ортогональной на отрезке  $[0, T]$ , если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{l^2}{\pi^2 a}, \quad \text{т. е. } T = \frac{2l^2}{\pi a}. \quad (2.8)$$

Таким образом найдено, вообще говоря, не минимальное время гашения колебаний. Отвечающее ему управление

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ia\frac{2\pi n^2}{T} t} (b_n - ia\omega_n^2 a_n) \quad (2.9)$$

в силу условий на начальные возмущения принадлежит  $L_2(0, T)$ .

$$\text{Далее исследуем систему } \left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{ia\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t}}{\sqrt{\tau}} \right\} \text{ на}$$

отрезке  $[0, \tau]$ ,  $\tau < T$ . Ясно, что эта система не полна,

однако является почти биортогональной по Р. Беллману [8], поскольку удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1) \int_0^{\tau} |\varphi_n(t)|^2 dt = 1; \quad (2.10)$$

$$2) \text{ если положить } a_{mn} = \begin{cases} \int_0^{\tau} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) dt, & m \neq n, \\ 0, & m = n, \end{cases} \quad (2.11)$$

то должно выполняться неравенство

$$\sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 < +\infty. \quad (2.12)$$

Первое условие (2.10) очевидно. Проверим второе условие (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) &= \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ \cos \left( \frac{a\pi^2}{l^2} (n^2 - m^2)t \right) - i \sin \left( \frac{a\pi^2}{l^2} (n^2 - m^2)t \right) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) dt &= \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ \frac{l^2 \sin \left( \frac{a\pi^2}{l^2} (n^2 - m^2)\tau \right)}{a\pi^2 (m^2 - n^2)} - i \frac{l^2 \left( \cos \left( \frac{a\pi^2}{l^2} (n^2 - m^2)\tau \right) - 1 \right)}{a\pi^2 (m^2 - n^2)} \right]. \end{aligned}$$

Значит,  $n \neq m$  и

$$\begin{aligned} |a_{mn}| &\leq \frac{l^2 \sqrt{2}}{a\pi^2 (m^2 - n^2)\tau} \sqrt{1 - \sin \frac{2a\pi^2 (n^2 - m^2)}{l^2}} \leq \\ &\leq \frac{2l^2}{a\pi^2 |m^2 - n^2|\tau} \end{aligned} \quad (2.14)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 &\leq \frac{8l^4}{a^2 \pi^4 \tau^2} \sum_{m < n} \frac{1}{(m^2 + n^2)(n^2 - m^2)} = \\ &= \frac{32l^4}{a^2 \pi^4 \tau^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 n^2} \leq \frac{32}{a^2 \tau^2} \left( \frac{l}{\pi} \right)^4. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что условия 1), 2) выполняются и при  $\tau > T$ . При выполнении условий 1) и 2) из работы Р. Беллмана [8] вытекают следующие неравенства:

1) если вещественнозначная функция  $w(t) \in \tilde{L}_2(0, \tau)$ , где  $\tilde{L}_2(0, \tau)$  — замыкание системы  $\{\varphi_n(t)\}$  в норме  $L_2(0, \tau)$ , и если  $d_n = \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt$ ,  $m \neq n$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \leq \int_0^{\tau} |w(t)|^2 dt \left[ 1 + \frac{32}{a^2 \tau^2} \left( \frac{l}{\pi} \right)^4 \right]; \quad (2.16)$$

2) следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n - \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt \right|^2 \leq \frac{32}{a^2 \tau^2} \left( \frac{l}{\pi} \right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2. \quad (2.17)$$

В частности, из оценки (2.17) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| d_n - \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt \right| = 0, \quad (2.18)$$

т. е. проблему моментов (2.6) можно решить в  $\tilde{L}_2(0, \tau)$  только асимптотически.

Заметим, что коэффициент  $\frac{32}{a^2 \tau^2} \left( \frac{l}{\pi} \right)^4 = \left( \frac{4T}{\pi \tau} \right)^2$

в неравенстве (2.17) показывает, что при уменьшении  $\tau$  нахождение приближенного оптимального управления усложняется. Наоборот, при  $\tau \gg T$  проблему моментов можно с требуемой точностью решить достаточно просто.

### Численное решение задачи гашения колебаний балки

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. В качестве управляющей функции будем рассматривать движущийся точечный демпфер

$$g(t, x) = w(t) \delta(x - x_0 - s(t)), \quad (2.19)$$

где  $w(t)$  и  $s(t)$  — две искомые управляющие функции,  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Мы будем предполагать, что  $w(t) \in L_2(0, T)$ , а  $s(t)$  — функция с ограниченной вариацией.

Уравнение (2.1) можно свести к системе двух уравнений второго порядка [20]

$$\begin{cases} u_t = av_{xx}; \\ v_t = -au_{xx} + f(t, x), \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \\ &= \begin{cases} -\frac{x}{al} w(t)(l - x_0 - s(t)), & x < x_0 + s(t); \\ \frac{1}{a}(x - x_0 - s(t))w(t) - \frac{x}{al}(l - x_0 - s(t))w(t), & x \geq x_0 + s(t). \end{cases} \end{aligned}$$



Начальные и граничные условия переписутся следующим образом:

$$u(0, x) = h_0(x),$$

$$v(0, x) = \frac{1}{a} \int_0^x \left[ \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi - \frac{x}{al} \int_0^l \left[ \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi, \quad (2.21)$$

$$u(t, 0) = 0, u(t, l) = 0, v(t, 0) = 0,$$

$$v(t, l) = \int_0^t f(t, l) dt + \frac{1}{a} \int_0^l h_1(y) dy dx - \frac{1}{a} \int_0^l \left[ \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi. \quad (2.22)$$

Построим конечно-разностную схему для приближенного решения системы (2.20). Разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми  $x_m = mh_x$ ,  $m = 0, \dots, N_X$ ,  $t_n = nh_t$ ,  $n = 0, \dots, N_T$ , где  $h_x = l/N_X$  и  $h_t = T/N_T$ . В результате этих операций мы можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h_t} = \frac{a}{2} \left[ \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right]; \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{h_t} = -\frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right] + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Если сделать замену

$$y_m^n = \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix}, \alpha = \frac{2h_x^2}{ah_t}, \beta = \frac{h_x^2}{a}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } V = \begin{pmatrix} -f_m^n - f_m^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

то систему (2.24) можно записать в векторной форме

$$y_{m-1}^{n+1} - [2E + \alpha B] y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = - (y_{m-1}^n - [2E + \alpha B] y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V), \quad (2.25)$$

где  $E$  — единичная матрица. Положим  $C = 2E + \alpha B$ ,  $\tilde{C} = 2E - \alpha B$  и  $F_m^n = y_{m-1}^n - \tilde{C} y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V$ . Тогда наша система запишется следующим образом:

$$y_{m-1}^{n+1} - C y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -F_m^n. \quad (2.26)$$

Заметим, что схема (2.26) является безусловно устойчивой.

Будем решать ее методом редукции. Для решения задачи гашения колебаний будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем

функции  $w(t)$  и  $s(t)$  кусочно-постоянными функциями:  $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$  положим  $w(t) = w_i$ ,  $s(t) = s_i$ , где  $w_i, s_i$  — const,  $i = 0, N_T - 1$ . Тогда интеграл энергии балки будет являться функцией переменных  $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}$

$$E(T) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}). \quad (27)$$

Оптимальные значения  $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}$ , минимизирующие (2.27) с заданной точностью  $\varepsilon$ , и будут искомым решением задачи.

**Пример 2.** Начальные условия  $h_0(x) = 0,25\sin(\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ ,  $x_0 = 0,5$ . Входные параметры  $l = 1$ ,  $a = 1$ ,  $h_t = h_x/2$ , в методе редукции зададим число  $M = 5$ , тогда  $h_x = 0,0312$ ,  $h_t = 0,0156$ . Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если  $E(T) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0,001$ . Минимальное время, требуемое для гашения, равно  $T = 0,141$ . На рис. 6, 7 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции  $u(t, x)$  (рис. 6), и вид управляющей функции  $w(t)$  (рис. 7). При этом можно положить  $s(t) \equiv 0$ .

Многочисленные расчеты показали, что гашение колебаний происходит за наименьшее время, если неподвижный точечный демпфер находится в точке максимума амплитуды начального возмущения (2.2), по сравнению со случаем, когда демпфер помещается в другую точку балки.

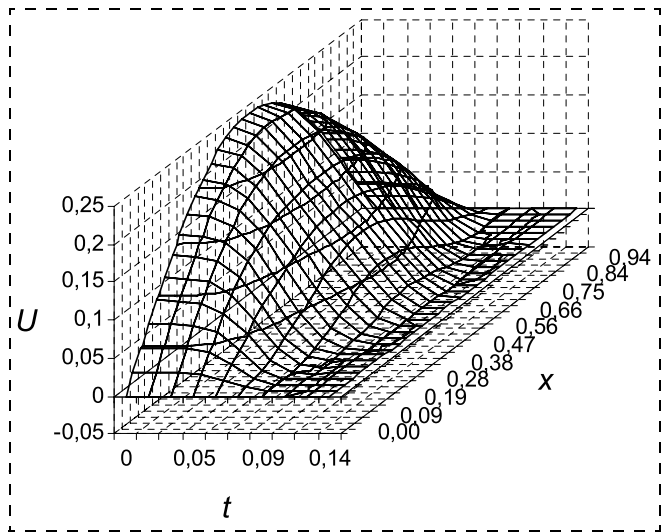


Рис. 6. Процесс гашения колебания

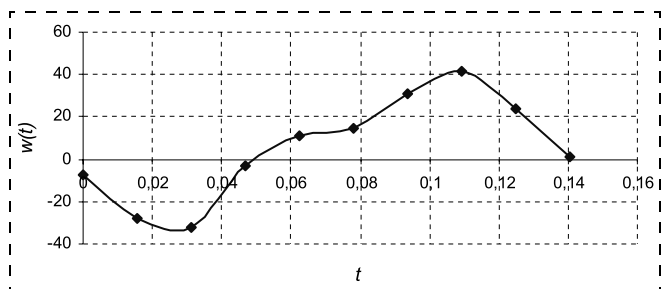


Рис. 7. Управляющая функция  $w(t)$

**Пример 3.** Рассмотрим условия примера 2, но положим  $x_0 = 0,687$ . Условием гашения колебаний, как и прежде, будем полагать  $E(T) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0,001$ . В этом случае минимальное время, требуемое для гашения, увеличилось до  $T = 0,219$ . На рис. 8, 9 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции  $u(t, x)$  (рис. 8), и вид управляющей функции  $w(t)$  (рис. 9). При этом можно положить  $s(t) \equiv 0$ .

Выше уже говорилось, что если точечный стационарный демпфер (1.21) помещен на струне в точку  $x_0$ , которая является узлом стоячих волн решений однородного уравнения колебаний струны, то задача либо неразрешима, либо неустойчива. Этот факт также может иметь место и при гашении колебаний балки.

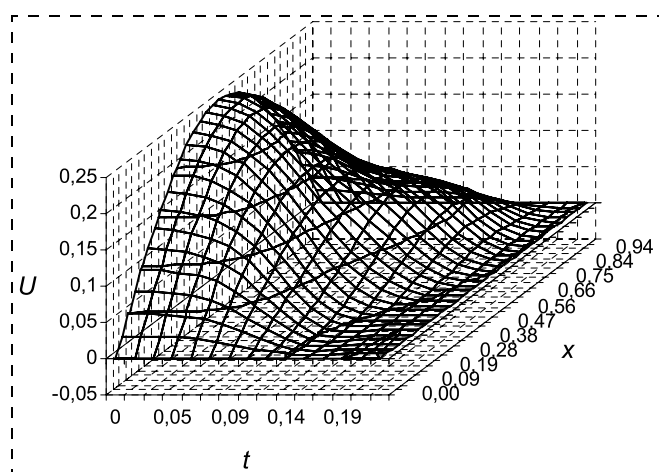


Рис. 8. Процесс гашения колебания

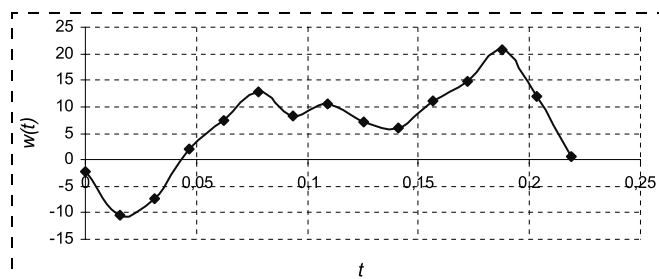


Рис. 9. Управляющая функция  $w(t)$

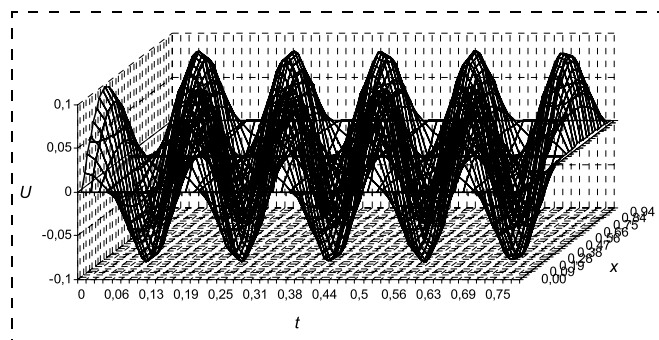


Рис. 10. Функция расположения точечного демпфера  $s(t)$

**Пример 4.** Пусть  $h_0(x) = 0,1\sin(2\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $s(t) \equiv 0$ . Демпфер, установленный в точку  $x_0 = 0,5$ , не может погасить колебания балки, поскольку в самой точке  $x_0 = 0,5$  колебаний не происходит, и функция управления принимает вид  $w(t) \equiv 0$ . Это наглядно видно на рис. 10.

Использование же движущегося точечного демпфера позволяет решить задачу.

**Пример 5.** Пусть  $h_0(x) = 0,1\sin(2\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ ,  $x_0 = 0,5$ . Функция  $s(t)$  задавалась по закону, изображенному на рис. 11. Время гашения для данных условий равнялось  $T = 0,781$ . Управляющая функция  $w(t)$  представлена на рис. 12, а процесс гашения — на рис. 13.

Таким образом, задача гашения колебаний балки решается за конечное время.

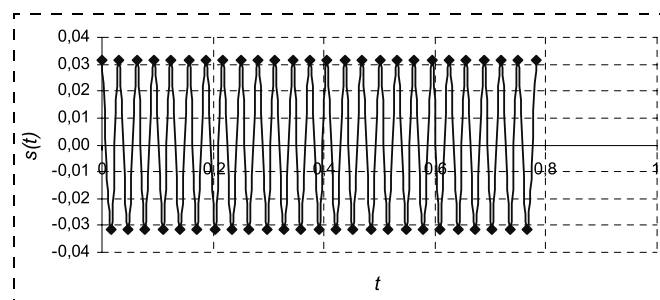


Рис. 11. Функция перемещения точечного демпфера  $s(t)$

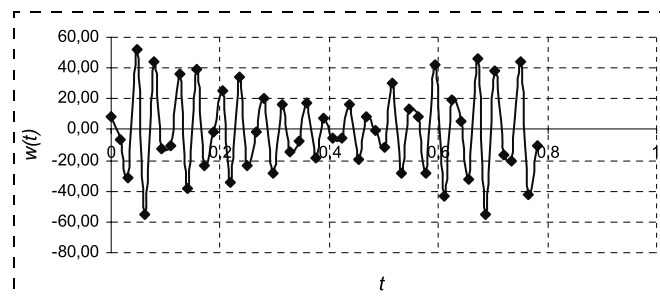


Рис. 12. Управляющая функция  $w(t)$

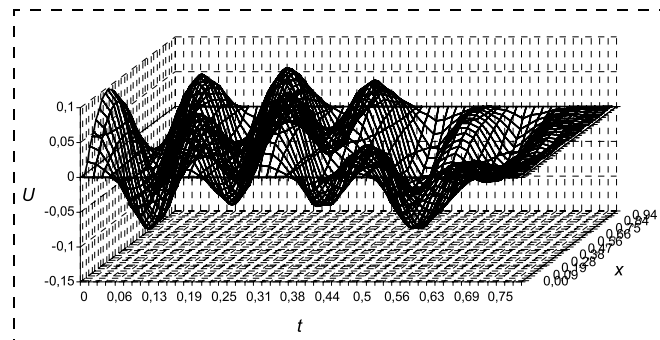


Рис. 13. Процесс гашения колебания

## Гашение колебаний прямоугольной пластины

Малые поперечные колебания упругой изотропной пластины постоянной толщины  $h$  описываются уравнением Софи-Жармен

$$\rho u_{tt} = -D\Delta\Delta u + \tilde{g}(t, x, y), \quad 0 \leq t, (x, y) \in \Pi = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость пластины;

$\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $\rho$  — удельная плотность на единицу площади пластинки;

$t$  — время,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — двумерный оператор Лапласа. Считая  $\rho$  и  $D$  постоянными, исходное уравнение можно привести к виду (гиперболическому уравнению по Петровскому четвертого порядка)

$$u_{tt} = -a^2\Delta\Delta u + g(t, x, y), \quad t \geq 0, (x, y) \in \Pi. \quad (3.1)$$

Начальное отклонение и скорость пластины от положения равновесия будем задавать как начальные условия и считать их нежелательными возмущениями

$$u(0, x, y) = h_0(x, y), \quad u_t(0, x, y) = h_1(x, y), \quad (x, y) \in \Pi. \quad (3.2)$$

На границе  $\Gamma$  пластины наложим условие шарнирного закрепления

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta u|_{\Gamma} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Правую часть уравнения (3.1)  $g(t, x, y)$  будем называть функцией управления. Как и ранее, нам удобно рассматривать обобщенное решение задачи (3.1)—(3.3) (в смысле интегрального тождества), которое существует и единственно в соболевском пространстве  $W_2^{1,2}([0, T] \times \Pi)$ , если предположить,

что  $h_0(x, y) \in W_2^0(\Pi)$ ,  $h_1(x, y) \in L_2(\Pi)$  и  $g(t, x, y) \in L_2([0, T] \times \Pi)$ .

Заметим, что для обобщенного решения интеграл энергии  $E(t)$  имеет вид

$$E(t) = \int_{\Pi} (u_t^2 + a^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)) dx dy, \quad (3.4)$$

причем для  $g(t, x, y) \equiv 0$

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) = \int_{\Pi} (h_1^2(x, y) + a^2(h_{0xx}^2(x, y) + \\ &+ 2h_{0xy}^2(x, y) + h_{0yy}^2(x, y))) dx dy = \\ &= \|h_1\|_{L_2(\Pi)}^2 + a^2\|h_0\|_{W_2^0(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Задача гашения колебаний прямоугольной пластины заключается в нахождении минимального значения  $t = T$  такого, что при любых начальных возмущениях  $h_0(x, y)$ ,  $h_1(x, y)$  (из приведенных

классов) найдется управляющая функция  $g(t, x, y)$  (из описанного класса), что

$$E(T) = 0. \quad (3.5)$$

Отметим, что условие (3.5) эквивалентно условиям

$$u(T, x, y) = 0, \quad u_t(T, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi. \quad (3.6)$$

Чтобы получить проблему моментов, рассмотрим соответствующую задачу Штурма—Лиувилля

$$-\Delta^2 v = \lambda v, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (3.7)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно показать, что собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_{k,p} = \left( \left( \frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi p}{l_2} \right)^2 \right)^2, \quad k, p = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

а отвечающая им система собственных функций

$$\begin{aligned} v_{k,p}(x, y) &= \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi k}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi p}{l_2} y\right), \\ k, p &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

образует ортонормированный базис в  $L_2(0, \pi)$ . Следовательно, разлагая функции  $h_0(x, y)$ ,  $h_1(x, y)$ ,  $g(t, x, y)$  в ряды Фурье по этому базису  $\{v_{k,p}(x, y)\}$ , мы получим решение задачи (3.1)—(3.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k,p=1}^{\infty} \left( a_{k,p} \cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) + \frac{b_{k,p}}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}} \int_0^t g_{k,p}(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_{k,p}}(t-\tau)] d\tau \right) v_{k,p}(x, y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $a_{k,p}$ ,  $b_{k,p}$ ,  $g_{k,p}(t)$  — коэффициенты Фурье функций  $h_0(x, y)$ ,  $h_1(x, y)$ ,  $g(t, x, y)$  соответственно.

Из соотношения (3.11) стандартными преобразованиями с учетом условий (3.6) получим бесконечную систему интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций  $g_{k,p}(t)$  — проблему моментов

$$\begin{cases} \int_0^T g_{k,p}(t) \cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) dt = b_{k,p}, \\ \int_0^T g_{k,p}(t) \sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) dt = -a\sqrt{\lambda_{k,p}} a_{k,p}, \end{cases} \quad k, p = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Заметим, что ее можно переписать в виде

$$\int_0^T g_{k,p}(t) e^{ia\pi^2 \omega_{k,p} t} dt = d_{k,p} = b_{k,p} - ia\pi^2 \omega_{k,p} a_{k,p}, \quad (3.13)$$

$$\text{где } \omega_{k,p} = \frac{k^2}{l_1^2} + \frac{p^2}{l_2^2}, \quad k, p = 1, 2, \dots$$

Исследование разрешимости проблемы моментов тесно связано с асимптотическими свойствами при достаточно больших значениях  $k, p$  соответствующей системы экспонент

$$\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_{k,p} t} \right\} \quad (3.14)$$

в пространстве  $L_2(0, T)$ . Перенумеруем  $\omega_{k,p}$  в порядке их неубывания с учетом возможной кратности. Тогда получим неубывающую последовательность чисел  $\omega_n, n = 1, 2, \dots$ , где номер  $n$  однозначно определяется некоторым номером  $(k(n), p(n))$ , т. е.  $\omega_n = \omega_{k(n), p(n)}$ . Найдем асимптотику чисел  $\omega_n$  при больших значениях  $n$ . Для этого обозначим через  $N(\rho), \rho > 0$  число таких  $\omega_{k,p}$  с учетом кратности, для которых

$$\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{p^2}{l_2^2} \leq \rho. \quad (3.15)$$

Ясно, что  $N(\rho)$  равно числу точек  $(k, p)$ , удовлетворяющих неравенству (3.15), или площади фигуры  $M_{\sqrt{\rho}}$ , составленной из прямоугольников  $\Pi_{k,p} = \{(x, y): (k-1)l_1 \leq x \leq kl_1, (p-1)l_2 \leq y \leq pl_2\}$ , или, что то же самое, умноженной на  $1/l_1 l_2$  площади фигуры, составленной из единичных квадратов  $K_{k,p} = \{(x, y): k-1 \leq x \leq k, p-1 \leq y \leq p\}$ , удовлетворяющих неравенству

$$k^2 + p^2 \leq \rho. \quad (3.16)$$

Откуда, очевидно, вытекает оценка

$$N(\rho) \leq \frac{\pi \rho}{4l_1 l_2}. \quad (3.17)$$

Пусть  $q_n$  — кратность числа  $\omega_n$ , тогда

$$n + q_n - 1 = N(\omega_n). \quad (3.18)$$

При этом кратность  $q_n$  можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} q_n &\leq \frac{\pi}{4l_1 l_2} \omega_n - \frac{\pi}{4l_1 l_2} \left( \sqrt{\omega_n} - \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\pi \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2l_1 l_2} \sqrt{\omega_n}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из выражений (3.13), (3.17)—(3.19) вытекает соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a\pi^2 \omega_n} = \frac{\pi l_1 l_2}{a\pi^3}. \quad (3.20)$$

Следовательно, для системы экспонент  $\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_n t} \right\}$  на отрезке  $[0, T]$  справедлива теорема Н. Левинсона, если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\pi l_1 l_2}{4a\pi^3}, \text{ т. е. } T = \frac{8l_1 l_2}{a\pi^2}. \quad (3.21)$$

Таким образом, на отрезке  $[0, T]$  эти системы экспонент образуют базис Рисса в  $L_2(0, T)$ . Значит, решение проблемы моментов (3.13) в новой форме

$$\int_0^T g_n(t) e^{ia\pi^2 \omega_n t} dt = b_n - ia\pi^2 \omega_n a_n, \quad (3.22)$$

где  $g_n = g_{k(n), p(n)}(t)$ ,  $\omega_n = \omega_{k(n), p(n)}$ ,  $a_n = a_{k(n), p(n)}$ ,  $b_n = b_{k(n), p(n)}$ , представляется в виде

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)(b_n - ia\pi^2 \omega_n a_n), \quad (3.23)$$

где  $\{\Psi_n(t)\}$  — система биортогональная системе

$$\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_n t} \right\} \text{ в } L_2(0, T).$$

Так же, как и в случае гашения колебаний струны, может быть решена задача гашения колебаний пластины, если управление сосредоточено в произвольном прямоугольнике  $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \Pi$ .

### Численное решение задачи гашения колебаний прямоугольной пластины

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. Уравнение (3.1) можно привести к системе двух уравнений

$$\begin{cases} u_{tt} = a\Delta v + g(t, x, y); \\ v = -a\Delta u. \end{cases} \quad (3.24)$$

Начальные и граничные условия для функции  $v$  задаются соотношениями

$$v(0, x, y) = -a((h_0)_{xx} + (h_0)_{yy}), \quad v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.25)$$

Для того чтобы численно решить систему (2.14), построим конечно-разностную схему для приближенного решения. Для этого разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми  $x_m = mh_x, m = 0, \dots, N_x, y_k = kh_y, k = 0, \dots, N_y, t_n = nh_t, n = 0, \dots, N_T$ , где  $h_x = l/N_x$ ,  $h_y = l/N_y$  и  $h_t = T/N_T$ .

В результате этих операций мы можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{u_{m,k}^{n+1} - 2u_{m,k}^n + u_{m,k}^{n-1}}{h_t^2} = a \left( \frac{v_{m+1,k}^n - 2v_{m,k}^n + v_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{v_{m,k+1}^n - 2v_{m,k}^n + v_{m,k-1}^n}{h^2} \right) + g_{k,m}^n; \\ v_{m,k}^n = -a \left( \frac{u_{m+k,j}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h_x^2} \right). \end{cases} \quad (3.26)$$

Схема устойчива по Нейману при условии

$$h_t \leq h_x^2 h_y^2 / (2a(h_x^2 + h_y^2)). \quad (3.27)$$

Для решения задачи гашения колебаний будем искать управляющую функцию в виде

$$g(t, x, y) = w(t) \begin{cases} 1, x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \& y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta); \\ 0, x \notin (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \& y \notin (y_0 - \beta, y_0 + \beta), \end{cases} \quad (3.28)$$

где  $(x_0, y_0)$  — центр расположения демпфера на пластине,  $w(t) \in L_2(0, T)$ ,  $(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta) \subset \Pi$ , и будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем функцию  $w(t)$  кусочно-постоянной функцией:  $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$  положим  $w(t) = w_i$ , где  $w_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{0, N_{T-1}}$ . Тогда интеграл энергии (2.4) будет являться функцией переменных  $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}$ :

$$E(t) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T}). \quad (3.29)$$

Оптимальные значения  $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}$ , минимизирующие интеграл энергии  $E(t)$  с заданной точностью  $\varepsilon$ , и будут являться искомым решением задачи.

**Пример 6.** Рассмотрим начальные условия  $h_0(x, y) = 0,01 \sin(\pi x/l_1) \sin(\pi y/l_2)$ ,  $h_1(x, y) = 0$ . Входные параметры  $h_x = 0,1$ ,  $h_y = 0,1$ ,  $h_t = 3,5355 \cdot 10^{-7}$ ,  $a = 1$ ,

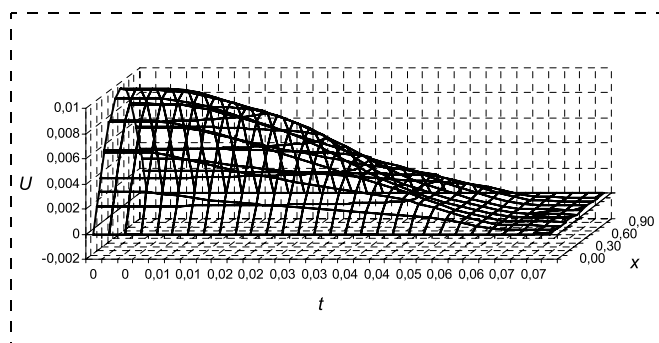


Рис. 14. Процесс колебания в сечении  $y = 0,5$

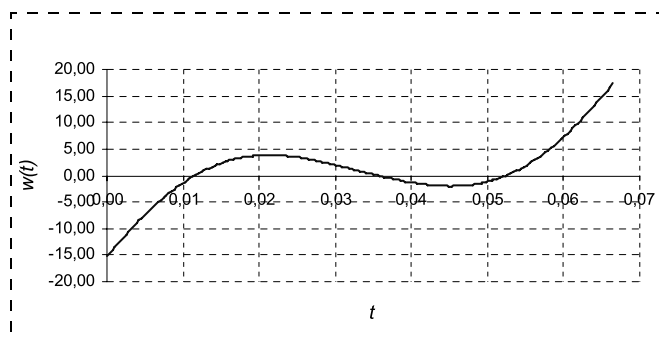


Рис. 15. Управляющая функция  $w(t)$

$l_1 = l_2 = 1$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $y_0 = 0,5$ ,  $\alpha = \beta = 0$ . Условием гашения будем полагать выполнение неравенства  $E(t) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0,001$ . Задача решается за время  $T = 0,0668$ . На рис. 14 изображен процесс гашения в сечении  $y = 0,5$ . При этом управляющая функция  $w(t)$ , с помощью которой удалось погасить колебания, имеет вид, изображенный на рис. 15.

Таким образом, задача гашения колебаний прямоугольной пластины решается за конечное время.

#### Список литературы

1. **Lagness J.** Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // SIAM Journ. Control and Optim. 1983. Vol. 1, N. 1. P. 68—85.
2. **Lions J. L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // SIAM Review. 1988. Vol. 30, N. 1. P. 1—68.
3. **Красносельский М. А., Крейн М. Г.** Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // УМН. 1947, 2:3 (19), С. 60—106.
4. **Ахизер Н. И., Крейн М. Г.** О некоторых вопросах теории моментов. ДнТВУ, 1938. 256 с.
5. **Ахизер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, Физматлит, 1966. 544 с.
6. **Ахизер Н. И.** Классическая проблема моментов. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 314 с.
7. **Levinson N.** Gap and density theorem // Amer. Math. Soc. Colog. Publ. 1940. Vol. 26.
8. **Bellman R.** Almost orthogonal series // Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50.
9. **Russel D.** Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // SIAM Review. 1978. Vol. 20, N. 5. P. 639—739.
10. **Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
11. **Бутковский А. Г.** Приложение некоторых результатов теории чисел к проблеме финитного управления и управляемости в распределенных системах // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 309—311.
12. **Muravey L. A.** On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system", Moscow, 1990. P. 50—51.
13. **Muravey L. A.** Mathematical problems on the damp of vibration // Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations". Budapest. 1991. Vol. 1. P. 746—747.
14. **Билалов Б. Т.** О базисности системы  $\{e^{i\sigma n x} \sin nx\}$  и экспонент со сдвигом // ДАН РАН. 1995. Т. 345, № 2. С. 644—647.
15. **Билалов Б. Т., Муравей Л. А.** О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч. II. 1996. С. 246—254.
16. **Makmudov A., Muravey L.** The problem of string vibrations damping // Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling, Fethiye, Turkey, 2001. P. 174—182.
17. **Асланов С. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А.** Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 28—35.
18. **Атамуратов А. Ж.** О гашении колебаний прямоугольной мембраны // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика. 2013. № 2. С. 49—59.

# The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems

**A. G. Atamuratov**, goofydog@mail.ru, Pepsico Holding LTD, Moscow, 125315, Russian Federation,  
**I. E. Mikhailov**, mikh\_igor@mail.ru, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS,  
Moscow, 119333, Russian Federation,  
**L. A. Muravey**, l\_muravey@mail.ru, Moscow Aviation Institute (State Research University),  
Moscow, 121552, Russian Federation

Corresponding author: **Mikhailov Igor E.**, D. Sc., Professor, Leading Researcher,  
Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS,  
Moscow, 119333, Russian Federation, e-mail: mikh\_igor@mail.ru

Received on May 10, 2016

Accepted on May 30, 2016

Methods for damping for oscillations of elements of complex mechanical systems such as strings and membranes began to develop rapidly in the 70s of the last century. The most significant results were obtained by J.-L. Lions, D. Lagnesse, D. Russel, A. Butkovskiy, which dealt with cases of string oscillations (with various types of restraints at the borders) and circular membrane. In this paper we consider the control problem of elastic dynamic systems modeled by partial differential equations of the fourth order, hyperbolic by Petrovsky, which describe, in particular, oscillations in antennas and other elements of space platforms, pipelines, bridge openings. The control problem is to find the minimum time to damp oscillations arisen due to initial perturbation of the system. To solve this problem we derive trigonometric moment problem (infinite system of integral equations of first order for the time component of the control function). We prove the existence of the minimum time and optimal control in case of beams and plates. Wherein time for damping of oscillations and optimal control are given in explicit form. To obtain these results we study the asymptotic behavior of eigenvalues of the corresponding spectral problem by using the classic theorem of N. Levinson (on the basis of the Riesz exponential systems) and Bellman (of almost orthogonal trigonometric systems). Note that the classical solutions of the moment problem presented in the form of infinite series of functions and to obtain the elements of these series is a separate difficult problem. Therefore in order to find the approximate solution we consider the class of control functions such as point moving and slim dampers and build effective numerical methods. Given examples confirm that proposed numerical methods allow us to find solution of problem with sufficient accuracy.

**Keywords:** damping of oscillations, trigonometric moment problem, orthogonal systems and Riesz basis, asymptotic moment problem, stationary and moving dampers, reduction method, coordinate descent method

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 16-01-00425 project).

For citation:

Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 587–598.

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

## References

1. Lagness J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion, *SIAM Journ. Control and Optim.*, 1983, vol. 1, no. 1, pp. 68–85.
2. Lions J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system, *SIAM Review*, 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1–68.
3. Krasnoselskiy M. A., Krein M. G. *Osnovnye teoremy o rashireniiy ermitovih operatorov i nekotorye ih primeneniya k teorii ortogonal'nykh polinomov i problem momentov* (Fundamental theorems on the extension of Hermitian operators and their applications to the theory of orthogonal polynomials and the problem of moments), *UMN*, 1947, 2:3 (19), pp. 60–106 (in Russian).
4. Ahiezer N. I., Krein M. G. *O nekotorykh voprosakh teorii momentov* (On some questions of the theory of moments), *DnTVU*, 1938, 256 p. (in Russian).
5. Ahiezer N. I., Glazman I. M. *Teoriya lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve* (The theory of linear operators in Hilbert space), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1966, 544 p. (in Russian).
6. Ahiezer N. I. *Klassicheskaya problema momentov*, Moscow, Gos Izd fiziko-matematicheskoy literature, 1961, 314 p.
7. Levinson N. Gap and density theorem, *Amer. Math. Soc. Colog. Publ.*, 1940, vol. 26.
8. Bellman R. Almost orthogonal series, *Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 50.
9. Russel D. Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations, *SIAM Review*, 1978, vol. 20, no. 5, pp. 639–739.
10. Butkovskiy A. G. *Metodi upravleniya sistemami s raspredelenionimi parametrami* (The methods of controlling the system with distributed parameters), Moscow, Nauka, 1975, 568 p. (in Russian).
11. Butkovskiy A. G. *Prilozhenie nekotorykh rezul'tatov teorii chisel k probleme finitnogo upravleniya i upravlyaemosti v raspredelennnykh sistemakh* (The application of some of the results of number theory to the problem of finite control and controllability of distributed systems), *DAN USSR*, 1976, vol. 227, no. 2, pp. 309–311 (in Russian).
12. Muravey L. A. On the suppression on membrane oscillations, *Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system"*, Moscow, 1990, pp. 50–51.
13. Muravey L. A. Mathematical problems on the damp of vibration, *Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations"*, Budapest, 1991, vol. 1, pp. 746–747.
14. Billalov B. T. O bazisnosti sistem  $\{e^{i\sigma_n x} \sin nx\}$  i eksponent so sdvigom (On the basis of the system  $\{e^{i\sigma_n x} \sin nx\}$  and exponents with a shift), *DAN RAN*, 1995, vol. 345, no. 2, pp. 644–647 (in Russian).
15. Billalov B. T., Muravey L. A. *O gashenii kolebaniy bolshikh mekhanicheskikh sistem* (On damping of vibrations of large mechanical systems), *Trudi mezhdunarodnogo simpoziuma Intels-96. St.-Petersburg*, P. II, 1996, pp. 246–254 (in Russian).
16. Makmudov A., Muravey L. The problem of string vibrations damping, *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling*, Fethiye, Turkey, 2001, pp. 174–182.
17. Aslanov S. Zh., Mikhailov I. E., Muravey L. A. *Analiticheskie i chislennye metody v zadache gasheniya kolebaniy struni tochechnym dempferom* (Analytical and numerical methods in the problem of damping of string vibration by point damper), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 7, pp. 28–35 (in Russian).
18. Atamuratov A. Zh. *O gashenii kolebaniy pryamougol'noi membrany* (On vibrations damping of rectangular membrane), *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Prikladnaya matematika*, 2013, no. 2, pp. 49–59 (in Russian).