Solución del Ejercicio 1 - Condiciones KKT

Enlace a mi repositorio en GitHub

Para más información y código relacionado con este tema, puedes entrar a mi GitHub: https://github.com/McGeremi

1 Ejercicio 1

Resolver las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{1}$$

Sujeto a la restricción:

$$x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0. \tag{2}$$

Calcular los valores óptimos de x_1, x_2 y del multiplicador de Lagrange λ.

2 Solución

2.1 Paso 1: Definición del Lagrangiano

El Lagrangiano se define como:

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 3), \tag{3}$$

donde $\lambda \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

2.2 Paso 2: Condiciones de Estacionariedad

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano e igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\lambda}{2}. \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\lambda}{2}. \tag{5}$$

2.3 Paso 3: Condición de Factibilidad Primal

La restricción debe cumplirse:

$$x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0. \tag{6}$$

Sustituyendo x_1 y x_2:

$$-\frac{\lambda}{2} + 2\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - 3 = 0. \tag{7}$$

$$-\frac{\lambda}{2} - \lambda - 3 = 0. \tag{8}$$

$$-\frac{3\lambda}{2} = 3 \Rightarrow \lambda = -2. \tag{9}$$

Sin embargo, dado que $\lambda \geq 0$, esto implica que la restricción no está activa, por lo que el óptimo se encuentra sin considerar la restricción.

2.4 Paso 4: Solución Óptima

Si la restricción no es activa ($\lambda = 0$), los valores óptimos son:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0. \tag{10}$$

2.5 Conclusión

La solución óptima es:

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, 0), \quad \lambda^* = 0. \tag{11}$$

3 Ejercicio 2

Considerar el problema de minimización:

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \tag{12}$$

Sujeto a las restricciones:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad x_1 \geq 0. \tag{13}$$

Resolver utilizando las condiciones KKT e interpretar los resultados obtenidos.

4 Solución

4.1 Paso 1: Definición del Lagrangiano

El Lagrangiano del problema se define como:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2 x_1. \tag{14}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

4.2 Paso 2: Condiciones de Estacionariedad

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano e igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0. \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0. \tag{16}$$

4.3 Paso 3: Condiciones de Factibilidad Primal

Las restricciones deben cumplirse:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad x_1 \geq 0. \tag{17}$$

4.4 Paso 4: Condiciones de Factibilidad Dual

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \tag{18}$$

4.5 Paso 5: Condición de Complementariedad

$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0, \quad \lambda_2 x_1 = 0. \tag{19}$$

4.6 Paso 6: Resolviendo el Sistema

1. Supongamos que la restricción $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$ es activa, lo que implica:

$$x_1 + x_2 = 2. \tag{20}$$

2. De la ecuación de estacionariedad respecto a x_2:

$$2x_2 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2x_2. \tag{21}$$

Como $\lambda_1 \geq 0$, se deduce que $x_2 \leq 0$, lo cual es una contradicción, ya que x_2 no tiene restricción de signo.

Por lo tanto, la restricción $x_1 + x_2 - 2$ no es activa y $\lambda_1 = 0$.

3. De la ecuación de estacionariedad respecto a x_1:

$$2x_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2x_1. \tag{22}$$

Como $\lambda_2 \geq 0$, se tiene que $x_1 \geq 0$, lo cual siempre es cierto.

4. De la condición de complementariedad $\lambda_2 x_1 = 0$, hay dos posibilidades: - Si $x_1 > 0$, entonces $\lambda_2 = 0$, lo que contradice $\lambda_2 = 2x_1$. - Por lo tanto, $x_1 = 0$, lo que implica que $\lambda_2 = 0$.

5. Como $x_1 = 0$, de la restricción $x_1 + x_2 = 2$ se obtiene:

$$x_2 = 2. \tag{23}$$

4.7 Conclusión

La solución óptima es:

$$(x_1^*, x_2^*) = (0, 2), \quad \lambda_1^* = 0, \quad \lambda_2^* = 0. \tag{24}$$

5 Ejercicio 3

Se tiene un problema de maximización:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \tag{25}$$

Sujeto a las restricciones:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{26}$$

Determinar si las condiciones de KKT son suficientes en este caso y resolver para encontrar la solución óptima.

6 Solución

6.1 Paso 1: Definición del Lagrangiano

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = 3x_1 + 4x_2 + \lambda(9 - x_1^2 - x_2^2) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2. \tag{27}$$

donde $\lambda \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange para la restricción $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$, y $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ son los multiplicadores para $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, respectivamente.

6.2 Paso 2: Condiciones de Estacionariedad

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano e igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 - 2\lambda x_1 - \mu_1 = 0. \tag{28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\lambda x_2 - \mu_2 = 0. \tag{29}$$

6.3 Paso 3: Condiciones de Factibilidad Primal

Las restricciones deben cumplirse:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{30}$$

6.4 Paso 4: Condiciones de Factibilidad Dual

$$\lambda \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \tag{31}$$

6.5 Paso 5: Condición de Complementariedad

$$\lambda(9 - x_1^2 - x_2^2) = 0. \tag{32}$$

$$\mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_2 x_2 = 0. \tag{33}$$

6.6 Paso 6: Resolviendo el Sistema

1. Como estamos maximizando, la solución óptima ocurre en la frontera $x_1^2 + x_2^2 = 9$, por lo que la restricción es activa y $\lambda > 0$.

$$x_1^2 + x_2^2 = 9$$

2. Consideremos que los puntos óptimos deben ser no negativos ($x_1, x_2 \geq 0$).
3. Sustituyendo $x_1^2 + x_2^2 = 9$, resolvemos el sistema:

$$3 - 2\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2\lambda}.$$

$$4 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{2\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

4. Como $x_1^2 + x_2^2 = 9$, sustituimos:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 9.$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 9.$$

$$\frac{9+16}{4\lambda^2} = 9.$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} = 9.$$

$$25 = 36\lambda^2.$$

$$\lambda^2 = \frac{25}{36}, \quad \lambda = \frac{5}{6}.$$

5. Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{6}$:

$$x_1 = \frac{3}{2 \times \frac{5}{6}} = \frac{3}{\frac{10}{6}} = \frac{3 \times 6}{10} = \frac{18}{10} = 1.8.$$

$$x_2 = \frac{2}{\frac{5}{6}} = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5} = 2.4.$$

6.7 Conclusión

La solución óptima es:

$$(x_1^*, x_2^*) = (1.8, 2.4), \quad \lambda^* = \frac{5}{6}, \quad \mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 0. \tag{34}$$

7 Ejercicio 4

Investigar y demostrar la relación entre las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) y la dualidad de Lagrange en problemas de optimización convexa. Dar ejemplos ilustrativos y analizar casos en los que la dualidad fuerte y débil se cumplen.

8 Concepto

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son fundamentales en la teoría de optimización con restricciones. Su relación con la dualidad de Lagrange permite entender cuándo la solución óptima del problema primal coincide con la del problema dual.

9 Formulación del Problema de Optimización Convexa

Dado el problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{35}$$

Sujeto a:

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{36}$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \tag{37}$$

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \tag{38}$$

Las condiciones KKT establecen que, si x^* es un mínimo local y ciertas condiciones de regularidad se cumplen, entonces existen multiplicadores de Lagrange λ^* y μ^* tales que:

1. **Condición de Estacionariedad**:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \tag{39}$$

2. **Condición de Factibilidad Primal**:

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad h_j(x^*) = 0 \tag{40}$$

3. **Condición de Factibilidad Dual**:

$$\lambda_i^* \geq 0 \tag{41}$$

4. **Condición de Complementariedad**:

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \forall i \tag{42}$$

El problema dual se define como:

$$\max_{\lambda \geq 0, \mu} \min_{x} L(x, \lambda, \mu) \tag{43}$$

10 Ejemplo: Problema Convexo con Dualidad Fuerte

Consideremos el problema:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = (x-2)^2 \tag{44}$$

Sujeto a:

$$x \geq 1 \tag{45}$$

El Lagrangiano es:

$$L(x,\lambda) = (x-2)^2 + \lambda(1-x) \tag{46}$$

Resolviendo las condiciones KKT:

1. **Estacionariedad**:
$$\frac{d}{dx}[(x-2)^2 + \lambda(1-x)] = 2(x-2) - \lambda = 0 \tag{47}$$

2. **Factibilidad Primal**:
$$x \geq 1 \tag{48}$$

3. **Factibilidad Dual**:
$$\lambda \geq 0 \tag{49}$$

4. **Complementariedad**:
$$\lambda(x-1) = 0 \tag{50}$$

Resolviendo estos sistemas, encontramos que el óptimo es $x^* = 2$ y $\lambda^* = 0$, cumpliéndose la dualidad fuerte.

11 Ejemplo: Dualidad Débil

Consideremos:

$$\min_{x} f(x) = -x \tag{51}$$

Sujeto a:

$$x^2 \leq 1 \tag{52}$$

El problema dual es:

$$\max_{\lambda\geq 0}\min_{x}(-x + \lambda(x^2-1)) \tag{53}$$

Resolviendo el problema, encontramos que la solución óptima primal y dual no coinciden, mostrando dualidad débil.

12 Conclusión

Si el problema es convexo y cumple la condición de Slater, se garantiza la dualidad fuerte (optimo primal = optimo dual). En caso contrario, puede existir dualidad débil.