Approximation du nombre

π

Nicolas Iung, Aurélien Blais

February 2, 2019

Chapter 1

Méthode des séries

1.1 Somme des inverses des carrés

1.1.1 Question 1

Montrer que $a_0 = 0$

On sait d'après l'énoncé que sur l'intervalle $]0, \pi[$, $f(t) = 1$ et que sur l'intervalle $]-\pi, 0[$, $f(t) = -1$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi} 1dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1dt) \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi) \\
a_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Montrer que $a_n = 0$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt \\
a_n &= \frac{2}{2\pi}(\int_0^{\pi} cos(nt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -cos(nt)dt) \\
a_n &= \frac{2}{2\pi}(\frac{sin(n\pi)}{n} - \frac{sin(n\pi)}{n}) \\
a_n &= 0
\end{aligned}
$$

Montrer que $b_n = \frac{4}{2\pi}(\frac{1-cos(n\pi)}{n})$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}(\int_0^{\pi} sin(nt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -sin(nt)dt)$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}[(\frac{1}{n} - \frac{cos(n\pi)}{n}) + \frac{cos(2n\pi) - cos(n\pi)}{n}]$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}[\frac{1}{n}(-cos(n\pi) + 1 + cos(2n\pi) - cos(n\pi))]$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}[\frac{1}{n}(-2cos(n\pi) + 2)]$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}[\frac{2}{n}(-cos(n\pi) + 1)]$$
$$b_n = \frac{4}{2\pi}[\frac{1 - cos(n\pi)}{n}]$$

1.1.2 Question 2

Etudions b_n lorsque n est pair ou impaire. Cela reviens a calculer b_n pour $2p$ et $2p + 1$

Calculons b_{2p}

$$b_{2p} = \frac{4}{2\pi} * \frac{1 - cos(2p\pi)}{2p}$$

Or $\forall x \in R, cos(2p\pi) \Leftrightarrow cos(2\pi) = 1$

$$b_{2p} = \frac{4}{2\pi} * \frac{1 - 1}{2p}$$
$$b_{2p} = \frac{4}{2\pi} * \frac{0}{2p}$$
$$b_{2p} = \frac{4}{2\pi} * 0$$
$$b_{2p} = 0$$

Calculons b_{2p+1}

$$b_{2p+1} = \frac{4}{2\pi}(\frac{1 - cos((2p+1)\pi)}{2p+1})$$
$$b_{2p+1} = \frac{4}{2\pi}(\frac{1 - cos(2p\pi + \pi)}{2p+1})$$
$$b_{2p+1} = \frac{4}{2\pi}(\frac{1 - cos(\pi)}{2p+1})$$
$$b_{2p+1} = \frac{4}{2\pi}(\frac{1 - (-1)}{2p+1})$$
$$b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$$

1.1.3 Question 3

Montrer que, pour f, $\sum_{p=0}^{+\infty} = \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt)|^2 + |\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt)|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{4}{2\pi}[\frac{1-cos(n\pi)}{n}]|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{p=0}^{+\infty} |\frac{4}{2\pi}[\frac{1-cos((2p+1)\pi)}{2p+1}]|^2 + \sum_{p=1}^{+\infty} |\frac{4}{2\pi}[\frac{1-cos(2p\pi)}{2p}]|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{p=0}^{+\infty} |\frac{4}{2\pi}[\frac{1-cos((2p+1)\pi)}{2p+1}]|^2)$$

$$A = \frac{1}{2}(\sum_{p=0}^{+\infty} |\frac{4}{(2p+1)\pi}|^2)$$

$$A = \frac{8}{\pi^2}(\sum_{p=0}^{+\infty} (\frac{1}{2p+1})^2)$$

Or $\forall t \in [0; 2\pi]; |f(t)|^2 = 1$ donc

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1|^2 dt$$

$$A = \frac{1}{2\pi}[1]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1$$

$$A = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} (\frac{1}{2p+1})^2$$

1.1.4 Question 4

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2})$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^2p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^2p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

1.1.5 Question 5

Déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\text{On pose } X = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'après la question précédente

$$X = \frac{1}{4}X + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}X = \frac{\pi^2}{8}$$

$$X = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.2 Implémentations

1.2.1 Question 1

Implémentation de *SerieInvCarres(N)*

```
def self.serie_inv_carres(n)
  (1..n).inject(0.0) { |sum, n| sum + 1 / (n ** 2).to_f }
end
```

La méthode retourne la valeur de la somme de 1 à n, avec pour valeur initiale 0.0

1.2.2 Question 2

Implémentation de *MethodeSerieInvCarres(N)*

```
def self.methode_serie_inv_carres(n)
  Math.sqrt(serie_inv_carres(n) * 6)
end
```

La méthode retourne la racine carrée de la somme produite par la méthode précédente fois six

1.2.3 Question 3

Implémentation de *SerieInvCarresImparis(N)*

```
def self.serie_inv_carres_imparis(n)
  return 1 / ((2 * n + 1) ** 2) if n.zero?

  n.times.inject(0.0) { |sum, n| sum + 1 / ((2 * n + 1) ** 2).to_f }
end
```

Dans le cas où n = 0, la méthode retourne 0. Sinon de la même manière que précédemment, elle effectue la somme de 0 à n.

1.2.4 Question 4

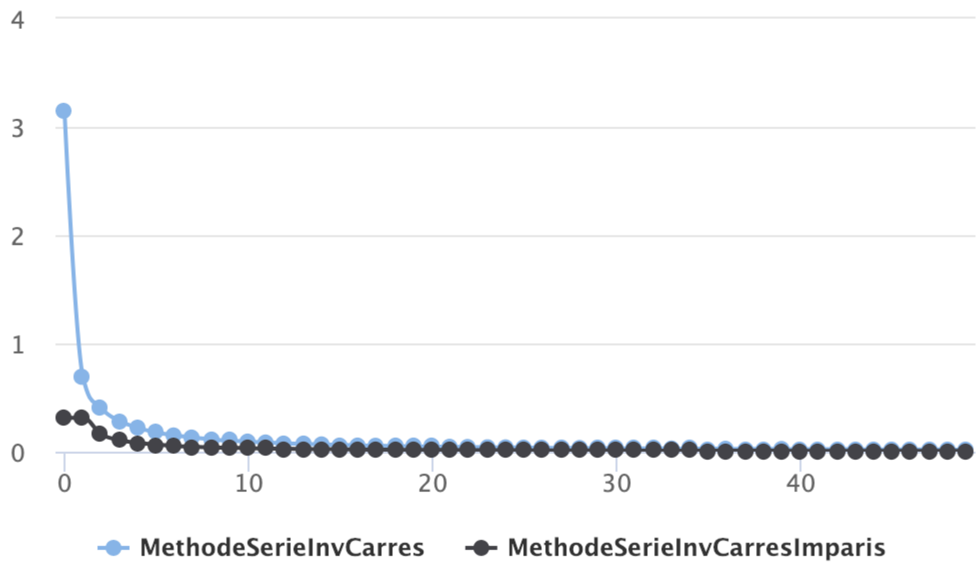
Implémentation de *MethodeSerieInvCarresImparis(N)*

```
def self.methode_serie_inv_carres_imparis(n)
  Math.sqrt(serie_inv_carres_imparis(n) * 8)
end
```

La méthode retourne la racine carrée de la somme produit par la méthode précédente fois 8

1.2.5 Question 5

Evolution des deux méthodes



1.2.6 Question 6

Convergence des deux méthodes

Pour la méthode *MethodeSerieInvCarres(N)*, nous avons observer une précision de l'ordre de 10^{-4} au terme N = 22388
Pour la méthode *MethodeSerieInvCarresImparis(N)*, nous avons observer une précision de l'ordre de 10^{-4} au terme N = 7463

1.2.7 Question 7

Implémentation de *MethodeSerieRamanujan(N)*

```
def self.methode_serie_ramanujan(n)
  1 / n.times.inject(0.0) do |sum, i|
    sum + (2 * Math.sqrt(2) / 9801).to_f * (((factorial(4 * i).to_f * (1103 +
  end
end
```

La méthode retourne la valeur donnée par la formule énoncée dans le sujet.
Nous avons par ailleurs dû implémenter une méthode *factorial(N)*, celle-ci n'étant pas présente nativement en Ruby, qui multiple les valeurs de 1 à N

```
def self.factorial(n)
  (1..n).reduce(1, :*)
end
```

1.2.8 Question 8

Convergence de la méthode de Ramanujan

n	Résultat	Nombre de chiffres exactes
1	3.14159273001330552332888 15	7
2	3.14159265358979356008717 33	16
3	3.14159265358979311599796 35	41
4	3.14159265358979311599796 35	41
5	3.14159265358979311599796 35	41

La valeur de référence utilisée est donnée par la constante Ruby *Math::PI*, on remarque que la méthode converge rapidement, le nombre de chiffres exactes prend en compte la partie entière du résultat.
A partir de la 3ème itération, la valeur reste bloquée à 41, qui est la taille maximale d'un *Float* en Ruby.

1.2.9 Question 9

Avantages et Inconvénients

Les deux premières méthodes convergent lentement vers Pi, tandis que la méthode Ramanujan converge très rapidement.
Celle de Ramanujan faisant appel à des factorielles a un coût en ressources plus élevé que les deux autres.

Chapter 2

Méthode de Monte-Carlo

2.0.1 Question 1

Aire du disque et valeur de $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n}$

L'aire d'un disque est obtenu par la formule πR^2, la portion ici observée a pour aire $\frac{1}{4}\pi$.
La valeur de $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n}$ doit tendre vers $\frac{1}{4}\pi$.

2.0.2 Question 2

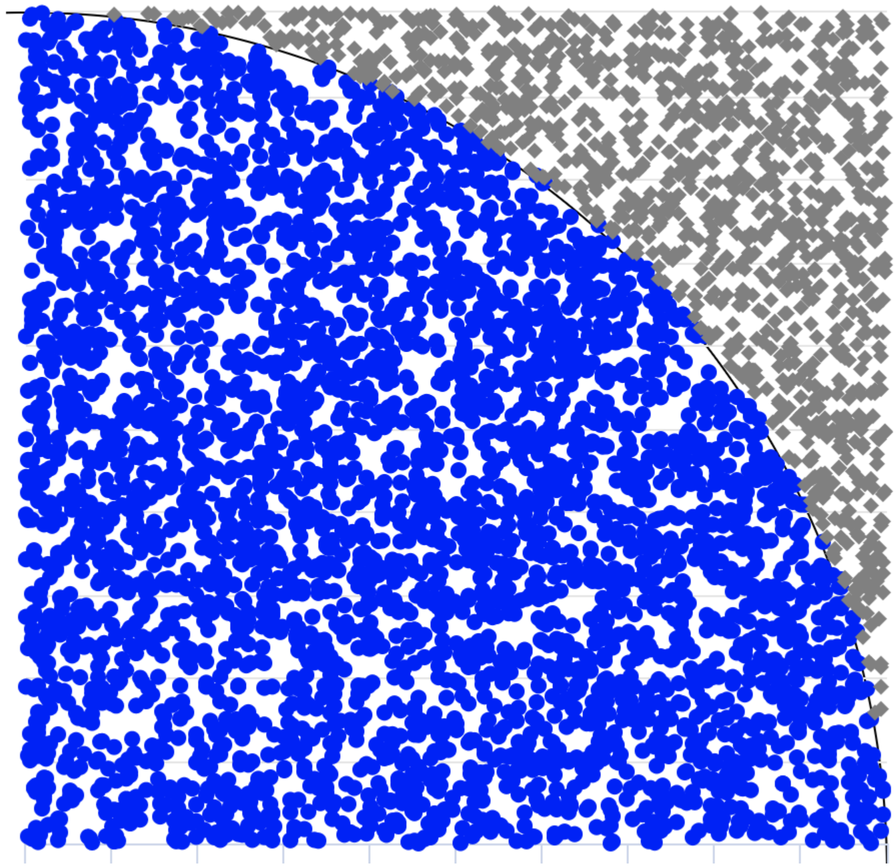
Implémentation de *Tirage(N)*

```
def self.tirage(n)
  Array.new(n) { [rand, rand] }
end
```

La méthode retourne un tableau de couples ayant une valeur comprise entre $[0, 1]$

2.0.3 Question 3

Représentation du tirage



2.0.4 Question 4

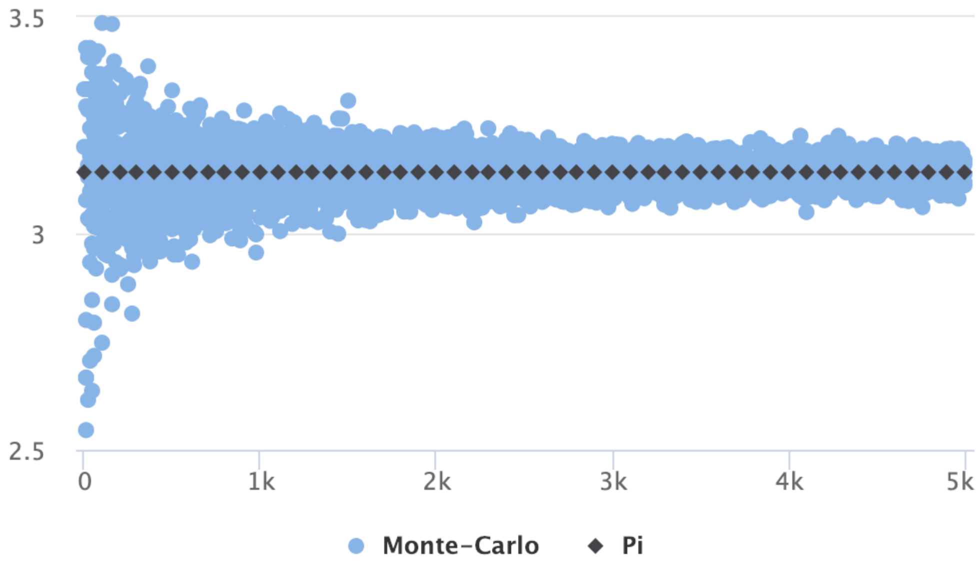
Implémentation de *MonteCarlo(N)*

```
def self.montecarlo(n)
  return 0 if n.zero?
  counter = 0
  tirage(n).each do |n|
    counter += 1 if (n[0]**2) + (n[1]**2) <= 1
  end
  counter * 4.0 / n
end
```

La méthode retourne 0 si N = 0.
Sinon on incrémente un compteur pour chaque point faisant parti du cercle, en utilisant la formule donnée dans le sujet $x^2 + y^2 \leq 1$.
On retourne la valeur donnée en suivant la formule $\frac{k_n}{n}$ où k_n est représenté par le compteur.
La valeur est multiplié par 4 pour obtenir une approximation de π et non de $\frac{\pi}{4}$.

2.0.5 Question 5

Convergence de la méthode de Monte-Carlo



Les points en bleu représentent les valeurs obtenues par la méthode *Monte-Carlo(N)*, les points en noir représentent la valeur de *Math::PI*.
On peut observer que la méthode semble converger vers π, cette convergence est cependant très lente et la valeur reste imprécise.

2.0.6 Question 6

Convergence de la méthode de Monte-Carlo

Echantillon	Nombre d'itérations
10	1 626
50	1 433
100	1 286

Pour obtenir une précision de l'ordre de 10^{-4}, en répétant l'expérience 100 fois, nous observons une moyenne de 1286 points.

2.0.7 Question 7

Comparaison avec les méthodes des séries

Cette méthode ne converge que très lentement et nécessite un nombre d'itérations important pour obtenir une valeur imprécise.

Chapter 3

Ouverture

3.0.1 Question 1

Méthode de calcul différente

On peut citer la méthode d'Archimèdes.
Le principe étant que nous savons calculer le périmètre d'un polygone. Il utilise donc deux polygones à 6 côté, l'un inscrit et l'autre conscrit à un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.
En augmentant le nombre de côtés des polygones, ceux-ci commenceront à se confondre avec le cercle, et il devient alors possible d'approximer π

Exemple d'implémentation algorithmique en Ruby

```
def self.archimedes(n)
  v = 4.0
  u = 2.0 * Math.sqrt(2.0)
  mean = (u+v) / 2.0

  (1..n).each do |i|
    v = v*u/mean
    u = Math.sqrt(v*u)
    mean = (u+v)/2
  end
  mean
end

ruby2.5.3 > archimedes(1)
 => 3.18758797895274
ruby2.5.3 > archimedes(10)
 => 3.1415928075997126
ruby2.5.3 > archimedes(100)
 => 3.1415926535897927
```

u étant la longueur d'un côté du polygone inscrit et v la longueur d'un côté du polygone circonscrit.

3.0.2 Question 2

Modélisation en Ruby

En Ruby, la valeur de π la valeur est codée en dur lors de la compilation de l'interpréteur, écrit en C.

```
#ifndef M_PI
# define M_PI 3.14159265358979323846
#endif
```

Cette valeur étant limitée à 20 décimales (la taille d'un *double* en C), s'il y a besoin d'une plus grande précision, l'interpréteur utilise la formule de Ramanujan pour la calculer.

Chapter 4

Rendu

Le code source livré avec ce rapport est écrit en Ruby et utilise le framework *Ruby On Rails*, qui permet la construction d'application web.
Le détail de la procédure d'installation se trouve dans le fichier *README.MD*, et une version statique est disponible ici : `http://naritaya.org/utbm/mt79-pi/`.