Obstruction Cochain

概要

Obstruction cochain が特性写像のとりかたに依らないこと，およびそれが cocycle であることの証明

目次

0 基本群のホモトピー群への作用

0.1 便利な写像

C_i で inclusion $i\colon S^{n-1} \to D^n$ の mapping cylinder を表すことにする．ただし，$CS^{n-1} = I \times S^{n-1}/$ の $1 \times S^{n-1}$ と ∂D^n を接着しているとする．同相写像 $C_i \to D^n$ を次のように作る．

$$\begin{aligned} (t,x) &\mapsto \frac{2-t}{2}x \quad &((t,x) \in CS^{n-1}) \\ x &\mapsto x/2 \quad &(x \in D^n) \end{aligned}$$

これの逆を $b\colon D^n \to C_i$ とおく．

0.2 基本群のホモトピー群への作用

■絶対ホモトピー群への作用 G. W. Whitehead の III 章を参照[*1]（この小節の内容よりも一般の状況でいろいろ書いてある）．

X の点 x_1, x_0 を結ぶ path $\gamma\colon (I,0,1) \to (X,x_1,x_0)$ の，ホモトピー群 $\pi_n(X,x_0)$ への作用を定める．spheroid[*2] $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X,x_0)$ に対し，$\tau_\gamma(f)\colon (D^n,S^{n-1}) \to (X,x_1)$ を $\tau_\gamma(f) := ((\mathrm{id}_I \times \gamma) \cup f) \circ b$ と定める[*3]．

補題 0.1. γ, γ' が端点を止めてホモトピック，f, f' が基点を止めてホモトピックであるとする．このとき，$\tau_\gamma(f)$ と $\tau_{\gamma'}(f')$ は基点を止めてホモトピックである．

[*1] 一度立ち止まって，この文章を声に出して読め．

[*2] 球面からの連続写像を spheroid と呼ぶことにする．

[*3] $f\colon CS^{n-1} \to X$ と $g\colon D^n \to X$ で，$f|_{1\times S^{n-1}} = g|_{\partial D^n}$ を満たすものが引き起こす写像 $C_i \to X$ のことを $f \cup g$ と書くことにする．

Proof. γ,γ' のホモトピーを $h\colon I\times I\to X$，f,f' のホモトピーを $H\colon I\times D^n\to X$ とおく．このとき，ホモトピー $\Phi\colon I\times D^n\to X$ を，$\Phi_t:=((\mathrm{id}_I\times h_t)\cup H_t)\circ b$ と定める．これを具体的に書くと

$$\begin{cases} x\mapsto H(t,2x) & (0\le\|x\|\le 1/2)\\ x\mapsto (2-2\|x\|, h(t,x/\|x\|)) & (1/2\le\|x\|\le 1)\end{cases}$$

である．これは連続で，境界は基点にうつる．また $\Phi_0=\tau_\gamma(f)$，$\Phi_1=\tau_{\gamma'}(f')$ である． □

この補題から，γ の端点を止めたホモトピー類 $\alpha=[\gamma]$ は写像 $\tau_\alpha\colon\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,x_1)$ を定める．

■相対ホモトピー群への作用　$f\colon(D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,x_0)$ と path $\gamma\colon(I,0,1)\to(A,x_1,x_0)$ を任意にとる．$\tau'_\gamma(f)\colon(D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,x_1)$ を $\tau'_\gamma(f):=(\gamma\vee f)\circ b'$ と定める．

補題 0.2. γ,γ' が端点を止めてホモトピック，f,f' が $\pi_n(X,A,x_0)$ の同じ元を代表するとする．このとき，$\tau'_\gamma(f)$ と $\tau'_{\gamma'}(f')$ は $\pi_n(X,A,x_1)$ の中で同じである．

Proof. 絶対バージョンの同じ補題とパラレルである． □

上の補題から，γ の端点を止めた A の中でのホモトピー類 α は写像 $\tau'_\alpha\colon\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(X,A,x_1)$ を定める．

0.3　ホモトピー完全列との関係

基本群の作用が対のホモトピー完全列に引き起こす準同型を見る．inclusion の引き起こす準同型 j_* を $j_*\colon\pi_n(X)\to\pi_n(X,A)$ を，$j_*[f]:=[f\circ p]$ と定める．ここで，p は $p\colon(D^n,S^{n-1})\to(D^n/S^{n-1},S^{n-1}/S^{n-1})=(S^n,*)$ である．あとの i_* や ∂_* は自明なとおりである．

定理 0.3. (X,A) を空間対，$n\ge 0$ とする．このとき各 $[\gamma]=\alpha\in\pi_1(A)$ に対し，次の図式は可換である．ただし，$\beta:=i_*\alpha$ である．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\tau'_\alpha"] & \pi_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\tau_\alpha"] & \pi_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\tau_\beta"] & \pi_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\tau'_\alpha"] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] & \pi_n(A) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(X) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(X,A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Proof.（左の四角について）$[f]\in\pi_{n+1}(X,A)$ を任意にとる．右上からたどる合成について，

$$\tau_\alpha\partial_*[f]=\tau_\gamma(|_{S^n})=(\gamma\vee f|_{S^n})\circ b$$

である．また，左下の合成は

$$\partial_*\tau'_\alpha[f]=\partial_*((\gamma\vee f)\circ b')=(\gamma\vee f)\circ b=(\gamma\vee f|_{S^n})\circ b$$

だから左の四角は可換である．

（真ん中の四角について）$[f]\in\pi_n(A)$ を任意にとる．右上からたどる合成について，

$$\tau_\beta i_*[f]=\tau_{i_*\alpha}[f]=((i\circ\gamma)\vee f)\circ b=(\gamma\vee f)\circ b$$

左下をたどる合成について，

$$i_*\tau_\alpha[f] = i_*((\gamma \vee f) \circ b) = (\gamma \vee f) \circ b$$

よって真ん中は可換である．

（右の四角について）$[f] \in \pi_n(X)$ を任意にとる．右上をたどる合成について，

$$\tau'_\alpha j_*[f] = \tau'_\gamma(f \circ p) = (\gamma \vee (f \circ p)) \circ b'$$

左下をたどる合成について，

$$j_*\tau_\beta[f] = j_*\tau_\gamma(f) = j_*((\gamma \vee f) \circ b) = (\gamma \vee f) \circ b \circ p$$

□

補題 0.4. $\gamma*$ は群準同型である．

Proof. $[f], [g] \in \pi_n(X, x_1)$ をとる． □