

Postnikov System

目次

0 ホモトピーファイバー列

1

0 ホモトピーファイバー列

空間対やファイブレーションに対してホモトピー完全列が構成された．ここでは任意の連続写像に対して fibrant replacement を用いて，ファイブレーションに対するものと類似のホモトピー完全列を構成する．

■ファイブレーションに対するホモトピー完全列 $F \rightarrow E \rightarrow B$ を基点付きファイブレーションとする．このとき， $k \geq 1$ に対して $p_*: \pi_k(E, F) \rightarrow \pi_k(B)$ が同型になるのだった．よって，対 (E, F) のホモトピー完全列（下図上段）により，ファイブレーション p のホモトピー完全列（下図下段）を得る．

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & \pi_k(F) & \longrightarrow & \pi_k(E) & \longrightarrow & \pi_k(E, F) & \xrightarrow{\partial_*} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow \\
 & \parallel & & \parallel & & \cong \downarrow p_* & \parallel \\
 \longrightarrow & \pi_k(F) & \longrightarrow & \pi_K(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_k(B) & \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow
 \end{array}$$

ここで， Δ_* は $\partial_* \circ (p_*)^{-1}$ である．

■fibrant replacement 基点付き連続写像のホモトピー完全列を，ファイブレーションのホモトピー完全列を利用して作る．そのために，連続写像をファイブレーションに置き換える．

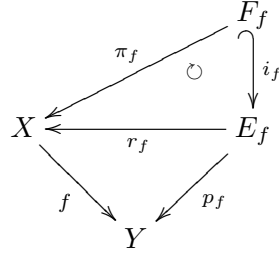
定理 0.1. (fibrant replacement) $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ を基点付き連続写像とする．また，

$$\begin{aligned}
 E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \\
 p_f: E_f &\rightarrow Y, (x, \gamma) \mapsto \gamma(1) \\
 r_f: E_f &\rightarrow X, (x, \gamma) \mapsto x \\
 F_f &:= p_f^{-1}(y_0)
 \end{aligned}$$

とおく．また i_f を包含 $F_f \rightarrow E_f$ ， π_f を合成 $r \circ i_f$ とおく．

このとき $p_f: (E_f, (x_0, c_{y_0})) \rightarrow (Y, y_0)$ は基点付きファイブレーションで下の図式（特に下の三

角形) はホモトピー可換である.



Proof. 略. □

定理 0.2. $f: X \rightarrow Y$ を基点付き連続写像とする. Y の path fibration を f で引き戻したものを $\pi'_f: F'_f \rightarrow X$ とおく (左下図式). このとき, 右下の図式が可換になるような同相写像 $\varphi: F_f \rightarrow F'_f$ がある.

$$\begin{array}{ccc} F'_f & \longrightarrow & P(Y, y_0) \\ \pi'_f \downarrow & & \downarrow \text{ev}_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_f & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & F'_f \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi'_f \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

特に, π_f はファイブレーションである.

Proof. 略. F_f と F'_f を具体的に書き下せば φ をどう作ればよいかわかる. □

■連続写像のホモトピー完全列 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ を基点付き連続写像とし, $F := \pi_f^{-1}(x_0)$ (π_f は前段落のもの) とおき, F の F_f への包含を j_f とおく. f の fibrant replacement p_f のホモトピー完全列と π_f のホモトピー完全列を組み合わせると下の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & \pi_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_k(F_f) & \xrightarrow{(i_f)_*} & \pi_k(E_f) & \xrightarrow{(p_f)_*} & \pi_k(Y) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{k-1}(F_f) & \longrightarrow \\ & & & \parallel & & \cong \downarrow r_* & \nearrow f_* & & & \parallel & \\ \longrightarrow & \pi_k(F) & \xrightarrow{(j_f)_*} & \pi_k(F_f) & \xrightarrow{(\pi_f)_*} & \pi_k(X) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{k-1}(F) & \xrightarrow{(j_f)_*} & \pi_{k-1}(F_f) & \longrightarrow \end{array}$$

上の図式の台形の部分以外は, 連続写像のレベルでのホモトピー可換図式から引き起こされるので可換である. よって, 完全列

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow$$

を得る. これを f のホモトピーファイバー列という.