Postnikov System

目次

0 ホモトピーファイバー列

1

0 ホモトピーファイバー列

空間対やファイブレーションに対してホモトピー完全列が構成された.ここでは任意の連続写像に対して fibrant replacement を用いて,ファイブレーションに対するものと類似のホモトピー完全列を構成する.

■ファイブレーションに対するホモトピー完全列 $F \to E \to B$ を基点付きファイブレーション とする. このとき, $k \ge 1$ に対して p_* : $\pi_k(E,F) \to \pi_k(B)$ が同型になるのだった. よって, 対 (E,F) のホモトピー完全列(下図上段)により, ファイブレーション p のホモトピー完全列(下図 下段)を得る.

$$\longrightarrow \pi_{k}(F) \longrightarrow \pi_{k}(E) \longrightarrow \pi_{k}(E, F) \xrightarrow{\partial_{*}} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow$$

$$\parallel \qquad \qquad \cong \downarrow^{p_{*}} \qquad \qquad \parallel$$

$$\longrightarrow \pi_{k}(F) \longrightarrow \pi_{k}(E) \xrightarrow{p_{*}} \pi_{k}(B) \xrightarrow{\Delta_{*}} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow$$

ここで、 Δ_* は $\partial_* \circ (p_*)^{-1}$ である.

■fibrant replacement 基点付き連続写像のホモトピーファイバー列を、ファイブレーションのホモトピー完全列を利用して作る. そのために、連続写像をファイブレーションに置き換える.

定理 **0.1.** (fibrant replacement) $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ を基点付き連続写像とする. また,

$$E_f := \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\}$$

$$p_f \colon E_f \to Y, \ (x, \gamma) \mapsto \gamma(1)$$

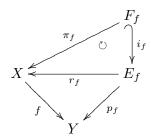
$$r_f \colon E_f \to X, \ (x, \gamma) \mapsto x$$

$$F_f := p_f^{-1}(y_0)$$

とおく. また i_f を包含 $F_f \to E_f$, π_f を合成 $r \circ i_f$ とおく.

このとき $p_f \colon (E_f,(x_0,c_{y_0})) \to (Y,y_0)$ は基点付きファイブレーションで下の図式(特に下の三

角形)はホモトピー可換である.



Proof. 略.

定理 0.2. $f: X \to Y$ を基点付き連続写像とする. Y の path fibration を f で引き戻したものを $\pi'_f: F'_f \to X$ とおく (左下図式). このとき,右下の図式が可換になるような同相写像 $\varphi: F_f \to F'_f$ がある.

$$F'_{f} \longrightarrow P(Y, y_{0}) \qquad F_{f} \xrightarrow{\varphi} F'_{f}$$

$$\downarrow^{\text{ev}_{1}} \qquad \downarrow^{\pi'_{f}} \qquad \downarrow^{\pi'_{f}}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad X = X$$

特に, π_f はファイブレーションである.

Proof. 略. F_f と F_f' を具体的に書き下せば φ をどう作ればよいかわかる.

■連続写像のホモトピー完全列 $f\colon (X,x_0)\to (Y,y_0)$ を基点付き連続写像とし, $F:=\pi_f^{-1}(x_0)$ $(\pi_f$ は前段落のもの)とおき,F の F_f への包含を f_f とおく. f_f の fibrant replacement f_f のホモトピー完全列を組み合わせて下の図式を得る.

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(i_f)_*} \pi_k(E_f) \xrightarrow{(p_f)_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow$$

$$\parallel \qquad \qquad \cong \downarrow^{r_*} \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$\longrightarrow \pi_k(F) \xrightarrow{(j_f)_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \pi_k(X) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F) \xrightarrow{(j_f)_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow$$

上の図式の台形の部分以外は、連続写像のレベルでのホモトピー可換図式から引き起こされるので 可換である.よって、完全列

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow$$

を得る. これを f のホモトピファイバー列という.