

# ホモトピー論の基本について

## 概要

ホモトピー論の基本について網羅的に書いたものではなく、勉強中に特に注意して考えたことをまとめたもの。構成は [FF16][Whi12] に依る。

## 目次

0	準備	1
0.1	記号	1
0.2	toy model となる空間の例	2
0.2.1	無限次元ユークリッド空間, 無限次元球, 無限次元射影空間	2
0.2.2	四元数射影空間	2
0.3	空間に対する操作	2
0.3.1	ウェッジ和 (wedge sum)	2
1	ホモトピー群	3
1.1	相対ホモトピー群の 4 種類の定義	3
1.2	Hurewicz の定理	5
1.3	Freudenthal の懸垂定理	6
1.4	Whitehead の定理	6
2	局所係数の (コ) ホモロジー	6
2.1	局所系の 2 種類の定義	6
2.2	局所係数の (コ) ホモロジーの計算例	6
3	障害理論	6
3.1	CW 複体上の写像を延ばせるかどうかの criterion	6
3.2	E-M 空間	7

## 0 準備

### 0.1 記号

[Whi12] ではほかの教科書とちょっとずつ違う記号を使っているのだからここにまとめておく。この PDF では [Whi12] 以外でよく見る記法を使う。

- $I$ : 単位閉区間。空間対  $(I, 0)$  も  $I$  とかく。[Whi12] では  $(I, 0)$  のことを  $\mathbf{T}$  とかく。

- $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ : 空間のウェッジ和.  $X \vee Y$  ともかく.
- $k: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ :  $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  の上への埋め込み.
- $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$  空間のスマッシュ積 (smash product, reduced join).
- $CX := (I, 0) \wedge (X, x_0)$ : 点付き空間の約錐 (reduced cone). [Whi12] では  $\mathbf{T}X$  とか  $TX$  とかかれる.
- $\Sigma X := S^1 \wedge X$ : 点付き空間の約懸垂 (reduced suspension). [Whi12] では  $SX$  とかかれる.
- $\text{Map}(X, Y) = Y^X$ :  $X$  から  $Y$  への連続写像全てを集めた空間.
- $\text{Path}(X) := X^I$ : free path space. [Whi12] では  $\mathbf{F}X$  とかかれる.
- $\text{Path}(X, x_0) := (X, x_0)^{(I, 0)}$ : based path space. [Whi12] では  $\mathbf{P}X$  とかかれる.

## 0.2 toy model となる空間の例

### 0.2.1 無限次元ユークリッド空間, 無限次元球, 無限次元射影空間

$K = \mathbb{R}$  もしくは  $\mathbb{C}$  とする. inclusion

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^{n+1} \\ \cup & & \cup \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, 0) \end{array}$$

により, 空間の図式  $K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow \dots$  を得る. この colimit を  $K^\infty$  と定める. また  $K^\infty$  は具体的に構成できる.

$$K^\infty := \{(a_n)_{n \geq 1} \in K^{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \mid \text{有限個の } n \text{ を除いて } a_n = 0\}$$

と定め,  $K^n$  の元を最初の  $n$  成分に写す自然な単射の族  $\{K^n \hookrightarrow K^\infty\}_{n \geq 1}$  による終位相を入れる\*1. 無限次元球面  $S^\infty$  や無限次元閉球  $D^\infty$ , 無限次元射影空間  $\mathbb{R}P^\infty$ ,  $\mathbb{C}P^\infty$  も同様に定める.

### 0.2.2 四元数射影空間

四元数環  $\mathbb{H}$  に対しても射影空間を同様に定められる.  $\mathbb{H}^\times$  の右からの積による左作用\*2で  $\mathbb{H}^{n+1}$  を割ったものを四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  と定める. 上と同様に  $\mathbb{H}P^\infty$  を定められる.

## 0.3 空間に対する操作

### 0.3.1 ウェッジ和 (wedge sum)

■定義 基点付き空間の族  $\{(X_i, *_i)\}_{i \in I}$  に対し, ウェッジ和  $\bigvee_{i \in I} (X_i, *_i) = \bigvee_{i \in I} X_i$  を, 商空間

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \bigsqcup_{i \in I} X_i \bigg/ \bigsqcup_{i \in I} *_i$$

\*1 終位相については [nLa24] を参照.

\*2 四元数環は非可換なので, 四元数射影空間というと右作用による商空間とする.

と定める．また基点付き空間を 1 点空間からの射  $*_i: *_i \rightarrow X_i$  と思うと，それらの族のウェッジ和は圏  $\mathbf{Top}$  における図式<sup>\*3</sup>の pushout

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{i \in I} *_i & \xrightarrow{(\ast_i)_{i \in I}} & \bigsqcup_{i \in I} X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \bigvee_{i \in I} X_i \end{array}$$

として圏論的に定義することもできる．

■性質（写像のウェッジ積の構成） 図式の pushout としての定義を見ると，基点付き空間の「和」思うことができる．基点を保つ連続写像の族  $(f_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  が与えられると，ディスジョイント和の普遍性により連続写像  $\bigsqcup_{i \in I} f_i: \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow Y$  を得るが，さらにウェッジ和の普遍性により，次の図式を可換にする連続写像  $\bigvee_{i \in I} f_i$  を得る．

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{i \in I} *_i & \xrightarrow{\quad} & \bigsqcup_{i \in I} X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \bigvee_{i \in I} X_i \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \bigsqcup_{i \in I} f_i \\ \searrow \bigvee_{i \in I} f_i \\ \searrow \\ Y \end{array}$$

とくに， $I = \{1, 2\}$  の場合は  $f_1 \vee f_2$  とかく．

## 1 ホモトピー群

### 1.1 相対ホモトピー群の 4 種類の定義

4 種類の相対ホモトピー群の定義を述べる．絶対バージョンに対しても同じことが言えるが，自然に同一視できるいろいろな定義を interchangeably に使えるようにになりたい場面，例えば自分にとって慣れている定義とは異なる定義を採用している論文を読むときなどのために，各定義の関係を把握しておくと思便利だと思う．また，幾何学的直感の働きやすい定義と，理論的に便利な abstract な定義の間の関係を把握しておくと思 abstract な対象に対する直感も育まれるとおもう．そのための備忘録，チートシートとしてこの小節を用意する．

■一つ目の定義（cube を使った定義）  $I^n$  の部分空間  $J^n$  を  $J^n := \partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{0\}$  と定める． $n = 1, 2, 3$  の場合を書けばその形はわかる． $n = 1$  の場合  $\{0\}$ ， $n = 2$  の場合上が空いたコの字型  $(\sqcup)$ ， $n = 3$  の場合上の開いた箱型である．

基点付き空間対  $(X, A, *)$  とは空間対  $(X, A)$  と  $A$  の点  $* \in A$  の組のことである．このとき， $n > 0$  に対し<sup>\*4</sup> $(X, A, *)$  の  $n$  次ホモトピー群  $\pi_n(X, A, *)$  を 3 対のホモトピー集合

$$\pi_n(X, A, *) := [(I^n, \partial I^n, J^n), (X, A, *)]$$

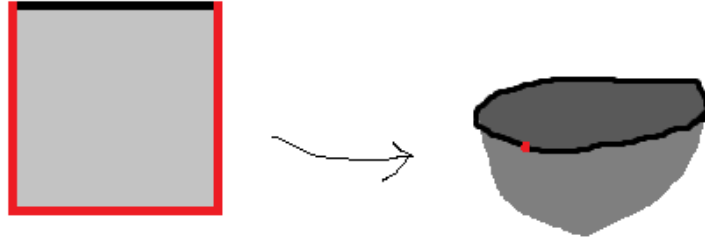
<sup>\*3</sup> 基点付き空間の圏  $\mathbf{Top}_*$  ではない．

<sup>\*4</sup>  $n = 0$  の場合でも定義は可能だが， $I^0 = 0$ ， $\partial I^0 = \emptyset$ ， $J^0 = \emptyset$  ゆえ，絶対バージョンと同じになる．

と定める．基点が文脈から明らかな時は  $\pi_n(X, A)$  と書く．この定義から， $\pi_n(X, A, *)$  の元の代表元  $f, g: I^n \rightarrow X$  が等しいための条件はホモトピー  $h: I^n \times I \rightarrow X$  で，次を満たすものが存在することである．

任意の  $t \in I$  と  $x \in \partial I^n$ ,  $y \in J^n$  に対し,  $h(x, t) \in A$  かつ  $h(y, t) = *$ .

ホモトピー群の元の代表元は空間の 3 対の連続写像であるという条件から，その像は  $n = 2$  の場合例えば以下の絵（この絵の場合， $D^2$  と同相なもの絵を描いているつもりである．もちろんこんなにきれいにいかない場合がほとんどである！）のようになる． $J^n$  を 1 点につぶすことにより空間の 3 対の同相  $(I^n, \partial I^n, J^n) \cong (D^n, S^{n-1}, *)$  を得るので．ホモトピー群はこの同相を通じて  $[(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, *)]$  と同一視できる．



■群構造  $n \geq 2$  に対し\*<sup>5</sup>,  $\pi_n(X, A)$  に群構造を入れる． $f, g: (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, *)$  に対し，その積  $f \cdot g: (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, *)$  を，

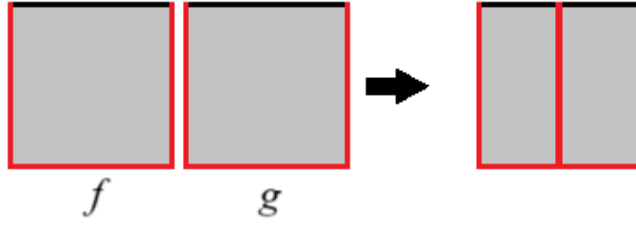
$$(f \cdot g)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq 1/2) \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & (1/2 \leq t_1 \leq 1) \end{cases}$$

と定めると，写像空間  $\text{Map}((I^n, \partial I^n, J^n), (X, A, *))$  に  $H$ -space の構造が入る（略）．よってホモトピー群に群の構造が入る．また  $n \geq 3$  なら  $\pi_n(X, A)$  は Abel 群である．可換なことの証明は絶対バージョンと同様である． $n = 2$  だと可換とは限らないのはなぜか． $\pi_1(X)$  が可換とは限らないという事実よりも非自明に思えるので，もう少しちゃんと考えたい (@TODO)． $X := (D^2 \vee D^2, S^1 \vee S^1)$  への 2 種類の標準的な inclusion  $i_1, i_2: (D^2, S^1) \hookrightarrow X$  の積  $i_1 \cdot i_2$  と  $i_2 \cdot i_1$  の間に基点を止めた相対ホモトピーがなさそうなのでそれで理解できそうだが...（これこそ障害理論の適用例として使える？（2024/5/4 追記 **使えない**．普通に対のホモトピー完全列を使えば示せてしまう））．

■二つ目の定義（disc を使った定義） @TODO  $I^n$  を  $D^n$  に置き換えた場合に pinch map および foldingmap を導入し，上の定義とは少し異なる幾何学的直感を与える，しかし同一視できる群構造の入れ方を具体的に書き下しておく．

■三つ目の定義（homotopy fiber の  $n - 1$  次 loop space の 0 次ホモトピー群） @TODO loop space に標準的な積が定まり，それが  $H$ -space になることを述べた後  $\pi_n(X, A) := \pi_0(\Omega^{n-1}(\text{Path}(X, *, A)))$  と定める．

\*<sup>5</sup>  $n = 1$  だと，道の終点が  $A$  に含まれることしか保証されていないので，「道をつなぐ」ことが自然に定義できない．例えば  $A$  が 2 点集合だった場合を考えればわかる．



■四つ目の定義 (homotopy fiber の  $n-1$  次ホモトピー群) @TODO inclusion  $A \hookrightarrow X$  のホモトピーファイバーの  $n-1$  次ホモトピー群を  $n$  相対ホモトピー群として定める. loop space の性質をいくつか使えば三つ目のとほぼ同じに見える.

■すべての定義を自然に同一視できること 4つの定義によって作られた相対ホモトピー群の間に自然な同型を構成する. 面倒だが, いろんな定義を interchangeably に使えることと, その間の同型を具体的に知っておくこと, また幾何学的に絵で理解できる定義と abstract に作られた定義の間の対応を具体的に見ておくことで, abstract な対象に対する直感ができることは重要だと思うのでやる.

## 1.2 Hurewicz の定理

■Hurewicz homomorphism 定理に登場する Hurewicz homomorphism  $\rho: \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  の定義を述べる.  $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  が  $\alpha \in \pi_n(X, A)$  を代表するとする\*6. また, 生成元  $[D^n, S^{n-1}] \in H_n(D^n, S^{n-1})$  を固定する. これは  $(D^n, S^{n-1})$  の向きを固定することと対応する. このとき, Hurewicz map  $\rho: \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  を

$$\rho(\alpha) := f_*([D^n, S^{n-1}])$$

と定める. ホモロジー論のホモトピー不変性により, この定義は well-defined である.

補題 1.1. Hurewicz map は準同型である.

*Proof.* ホモトピー群の定義は, 二つ目のものを採用する.  $f, g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  がそれぞれ  $\alpha, \beta \in \pi_n(X, A)$  を代表するとする. このとき,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha\beta) &= \rho([f][g]) \\ &= \rho([(f \vee g) \circ \text{pinch}]) \\ &= (f \vee g)_* \text{pinch}_*(\sigma) \end{aligned}$$

である. ここで生成元  $\sigma \in H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  を一つ固定した. 包含  $i_1, i_2: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})$  によりひきおこされる埋め込みにより,  $H_n((D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  の生成系  $\sigma_1 := i_{1*}\sigma$ ,  $\sigma_2 := i_{2*}\sigma$  を得る.  $\text{pinch}_*(\sigma) = \pm\sigma_1 \pm \sigma_2$  となる (複号は pinch のとりか

\*6  $f$  は基点  $*$  を保つ写像だが, 記法を短くするため  $(D^n, S^{n-1}, *)$  等の「 $*$ 」は略す.

たによる). よって,

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha\beta) &= (f \vee g)_*(\pm\sigma_1 \pm \sigma_2) \\
&= \pm(f \vee g)_*i_{1*}\sigma \pm (f \vee g)_*i_{2*}\sigma \\
&= \pm((f \vee g) \circ i_1)_*\sigma \pm ((f \vee g) \circ i_2)_*\sigma \\
&= \pm f_*\sigma \pm g_*\sigma \\
&= \rho(\alpha) + \rho(\beta)
\end{aligned}$$

である\*7. □

### 1.3 Freudenthal の懸垂定理

### 1.4 Whitehead の定理

## 2 局所係数の (コ) ホモロジー

### 2.1 局所系の 2 種類の定義

### 2.2 局所係数の (コ) ホモロジーの計算例

## 3 障害理論

### 3.1 CW 複体上の写像を延ばせるかどうかの criterion

$X$  を CW-複体,  $Y$  を単連結な位相空間,  $n \geq 0$  とする. このとき,  $n$ -skeleton  $X_n$  上の連続写像  $f_n: X_n \rightarrow Y$  を  $n+1$ -skeleton  $X_{n+1}$  上に連続に延ばせるかという問題を考える.  $(n+1)$ -cell 全体を  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_{n+1}}$  とおき, 各  $\lambda \in \Lambda_{n+1}$  に対し特性写像  $\varphi_\lambda: (D_\lambda^{n+1}, S_\lambda^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$  を固定する.

この状況において,  $f_n$  が  $e_\lambda$  に延びることは  $f_n \circ \varphi_\lambda|_{S_\lambda^n}: S_\lambda^n \rightarrow Y$  が null-homotopic であることと等しく, また  $\Leftrightarrow [f_n \circ \varphi_\lambda|_{S_\lambda^n}] = 0 \in \pi_n(Y)$  であることと等しい. したがって  $f_n$  が  $X_{n+1}$  に延びるための条件は, 任意の  $\lambda \in \Lambda_{n+1}$  に対して,  $[f_n \circ \varphi_\lambda|_{S_\lambda^n}] = 0 \in \pi_n(Y)$  となることである.

以上の構成により定まる写像  $\Lambda_{n+1} \rightarrow \pi_n(Y)$  は  $X$  の cellular cochain  $\tilde{O}(f_n) \in C^{n+1}(X, \pi_n(Y)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}, \pi_n(Y))$  を定める.

**補題 3.1.**  $\tilde{O}(f_n)$  は特性写像  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_{n+1}}$  のとりかたに依らない.

---

\*7 4 つ目の等号は,  $(f \vee g) \circ i_1 = f$  などから従う.  $f \vee g$  はウェッジ和の普遍性により引き起こされた写像なので, 可換図式を追えばこのことは示せる.

*Proof.* 次の可換図式を使って  $\tilde{\mathcal{O}}(f_n)$  の構成を丁寧にする.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \bigoplus_{\lambda} \pi_n(S_{\lambda}^n) & & \\
& \swarrow \oplus_{\lambda} (\varphi_{\lambda}|_{S_{\lambda}^n})_* & & \searrow \oplus_{\lambda} \rho & \\
\pi_n(X_n) & \xrightarrow{\rho} & H_n(X_n) & \xleftarrow{\oplus_{\lambda} (\varphi_{\lambda}|_{S_{\lambda}^n})_*} & \bigoplus_{\lambda} H_n(S_{\lambda}^n) \\
\uparrow \partial & & \uparrow \partial & & \cong \uparrow \partial \\
\pi_{n+1}(X_{m+1}, X_n) & \xrightarrow{\rho} & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \xleftarrow{\cong} & \bigoplus_{\lambda} H_{n+1}(D_{\lambda}^{n+1}, S_{\lambda}^n) \\
& & & & \swarrow \oplus_{\lambda} (\varphi_{\lambda})_*
\end{array}$$

$\tilde{\mathcal{O}}(f_n)$  は各  $\lambda \in \Lambda_{n+1}$  に対し  $[\varphi_{\lambda}|_{S_{\lambda}^n}] = (\varphi_{\lambda}|_{S_{\lambda}^n})_*[\text{id}_{S_{\lambda}^n}]$  を対応させて準同型  $\bigoplus_{\lambda} H_{n+1}(D_{\lambda}^{n+1}, S_{\lambda}^n) \rightarrow \pi_n(X_n)$  をつくり, さらにそれを  $(f_n)_*$  で  $\pi_n(Y)$  に押し出してできた  $\bigoplus_{\lambda} H_{n+1}(D_{\lambda}^{n+1}, S_{\lambda}^n) \rightarrow \pi_n(Y)$  を, 固定していた特性写像により定まる同型 (右下矢印) で準同型  $\square$

## 3.2 E-M 空間

### 参考文献

- [FF16] Anatolij Timofeevič Fomenko and Dmitriy Borisovič Fuks. *Homotopical topology*, volume 273. Springer, 2016.
- [nLa24] nLab authors. weak topology. <https://ncatlab.org/nlab/show/weak+topology>, May 2024. Revision 12.
- [Whi12] George W Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2012.

## 索引

$\mathbb{C}^\infty$ , 2

$\mathbb{C}P^\infty$ , 2

$CX$  (約錐), 2

$D^\infty$ , 2

$\mathbb{H}P^\infty$ , 2

$\mathbb{H}P^n$ , 2

$J^n$  ( $I^n$  の部分空間), 3

$k: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ , 2

$K^\infty$ , 2

$\text{Map}(X, Y)$ , 2

$\pi_n(X, A)$ , 4

$\pi_n(X, A, *)$ , 3

$\mathbb{R}^\infty$ , 2

$\mathbb{R}P^\infty$ , 2

$\Sigma X$  (約懸垂), 2

$S^\infty$ , 2

$X \vee Y$ , 2

$X \wedge Y$ , 2

ウェッジ和, 2

基点付き空間対, 3

四元数射影空間, 2

終位相, 2

( $n$  次) ホモトピー群, 3

無限次元球面, 2

無限次元射影空間, 2

無限次元閉球, 2

約錐, 2