編集メモ

- このメモは昼間眠くないときにこの pdf を読んで気づいたことをまとめたものである．夜に編集すると勢いでやっつけ仕事のようになる場合がある．
- 現状分かりにくい．
  - 「便利な写像」は便利だが，基本群のホモトピー群への作用をここまで具体的に書かなくても後の議論は回るのでは？
  - 絶対ホモトピー群は $[(S^n,*),(X,*)]_0$ を採用していながら相対ホモトピー群は $[(I^n,\partial I^n,J^{n-1}),(X,A,*)]_0$ を採用している部分がある．後者の cube を使う方法にした方が対のホモトピー完全列を記述しやすい．

Obstruction Cochain

概要

Obstruction cochain が特性写像のとりかたに依らないこと，およびそれが cocycle であることの証明

目次

0　基本群のホモトピー群への作用

0.1　便利な写像

C_i で inclusion $i\colon S^{n-1} \to D^n$ の mapping cylinder を表すことにする．ただし，$CS^{n-1} = I \times S^{n-1}/$ の $1 \times S^{n-1}$ と ∂D^n を接着しているとする．同相写像 $C_i \to D^n$ を次のように作る．

$$
\begin{aligned}
(t, x) &\mapsto \frac{2-t}{2}x \quad &((t, x) \in CS^{n-1}) \\
x &\mapsto x/2 \quad &(x \in D^n)
\end{aligned}
$$

これの逆を $b\colon D^n \to C_i$ とおく．

0.2　基本群のホモトピー群への作用

■絶対ホモトピー群への作用　G. W. Whitehead の III 章を参照[*1]（この小節の内容よりも一般の状況でいろいろ書いてある）．

X の点 x_1, x_0 を結ぶ path $\gamma\colon (I, 0, 1) \to (X, x_1, x_0)$ の，ホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ への作用を定める．spheroid[*2]$f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ に対し，$\tau_\gamma(f)\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_1)$ を $\tau_\gamma(f) := ((\mathrm{id}_I \times \gamma) \cup f) \circ b$ と定める[*3]．

補題 0.1. γ, γ' が端点を止めてホモトピック，f, f' が基点を止めてホモトピックであるとする．このとき，$\tau_\gamma(f)$ と $\tau_{\gamma'}(f')$ は基点を止めてホモトピックである．

[*1] 一度立ち止まって，この文章を声に出して読め．

[*2] 球面からの連続写像を spheroid と呼ぶことにする．

[*3] $f\colon CS^{n-1} \to X$ と $g\colon D^n \to X$ で，$f|_{1\times S^{n-1}} = g|_{\partial D^n}$ を満たすものが引き起こす写像 $C_i \to X$ のことを $f \cup g$ と書くことにする．

Proof. γ,γ' のホモトピーを $h\colon I\times I\to X$，f,f' のホモトピーを $H\colon I\times D^n\to X$ とおく．このとき，ホモトピー $\Phi\colon I\times D^n\to X$ を，$\Phi_t:=((\mathrm{id}_I\times h_t)\cup H_t)\circ b$ と定める．これを具体的に書くと

$$\begin{cases} x\mapsto H(t,2x) & (0\le\|x\|\le 1/2)\\ x\mapsto (2-2\|x\|,h(t,x/\|x\|)) & (1/2\le\|x\|\le 1)\end{cases}$$

である．これは連続で，境界は基点にうつる．また $\Phi_0=\tau_\gamma(f)$，$\Phi_1=\tau_{\gamma'}(f')$ である． □

この補題から，γ の端点を止めたホモトピー類 $\alpha=[\gamma]$ は写像 $\tau_\alpha\colon\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,x_1)$ を定める．

■相対ホモトピー群への作用　$f\colon(D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,x_0)$ と path $\gamma\colon(I,0,1)\to(A,x_1,x_0)$ を任意にとる．$\tau'_\gamma(f)\colon(D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,x_1)$ を $\tau'_\gamma(f):=(\gamma\vee f)\circ b'$ と定める．

補題 0.2. γ,γ' が端点を止めてホモトピック，f,f' が $\pi_n(X,A,x_0)$ の同じ元を代表するとする．このとき，$\tau'_\gamma(f)$ と $\tau'_{\gamma'}(f')$ は $\pi_n(X,A,x_1)$ の中で同じである．

Proof. 絶対バージョンの同じ補題とパラレルである． □

上の補題から，γ の端点を止めた A の中でのホモトピー類 α は写像 $\tau'_\alpha\colon\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(X,A,x_1)$ を定める．

0.3　ホモトピー完全列との関係

基本群の作用が対のホモトピー完全列に引き起こす準同型を見る．inclusion の引き起こす準同型 j_* を $j_*\colon\pi_n(X)\to\pi_n(X,A)$ を，$j_*[f]:=[f\circ p]$ と定める．ここで，p は $p\colon(D^n,S^{n-1})\to(D^n/S^{n-1},S^{n-1}/S^{n-1})=(S^n,*)$ である．あとの i_* や ∂_* は自明なとおりである．

定理 0.3. (X,A) を空間対，$n\ge 0$ とする．このとき各 $[\gamma]=\alpha\in\pi_1(A)$ に対し，次の図式は可換である．ただし，$\beta:=i_*\alpha$ である．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A) \arrow[r,"\partial_*"] \arrow[d,"\tau'_\alpha"] & \pi_n(A) \arrow[r,"i_*"] \arrow[d,"\tau_\alpha"] & \pi_n(X) \arrow[r,"j_*"] \arrow[d,"\tau_\beta"] & \pi_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d,"\tau'_\alpha"] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,A) \arrow[r,"\partial_*"] & \pi_n(A) \arrow[r,"i_*"] & \pi_n(X) \arrow[r,"j_*"] & \pi_n(X,A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Proof.（左の四角について）$[f]\in\pi_{n+1}(X,A)$ を任意にとる．右上からたどる合成について，

$$\tau_\alpha\partial_*[f]=\tau_\gamma(|_{S^n})=(\gamma\vee f|_{S^n})\circ b$$

である．また，左下の合成は

$$\partial_*\tau'_\alpha[f]=\partial_*((\gamma\vee f)\circ b')=(\gamma\vee f)\circ b=(\gamma\vee f|_{S^n})\circ b$$

だから左の四角は可換である．

（真ん中の四角について）$[f]\in\pi_n(A)$ を任意にとる．右上からたどる合成について，

$$\tau_\beta i_*[f]=\tau_{i_*\alpha}[f]=((i\circ\gamma)\vee f)\circ b=(\gamma\vee f)\circ b$$

左下をたどる合成について，

$$i_*\tau_\alpha[f] = i_*((\gamma \vee f) \circ b) = (\gamma \vee f) \circ b$$

よって真ん中は可換である．

（右の四角について）$[f] \in \pi_n(X)$ を任意にとる．右上をたどる合成について，

$$\tau'_\alpha j_*[f] = \tau'_\gamma(f \circ p) = (\gamma \vee (f \circ p)) \circ b'$$

左下をたどる合成について，

$$j_*\tau_\beta[f] = j_*\tau_\gamma(f) = j_*((\gamma \vee f) \circ b) = (\gamma \vee f) \circ b \circ p$$

□

補題 0.4. $\gamma*$ は群準同型である．

Proof. $[f], [g] \in \pi_n(X, x_1)$ をとる． □