Postnikov System

概要

Griffiths-Morgan の教科書の Postnikov System の構成がちゃんと条件を満たすことを示せなかった．主に f_n の引き起こすホモトピー群の準同型の記述に困難性があった．前回終盤の議論により，$K(\pi, n)$ を codomain にもつホモトピー集合 $[X, K(\pi, n+1)]$ と，X 上の principal $K(\pi, n)$ ファイブレーション（with a section）の同値類の対応，および同一視 $K(\pi_n(X), n) = \pi_n(X)$ の扱いに気を付けながら丁寧に構成を追う必要があると思われた．

これを解決するために，別の文献（G.W.Whitehead）での Postnikov System の構成を見て，Eilenberg-MacLane 空間の扱いを学ぶとともに，Griffiths-Morgan で直面した f_{n*} を記述する手法を模索する．

目次

0 ホモトピーファイバー列

空間対やファイブレーションに対してホモトピー完全列が構成された（河澄等を参照）．ここでは記号の準備もかねて任意の連続写像に対して fibrant replacement を用いて，ファイブレーションに対するものと類似のホモトピー完全列を構成する．

■ファイブレーションに対するホモトピー完全列　$F \to E \to B$ を基点付きファイブレーションとする．このとき，$k \geq 1$ に対して $p_* \colon \pi_k(E, F) \to \pi_k(B)$ が同型になるのだった．よって，対 (E, F) のホモトピー完全列（下図上段）により，ファイブレーション p のホモトピー完全列（下図下段）を得る．

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(E, F) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "p_*", "\cong"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] & \pi_k(E) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_k(B) \arrow[r, "\Delta_*"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

ここで，Δ_* は $\partial_* \circ (p_*)^{-1}$ である．

■fibrant replacement　基点付き連続写像のホモトピーファイバー列を，ファイブレーションのホモトピー完全列を利用して作る．そのために，連続写像をファイブレーションに置き換える．

定理 0.1 (fibrant replacement)**.** $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ を基点付き連続写像とする．また，

$$
\begin{aligned}
&E_f := \{(x,\gamma)\in X\times Y^I \mid f(x)=\gamma(0)\}\\
&p_f\colon E_f\to Y,\ (x,\gamma)\mapsto\gamma(1)\\
&r_f\colon E_f\to X,\ (x,\gamma)\mapsto x\\
&F_f := p_f^{-1}(y_0)
\end{aligned}
$$

とおく．また i_f を包含 $F_f\to E_f$，π_f を合成 $r\circ i_f$ とおく．

このとき $p_f\colon (E_f,(x_0,c_{y_0}))\to(Y,y_0)$ は基点付きファイブレーションで下の図式（特に下の三角形）はホモトピー可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & & F_f \arrow[lld, "\pi_f"'] \arrow[d, hook, "i_f"] \arrow[ld, phantom, "\circlearrowright"] \\
X \arrow[rd, "f"'] & & E_f \arrow[ll, "r_f"] \arrow[ld, "p_f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}
$$

Proof. 略．玉木大のファイバー束とホモトピーを参照． □

補題 0.2. $f\colon X\to Y$ を基点付き連続写像とする．Y の path fibration を f で引き戻したものを $\pi'_f\colon F'_f\to X$ とおく（左下図式）．このとき，右下の図式が可換になるような同相写像 $\varphi\colon F_f\to F'_f$ がある．

$$
\begin{tikzcd}
F'_f \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_f"'] & P(Y,y_0) \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_f \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_f"'] & F'_f \arrow[d, "\pi'_f"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}
$$

特に，π_f はファイブレーションであり，π_f と π'_f は X 上で同型である．

Proof. 略．F_f と F'_f を具体的に書き下せば φ をどう作ればよいかわかる． □

■連続写像のホモトピー完全列

定理 0.3 (ホモトピーファイバー列)**.** $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ を基点付き連続写像とし，$F:=\pi_f^{-1}(x_0)$（π_f は前段落のもの）とおき，F の F_f への包含を j_f とおく．f の fibrant replacement p_f のホモトピー完全列と π_f のホモトピー完全列を組み合わせて下の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{k+1}(Y) \arrow[r, "\Delta_*"] & \pi_k(F_f) \arrow[r, "(i_f)_*"] \arrow[d, equal] & \pi_k(E_f) \arrow[r, "(p_f)_*"] \arrow[d, "r_*", "\cong"'] & \pi_k(Y) \arrow[r, "\Delta_*"] & \pi_{k-1}(F_f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r, "(j_f)_*"'] & \pi_k(F_f) \arrow[r, "(\pi_f)_*"'] & \pi_k(X) \arrow[r, "\Delta_*"'] \arrow[ru, "f_*"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r, "(j_f)_*"'] & \pi_{k-1}(F_f) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

上の図式の台形の部分以外は，連続写像のレベルでのホモトピー可換図式から引き起こされるので可換である．よって，完全列

$$
\longrightarrow \pi_{k+1}(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow
$$

を得る．これを f のホモトピファイバー列という．

1 Postnikov System の構成

1.1 G. W. Whitehead の教科書の構成

Griffiths-Morgan の教科書にある構成で本当に Postnikov Syaytem の条件を満たすものが作れているかチェックしきれなかった．とくに f_n の引き起こすホモトピー群の同型の部分が示せなかった．

そこでまず，G. W. Whitehead の教科書にある Postnikov system の構成を詳しく調べる．これは Griffiths-Morgan にあるものとは手順が少しだけ違う．まず，与えられた空間 X に対し，$K(\pi_n(X), n)$-fibration のタワーを先に作り，そのあと fibration の section に対する障害理論を使わずに各 $f_n\colon X \to X_n$ を構成するという手を取っている．この構成と Griffiths-Morgan の教科書の構成に類似点を見つけ，Griffiths-Morgan の教科書の構成の方を理解しようとしてみる．

■n-connective fibration　X を弧状連結空間とする．このとき，$\pi_{n+1}(X)$ の生成元に沿って X に $(n+2)$-cell を接着することで新たな空間 X' で $\pi_{n+1}(X') = 0$ なるものが作れる．これを繰り返すことで $(n+1)$-連結な相対 CW 複体 (X^*, X) であって $\pi_i(X^*) = 0$ for $i \geq n+1$ を満たすものが作れる．

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(X^*) \longrightarrow \pi_{k+1}(X^*, X) \longrightarrow \pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(X^*) \longrightarrow \pi_k(X^*, X) \longrightarrow \pi_k(X) \longrightarrow$$

さらに，包含 $i\colon X \hookrightarrow X^*$ に対し $X_n := F_i$，$p_n := \pi_i$ とおく．記号は fibrant replacement の定義で使われているものに準ずる．i のファイバーホモトピー列より，ファイブレーション p_n は次を満たす．

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(X^*) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(X_n) \xrightarrow{p_{n*}} \pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(X^*) \longrightarrow$$

- $\pi_k(X^*) = \pi_{k+1}(X^*) = 0$ for $k \geq n+1$ ゆえ p_{n*} は $k \geq n+1$ で同型.
- X^* は $n+1$ 次元以下のセルを持たないので，包含準同型 $\pi_k(X) \to \pi_k(X^*)$ は $k \leq n$ で同型，$k = n+1$ で全射．よって X_n は n-連結である．

以上をまとめると，次を得る．

定理 1.1 (n-connective fibration の存在)**.** X を弧状連結空間とする．このとき，任意の $n > 0$ に対し，ファイブレーション $p_n\colon X_n \to X$ で次を満たすものが存在する．

- $p_{n*}\colon \pi_k(X_n) \to \pi_k(X)$ は $k \geq n+1$ で同型.
- X_n は n-連結.

定理の条件を満たすファイブレーションを n-connective fibration と呼ぶ．また，$\pi_i(Y) = 0$ ($i \leq n$) を満たす空間 Y を n-anticonnected space と呼ぶ．X を含む空間 X^* が n-anticonnected で (X^*, X) が n-connected なら X^* を X の n-anticonnected extension と呼ぶ．さらに加えて (X^*, X) が相対 CW-複体で，X^* が n 次元以下のセルを持たないとき，X^* は X の regular n-anticonnected extension と呼ぶ.

とくに，上の定理の X_n を構成するときに使った X^* は，X の regular $(n+1)$-anticonnected extension である．

以下いくつかの命題を用いて，1.1 で構成された n-connective fibration のホモトピー一意性を示す．

定理 1.2 (連続写像をその anticonnected extension に延ばすための十分条件と延長のホモトピー一意性)**.** X^* (resp. Y^*) をそれぞれ X (resp. Y) の regular m (resp. n)-anticonnected extension とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次が成立する．

(1) $m \leq n$ ならば，f は $\tilde{f}\colon X^* \to Y^*$ に延びる．
(2) $m \leq n+1$ ならば，2 つの延長 $g, g'\colon X^* \to Y^*$ はホモトピック (rel. X) である．

Proof. (1) X^* は n 次元以下のセルを持たないので，f は n-skeleton $(X^*)^{(n)} = X$ に延びる．f を $(X^*)^{(k)} \to Y^*$ に延長する障害類は $H^{k+1}(X^*, X; \pi_k(Y^*)) = 0$ に属する（$k \geq n$)．よって f は X^* に延長する．
(2) g, g' を f の延長とする．これらは $(X^*)^{(n)}$ 上で f に一致する．$k \leq n+1$ とする．g, g' のホモトピー (rel. X) を $X^{(k)}$ に延ばすための障害類は $H^k(X^*, X; \pi_k(Y^*)) = 0$ に属するので，g, g' はホモトピック (rel. X) である．

□

系 1.3 (anticonnected extension の一意性)**.** X^*, X'^* をともに X の regular n-anticonnected extension とする．このとき，(X^*, X) と (X'^*, X) はホモトピー同値である．

Proof. 定理で $m = n$ としたものより，X 上の恒等写像は $f\colon (X^*, X) \to (X'^*, X)$, $g\colon (X'^*, X) \to (X^*, X)$ に延びる．合成 $f \circ g$, $g \circ f$ はともに X 上の恒等写像の延長だから，定理よりこれらは恒等写像にホモトピック (rel. X) である．よって対のホモトピー同値 $(X^*, X) \simeq (X'^*, X)$ を得る． □

系 1.4 (1.1 で構成された n-connective fibration の一意性)**.** X^*, X'^* を，X の regular $(n+1)$-connected extension とする．$p\colon \tilde{X} \to X$, $p'\colon \tilde{X}' \to X$ をそれぞれ定理 1.1 で構成した n-connective fibration とする[*1]．このとき，p, p' はファイバーホモトピー同値である．

Proof. $f\colon (X^*, X) \to (X'^*, X)$, $g\colon (X'^*, X) \to (X^*, X)$ をそれぞれ id_X の延長とする．f_* を f が誘導する pointed path space[*2]上の射 $PX^* \to PX'^*$ とすると pullback の普遍性より $f_1\colon \tilde{X} \to \tilde{X}'$ が伸びる．

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[dr, dotted, "f_1"] \arrow[ddr, "p"'] & & PX^* \arrow[d, "f_*"] \\
& \tilde{X}' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & PX'^* \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
& X \arrow[r, hook] & X'^*
\end{tikzcd}$$

同様にして $g_1\colon \tilde{X}' \to \tilde{X}$ を得る．$H\colon X^* \times I \to X^*$ を id_{X^*} と $g \circ f$ のホモトピー (rel. X) とすると，$H_1((x, \gamma), t) := (x, H(\gamma(-), t))$ によりホモトピー $H_1\colon \tilde{X} \times I \to \tilde{X}$ が定まる．これは $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ と $g_1 \circ f_1$ の，X 上のホモトピーである．同様に，$\mathrm{id}_{\tilde{X}'}$ と $f_1 \circ g_1$ の X 上のホモトピーもあるの

[*1] つまり，p は X^* の path fibration の inclusion による引き戻しである．
[*2] X^* と X'^* の基点は共通の部分集合 X の点を取ることにする．

で，p と p' はファイバーホモトピー同値である． $\square$