Postnikov System

目次

0　ホモトピーファイバー列

空間対やファイブレーションに対してホモトピー完全列が構成された．ここでは任意の連続写像に対して fibrant replacement を用いて，ファイブレーションに対するものと類似のホモトピー完全列を構成する．

■ファイブレーションに対するホモトピー完全列　$F \to E \to B$ を基点付きファイブレーションとする．このとき，$k \geq 1$ に対して $p_* \colon \pi_k(E, F) \to \pi_k(B)$ が同型になるのだった．よって，対 (E, F) のホモトピー完全列（下図上段）により，ファイブレーション p のホモトピー完全列（下図下段）を得る．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_k(E,F) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "p_*", "\cong"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] & \pi_k(E) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_k(B) \arrow[r, "\Delta_*"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ここで，Δ_* は $\partial_* \circ (p_*)^{-1}$ である．

■fibrant replacement　基点付き連続写像のホモトピーファイバー列を，ファイブレーションのホモトピー完全列を利用して作る．そのために，連続写像をファイブレーションに置き換える．

定理 0.1.（fibrant replacement）$f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ を基点付き連続写像とする．また，

$$\begin{aligned}
E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \\
p_f &\colon E_f \to Y,\ (x, \gamma) \mapsto \gamma(1) \\
r_f &\colon E_f \to X,\ (x, \gamma) \mapsto x \\
F_f &:= p_f^{-1}(y_0)
\end{aligned}$$

とおく．また i_f を包含 $F_f \to E_f$，π_f を合成 $r \circ i_f$ とおく．

このとき $p_f \colon (E_f, (x_0, c_{y_0})) \to (Y, y_0)$ は基点付きファイブレーションで下の図式（特に下の三

角形）はホモトピー可換である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & F_f \arrow[dll, "\pi_f"'] \arrow[d, hook, "i_f"] \\
X \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft" near end] & & E_f \arrow[ll, "r_f"] \arrow[dl, "p_f"] \\
 & Y \arrow[from=ul, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof. 略． □

定理 0.2. $f\colon X \to Y$ を基点付き連続写像とする．Y の path fibration を f で引き戻したものを $\pi'_f\colon F'_f \to X$ とおく（左下図式）．このとき，右下の図式が可換になるような同相写像 $\varphi\colon F_f \to F'_f$ がある．

$$\begin{tikzcd}
F'_f \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_f"'] & P(Y, y_0) \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_f \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_f"'] & F'_f \arrow[d, "\pi'_f"] \\
X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

特に，π_f はファイブレーションである．

Proof. 略．F_f と F'_f を具体的に書き下せば φ をどう作ればよいかわかる． □

■連続写像のホモトピー完全列　$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ を基点付き連続写像とし，$F := \pi_f^{-1}(x_0)$（π_f は前段落のもの）とおき，F の F_f への包含を j_f とおく．f の fibrant replacement p_f のホモトピー完全列と π_f のホモトピー完全列を組み合わせて下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{k+1}(Y) \arrow[r, "\Delta_*"] & \pi_k(F_f) \arrow[r, "(i_f)_*"] \arrow[d, equal] & \pi_k(E_f) \arrow[r, "(p_f)_*"] \arrow[d, "r_*", "\cong"'] & \pi_k(Y) \arrow[r, "\Delta_*"] & \pi_{k-1}(F_f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r, "(j_f)_*"'] & \pi_k(F_f) \arrow[r, "(\pi_f)_*"'] & \pi_k(X) \arrow[r, "\Delta_*"'] \arrow[ur, "f_*"'] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r, "(j_f)_*"'] & \pi_{k-1}(F_f) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

上の図式の台形の部分以外は，連続写像のレベルでのホモトピー可換図式から引き起こされるので可換である．よって，完全列

$$\longrightarrow \pi_{k+1}(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_k(F_f) \xrightarrow{(\pi_f)_*} \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{k-1}(F_f) \longrightarrow$$

を得る．これを f のホモトピファイバー列という．