

# 完全列と蛇の補題

## 概要

Iversen の層のコホモロジーの本 [Ive12] の section I.1 では exact category (多分、普通のものとは異なる) 上のホモロジー代数について書かれている。完全圏は射集合にアーベル群の構造を仮定していないのでアーベル圏よりも弱い圏で、例えば射の単射性の完全列による特徴づけができない等の制限がある。しかし上の本では、完全圏がアーベル圏よりも仮定が弱い圏であることにもかかわらずいろいろ議論が飛ばされているので、これを読むに足るくらいの知識ができるまでの議論をノートにまとめる。

やたら条件を緩めても欲張りだとか弱い結果しか得られないとか言われそうだが、homset にアーベル群の構造が入っていない状況でも蛇の補題が使えると思えば、こういうことをやってもいいだろう。

## 目次

0	完全圏	1
0.1	(余) 核、(余) 像 . . . . .	1
0.2	完全圏 . . . . .	2

## 0 完全圏

### 0.1 (余) 核、(余) 像

(余) 核、(余) 像の定義と性質について、記号の定義を兼ねて述べる。

■定義と性質 核と像は equalizer なのでモノ射である。余核と余像は coequalizer なのでエピ射である。いずれも、ゼロ射を持つ加法圏とは限らない圏に対して成り立つ性質である。

■射の自然な分解 射  $f: X \rightarrow Y$  があったとき、(余) 核、(余) 像を用いて分解する方法を述べる。

Step 1 まず、定義から、

$$\text{Ker } f \longrightarrow X \longrightarrow \text{Coim } f$$

$$\text{Im } f \longrightarrow Y \longrightarrow \text{Coker } f$$

を得る。

Step 2 それを横に並べ、 $f$  でつなぐ (下の図式黒実線)。

Step 3 Im, Coim の普遍性から図式を可換にする点線矢印が一意に生える。

Step 4 再び、Im もしくは Coim の普遍性から図式を可換にする矢印 (赤実線) が一意に生える。  
このとき、どちらの普遍性を使っても、一意性により同じ矢印が生える。

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Ker } f & & \text{Im } f \\
& & \searrow & & \nearrow \\
& & X & \xrightarrow{f} & Y \\
& & \nearrow & & \searrow \\
& & \text{Coim } f & & \text{Coker } f
\end{array}
\quad (1)$$

このとき、 $f = \text{im } f \circ \bar{f} \circ \text{coim } f$  である。

次に、可換な四角形

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
x \downarrow & & \downarrow y \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y'
\end{array}$$

の  $f, f'$  に対し上のような分解を施すと次の図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Ker } f & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \text{Coim } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \text{Coker } f \\
\downarrow \underline{x} & & \downarrow x & & \downarrow \bar{x} & & \downarrow \underline{y} & & \downarrow y & & \downarrow \bar{y} \\
\text{Ker } f' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \text{Coim } f' & \xrightarrow{\bar{f}'} & \text{Im } f' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \text{Coker } f'
\end{array}$$

いずれの射も普遍性によって生える射なので真ん中以外の四角は可換であるまた、 $\underline{y} \circ \bar{f}$  および  $\bar{f}' \circ \bar{x}$  に  $\text{coim } f$  (これはエピ) と  $\text{im } f'$  (これはモノ) を合成したものが等しいので、真ん中の四角も可換である。

## 0.2 完全圏

完全圏とは、零対象、核、余核をもち、上で定義した射  $\bar{f}$  が常に同型である圏のことと定義する<sup>\*1</sup>。この小節の議論は完全圏上で行う。アーベル圏とは、加法圏でもある完全圏のことなので、ここでの議論はすべて任意のアーベル圏に適用できる。

■完全圏で成り立つ補題  $\text{hom-set}$  にアーベル群の構造が入っていると  $\text{モノ} \Leftrightarrow (0 \rightarrow X \rightarrow Y)$  : 完全などが言えるが、完全圏だと  $\Rightarrow$  しか示せない。しかし、任意の射は性質の良いモノ射とエピ射の合成に分解できる。

**補題 0.1.** 射  $f: X \rightarrow Y$  に対し、像 (resp. 余像) の普遍性で伸びる標準的な射  $\underline{f}$  (resp.  $\bar{f}$ ) はエピ (resp. モノ) である：

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
& \searrow \underline{f} & \uparrow \\
& & \text{Im } f
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow \bar{f} & \nearrow & \\
\text{Coim } f & & 
\end{array}$$

*Proof.* 完全圏なので図式 (1) における  $\bar{f}$  は同型、特にモノかつエピである。  $\text{coim } f$  と  $\text{im } f$  はそれぞれエピ、モノなので、それらと  $\bar{f}$  の合成である  $\underline{f}$  と  $\bar{f}$  はそれぞれエピ、モノである。  $\square$

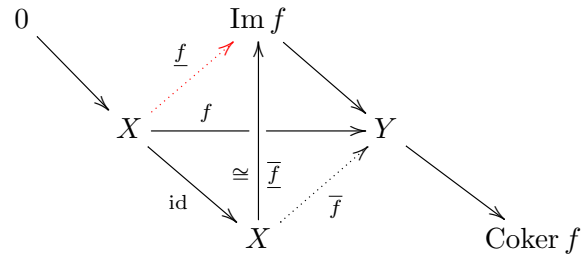
<sup>\*1</sup> 本当の完全圏は違うらしい。しかし [Ive12] でそう定義されているのでここではそれに合わせる。

$\underline{f}$  が同型であるという仮定があるため、射がモノ、エピであるための条件を記述できる。

**補題 0.2.** 射  $f: X \rightarrow Y$  について、以下は同値\*2

- (1)  $f$  は単射。
- (2)  $\text{Im } f$  の普遍性により伸びる射  $\underline{f}$  は同型。
- (3)  $(X, f) = \text{Ker}(\text{coker } f)$ 。

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2) :  $f$  はモノなので  $\text{Ker } f = 0$  が容易に示される。したがって、 $\text{Coim } f = \text{Coker}(\text{ker } f) = \text{Coker}(0 \rightarrow X) = (X, \text{id}_X)$  である。したがって、図式 (1) は下のようになる：



したがって  $\underline{f} = \bar{f}$  : 同型。

(2)  $\Rightarrow$  (3) : 上の図式において  $\underline{f}$  が同型であるとする。 $(\text{im } f: \text{Im } f \rightarrow Y) = \text{Ker}(\text{coker } f)$  であるが、その後ろに同型  $\underline{f}$  を合成した射  $f$  も  $\text{Ker}(\text{coker } f)$  である。

(3)  $\Rightarrow$  (1) : 核は equalizer なのでモノである。 □

双対的に次が成り立つ。

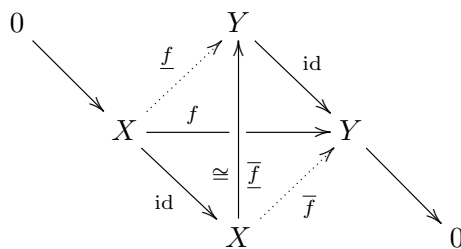
**補題 0.3.** 射  $f: X \rightarrow Y$  について、以下は同値:

- (1)  $f$  はモノ。
- (2)  $\text{Coim } f$  の普遍性により伸びる射  $\bar{f}$  は同型。
- (3)  $(Y, f) = \text{Coker}(\text{ker } f)$ 。

**系 0.4.**  $f: X \rightarrow Y$  に対し以下は同値 :

- (1)  $f$  は同型。
- (2)  $f$  はモノかつエピ。

*Proof.* (2)  $\Rightarrow$  (1) を示す。仮定より図式 (1) は次のようになる。



したがって  $f = \bar{f}$  : 同型。 □

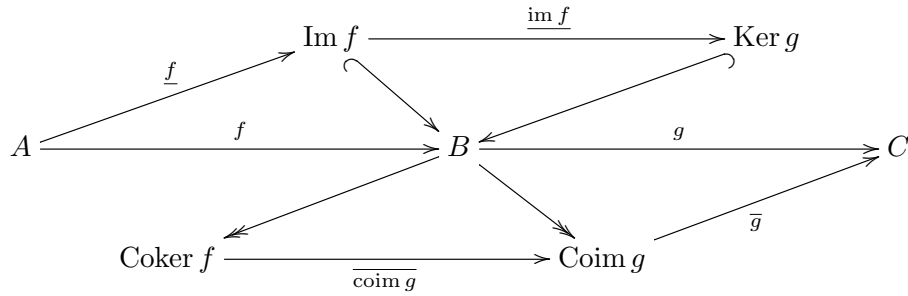
\*2 証明を見るとわかるように、(1)  $\Rightarrow$  (2) において完全圏という仮定、とくに  $\bar{f}$  : 同型が本質的にはたらく。

■完全列 この段落はおおむね [KS05] の議論に従う。

与えられたチェイン  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  ( $gf = 0$ ) が完全であるとは、 $B$  の部分対象として  $\text{Ker } g \cong \text{Im } f$  であると定めるのが普通だが、ここでは上で構成した射の分解（の一部）を使って、完全性についてもう少し調べる\*3。下のような図式を構成する。

Step. 1  $f$  とその余核、像、 $g$  とその核、余像を描き、普遍性を使って  $\underline{f}: A \rightarrow \text{Im } f$  と  $\bar{g}: \text{Coim } g \rightarrow C$  を生やす。

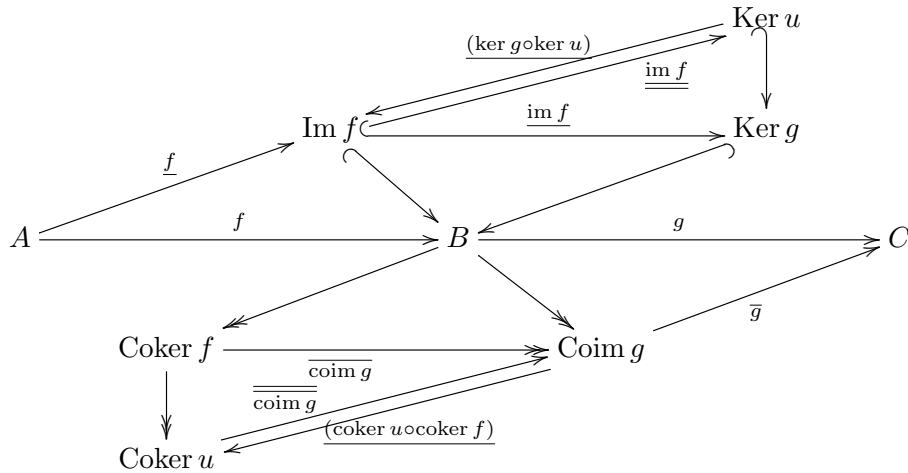
Step. 2  $A \rightarrow \text{Im } f \rightarrow B \xrightarrow{f} C$  が 0 で、上の命題より  $\underline{f}$  がエピなので  $\text{Im } f \rightarrow B \rightarrow C$  は 0。  $\text{Ker } g$  の普遍性より  $\underline{\text{im } f}: \text{Im } f \rightarrow \text{Ker } g$  が伸びる。双対的に  $\overline{\text{coim } g}: \text{Coker } f \rightarrow \text{Coim } g$  が生える。



このとき  $A \rightarrow B \rightarrow C$  が完全であるとは普通、上の図式の  $\underline{\text{im } f}$  が同型であることと定める\*4の  
だが、これと同じ条件をこれから探す。  $u$  を合成  $u: \text{Ker } g \rightarrow B \rightarrow \text{Coker } f$  と定める\*5。

$\text{Ker } u$  の普遍性により  $\underline{\text{im } f}$  は  $\text{Im } f \rightarrow \text{Ker } u$  に落ちる。  $\text{Im } f$  の普遍性により  $\text{ker } g \circ \text{ker } u$  は  $\text{Ker } u \rightarrow \text{Im } f$  に落ちる。可換性により  $\underline{\text{im } f} \circ (\text{ker } g \circ \text{ker } u) \circ \underline{\text{im } f} = \underline{\text{im } f}$  である。  $\underline{\text{im } f}$  はモノなので  $(\text{ker } g \circ \text{ker } u) \circ \underline{\text{im } f} = \text{id}$  である。同様にして  $\underline{\text{im } f} \circ (\text{ker } g \circ \text{ker } u) = \text{id}$  である。よって、 $\text{Ker } g$  の部分対象の同型  $\text{Im } f \cong \text{Ker } u$  を得る\*6。

同様にして、 $\text{Coker } f$  の商対象の同型  $\text{Coker } u \cong \text{Coim } g$  を得る。



\*3  $gf = 0$  を仮定しないとなかなかいい結果は得られない。完全性とは鎖のホモロジーの自明性のことであると思うことにすれば、 $gf = 0$  の仮定はあってしかるべきものになるが、それでよいのだろうか。。。

\*4 モノ射の定義から、部分対象の間に生える射は一意である。ゆえに  $B$  の部分対象としての同型  $\text{Im } f \cong \text{Ker } g$  を与える射があるなら、それは  $\underline{\text{im } f}$  に限られる。

\*5 この天与の射はどうして思いつかれたのだろう？？？

\*6 部分対象の射はモノなので、 $B$  の部分対象の射  $\underline{\text{im } f}$  はモノである。

よって、

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} u &\cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker} f \rightarrow \mathrm{Coim} g) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker} f \rightarrow \mathrm{Coim} g \rightarrow C) \\ \mathrm{Coim} u &\cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Im} f \rightarrow \mathrm{Ker} g) \cong \mathrm{Coker}(A \rightarrow \mathrm{Im} f \rightarrow \mathrm{Ker} g)\end{aligned}$$

$$u = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Coker} f \xrightarrow{\cong} \mathrm{Coim} g) \Leftrightarrow (\mathrm{Coker} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker} g)$$

## 参考文献

- [Ive12] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [KS05] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2005.