



西北工业大学

自动控制原理 实验大作业

得 分：

题 目： 弹簧小车控制系统设计

专业名称： 自动化

学生姓名： 赵敏琨

指导教师： 王京锋

班 级： 09011804

时 间： 2020 年 12 月

目录

第 1 章 题目说明..... 1

第 2 章 机理建模..... 1

第 3 章 控制系统设计与分析..... 2

 3.1 未校正系统稳定性分析..... 2

 3.2 PID 控制器设计 3

 3.3 PID 控制器分析 8

 3.3.1 闭环极点位置变化..... 8

 3.3.2 闭环极点位置变化对 PID 控制器的影响分析 17

 3.3.3 开环零点位置变化..... 18

 3.3.4 开环零点位置变化对 PID 控制器的影响分析 27

 3.3.5 根轨迹设计 PID 控制器效果分析 28

第 4 章 总结..... 28

第1章 题目说明

某弹簧校车经过模型辨识后，得到的系统模型（系统开环传递函数）为：

$$G(s) = \frac{12.8}{5.46s^2 + 162}$$

要求设计弹簧小车控制系统，使得弹簧小车的位移由起点位置向前或向后移动 0.1 米，按照如下要求完成设计：

设计 PID 校正环节 $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$ ，使校正后系统的性能指标满足：超调量 $\sigma\% < 5\%$ ，调节时间 $t_s < 1.5s$ ，稳态误差 $e_{ss} < 5\%$ 。

第2章 机理建模

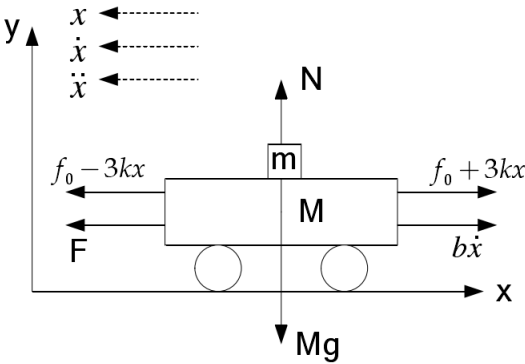


图 2-1 弹簧小车受力分析图

表 2-1 符号说明

上图中，各符号的意义和数值参照下表 11-1

符号	意义	实际数值
m	小车质量+动子质量	3.7kg+0.36kg
m_i	砝码质量 i=2,3,4,5	0.2kg, 0.3kg, 0.4kg, 0.5kg
M	总质量	$m + \sum m_i$
b	小车摩擦系数	0.1N/m/sec
k	弹簧弹性系数	27N/m
f_0	弹簧初始拉力	
F	加在小车上的力	
x	小车位置	
\dot{x}	小车速度	
\ddot{x}	小车加速度	
k_a	驱动器常数	0.4A/V
k_m	推力系数	32N/A
g	重力加速度	9.8m/s ²

实际系统中, 弹簧小车的推力 F 与电机驱动输入电压 u 成正比, 即 $F = k_m k_a u$;
 M 为小车及所有砝码的总和。有:

$$k_m k_a u + (f_0 - 3kx) - (f_0 + 3kx) = M\ddot{x}$$

即

$$k_m k_a u - 6kx = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

作拉普拉斯变换得

$$k_m k_a U(s) - 6kX(s) = Ms^2 X(s)$$

即

$$G_m(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_m k_a}{Ms^2 + 6k} = \frac{12.8}{5.46s^2 + 162} = \frac{2.3443}{s^2 + 29.6703}$$

第3章 控制系统设计与分析

3.1 未校正系统稳定性分析

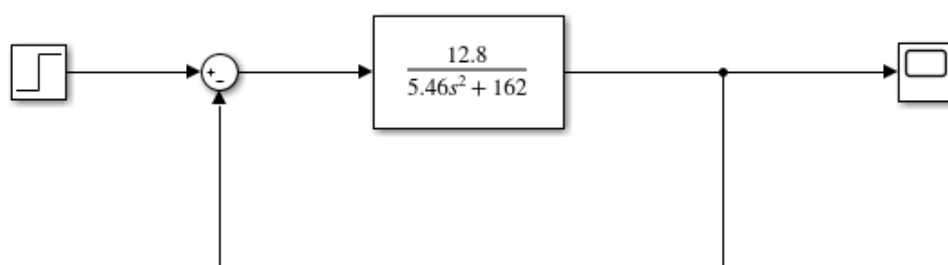


图 3-1 未校正系统结构图

上图为未加校正时的弹簧小车系统结构图, 输入是单位阶跃信号时, 系统输出为振荡波形, 不是稳定的输出。原因:
 此时系统特征方程为

$$5.46s^2 + 174.8 = 0$$

故特征根为纯虚根 $s_{1,2} = \pm j5.6581$, 由理论课相关知识得此时系统振荡, 下图为阶跃输入时的系统响应曲线。

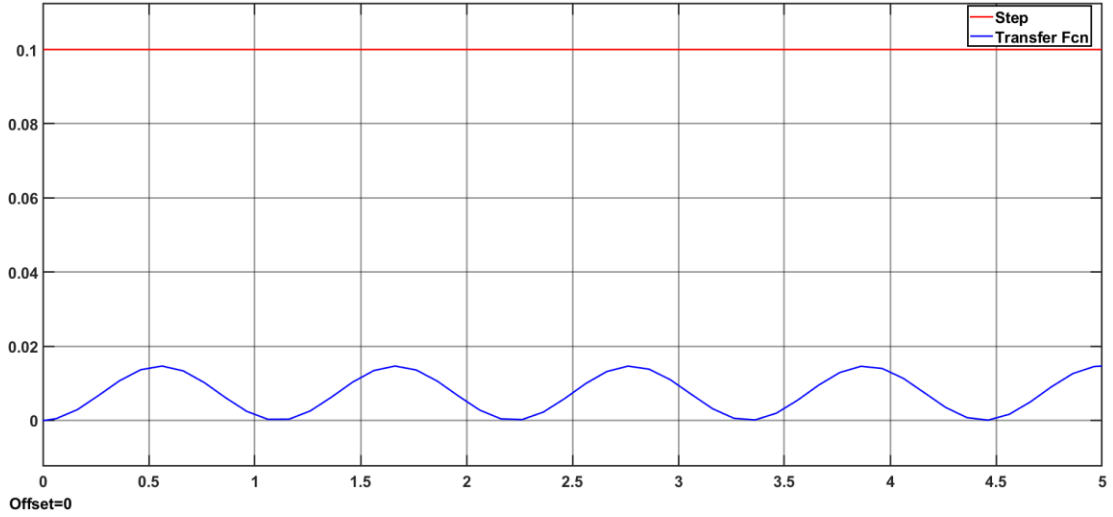


图 3-2 未校正系统阶跃响应

3.2 PID 控制器设计

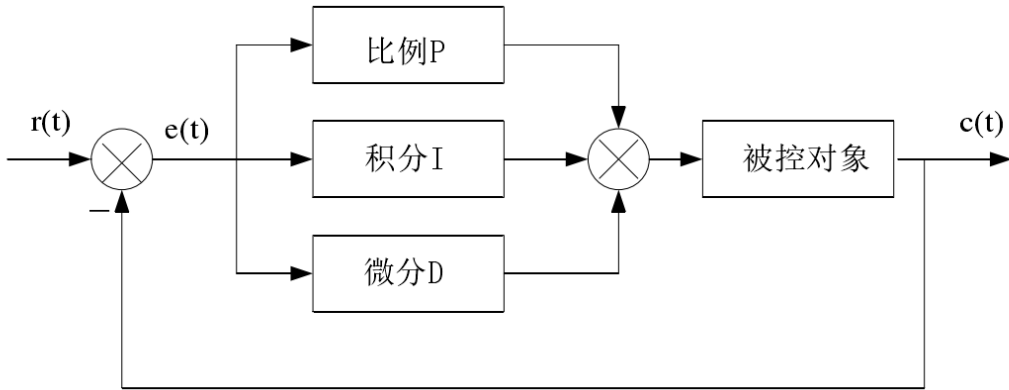


图 3-3 模拟 PID 控制系统原理框图

上图为模拟 PID 控制系统原理框图，PID 控制器的传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

式中， K_p 为比例系数， K_i 为积分系数， K_d 为微分系数，积分时间常数 $T_i = \frac{1}{K_i}$ ，

微分时间常数 $T_d = \frac{1}{K_d}$ 。上式从根轨迹角度看，相当于给系统增加了一个位于原

点的极点和两个位置可变的零点。

由于被控对象为二阶零型振荡环节，适合用根轨迹校正方法进行控制器设计，

$$\text{根据} \begin{cases} \sigma\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 5\% \\ t_s = \frac{\ln 0.05 + \frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)}{\xi\omega_n} \leq 1.5'' \end{cases} \quad \text{解出} \begin{cases} \xi \geq 0.69 \\ \omega_n \geq 3.21 \end{cases}, \text{得到校正后系统开环零极点}$$

-闭环极点示意图，虚线所示为校正后满足条件的闭环极点所在范围。

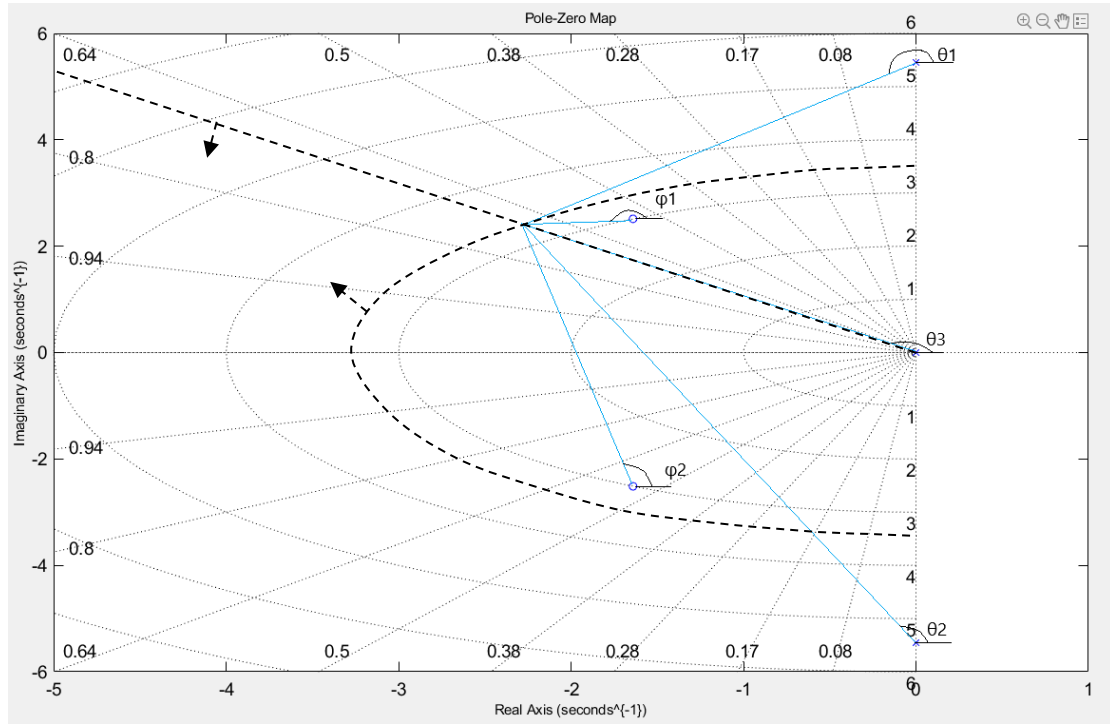


图 3-4 校正后系统零极点示意图

而近似二阶系统特征方程为 $D(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ，当 $\xi = 0.69$ ， $\omega_n = 3.21$ 时，校正后系统的特征根为 $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -2.21 \pm j2.32$ 。由上图有，

$$\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -180^\circ$$

由几何关系可得 $\theta_1 = 234.775^\circ$ ， $\theta_2 = 105.877^\circ$ ， $\theta_3 = 133.630^\circ$ ，所以

$\varphi_1 + \varphi_2 = 294.261^\circ$ ；设计步骤如下：

① 取 PID 控制器的两个零点为 $z_{1,2} = -1.64 \pm j2.51$ ，满足 $\varphi_1 + \varphi_2 > 294.261^\circ$ ，此时

闭环极点可以过设计点 $\lambda_{1,2} = -2.21 \pm j2.32$ ，则理想 PID 控制器传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)}{s} = \frac{K^*(s^2+3.281s+9.015)}{s}$$

$$= \frac{K^*s^2+3.281K^*s+9.015K^*}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

式中， K^* 为根轨迹增益；

② 考虑到实际控制器传递函数需要满足分子阶数 \leq 分母阶数，则实际 PID 控制器传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)}{s(s+N)} = \frac{K^*(s^2+3.281s+9.015)}{s(s+N)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{N}{1+N\frac{1}{s}}$$

若取闭环极点 $p_{1,2} = -2.3 \pm j2.3$ ， $N = 200$ 进行设计，此时 $K^* = 2569.8$ ，则 PID 控制器传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{2569.8(s^2+3.281s+9.015)}{s(s+200)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{200}{1+200\frac{1}{s}}$$

故 $K_p = 41.58$ ， $K_i = 115.83$ ， $K_d = 12.64$ ，校正后系统结构图、PID 控制器参数和根轨迹图如下：

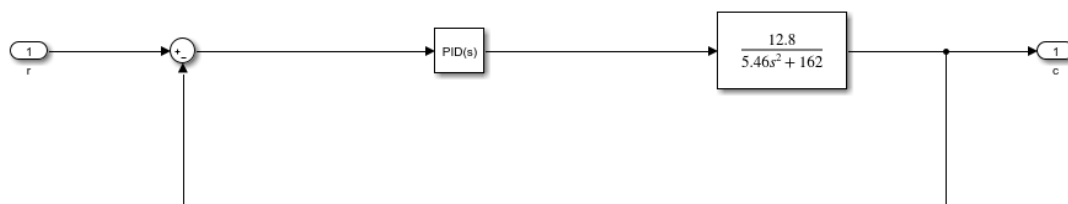


图 3-5 校正后系统结构图

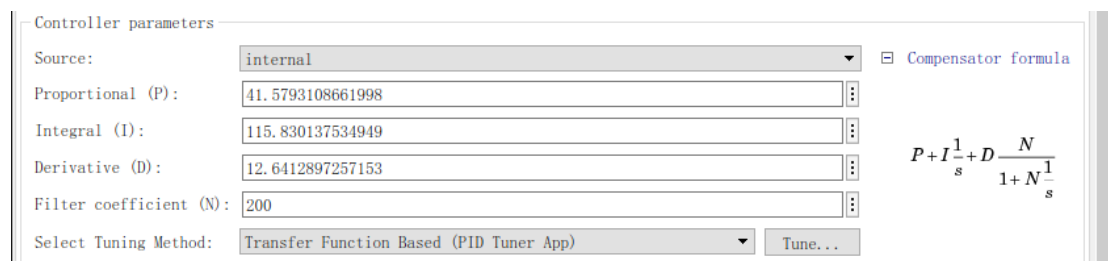


图 3-6 PID 控制器参数

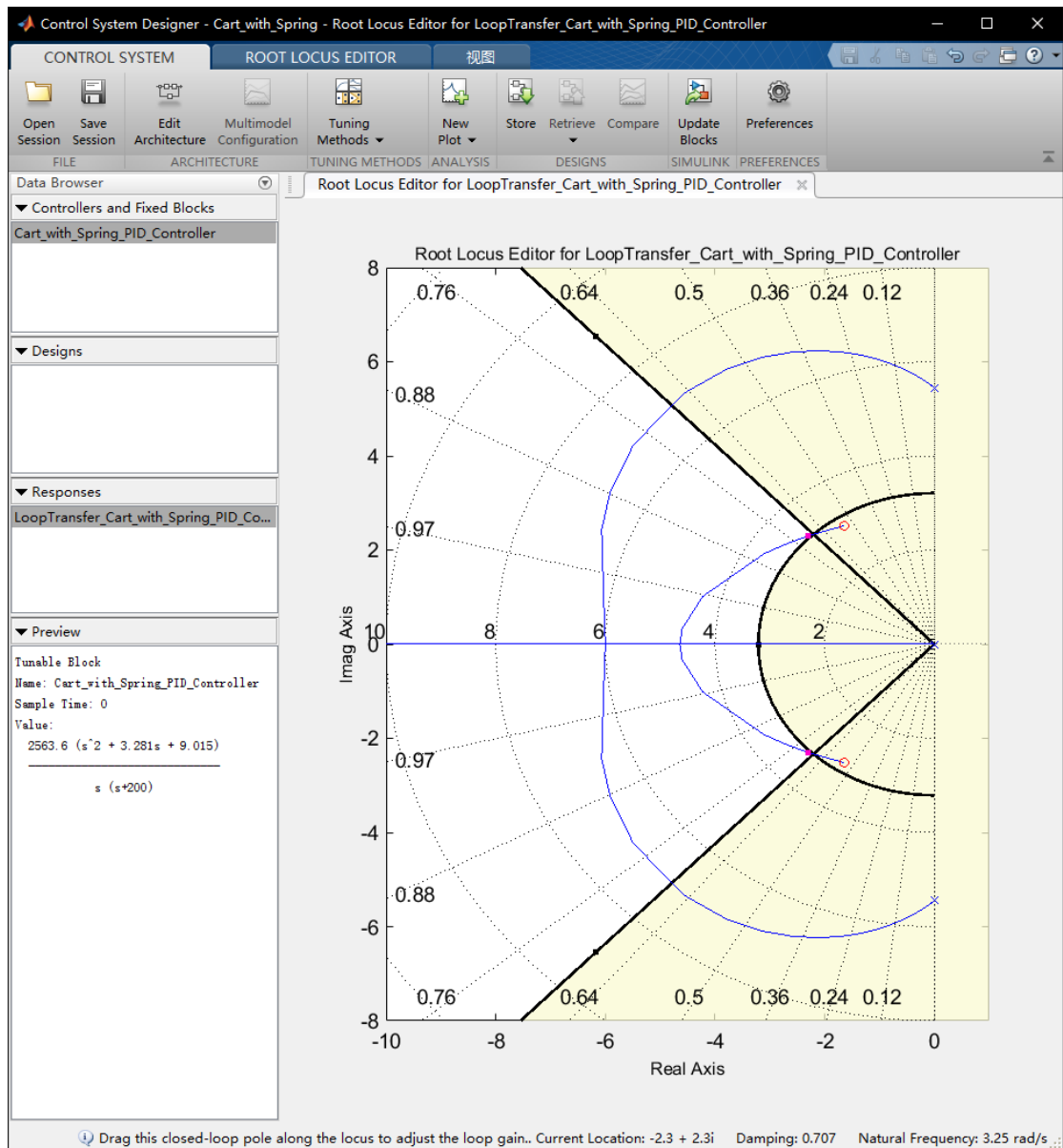


图 3-7 校正后系统根轨迹图

此时，输入幅值为 0.1 的阶跃信号，系统输出响应仿真曲线、实验参数及实验曲线如下图所示：

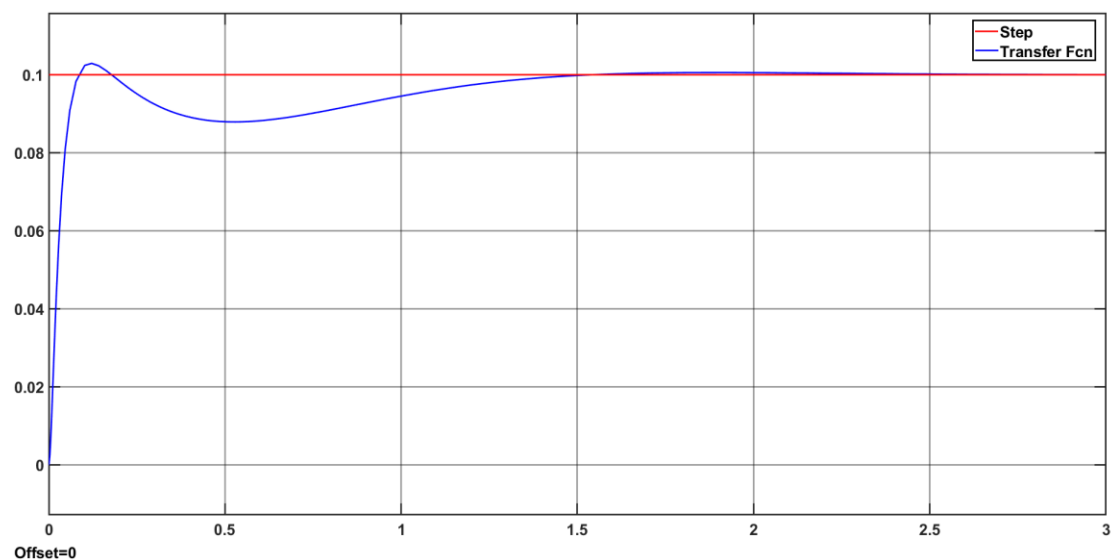


图 3-8 校正后系统阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 2.9\%$ ，调节时间 $t_s = 1.053s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足设计要求；

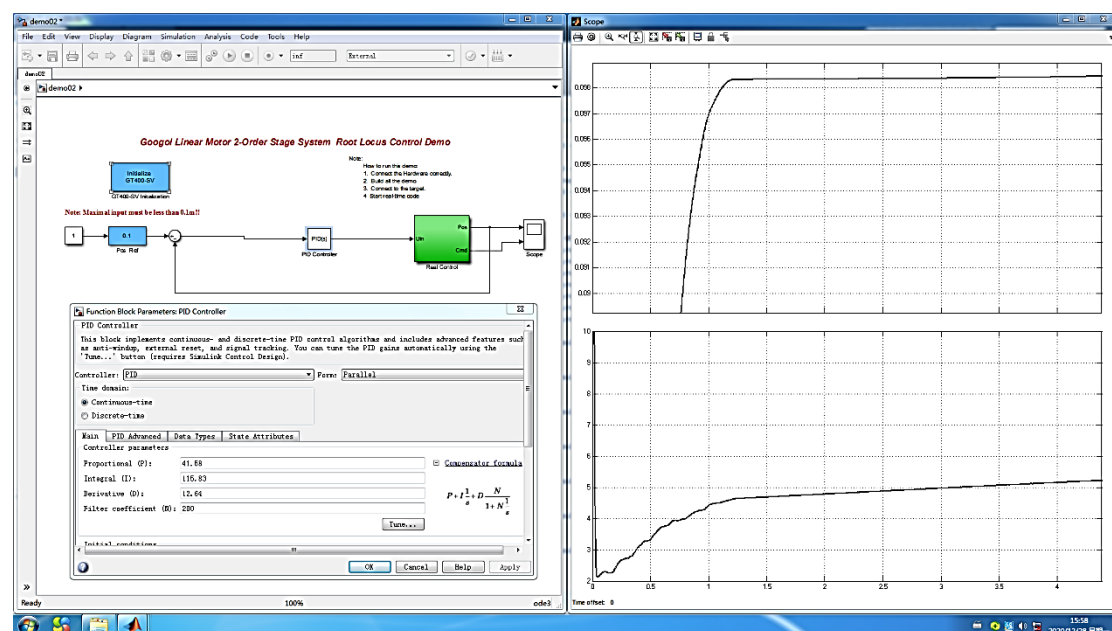


图 3-9 校正后系统阶跃响应实验参数

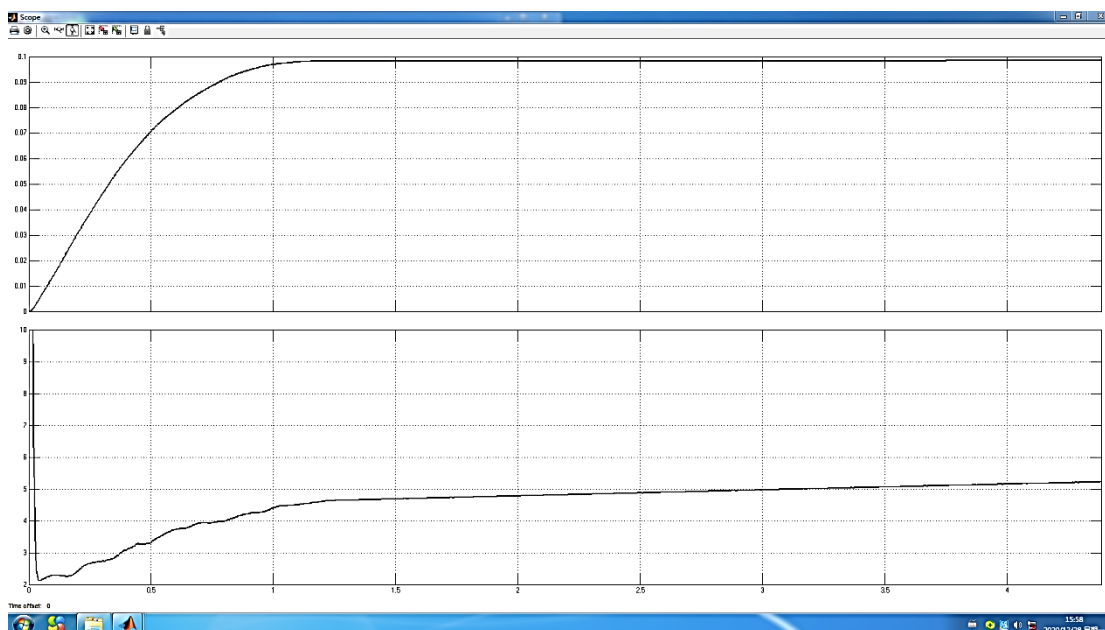


图 3-10 校正后系统阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 0.95s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 1.3\%$ ，实验结果满足设计要求。

3.3 PID 控制器分析

本节针对前文设计好的 PID 控制器，从根轨迹校正的角度，分别分析闭环极点位置变化（即根轨迹增益变化）和开环零点位置变化对系统动态性能的影响。

3.3.1 闭环极点位置变化

在保持开环零点位置不变的前提下，只改变闭环极点的位置（即只改变根轨迹增益），在根轨迹图中得到如下三组闭环极点位置（根轨迹增益值）以及对应 PID 控制器参数；在新的 PID 参数下分别仿真和实验系统的阶跃响应曲线。

1. 第一组闭环极点 $p_{1,2} = -3.48 \pm j1.69$ ，根轨迹增益 $K^* = 1425.3$ ，对应阻尼比

$\xi = 0.9$ 、自然频率 $\omega_n = 3.87$ ：

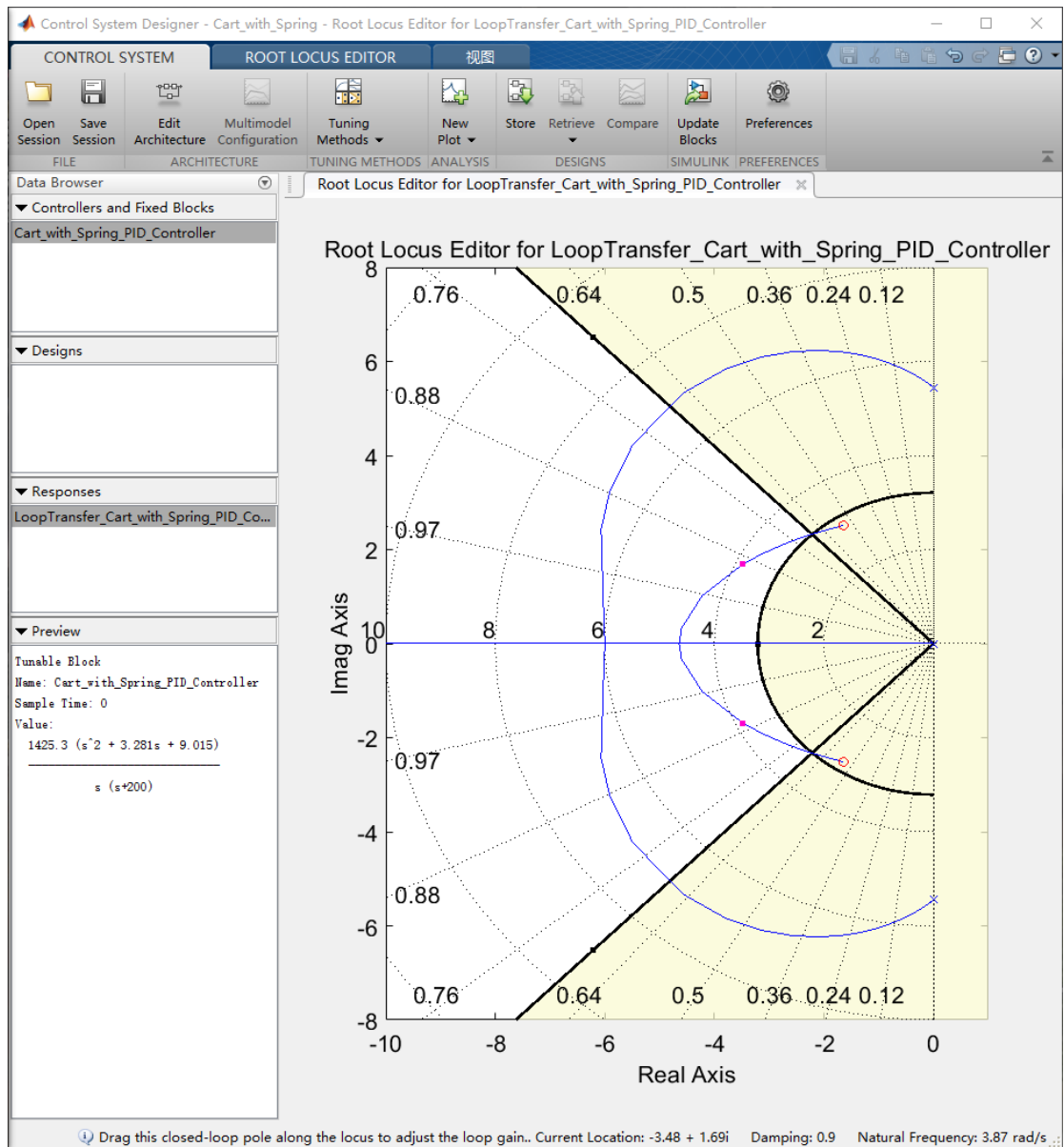


图 3-11 第一组闭环极点在根轨迹图上的位置

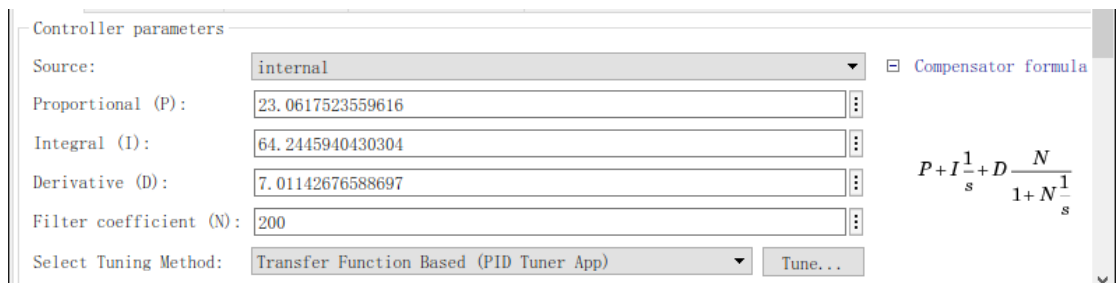


图 3-12 第一组闭环极点对应的 PID 控制器参数

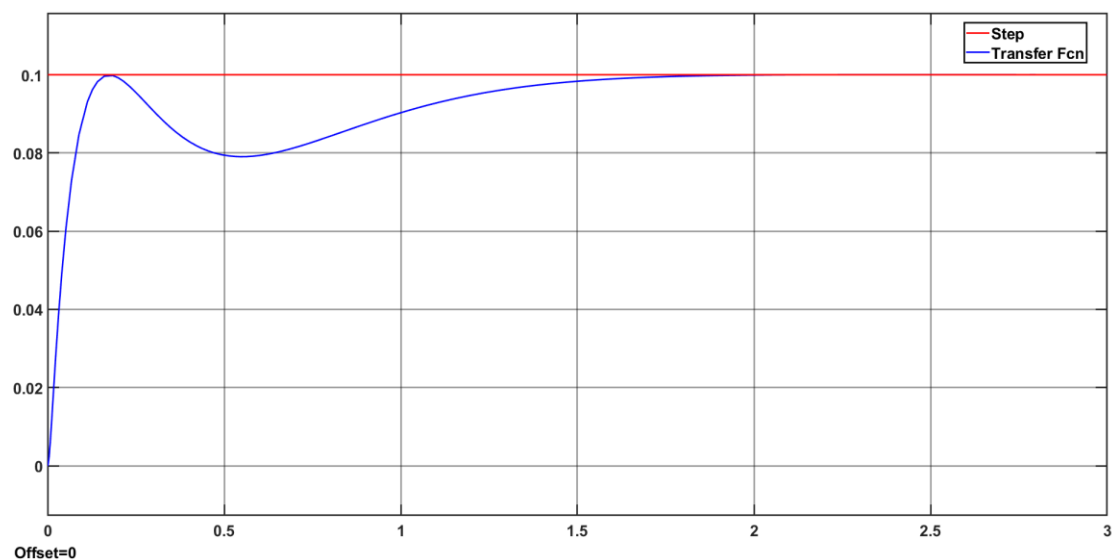


图 3-13 第一组闭环极点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 1.225s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足要求；

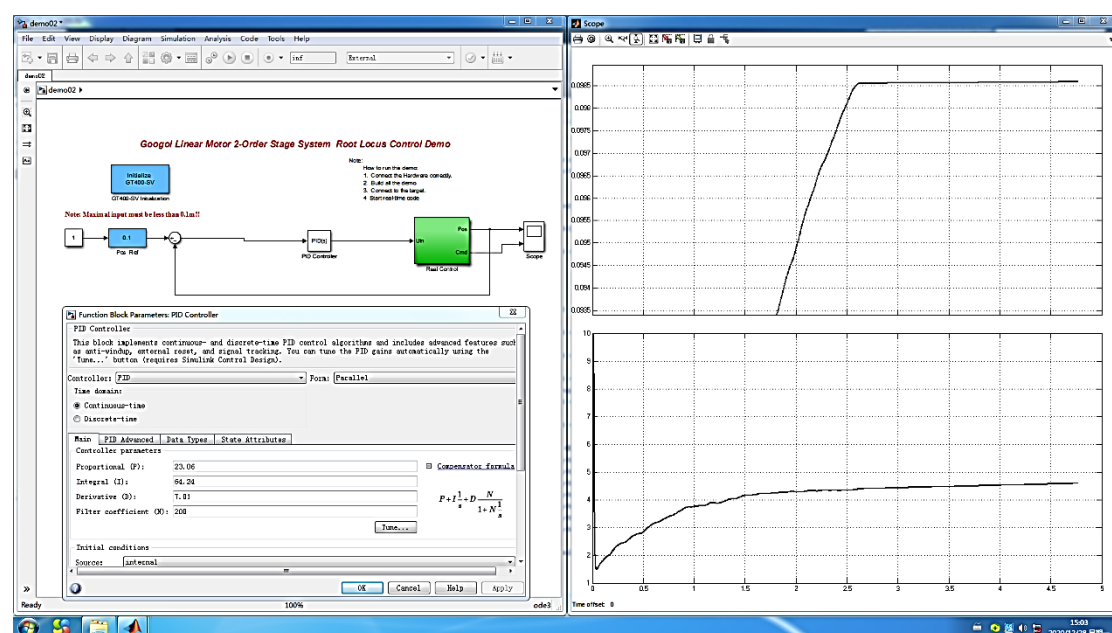


图 3-14 第一组闭环极点阶跃响应实验参数

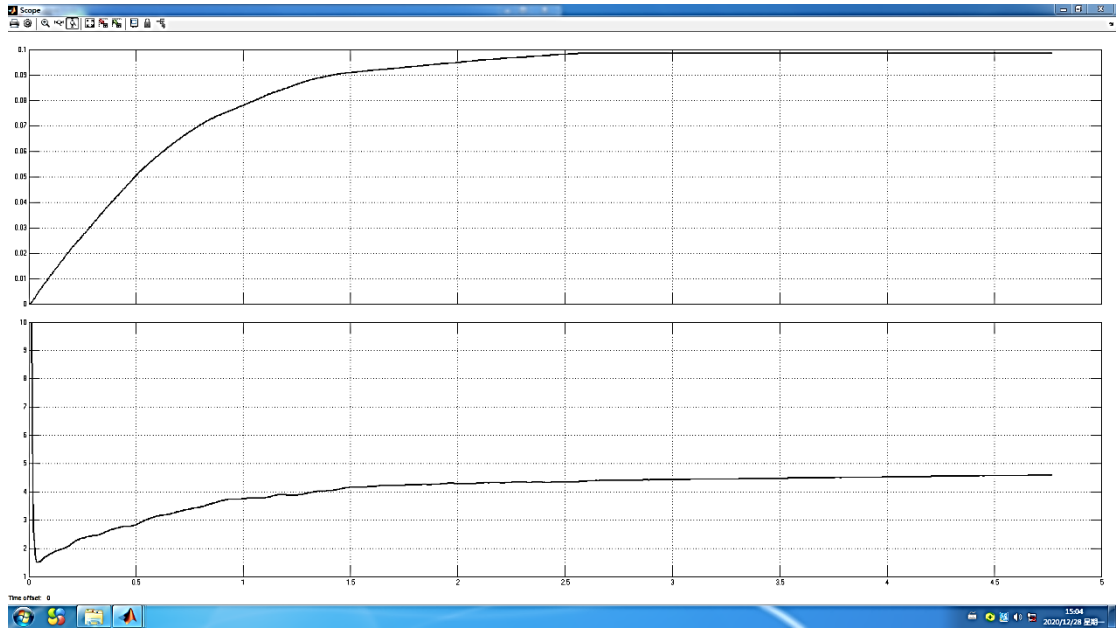


图 3-15 第一组闭环极点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 2.03s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 1.4\%$ ，实验结果不满足要求；

2. 第二组闭环极点 $p_1 = -5.25, p_2 = -4.2$ ，根轨迹增益 $K^* = 1289.9$ ，对应阻尼比

$\xi = 1$ 、自然频率 $\omega_n = 4.73$ ：

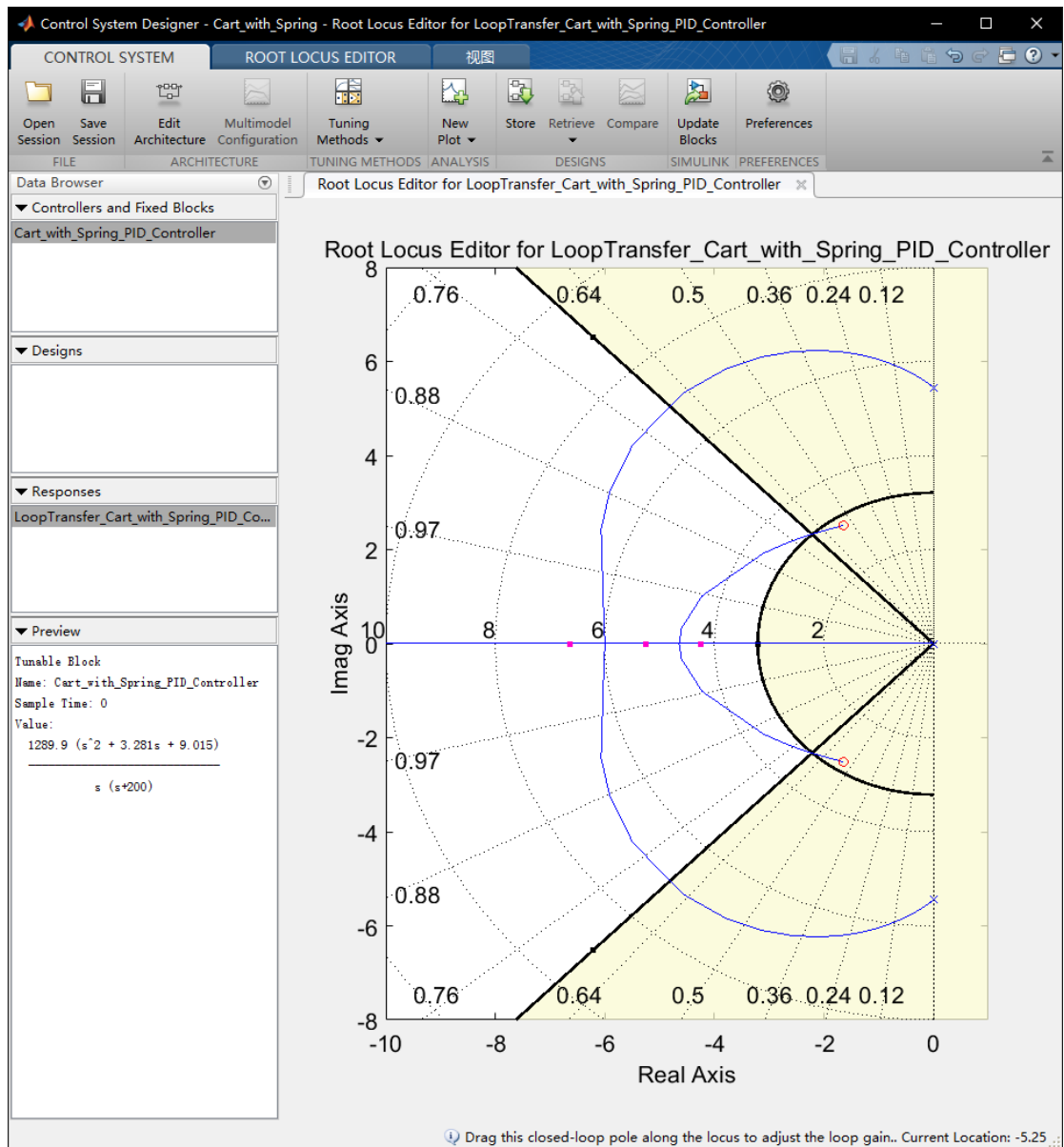


图 3-16 第二组闭环极点在根轨迹图上的位置

Controller parameters

Source: ☐ Compensator formula

Proportional (P):

Integral (I):

Derivative (D):

Filter coefficient (N):

Select Tuning Method:

$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

图 3-17 第二组闭环极点对应的 PID 控制器参数

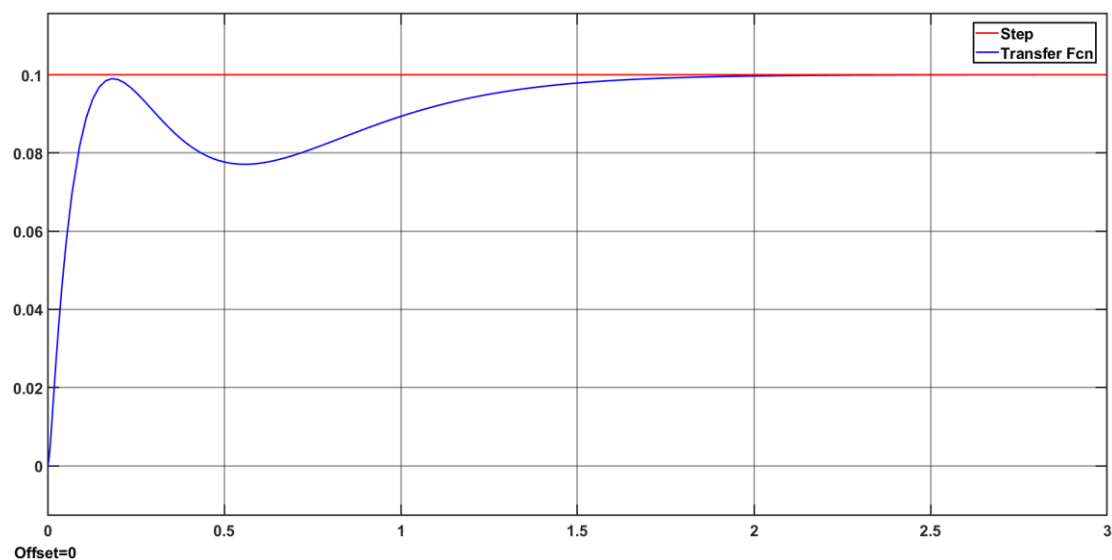


图 3-18 第二组闭环极点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 1.264s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足要求；

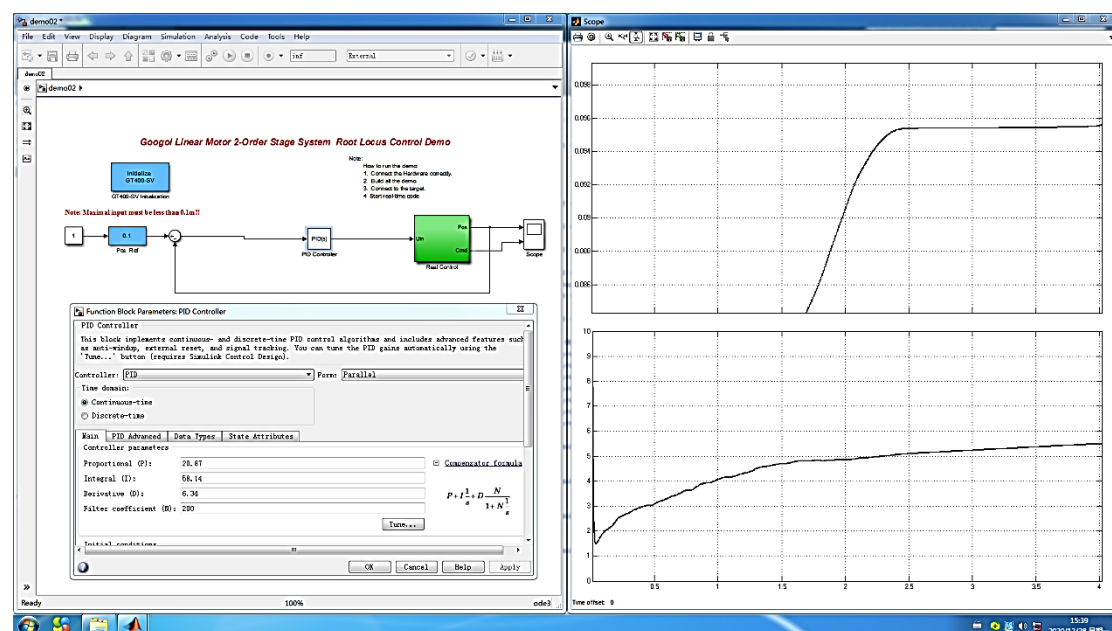


图 3-19 第二组闭环极点阶跃响应实验参数

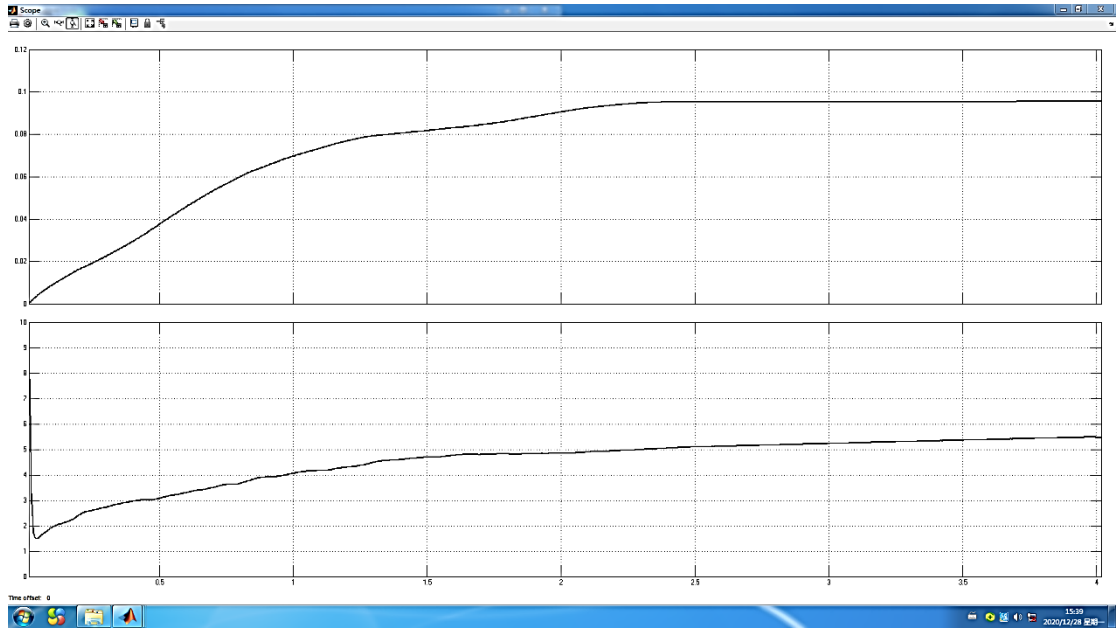


图 3-20 第二组闭环极点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 2.36s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 4.5\%$ ，实验结果不满足要求；

3. 第三组闭环极点 $p_{1,2} = -6.1 \pm j2.01$ ，根轨迹增益 $K^* = 1256.9$ ，对应阻尼比

$\xi = 0.95$ 、自然频率 $\omega_n = 6.42$ ：

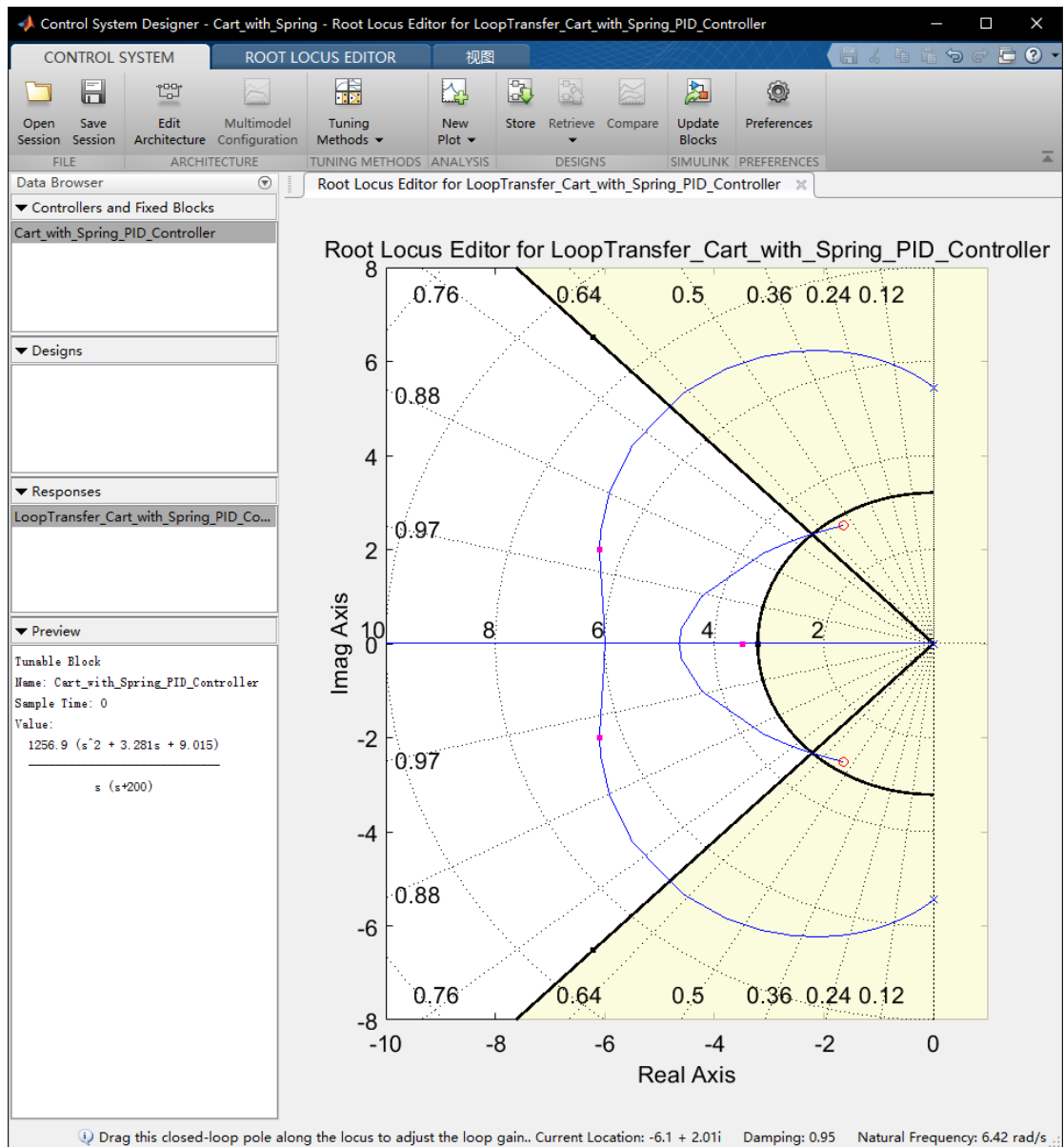


图 3-21 第三组闭环极点在根轨迹图上的位置

Controller parameters

Source:

Proportional (P):

Integral (I):

Derivative (D):

Filter coefficient (N):

Select Tuning Method:

Compensator formula

$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

图 3-22 第三组闭环极点对应的 PID 控制器参数

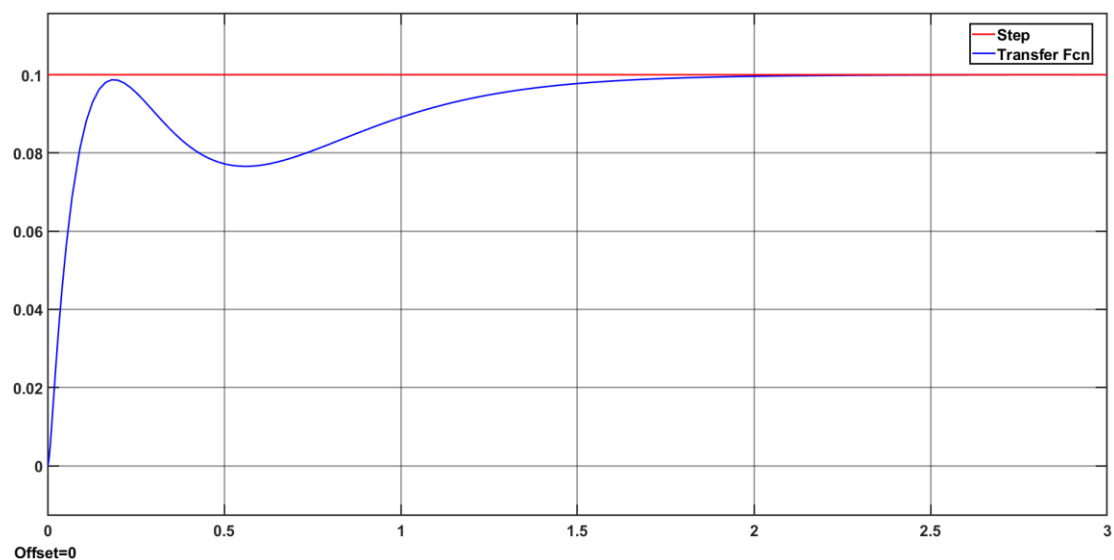


图 3-23 第三组闭环极点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 1.262s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足要求；

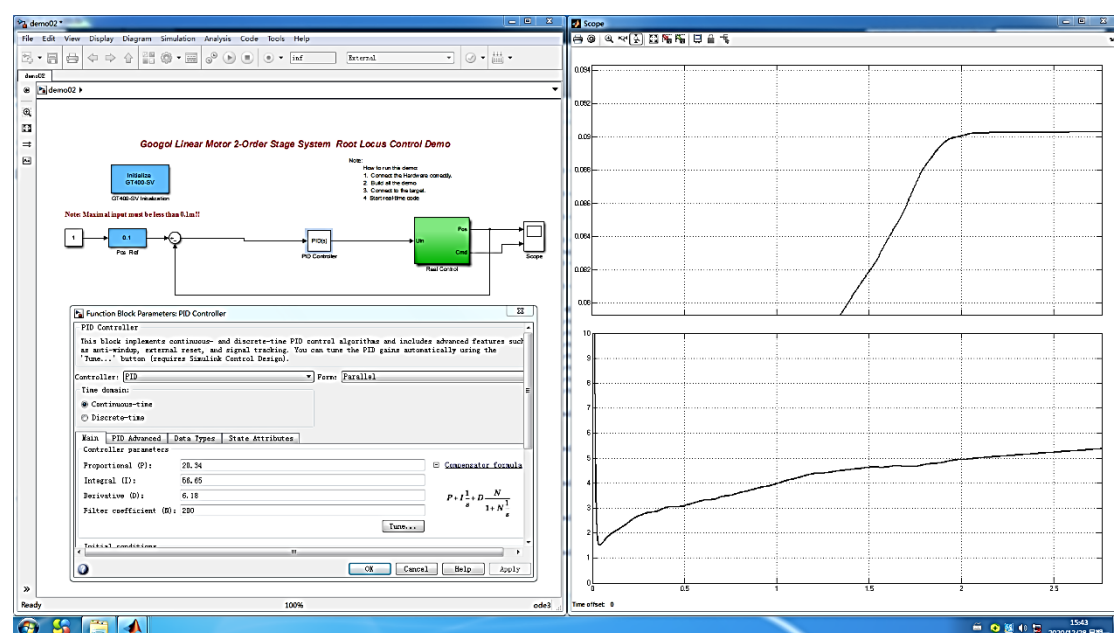


图 3-24 第三组闭环极点阶跃响应实验参数

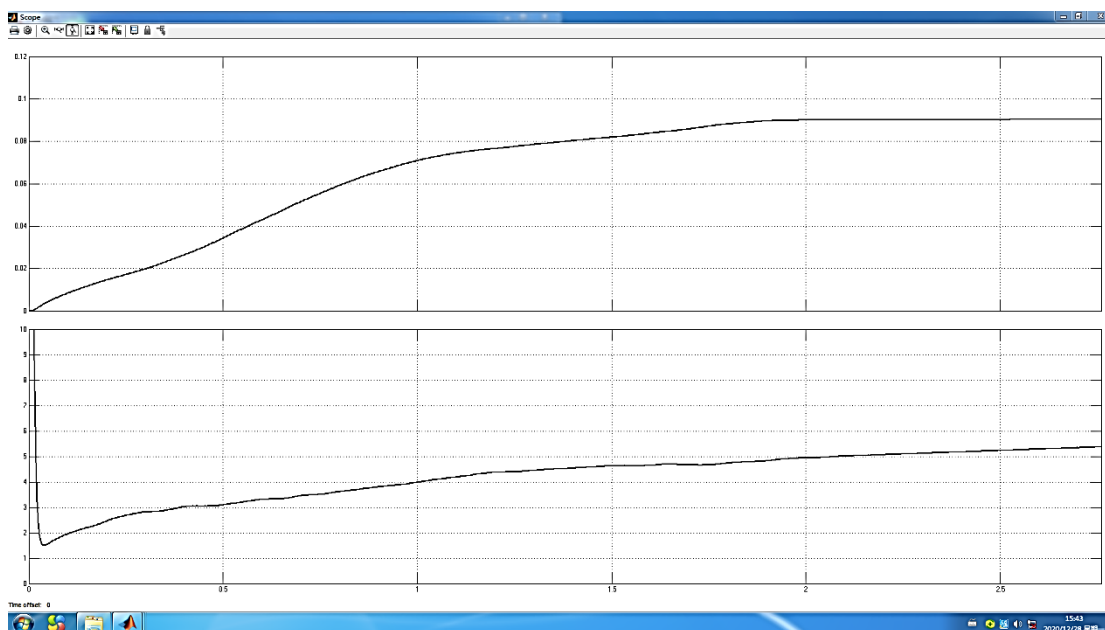


图 3-25 第三组闭环极点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = \infty s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 9.5\%$ ，实验结果不满足要求；

3.3.2 闭环极点位置变化对 PID 控制器的影响分析

根据上一小节的仿真与实验结果，以表格形式给出三组不同闭环极点对应的时域指标情况如下：

表 3-1 闭环极点/根轨迹增益变化对动态性能的影响

序号	闭环极点位置	根轨迹增益	阻尼比	自然频率	仿真/实验	超调量	调节时间	稳态误差
1	$p_{1,2} = -3.48 \pm j1.69$	1425.3	0.9	3.87	仿真	0%	1.225s	0%
					实验	0%	2.03s	1.4%
2	$p_1 = -5.25, p_2 = -4.2$	1289.9	1	4.73	仿真	0%	1.264s	0%
					实验	0%	2.36s	4.5%
3	$p_{1,2} = -6.1 \pm j2.01$	1256.9	0.95	6.42	仿真	0%	1.262s	0%
					实验	0%	∞s	9.5%

由上述结果和表格对比可见，在开环零点位置不变的前提下，改变闭环极点位置使根轨迹增益减小，系统的动态性能变差，稳态误差增大。

3.3.3 开环零点位置变化

在保持开环增益不变的前提下，只改变开环零点的位置，在根轨迹图中得到如下三组开环零点位置以及对应 PID 控制器参数；在新的 PID 参数下分别仿真和实验系统的阶跃响应曲线。

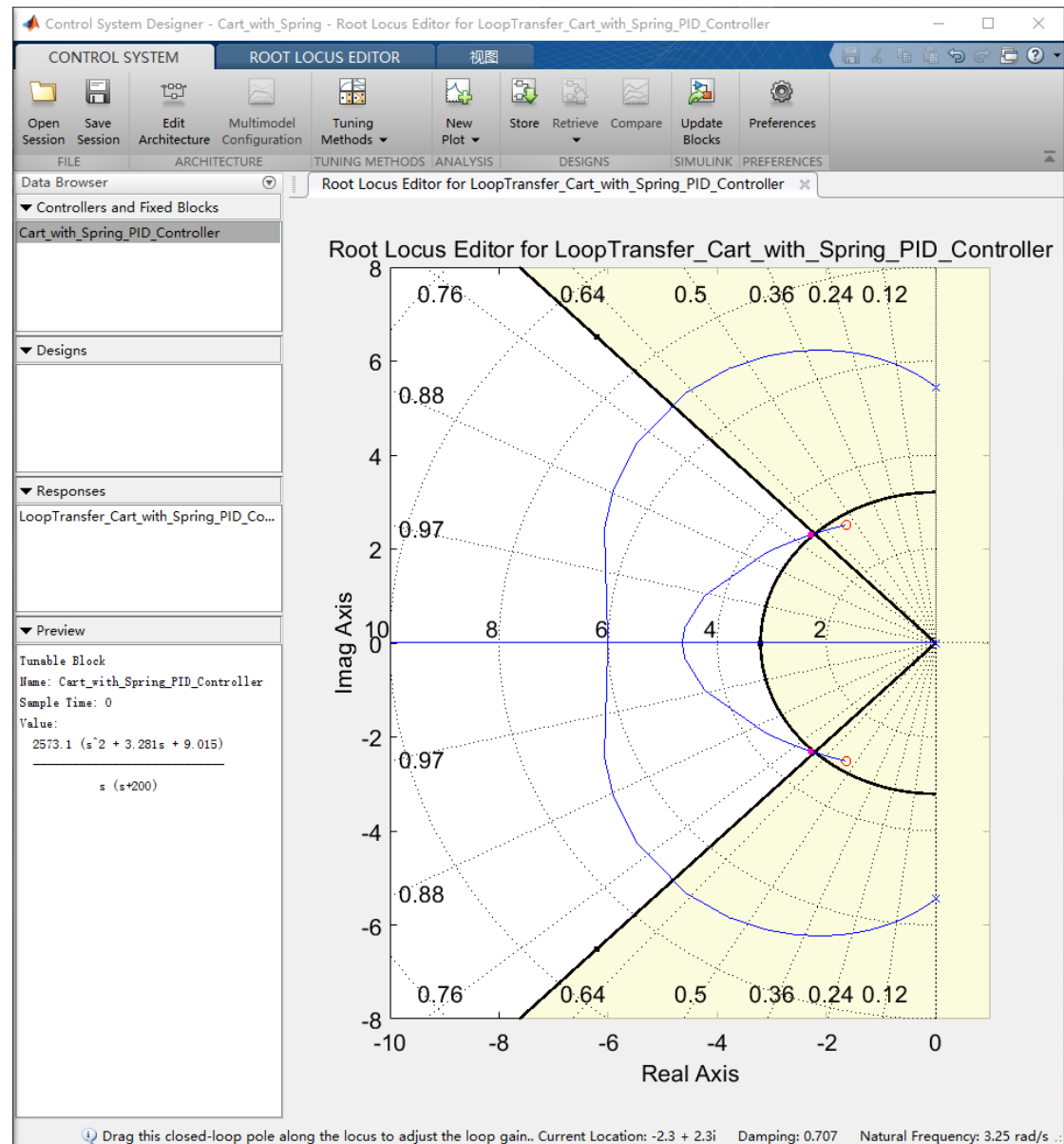


图 3-26 采用 3.2 节设计的 PID 控制器对应的系统根轨迹图

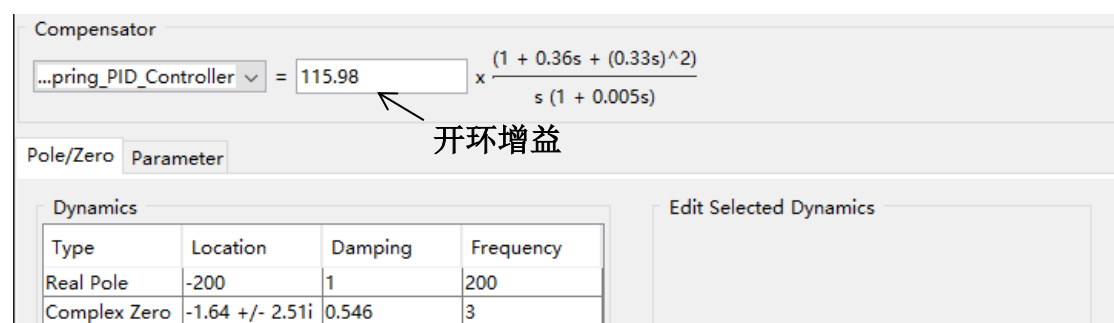


图 3-27 采用 3.2 节设计的 PID 控制器的传递函数

1. 第一组开环零点 $z_{1,2} = -1.46 \pm j2.51$ ，闭环极点 $p_{1,2} = -2.02 \pm j2.35$ ，根轨迹增益 $K^* = 2740.2$ ，（闭环极点的）阻尼比 $\xi = 0.652$ ，自然频率 $\omega_n = 3.1$ ：

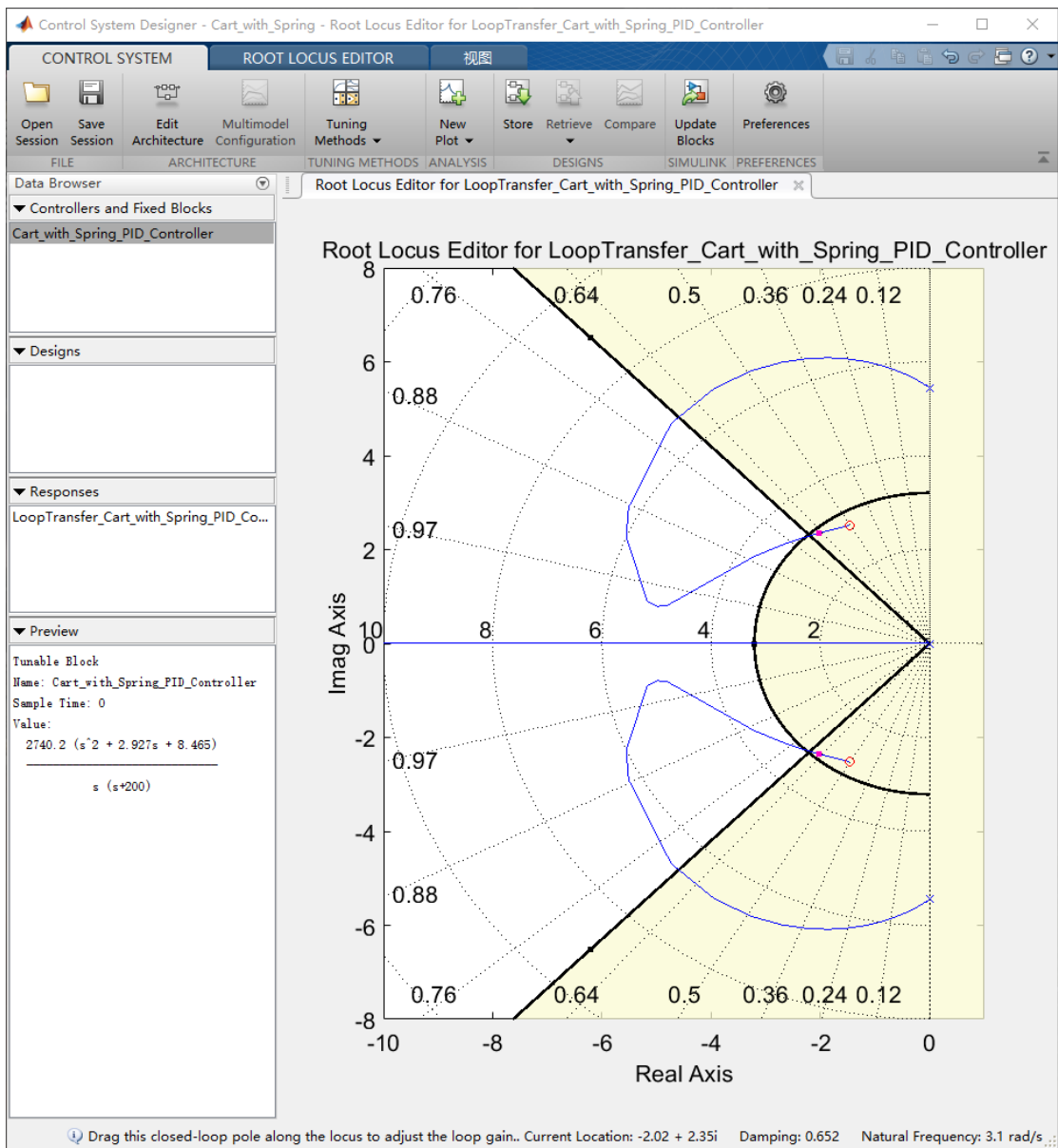


图 3-28 第一组开环零点对应的根轨迹图

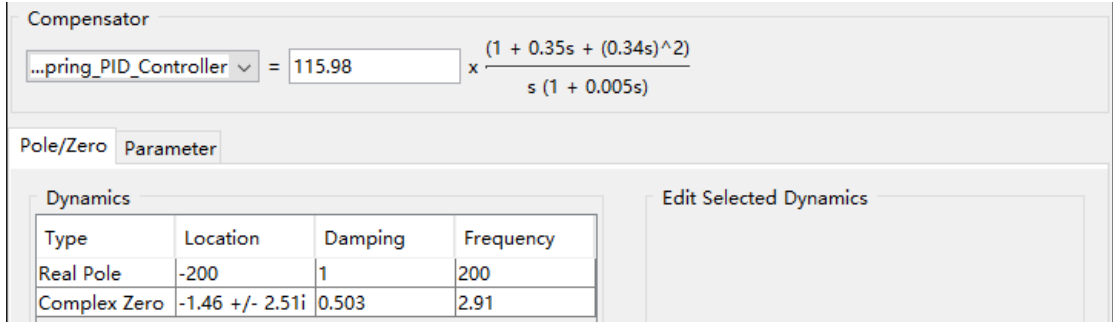


图 3-29 第一组开环零点对应的 PID 控制器传递函数

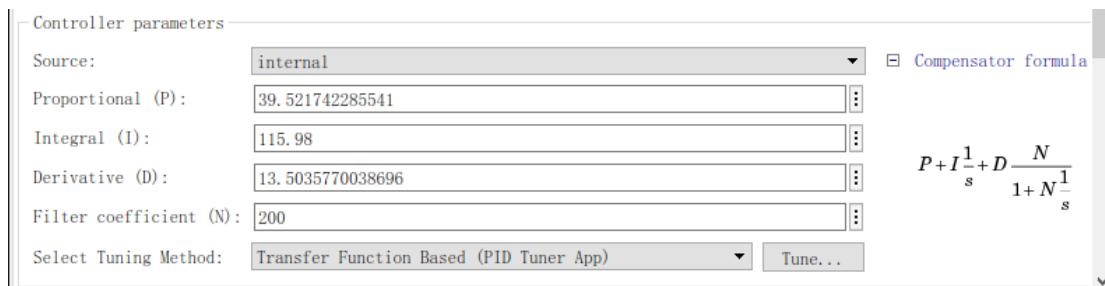


图 3-30 第一组开环零点对应的 PID 控制器参数

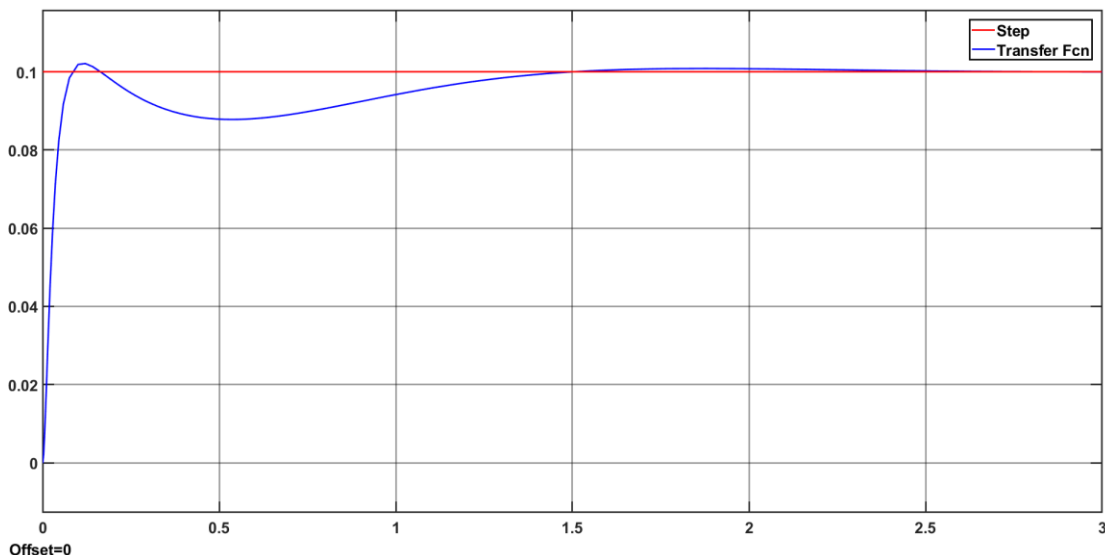


图 3-31 第一组开环零点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 2.1\%$ ，调节时间 $t_s = 1.036s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足要求；

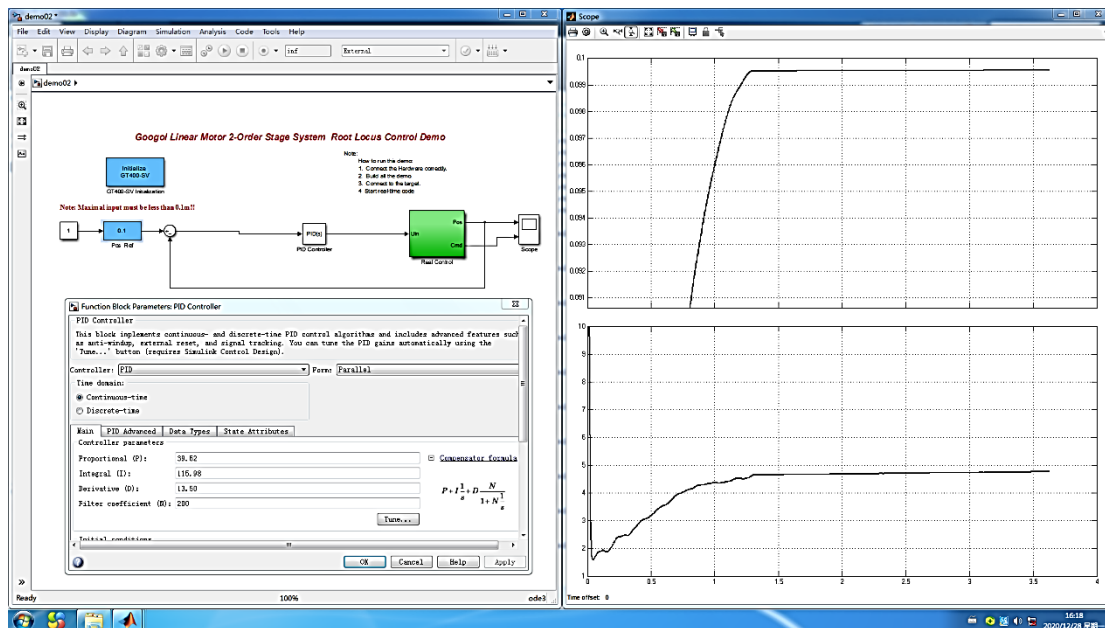


图 3-32 第一组开环零点阶跃响应实验参数

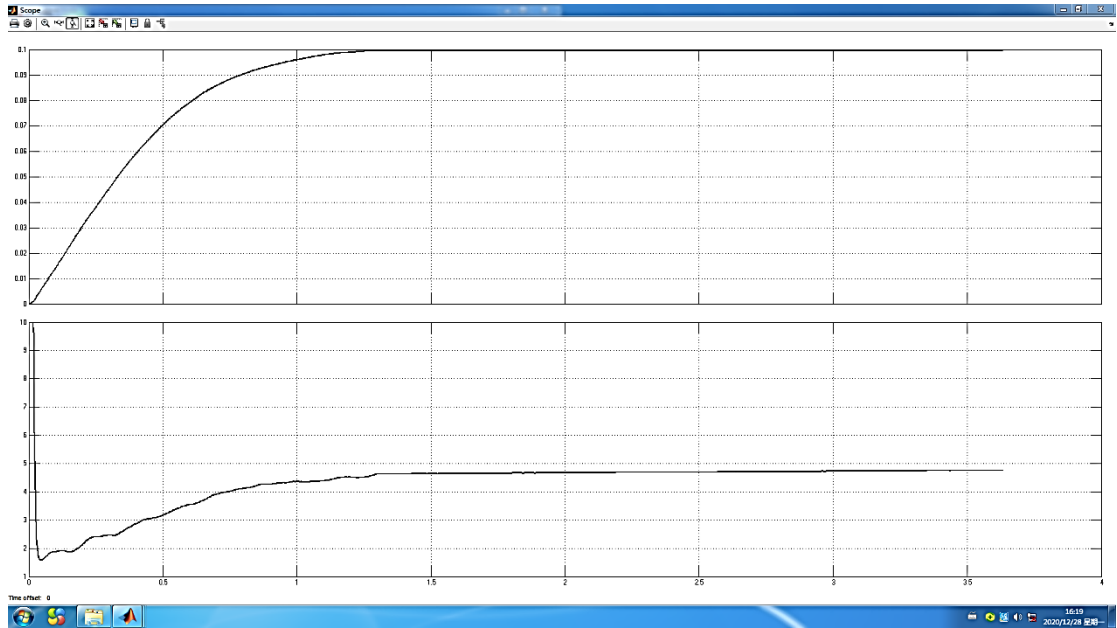


图 3-33 第一组开环零点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 0.95s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0.4\%$ ，实验结果满足要求；

- 第二组开环零点 $z_{1,2} = -2.03 \pm j2.37$ ，闭环极点 $p_{1,2} = -2.94 \pm j1.89$ ，根轨迹增益 $K^* = 2380.6$ ，（闭环极点的）阻尼比 $\xi = 0.841$ ，自然频率 $\omega_n = 3.49$ ：

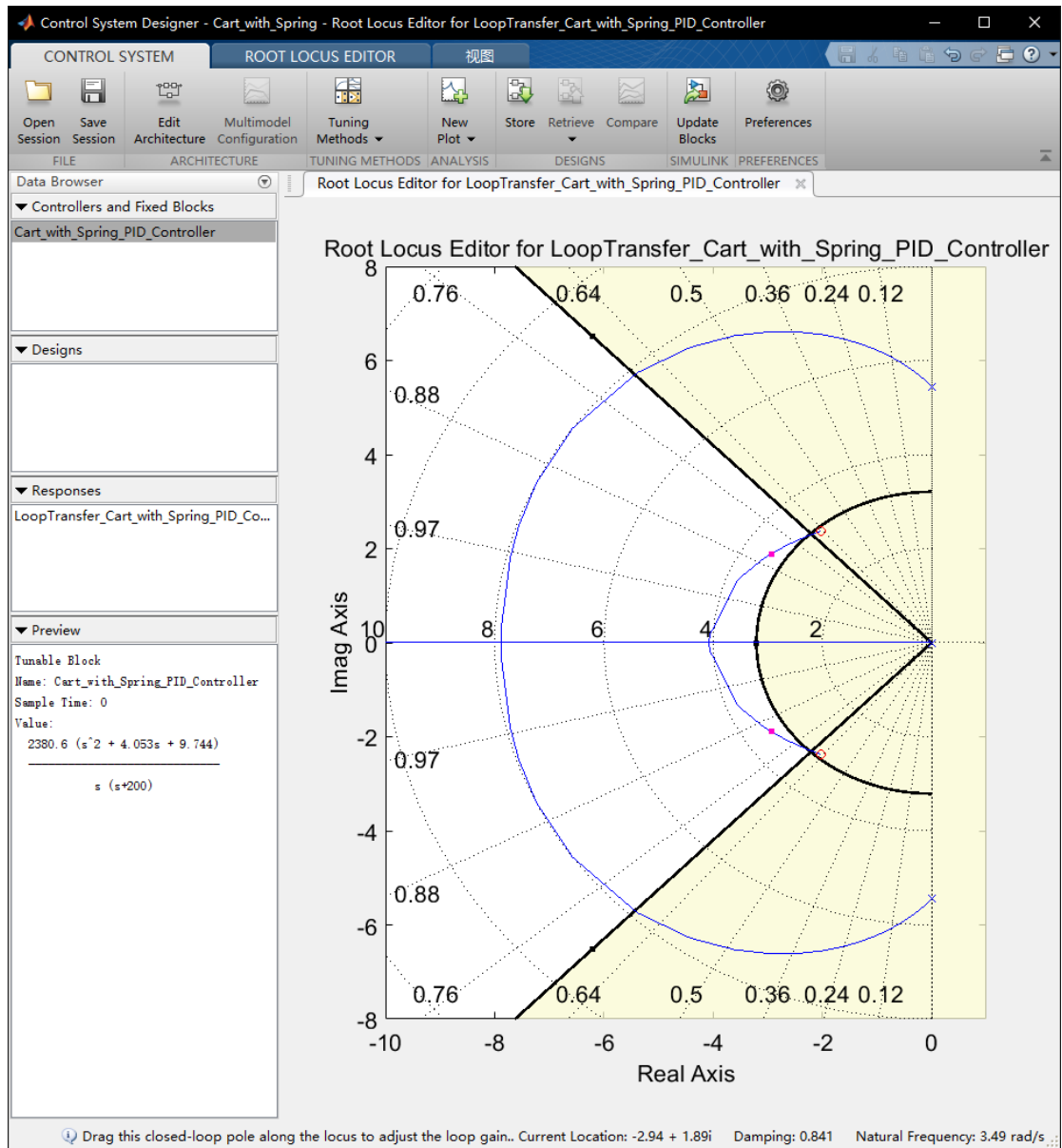


图 3-34 第二组开环零点对应的根轨迹图

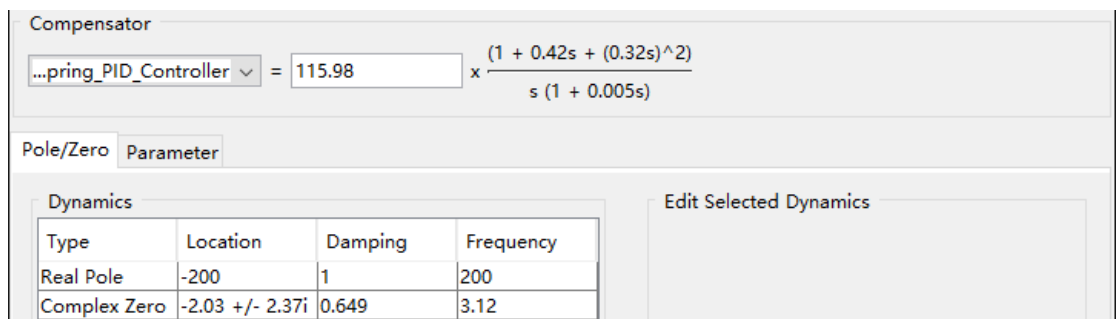


图 3-35 第二组开环零点对应的 PID 控制器传递函数

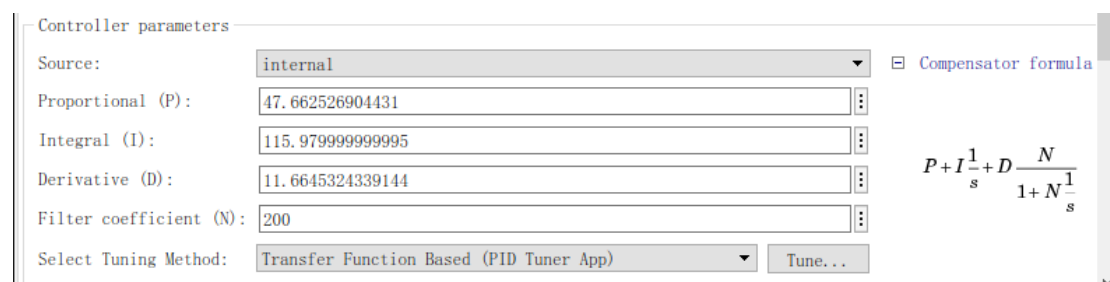


图 3-36 第二组开环零点对应的 PID 控制器参数

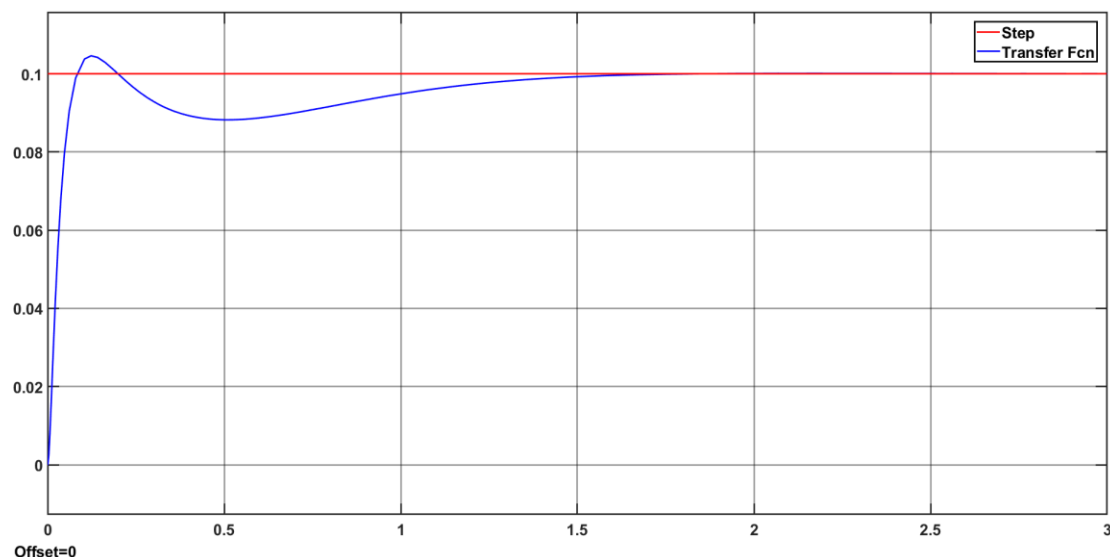


图 3-37 第二组开环零点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 4.6\%$ ，调节时间 $t_s = 1.014s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果满足要求；

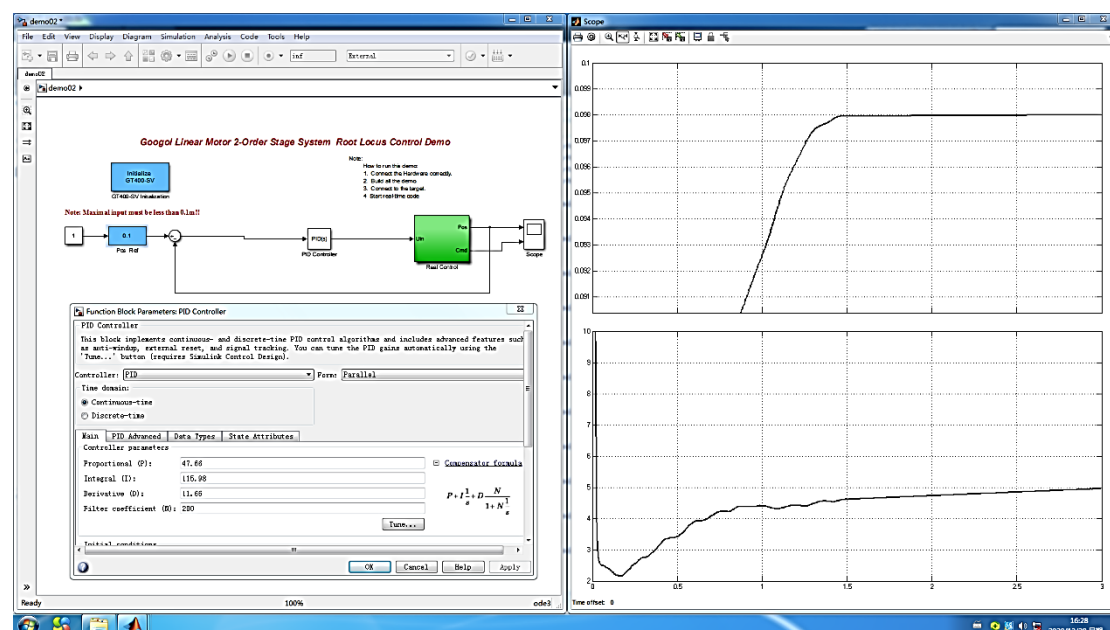


图 3-38 第二组开环零点阶跃响应实验参数

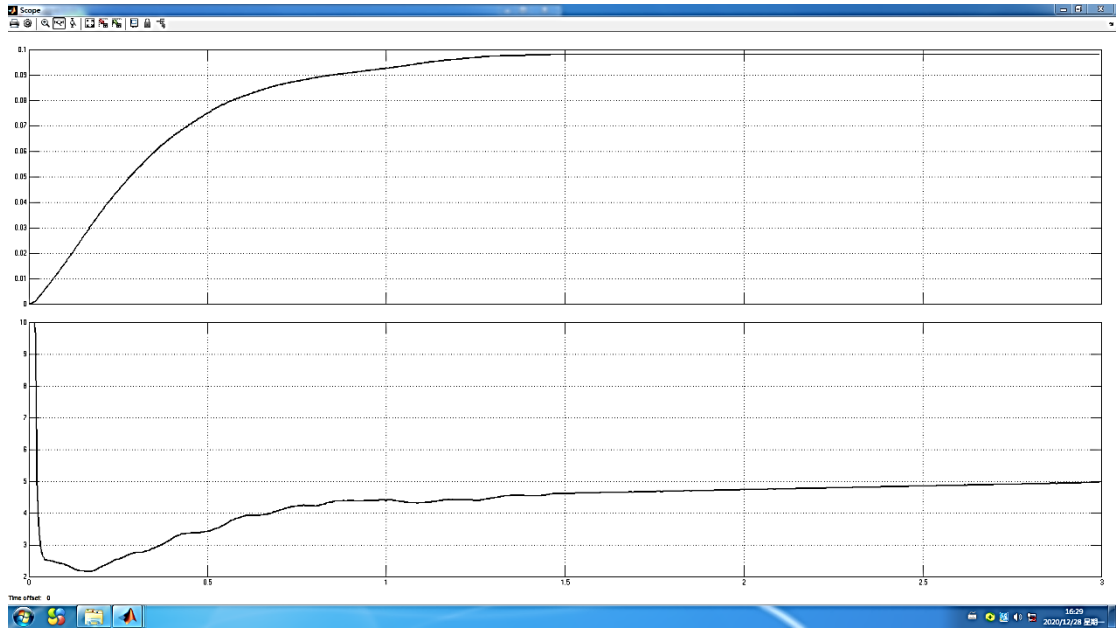


图 3-39 第二组开环零点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 1.12s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 2\%$ ，实验结果满足要求；

- 第三组开环零点 $z_{1,2} = -2.57 \pm j2.16$ ，闭环极点 $p_1 = -5.53, p_2 = -3.09$ ，根轨迹增益 $K^* = 2055.7$ ，（闭环极点的）阻尼比 $\xi = 1$ ，自然频率 $\omega_n = -4.31$ ：

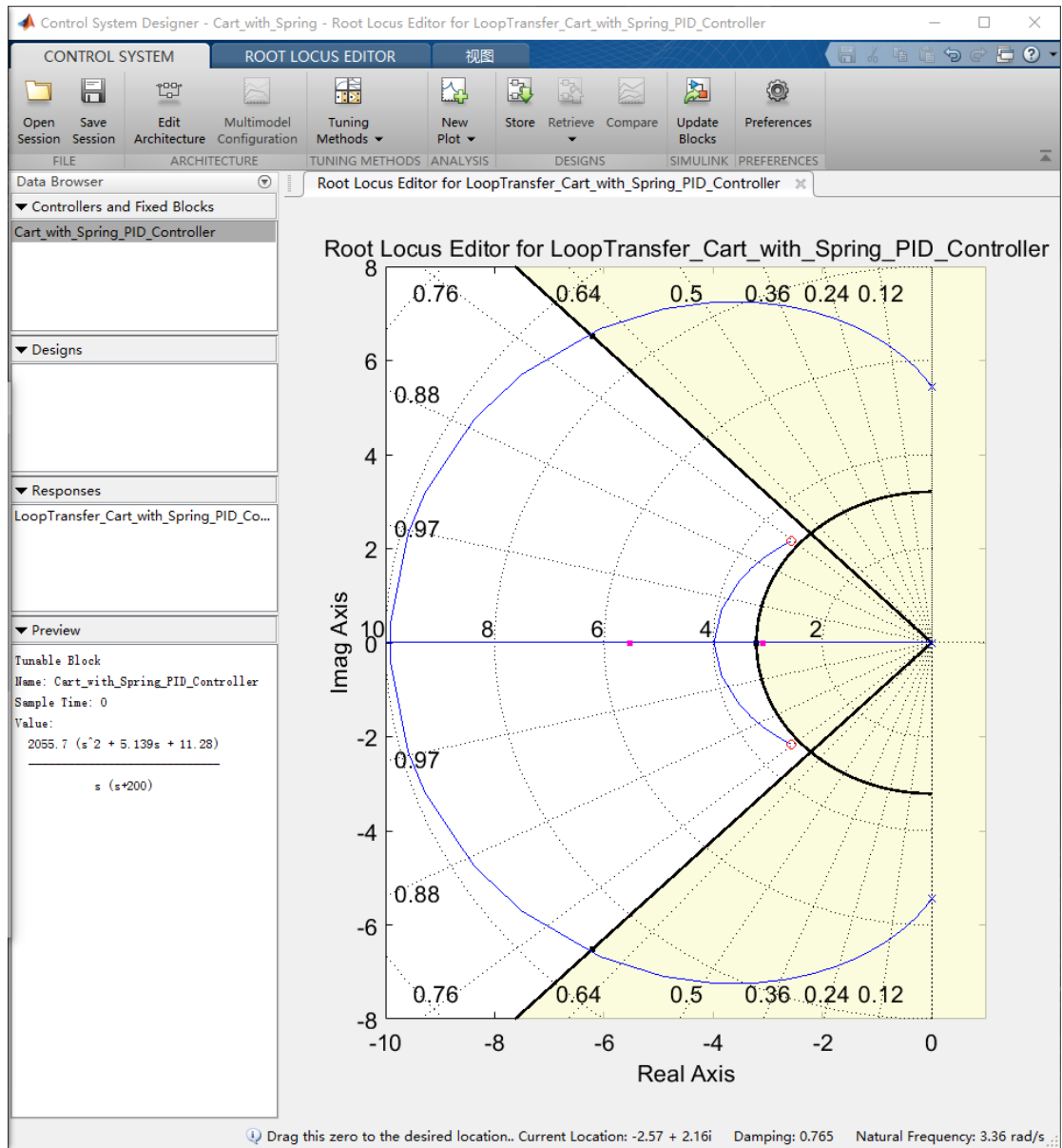


图 3-40 第三组开环零点对应的根轨迹图

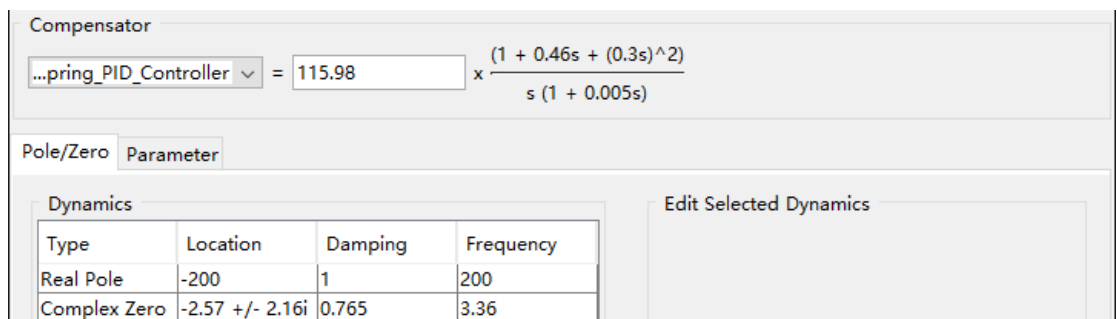


图 3-41 第三组开环零点对应的 PID 控制器传递函数

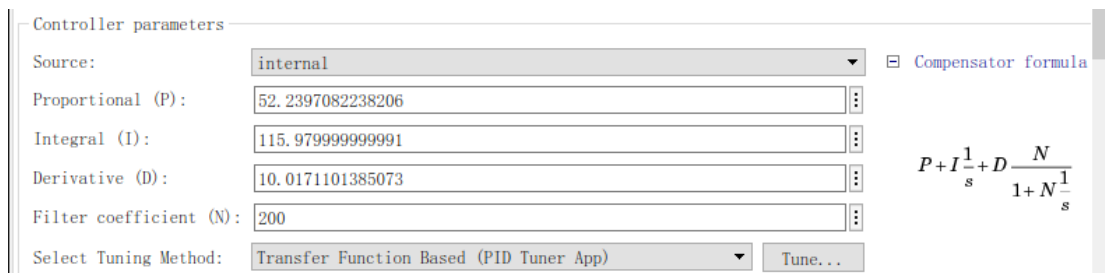


图 3-42 第三组开环零点对应的 PID 控制器参数

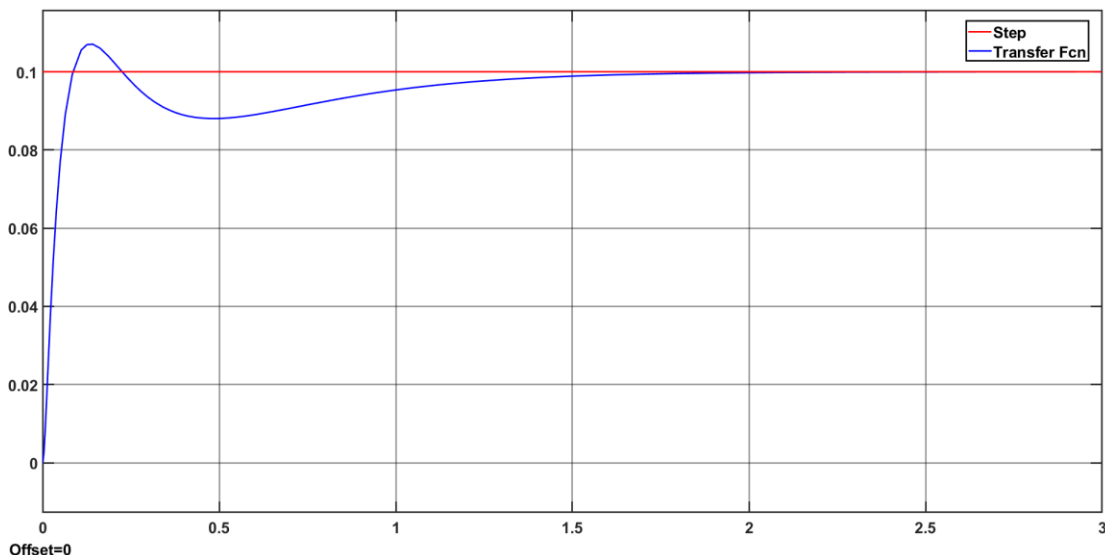


图 3-43 第三组开环零点阶跃响应仿真曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 6.9\%$ ，调节时间 $t_s = 0.988s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 0\%$ ，仿真结果不满足要求；

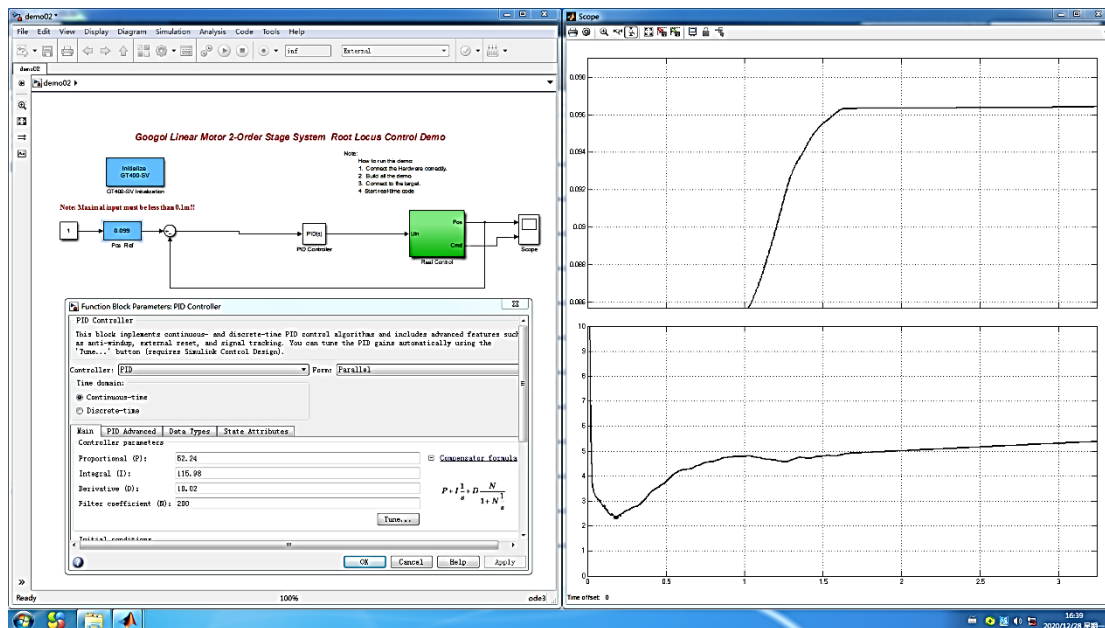


图 3-44 第三组开环零点阶跃响应实验参数

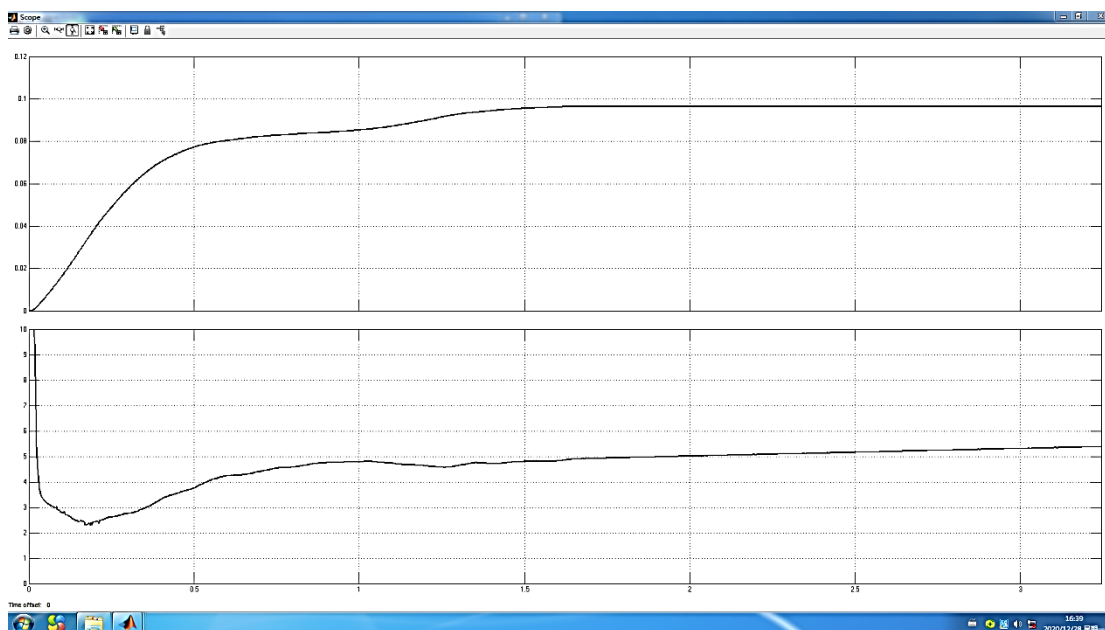


图 3-45 第三组开环零点阶跃响应实验曲线

由图可得，超调量 $\sigma = 0\%$ ，调节时间 $t_s = 1.44s$ ，稳态误差 $e_{ss} = 3.7\%$ ，实验结果满足要求；

3.3.4 开环零点位置变化对 PID 控制器的影响分析

根据上一小节的仿真与实验结果，以表格形式给出三组不同开环零点对应的时域指标情况如下：

表 3-2 开环零点变化对动态性能的影响

序号	开环零点位置	闭环极点位置	根轨迹增益	阻尼比	自然频率	仿真 / 实验	超调量	调节时间	稳态误差
1	$z_{1,2} = -1.46 \pm j2.51$	$p_{1,2} = -2.02 \pm j2.35$	2740.2	0.652	3.1	仿真	2.1%	1.036s	0%
						实验	0%	0.95s	0.4%
2	$z_{1,2} = -2.03 \pm j2.37$	$p_{1,2} = -2.94 \pm j1.89$	2380.6	0.841	3.49	仿真	4.6%	1.014s	0%
						实验	0%	1.12s	2%
3	$z_{1,2} = -2.57 \pm j2.16$	$p_1 = -5.53, p_2 = -3.09$	2055.7	1	4.31	仿真	6.9%	0.988s	0%
						实验	0%	1.44s	3.7%

由上述结果和表格对比可见，在开环增益不变的前提下，改变开环零点位置、根轨迹增益减小，系统的动态性能变差，稳态误差增大。

3.3.5 根轨迹设计 PID 控制器效果分析

根据前述分析和理论知识，开环零点决定了根轨迹形状，闭环极点决定了根轨迹增益；调整开环零点，使得根轨迹穿过设计指标的闭环极点位置，再调整闭环极点，使其位于设计指标范围之内；这样设计的 PID 控制器会使系统动态性能和稳态误差较好；倘若闭环极点或开环零点位置与这个理想设计思路所划定的范围偏差较大，都会对 PID 控制器的效果产生很大影响。

第4章 总结

本学期的自动控制原理实验在繁忙与充实中结束了，经过本次实验大作业，我收获颇丰。不仅回顾了自动控制原理理论课所学知识，还在实践中学习到了有关 MATLAB、SIMULINK 应用的相关知识，为以后的工程实践打下基础。

在进行实验大作业的过程中，通过自己动手仿真分析、实物联调，仿真实验分析比对，我对弹簧小车系统的稳定性、动态特性，串联 PID 控制器的根轨迹设计方法以及影响 PID 控制器效果的因素有了深刻的认识；以前虽然搞过数模，对 MATLAB 的使用有一定的了解，但是自动控制原理这门课程有关的仿真几乎都在 SIMULINK 里完成，对我而言也算是未知领域。经过实验大作业，我熟练掌握了 SIMULINK 的有关使用方法，能够独立进行典型系统的时域分析，会用 Analysis - Control design 选项卡中的 Linear Analysis 和 Control System Designer 进行控制系统分析和设计；实践出真知，实验大作业虽然不简单，但完成实验大作业也是对自我的提升。

最后，非常感谢王老师这一学期实验课对我的悉心指导，同时也感谢实验室其他老师有问必答的无私奉献，在老师们身上我看到了对科研的严谨态度，我也要感谢和我探讨问题的同学们，一起互帮互助也是珍贵的经历。我也会带着严谨认真的态度，继续进行剩下课程的理论与实践学习。

