МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Стохастический анализ и стохатические дифференциальные уравнения

Домашняя работа №1

«Теоремы сходимости»

Группа ФН11-73Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Пусть $\{\varepsilon_n\}, n = 0, 1, ..., N,$ – последовательность независимых случайных величин с $M\varepsilon_n = 0$, $D\varepsilon_n = \sigma^2$.

1. Докажите, что последовательность $\{\xi_n\}, n = 0, 1, ..., N,$
$\xi_0 = \varepsilon_0$, $\xi_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(1 + \alpha\varepsilon_0)$,
$\xi_{n+1} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(1 + \alpha\varepsilon_0) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j+1}(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1}), n \geq 1,$
является мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}, \{\mathcal{F}_n\} = \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$.
Найдите квадратическую характеристику $\langle\xi\rangle_n$.

2. Для заданных N, σ смоделируйте M нормально распределённых последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, вычислите соответствующие последовательности $\{\xi_n\}$, используя заданные α и β. Несколько последовательностей выведите на печать.

3. Изучите на основе смоделированных траекторий закон распределения СВ $\frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ (постройте гистограмму, определите вид распределения, оцените параметры, проверьте по критерию Пирсона). Экспериментально проверьте, зависит ли этот закон от закона распределения последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

Решение

1. 1) Доказательство:

$$M(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot (1 + \alpha\varepsilon_0) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j+1} \cdot (1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1})|\mathcal{F}_n) =$$

$$= M(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot (1 + \alpha\varepsilon_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{j+1} \cdot (1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1}) + \varepsilon_{n+1} \cdot (1 + \alpha\varepsilon_n + \beta\varepsilon_{n-1})|\mathcal{F}_n) =$$

$$= M(\xi_n + \varepsilon_{n+1} \cdot (1 + \alpha\varepsilon_n + \beta\varepsilon_{n-1})|\mathcal{F}_n) = M(\xi_n|\mathcal{F}_n) + M(\varepsilon_{n+1} \cdot (1 + \alpha\varepsilon_n + \beta\varepsilon_{n-1})|\mathcal{F}_n).$$

Заметим, что ξ_n и $(1 + \alpha\varepsilon_n + \beta\varepsilon_{n-1})$ измеримы относительно $\mathcal{F}_n$, тогда:

$$M(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \xi_n + M(\varepsilon_{n+1}) \cdot (1 + \alpha\varepsilon_n + \beta\varepsilon_{n-1}) = \xi_n + 0 = \xi_n.$$

Следовательно, последовательность $\{\xi_n\}$ является мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$.

2)

$$\langle\xi\rangle_n = \sum_{j=0}^{n-1} M((\xi_{j+1} - \xi_j)^2|\mathcal{F}_j) = M((\xi_1 - \xi_0)^2|\mathcal{F}_0) + \sum_{j=1}^{n-1} M((\xi_{j+1} - \xi_j)^2|\mathcal{F}_j) =$$

$$= M((\varepsilon_0 + \varepsilon_1(1 + \alpha\varepsilon_0) - \varepsilon_0)^2|\mathcal{F}_0) + \sum_{j=1}^{n-1} M((\varepsilon_{j+1}(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1}))^2|\mathcal{F}_j) =$$

$$= M(\varepsilon_1^2 + 2\alpha\varepsilon_0\varepsilon_1^2 + \alpha^2\varepsilon_0^2\varepsilon_1^2|\mathcal{F}_0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1} M(\varepsilon_{j+1}^2 + \alpha^2\varepsilon_j^2\varepsilon_{j+1}^2 + \beta^2\varepsilon_{j-1}^2\varepsilon_{j+1}^2 + 2\alpha\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}^2 + 2\alpha\beta\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}^2 + 2\beta\varepsilon_{j-1}\varepsilon_{j+1}^2|\mathcal{F}_j) =$$

$$= M\varepsilon_1^2 + 2\alpha\varepsilon_0 M\varepsilon_1^2 + \alpha^2\varepsilon_0^2 M\varepsilon_1^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(M\varepsilon_{j+1}^2 + \alpha^2\varepsilon_j^2 M\varepsilon_{j+1}^2 + \beta^2\varepsilon_{j-1}^2 M\varepsilon_{j+1}^2 + 2\alpha\varepsilon_j M\varepsilon_{j+1}^2 + 2\alpha\beta\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j M\varepsilon_{j+1}^2 + 2\beta\varepsilon_{j-1} M\varepsilon_{j+1}^2) =$$

$$= \sigma^2 + 2\alpha\varepsilon_0\sigma^2 + \alpha^2\varepsilon_0^2\sigma^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(\sigma^2 + \alpha^2\varepsilon_j^2\sigma^2 + \beta^2\varepsilon_{j-1}^2\sigma^2 + 2\alpha\varepsilon_j\sigma^2 + 2\alpha\beta\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\sigma^2 + 2\beta\varepsilon_{j-1}\sigma^2) =$$

$$= \sigma^2 \cdot (1 + 2\alpha\varepsilon_0 + \alpha^2\varepsilon_0^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(1 + \alpha^2\varepsilon_j^2 + \beta^2\varepsilon_{j-1}^2 + 2\alpha\varepsilon_j + 2\alpha\beta\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j + 2\beta\varepsilon_{j-1})) =$$

$$= \sigma^2 \cdot ((1 + \alpha\varepsilon_0)^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1})^2).$$

Таким образом,

$$\langle\xi\rangle_n = \sigma^2 \cdot ((1 + \alpha\varepsilon_0)^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1})^2).$$

2. Пусть $N = 500$, $M = 500$, $\sigma = 0.5$, $\alpha = -0.5$, $\beta = 5$.
Для заданных N, σ смоделируем M нормально распределённых последовательностей $\{\varepsilon_n\}$.
Приведём несколько последовательностей:

$$\{\varepsilon_1\} = (0.4578,\ -0.3018,\ 0.5811,\ \ldots,\ -0.2039,\ 0.3864,\ -0.0494)$$
$$\{\xi_1\} = (0.4578,\ 0.2251,\ 2.224,\ \ldots,\ 18.8345,\ 18.8631,\ 18.8737)$$
$$\{\varepsilon_{250}\} = (0.1233,\ -0.1187,\ 0.7597,\ \ldots,\ 0.0229,\ 0.1317,\ 0.2428)$$
$$\{\xi_{250}\} = (0.1233,\ 0.0119,\ 1.2848,\ \ldots,\ -22.7197,\ -22.3742,\ -22.1196)$$
$$\{\varepsilon_{500}\} = (-0.5362,\ -0.8797,\ 0.6427,\ \ldots,\ 0.6775,\ 0.4747,\ 0.0971)$$
$$\{\xi_{500}\} = (-0.5362,\ -1.6518,\ -2.4494,\ \ldots,\ -11.0991,\ -10.1291,\ -9.7262)$$

Визуализация нескольких последовательностей $\{\xi_n\}$ представлена на Рис. 1.
Ниже представлен код, реализующий вышеописанные вычисления:

```
def generate_norm(a, b, sigma, M, N):
  eps = np.empty([M, N])
  xi = np.empty([M, N])
  for i in range(M):
    eps[i] = np.random.normal(0, sigma, N)
    xi[i][0] = eps[i][0]
    xi[i][1] = eps[i][0] + eps[i][1] * (1 + a * eps[i][0])
    for j in range(2, N):
      xi[i][j] = xi[i][j - 1] + eps[i][j] * (1 + a * eps[i][j - 1] + b * eps[i][j - 2])
  return eps, xi
```

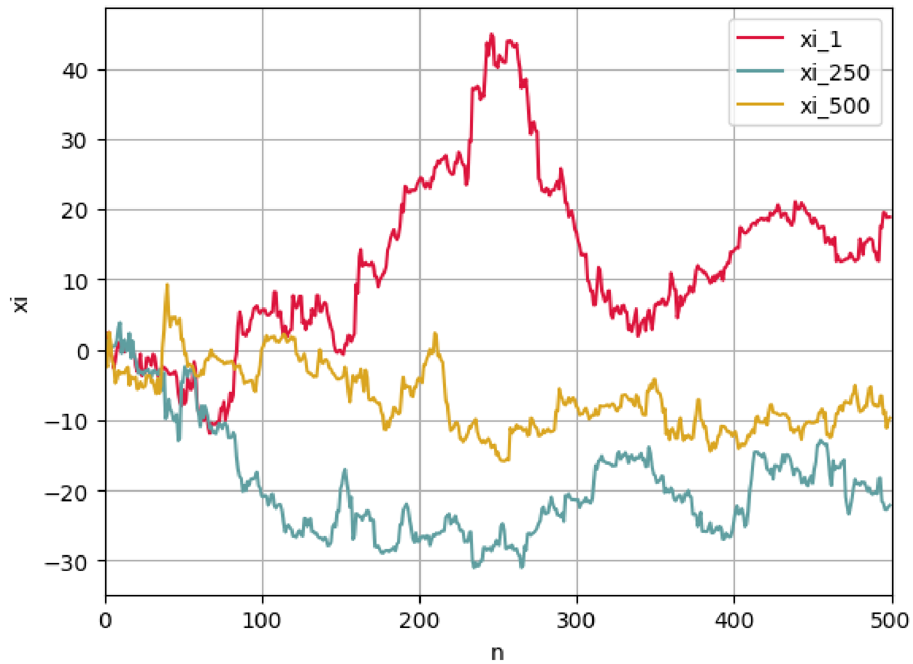

Рис. 1: Визуализация нескольких последовательностей $\{\xi_n\}$

3. Обозначим

$$\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}} = \frac{\xi_N}{\sigma \cdot \sqrt{((1+\alpha\varepsilon_0)^2 + \sum_{j=1}^{N-1}(1+\alpha\varepsilon_j+\beta\varepsilon_{j-1})^2)}}$$

Код:

```
def new_sv(M, eps, xi, N, sigma, a, b):
  zeta = np.empty([M])
  for i in range(M):
    su = (1 + a * eps[i][0]) ** 2
    for k in range(2, N):
      su += (1 + a * eps[i][k - 1] + b * eps[i][k - 2]) ** 2
    zeta[i] = xi[i][N - 1] / np.sqrt(su) / sigma
  return zeta
```

1) Пользуясь правилом Стёрджеса, определим число интервалов разбиения для построения гистограммы частот:

```
l = np.trunc(1 + 3.32*np.log10(M - 1)):
```

$$l = 9.$$

Гистограмма относительных частот представлена на Рис. 2.

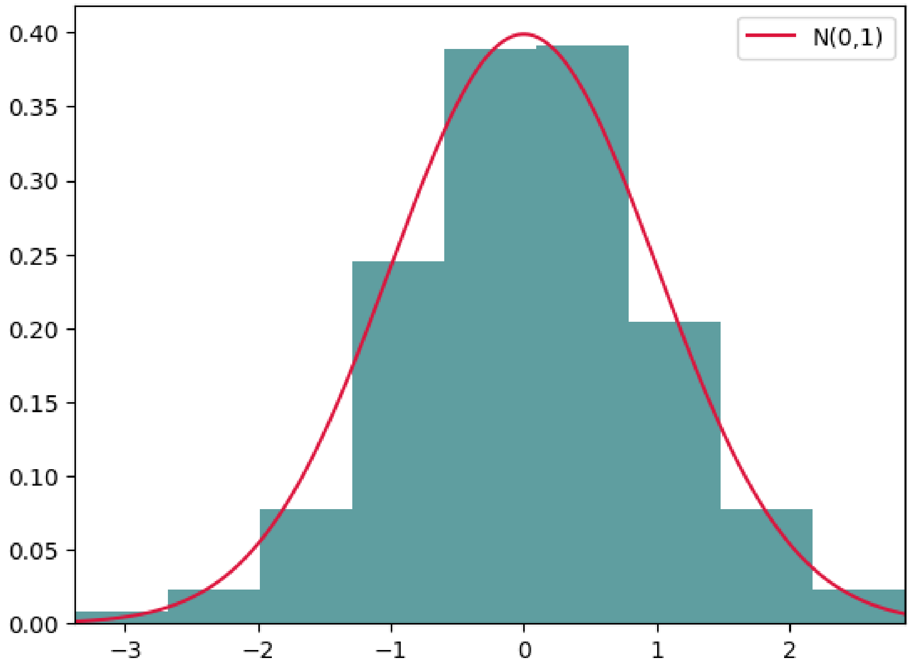

Рис. 2: Гистограмма относительных частот распределения ζ

2) По гистограмме можем предположить, что случайная величина ζ распределена по стандартному нормальному закону распределения.

$$M(\zeta_k) = 0; D(\zeta_k) = 1.$$

3) Оценка параметров:

$$\hat{a} = \overline{X} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} X_k = 0.0519$$

$$\hat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M} (X_k - \overline{X})^2 = 0.9352$$

4) Проверим гипотезу о распределении, используя критерий согласия Пирсона.
H_0: ζ подчиняется стандартному нормальному закону распределения $N(0,1)$.
Построим таблицу интервалов и частот:

Интервалы:	[-3.378, -2.683)	[-2.683, -1.989)	[-1.989, -1.294)	[-1.294, -0.6)	[-0.6, 0.095)
Эмпир. частоты:	3	8	27	85	135
Теор. частоты:	1.824	9.865	37.225	88.288	131.706

Интервалы:	[0.095, 0.79)	[0.79, 1.484)	[1.484, 2.178)	[2.178, 2.873]
Эмпир. частоты:	136	71	27	8
Теор. частоты:	123.625	73.009	27.115	7.345

Объединяем интервалы, на которых теоретическая частота < 5:

Интервалы:	[-3.378, -1.989)	[-1.989, -1.294)	[-1.294, -0.6)	[-0.6, 0.095)
Эмпир. частоты:	11	27	85	135
Теор. частоты:	11.689	37.225	88.288	131.706

Интервалы:	[0.095, 0.79)	[0.79, 1.484)	[1.484, 2.178)	[2.178, 2.873]
Эмпир. частоты:	136	71	27	8
Теор. частоты:	123.625	73.009	27.115	7.345

Вычисляем χ^2_B:

$$\chi^2_B = \sum_{l=1}^{8} \frac{(\nu_l - np_l)^2}{np_l} = 4.407$$

А затем находим квантиль распределения χ^2 с $(m-r-1)$ степенями свободы уровня $1-\alpha = 0.95$, где $r=2$ – количеству оцениваемых параметров:

$$\chi^2_{0.95}(8-1) = \chi^2_{0.95}(7) = 14.07$$

Таким образом:

$$\chi^2_B = 4.407 < 14.07 = \chi^2_{0.95}(7)$$

Следовательно, т.к. $\chi^2_B < \chi^2_{0.95}(7)$, гипотеза H_0 принимается. Случайная величина $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ распределена по закону $N(0,1)$.

Код проверки по критерию Пирсона:

```
def Pearson_test_norm(zeta, M):
  borders = []
  for i in range (0, l):
    borders.append(hist[1][i])
  teor_frequency = [0] * l
  teor_frequency[0] = M * (scipy.stats.norm.cdf(borders[1]) - 0)
  for i in range(1, l - 1):
    teor_frequency[i] = M * (scipy.stats.norm.cdf(borders[i+1]) -
    scipy.stats.norm.cdf(borders[i]))
  teor_frequency[l-1] = M * (1 - scipy.stats.norm.cdf(borders[l-1]))

  (...) #реализация объединения интервалов опущена в отчёте

  n = len(new_real_frequency)

  pirson = 0
  for i in range(n):
    pirson += ((new_real_frequency[i] - new_teor_frequency[i])**2) /
    new_teor_frequency[i]

  free = n - 1 - 2
  chi2_095 = scipy.stats.chi2.ppf(0.95, free)
```

```
if pirson < chi2_095:
  print("Гипотеза о стандартном нормальном распределении принимается!")
else:
  print("Гипотеза о стандартном нормальном распределении не принимается!")
```

5) Экспериментальная проверка зависимости закона распределения $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ от закона распределения последовательности $\{\varepsilon_n\}$.
Для простоты вычислений пусть $\{\varepsilon_n\} \sim R(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.
Тогда $M\varepsilon_n = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2} = 0$, $D\varepsilon_n = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2}{12} = \frac{5}{3}$.
Далее повторяем действия из пунктов 2 и 3. Для заданных N и интервала смоделируем M равномерно распределённых последовательностей $\{\varepsilon_n\}$.
Приведём несколько последовательностей:

$$\{\varepsilon_1\} = (-1.4652,\ -0.2669,\ 0.572,\ \ldots,\ -2.1465,\ 1.8378,\ -1.1607)$$

$$\{\xi_1\} = (-1.4652,\ -1.9276,\ -5.4696,\ \ldots,\ 155.455,\ 177.8647,\ 190.2275)$$

$$\{\varepsilon_{250}\} = (1.1448,\ 0.3227,\ 0.4712,\ \ldots,\ -2.1701,\ -0.0479,\ -0.3315)$$

$$\{\xi_{250}\} = (1.1448,\ 1.2828,\ 4.375,\ \ldots,\ -153.8897,\ -154.0164,\ -150.759)$$

$$\{\varepsilon_{500}\} = (-1.8147,\ 1.4171,\ -1.5657,\ \ldots,\ -0.8474,\ -1.4829,\ 1.9606)$$

$$\{\xi_{500}\} = (-1.8147,\ 0.8883,\ 14.6378,\ \ldots,\ -173.2626,\ -178.2475,\ -183.1406)$$

Визуализация нескольких последовательностей $\{\xi_n\}$ представлена на Рис. 3.

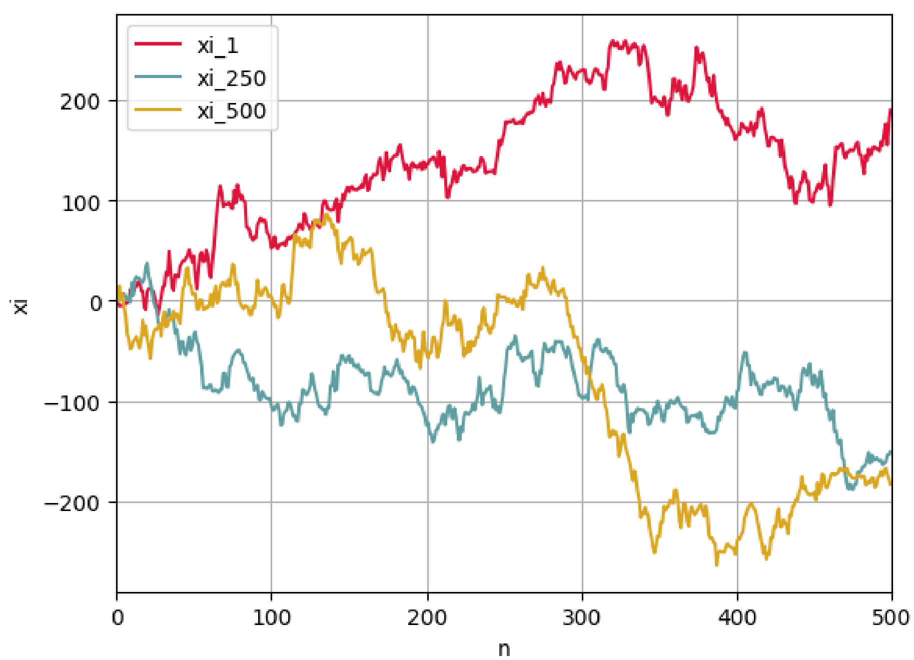

Рис. 3: Визуализация нескольких последовательностей $\{\xi_n\}$

5.1) Гистограмма относительных частот представлена на Рис. 4.

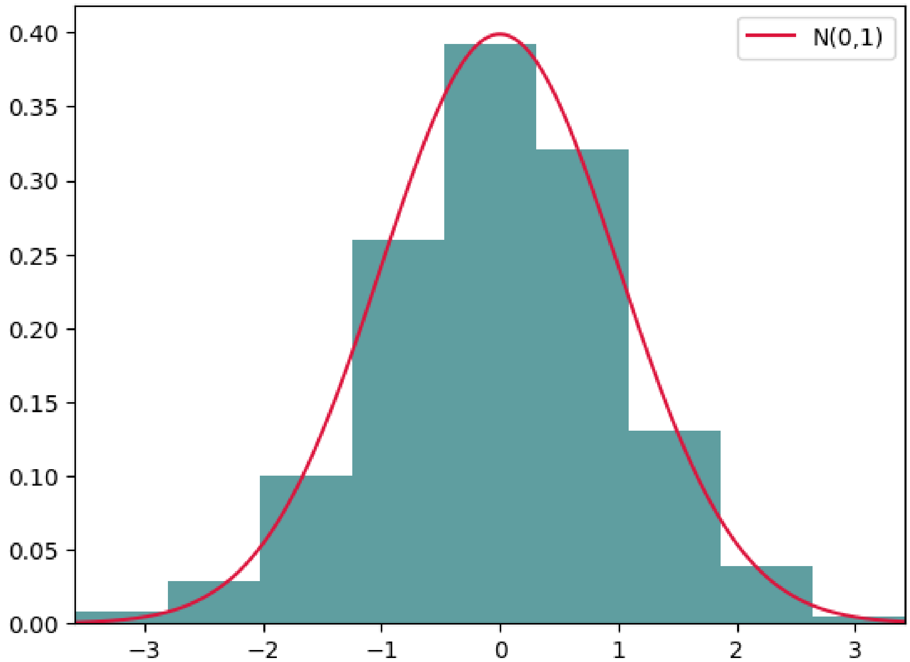

Рис. 4: Гистограмма относительных частот распределения ζ

5.2) По гистограмме снова можем предположить, что случайная величина ζ распределена по стандартному нормальному закону распределения.
5.3) Оценка параметров:

$$\hat{a} = \overline{X} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M} X_k = 0.025$$

$$\hat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M} (X_k - \overline{X})^2 = 1.0538$$

5.4) Проверим, используя критерий Пирсона.
H_0: ζ подчиняется стандартному нормальному закону распределения $N(0,1)$.
Построим таблицу частот:

Интервалы:	[-3.586, -2.807)	[-2.807, -2.028)	[-2.028, -1.249)	[-1.249, -0.47)	[-0.47, 0.309)
Эмпир. частоты:	3	11	39	101	153
Теор. частоты:	1.25	9.39	42.276	106.674	151.083

Интервалы:	[0.309, 1.088)	[1.088, 1.867)	[1.867, 2.6461)	[2.6461, 3.4251]
Эмпир. частоты:	125	51	15	2
Теор. частоты:	120.182	53.672	13.438	2.036

Объединяем интервалы, на которых теоретическая частота < 5:

Интервалы:	[-3.586, -2.028)	[-2.028, -1.249)	[-1.249, -0.47)	[-0.47, 0.309)
Эмпир. частоты:	14	39	101	153
Теор. частоты:	10.64	42.276	106.674	151.083

Интервалы:	[0.309, 1.088)	[1.088, 1.867)	[1.867, 3.4251]
Эмпир. частоты:	125	51	17
Теор. частоты:	120.182	53.672	15.474

Вычисляем χ^2_B:

$$\chi^2_B = \sum_{l=1}^{7} \frac{(\nu_l - np_l)^2}{np_l} = 2.118$$

А затем находим квантиль распределения χ^2 с $(m-r-1)$ степенями свободы уровня $1-\alpha = 0.95$, где $r = 2$ – количеству оцениваемых параметров:

$$\chi^2_{0.95}(7-1) = \chi^2_{0.95}(6) = 12.59$$

Таким образом:

$$\chi^2_B = 2.118 < 12.59 = \chi^2_{0.95}(6)$$

Следовательно, т.к. $\chi^2_B < \chi^2_{0.95}(4)$, гипотеза H_0 принимается. Случайная величина $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ распределена по закону $N(0,1)$.

Таким образом, экспериментально доказано, что закон распределения случайной величины $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ не зависит от распределения $\{\varepsilon_n\}$.

Вывод:

В ходе выполнения задания было доказано, что последовательность $\{\varepsilon_n\}$ является мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_j\}$, найдена квадратическая характеристика $\langle\xi\rangle_n$. Были смоделированы последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\xi_n\}$, а на основе смоделированных траекторий изучен закон распределения СВ $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$, была принята гипотеза о том, что $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}} \sim N(0,1)$. Экспериментально было проверено, что закон распределения СВ $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ не зависит от распределения последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

Приложение:

Полная версия программы, написанной на Python доступна по ссылке:

Рис. 5: https://colab.research.google.com/drive/1ib1me2lHE$_e bbbAhCEXkP6VyqTg3x2e6?usp = sharing$