

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ  
КАФЕДРА  
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Стохастический анализ и стохастические дифференциальные уравнения

Домашняя работа №3

Группа ФН11-73Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

## Задание

Рассматривается частично наблюдаемая последовательность  $\{\xi_n, \eta_n\}, n \geq 1$ , с ненаблюдаемой компонентой  $\{\xi_n\}$  и наблюдаемой  $\{\eta_n\}$ , удовлетворяющая системе уравнений:

$$\xi_n - \alpha \xi_{n-1} = \varepsilon_n, \xi_0 = \gamma,$$

$$\eta_n = \xi_n + \nu_n,$$

где  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  – центрированные стационарные гауссовские шумы с  $D\varepsilon_n = D_\varepsilon$ ,  $D\nu_n = D_\nu$ , случайная величина  $\gamma \sim N(\nu, \sigma)$ , причём  $\gamma$ ,  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  – не коррелированы.

1. Выбрав значения входных параметров  $\alpha, \mu, \sigma, D_\varepsilon, D_\nu$  (ограничение  $\|\alpha\| \leq 1$ ), смоделировать начальное условие  $\xi_0$  и последовательность  $\{\xi_n, \eta_n\}$  для  $n = \overline{1, 100}$ .
2. Используя реализацию  $\{\eta_n\}$ , построить фильтр Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$  (на основании лекции №7).
3. Вычислить среднеквадратичную ошибку фильтра, сравнить с дисперсией ошибки наблюдения, объяснить результат.
4. Вывести на печать графики полученных реализаций  $\{\xi_n\}$  и  $\{\hat{\xi}_n\}$ .
5. Повторить стохастический эксперимент 1-4 для негауссовских (возьмём равномерно распределённые) шумов  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  с теми же характеристиками.
6. Сформулировать выводы.

## Решение

1. Смоделируем начальное условие  $\xi_0$  и последовательность  $\{\xi_n, \eta_n\}$  для  $n = \overline{1, 100}$  с входными параметрами:  $\alpha = 0.5, \mu = -1, \sigma = 1, D_\varepsilon = 0.2, D_\nu = 0.1$ .

```
def generate_norm(mu, sigma, N, Deps, Dnu):
    eps = np.random.normal(0, np.sqrt(Deps), N)
    nu = np.random.normal(0, np.sqrt(Dnu), N)
    gamma = np.random.normal(mu, sigma, 1)
    xi = np.zeros(N)
    eta = np.zeros(N)
    xi[0] = gamma
    for n in range(1, N):
        xi[n] = eps[n] + alpha * xi[n - 1]
        eta[n] = xi[n] + nu[n]
    return eps, nu, xi, eta
```

$$\xi_0 = \gamma = -1.152.$$

См. рис. 1 и рис. 2. 2. Используя реализацию  $\{\eta_n\}$ , построим фильтр Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$ , алгоритм для построения возьмём из лекции №7:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_n = \alpha \hat{\xi}_{n-1} + k_n (\eta_n - \alpha \hat{\xi}_{n-1}), \\ k_n = \frac{\alpha^2 k_{n-1} + \rho}{\alpha^2 k_{n-1} + \rho + 1}, \rho = \frac{D_\varepsilon}{D_\nu}, \\ \hat{\xi}_0 = \mu, k_0 = \frac{\sigma^2}{D_\nu}. \end{cases}$$

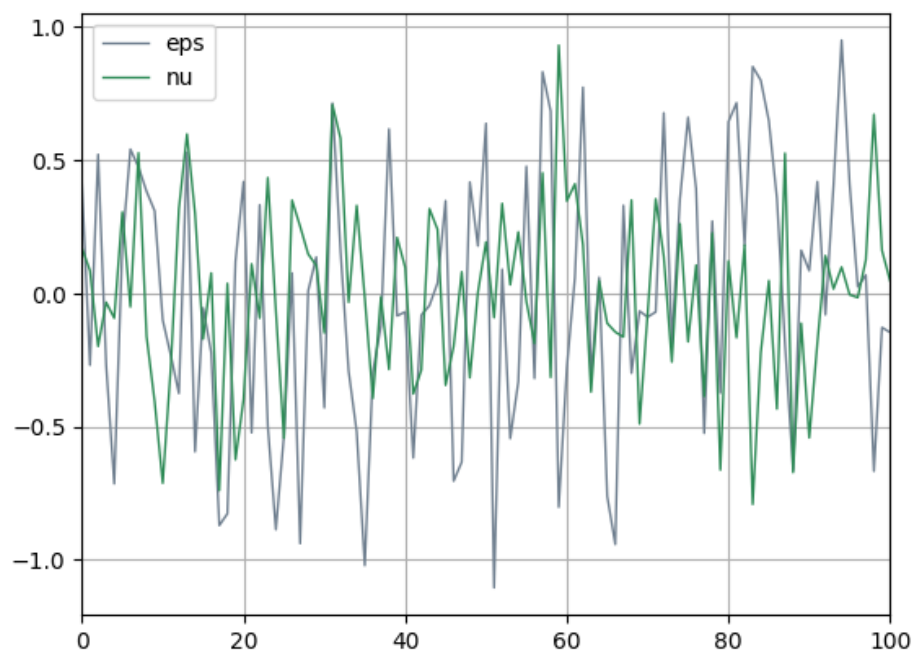


Рис. 1: Визуализация гауссовских шумов  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\nu_n\}$

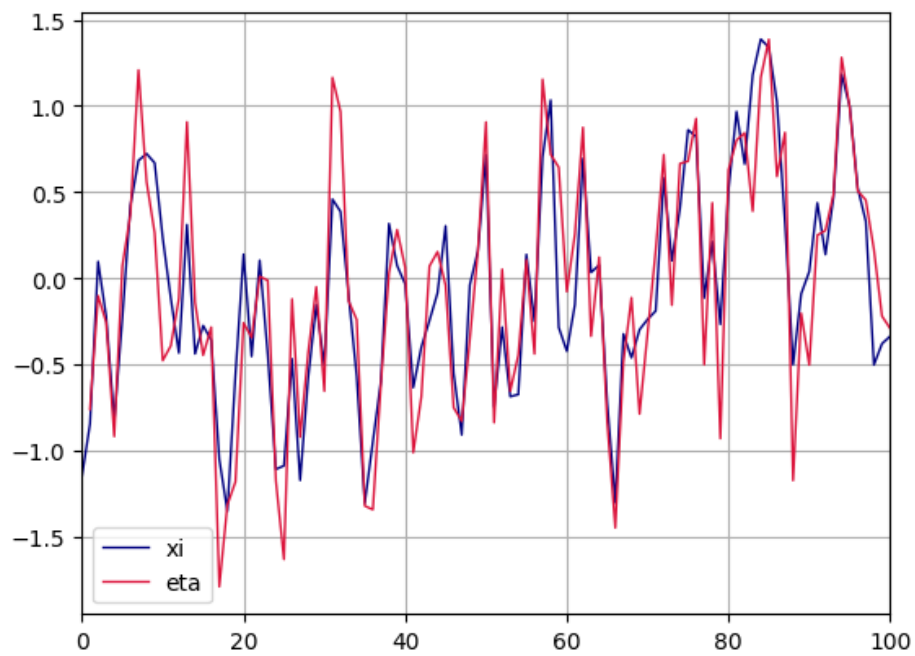


Рис. 2: Визуализация ненаблюдаемой компоненты  $\{\xi_n\}$  и наблюдаемой  $\{\eta_n\}$

При этом  $\hat{P}_n = k_n D_\nu$  – ошибка фильтра  $\xi_n - \hat{\xi}_n$ .

```
def Kalman_filt(mu, sigma, N, Deps, Dnu, eta):
    ro = Deps / Dnu
    xi_hat = np.zeros(N)
    k = np.zeros(N)
    P = np.zeros(N)
    xi_hat[0] = mu
    k[0] = sigma ** 2 / Dnu
    for n in range(1, N):
        k[n] = (alpha ** 2 * k[n-1] + ro) / (alpha ** 2 * k[n - 1] + ro + 1)
        xi_hat[n] = alpha * xi_hat[n - 1] + k[n] * (eta[n] - alpha * xi_hat[n-1])
        P[n] = k[n] * Dnu
    return xi_hat, k, P, ro
```

3. Среднеквадратическая ошибка фильтра:

$$MSE = \frac{\sum_{i=0}^N (\xi_i - \hat{\xi}_i)^2}{N} = 0.0796.$$

Заметим, что  $\hat{P}_{100} = k_{100} D_\nu = 0.0685$  и MSE меньше, чем ошибка наблюдения  $D_\nu = 0.1$ . Так происходит, потому что  $k_n = \frac{\alpha^2 k_{n-1} + \rho}{\alpha^2 k_{n-1} + \rho + 1} < 1$ .

4. На рисунках 3-5 представлена визуализация результатов, полученных в ходе выполнения 2 пункта задания.

5. Повторим стохастический эксперимент 1-4 для негауссовских ошибок  $\{\varepsilon_n\} \sim R(-\sqrt{3D_\varepsilon}, \sqrt{3D_\varepsilon})$  и  $\{\nu_n\} \sim R(-\sqrt{3D_\nu}, \sqrt{3D_\nu})$ .

Код реализации:

```
def generate_uniform(Leps, Reps, Lnu, Rnu, mu, sigma, N, Deps, Dnu):
    eps = np.random.uniform(Leps, Reps, N)
    nu = np.random.uniform(Lnu, Rnu, N)
    gamma = np.random.normal(mu, sigma, 1)
    xi = np.zeros(N)
    eta = np.zeros(N)
    xi[0] = gamma
    for n in range(1, N):
        xi[n] = eps[n] + alpha * xi[n - 1]
        eta[n] = xi[n] + nu[n]
    return eps, nu, xi, eta, gamma
```

Среднеквадратическая ошибка фильтра:

$$MSE = \frac{\sum_{i=0}^N (\xi_i - \hat{\xi}_i)^2}{N} = 0.069.$$

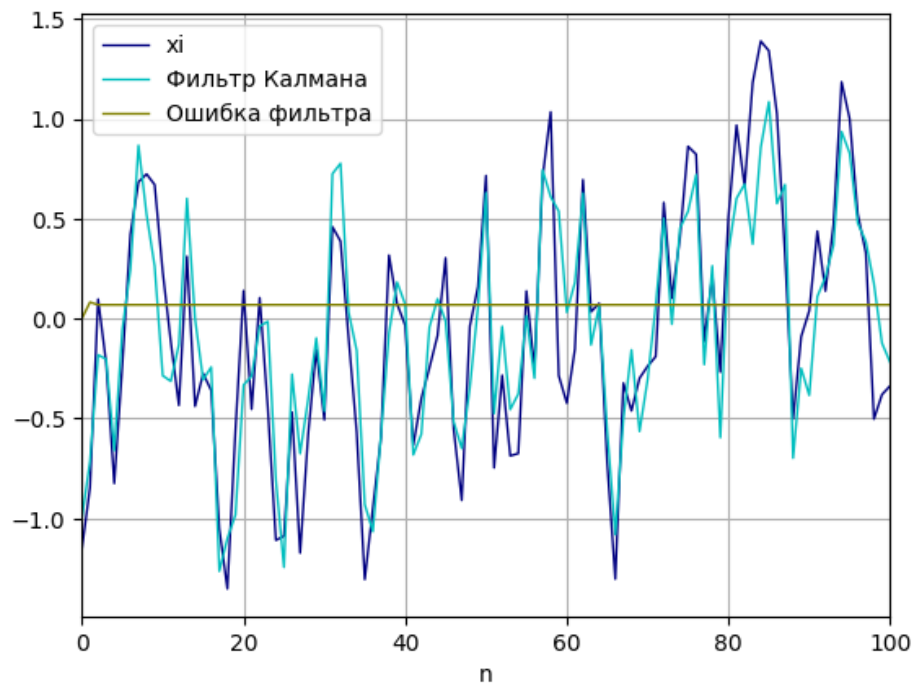


Рис. 3: Визуализация фильтра Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$

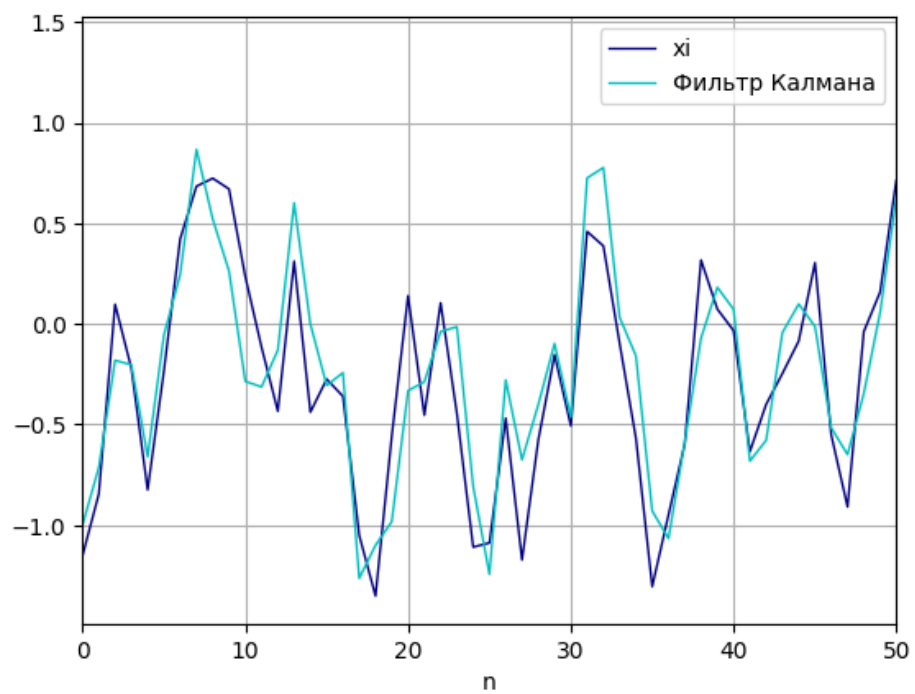


Рис. 4: Более детальная визуализация фильтра Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$  для  $n = \overline{0, 50}$

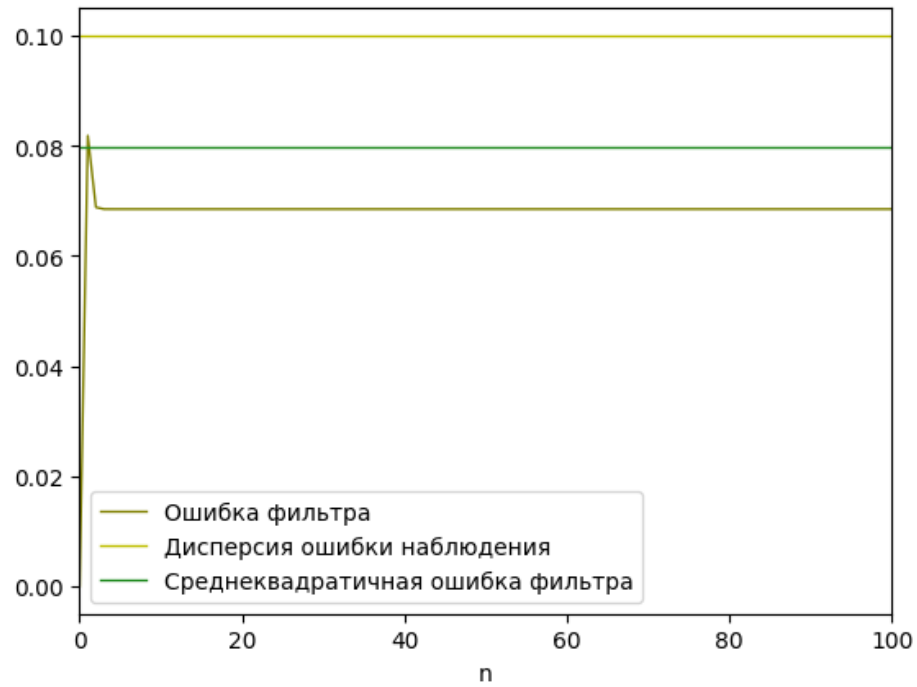


Рис. 5: Визуализация ошибки фильтра, среднеквадратичной ошибки фильтра, дисперсии ошибки наблюдения

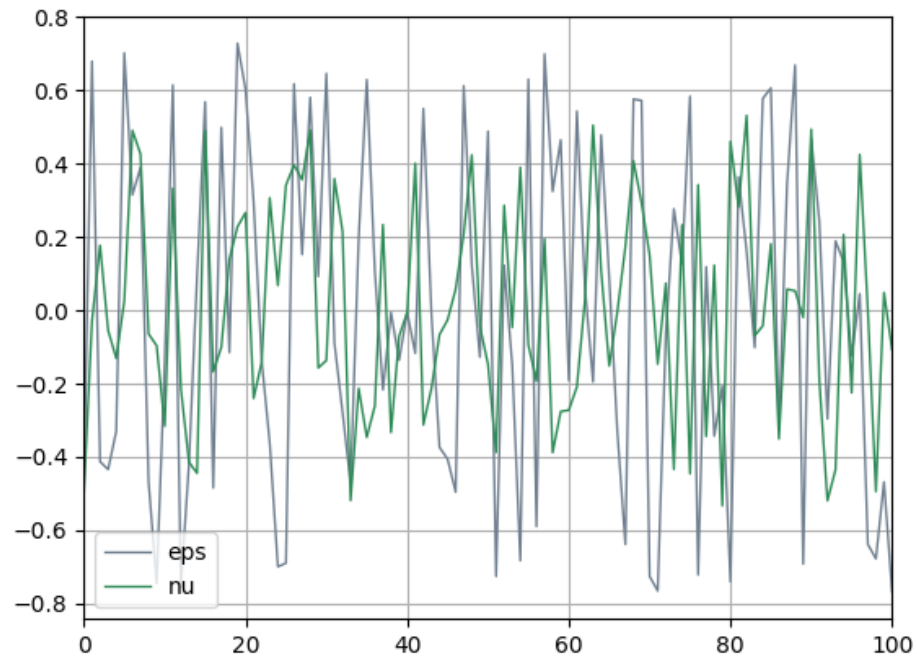


Рис. 6: Визуализация негауссовских шумов  $\{\epsilon_n\}$  и  $\{\nu_n\}$

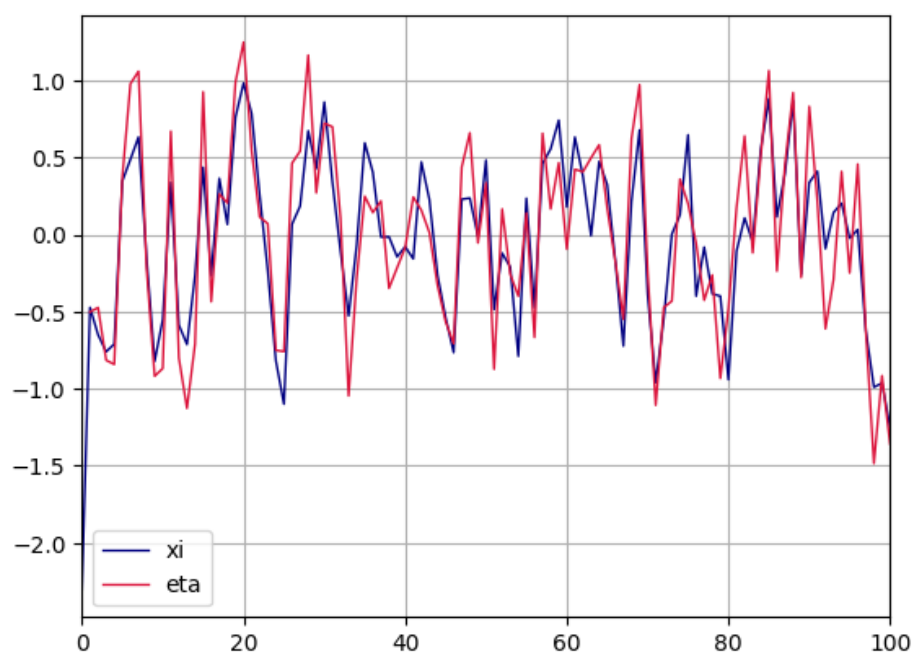


Рис. 7: Визуализация ненаблюдаемой компоненты  $\{\xi_n\}$  и наблюдаемой  $\{\eta_n\}$

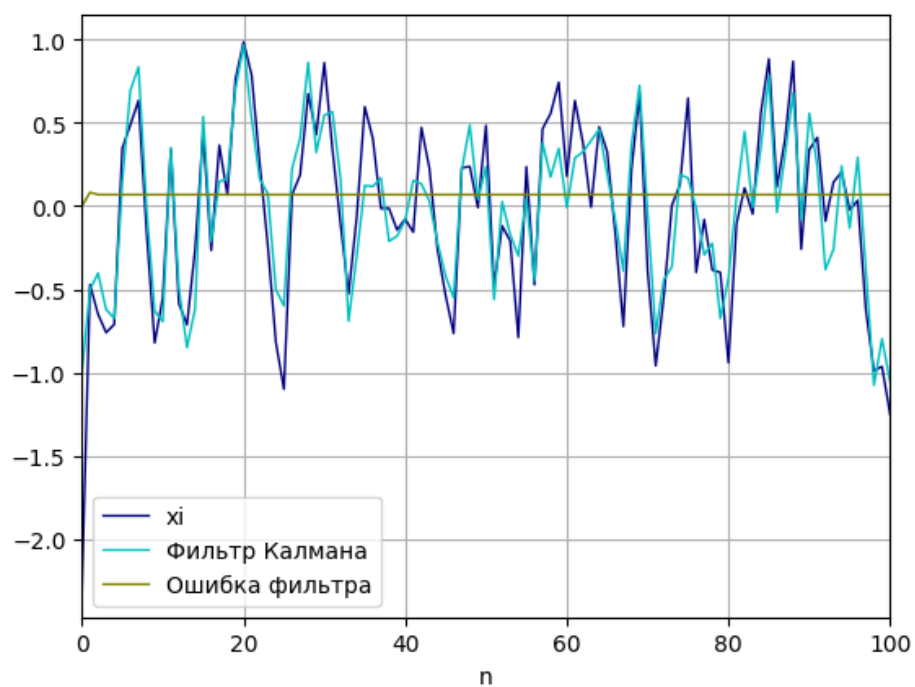


Рис. 8: Визуализация фильтра Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$

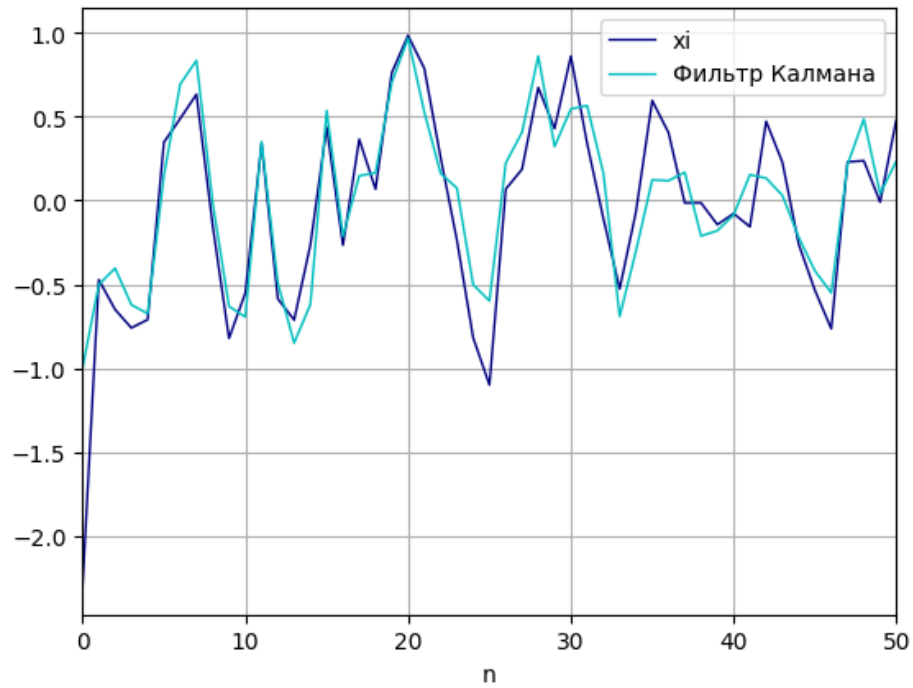


Рис. 9: Более детальная визуализация фильтра Калмана  $\{\hat{\xi}_n\}$  для  $n = \overline{0, 50}$

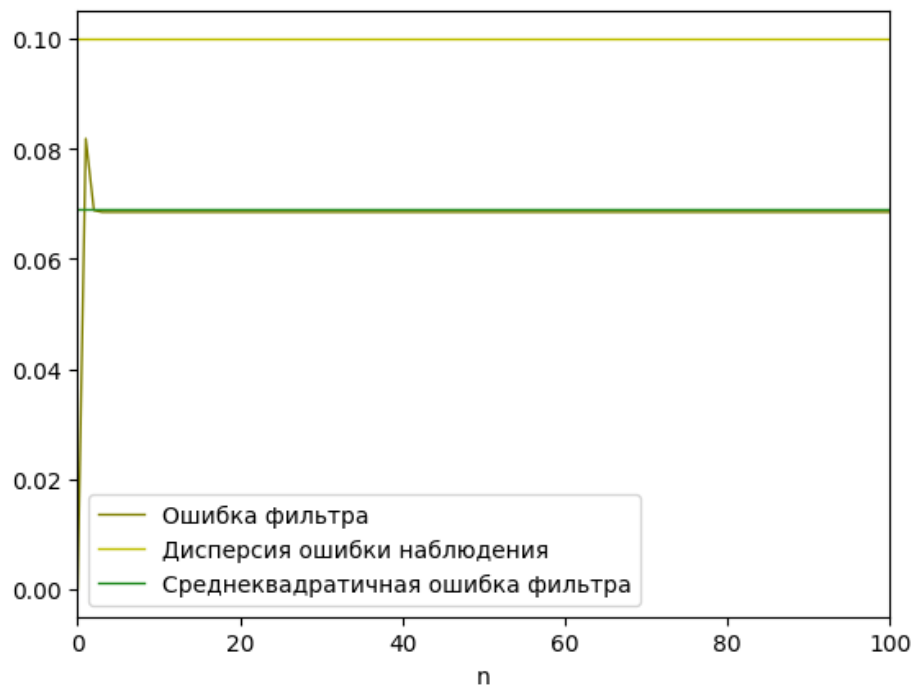


Рис. 10: Визуализация ошибки фильтра, среднеквадратичной ошибки фильтра, дисперсии ошибки наблюдения



На рисунках 6-10 представлена визуализация результатов, полученных в ходе выполнения 5 пункта задания.

**Вывод:**

В ходе выполнения задания был изучен процесс построения фильтра Калмана на примере частично наблюдаемой последовательности. Были найдены ошибки фильтра. Все стохастические эксперименты были проведены для двух реализаций – на основе центрированных стационарных гауссовских шумов и на основе равномерно распределённых шумов. Для реализаций были построены необходимые графики. Анализ ошибок привёл к выводу, что ошибки фильтров Калмана  $\hat{P}$  и среднеквадратичные ошибки (MSE) меньше ошибок наблюдения  $D_\nu$ , что следует из алгоритма построения фильтра Калмана.

**Приложение:**

Полная версия программы, написанной на Python доступна по ссылке:



Рис. 11: [https://colab.research.google.com/drive/15lM\\_KvsyrEZeEA7i-zaqErmUdKhjfwG?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/15lM_KvsyrEZeEA7i-zaqErmUdKhjfwG?usp=sharing)