МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Стохастический анализ и стохатические дифференциальные уравнения

Домашняя работа №2

Группа ФН11-73Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Рассматривается линейная модель **ARMA(1, 1)**

$$h_n - a_1 h_{n-1} = a_0 + \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}, n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – обобщённый белый шум: $M\varepsilon_n = 0$, $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2\delta_{ij}$. 1. Найти представление в виде одностороннего скользящего среднего для ССМ $\{h_n\}$;
2. Вычислить теоретические характеристики Mh_n, Dh_n, $cov(h_n, h_{n+j})$;
3. Смоделировать реализацию СП $(h_0, h_1, \dots, h_N)$, $N = 1000$, с начальным условием $h_0 = 0$ и выбранными самостоятельно значениями параметров a_0, a_1, b_1, σ для двух вариантов белого шума:
А) $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma)$;
Б) $\varepsilon_n \sim R(-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma)$;
4. Вывести на печать графики полученных реализаций;
5. Вычислить эмпирические характеристики полученных реализаций, начиная с момента l установки стационарного режима (l выбирается после анализа результатов моделирования):

$$\overline{h}_N = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N} h_k,$$

$$\hat{\sigma^2}_N = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N}(h_k - \overline{h}_N)^2,$$

$$\hat{K}_N(j) = \frac{1}{N-l}\sum_{k=j+1+l}^{N}(h_k - \overline{h}_N)(h_{k-j} - \overline{h}_N), j = 1, 2, 3$$

и сравнить с теоретическими значениями;
6. Сформулировать выводы.

Решение

1. Введём лаговый оператор $L(L(h_n) = h_{n-1})$ и с его помощью запишем данную модель:

$$h_n - a_1 h_{n-1} = a_0 + \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}$$

$$(1 - a_1 L)h_n = a_0 + \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}.$$

Действуем обратным оператором на обе части:

$$h_n = \frac{a_0}{1 - a_1 L} + \frac{1 + b_1 L}{1 - a_1 L}\varepsilon_n.$$

Представим в виде ряда:

$$h_n = a_0\sum_{k=0}^{+\infty}[a_1^k L^k] + (1 + b_1 L)\varepsilon_n\sum_{k=0}^{+\infty}[a_1^k L^k] = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{k=0}^{+\infty}[a_1^k L^k(\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1})] =$$

$$= \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{k=0}^{+\infty}[a_1^k(\varepsilon_{n-k} + b_1 a_1^k \varepsilon_{n-1-k})] = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k} + b_1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-1-k}$$

$$= \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k} + b_1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-1-k}.$$

Заменим $k = k+1$ и вынесем a_1:

$$h_n = \frac{a_0}{1-a_1} + \varepsilon_n + a_1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1} + b_1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-1-k}.$$

Таким образом:

$$h_n = \frac{a_0}{1-a_1} + \varepsilon_n + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}.$$

Получили представление случайной последовательности $\{h_n\}$ в виде одностороннего скользящего среднего.

2. Вычислим теоретические характеристики $\{h_n\}$:

1)

$$Mh_n = \frac{a_0}{1-a_1} + M(\varepsilon_n) + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot M(\varepsilon_{n-k-1}) = \frac{a_0}{1-a_1},$$

т.к. по условию $M\varepsilon_n = 0$.

Получили:

$$\boxed{\mathrm{Mh}_n = \frac{a_0}{1-a_1}}$$

2)

$$Dh_n = 0 + D(\varepsilon_n) + D((a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}) =$$

$$= 0 + \sigma^2 + (a_1 + b_1)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^{2k} \cdot D(\varepsilon_{n-k-1}) = \sigma^2 + \sigma^2 (a_1 + b_1)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^{2k}$$

Таким образом:

$$\boxed{\mathrm{Dh}_n = \sigma^2 + \frac{\sigma^2 (a_1 + b_1)^2}{1-a_1^2} = \sigma^2 \left(1 + \frac{(a_1 + b_1)^2}{1-a_1^2}\right)}$$

3)

$$K_h(j) = cov(h_n, h_{n+j}) =$$

$$= cov\left(\frac{a_0}{1-a_1} + \varepsilon_n + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \frac{a_0}{1-a_1} + \varepsilon_{n+j} + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right) =$$

$$= cov\left(\varepsilon_n + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \varepsilon_{n+j} + (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right) =$$

$$= cov\left(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+j}\right) + cov\left(\varepsilon_n, (a_1+b_1)\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right) +$$

$$+cov\left((a_1+b_1)\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \varepsilon_{n+j}\right) + cov\left((a_1+b_1)\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, (a_1+b_1)\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right) =$$

$$= cov\left(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+j}\right) + (a_1+b_1)\cdot cov\left(\varepsilon_n, \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right) +$$

$$+(a_1+b_1)\cdot cov\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \varepsilon_{n+j}\right) + (a_1+b_1)^2\cdot cov\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n+j-k-1}\right).$$

Если $j=0$, то $K_h(j) = cov(h_n, h_{n+j}) = cov(h_n, h_n) = Dh_n = \sigma^2\left(1 + \frac{(a_1+b_1)^2}{1-a_1^2}\right)$, если $j>0$, то:

$$K_h(j) = cov(h_n, h_{n+j}) = 0_{(n\neq n+j)} + (a_1+b_1)\cdot cov\left(\varepsilon_n, a_1^{j-1}\cdot\varepsilon_n\right) +$$

$$+0_{(n+j\neq n-k-1)} + (a_1+b_1)^2\cdot cov\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^k \cdot \varepsilon_{n-k-1}, \varepsilon_{n-k-1}\right) =$$

$$= \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{j-1} + (a_1+b_1)^2\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^{2k+j} cov(\varepsilon_{n-k-1}, \varepsilon_{n-k-1}) =$$

$$= \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{j-1} + \sigma^2(a_1+b_1)^2 a_1^j\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} a_1^{2k} = \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{j-1} + \sigma^2(a_1+b_1)^2\cdot\frac{a_1^j}{1-a_1^2}.$$

Воспользуемся чётностью автоковариационной функции $K_h(j) = K_h(-j)$, тогда для $j<0$:

$$K_h(j) = \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{-j-1} + \sigma^2(a_1+b_1)^2\cdot\frac{a_1^{-j}}{1-a_1^2}.$$

Таким образом:

$$\boxed{\mathrm{K}_h(j) = \begin{cases} \sigma^2\left(1+\frac{(a_1+b_1)^2}{1-a_1^2}\right), & j=0 \\ \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{|j|-1}\cdot\left(1+(a_1+b_1)\frac{a_1}{1-a_1^2}\right), & j\neq 0 \end{cases}}$$

3. Смоделируем реализацию СП $(h_0, h_1, \ldots, h_N)$, $N = 1000$, с начальным условием $h_0 = 0$ и выбранными параметрами $a_0 = 0.8$, $a_1 = 0.5$, $b_1 = 0.2$, $\sigma = 0.2$ для двух вариантов белого шума:

А) $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma)$:

```
def generate_norm(a0, a1, b1, sigma, N):
  eps = np.random.normal(0, sigma, N)
  h = np.zeros(N)
  for n in range(1, N):
    h[n] = a1 * h[n - 1] + a0 + eps[n] + b1 * eps[n-1]
  return eps, h
```

$$\{\varepsilon_n\} = (0.1831,\ -0.1207,\ 0.2325,\ \ldots,\ 0.1168,\ 0.1816,\ 0.1772)$$
$$\{h_n\} = (0,\ 0.7159,\ 1.3663,\ \ldots,\ 1.603,\ 1.8065,\ 1.9167)$$

Визуализация полученной реализации $\{h_n\}$ представлена на Рис. 1.

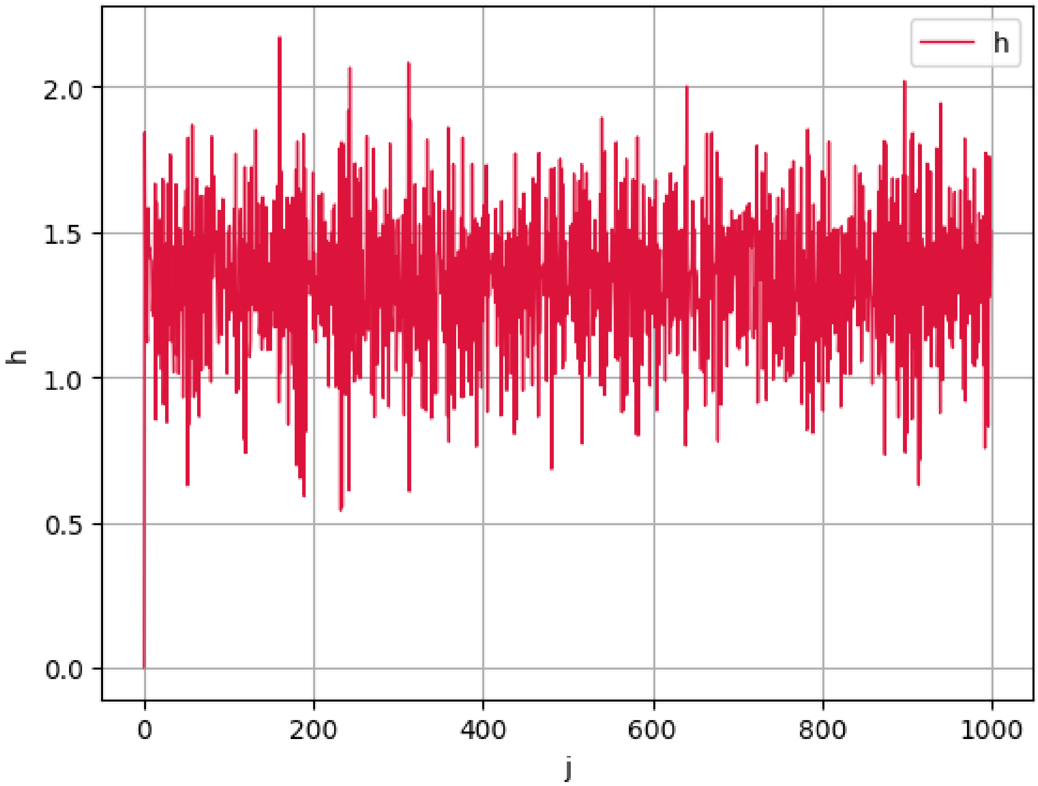

Рис. 1: Визуализация полученной реализации $\{h_n\}$

Б) $\varepsilon_n \sim R(-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma)$:

```
def generate_uniform(l, r, a0, a1, b1, N):
  eps = np.random.uniform(l, r, N)
  h = np.zeros(N)
  for n in range(1, N):
    h[n] = a1 * h[n - 1] + a0 + eps[n] + b1 * eps[n-1]
  return eps, h
```

$$\{\varepsilon_n\} = (-0.0987,\ 0.1164,\ -0.1035,\ \ldots,\ -0.1729,\ -0.008,\ -0.2212)$$
$$\{h_n\} = (0,\ 0.8967,\ 1.1681,\ \ldots,\ 1.4187,\ 1.4667,\ 1.3106)$$

Визуализация полученной реализации $\{h_n\}$ представлена на Рис. 2.
В рассматриваемом случае $|a_1| < 1$, при таком условии СП в модели ARMA является стационарным, что подтверждается вычислениями во 2 пункте. Действительно, математическое ожидание и дисперсия процесса постоянны, а автоковариационная функция зависит только от разности моментов времени). Возьмём за момент установки стационарного режима момент

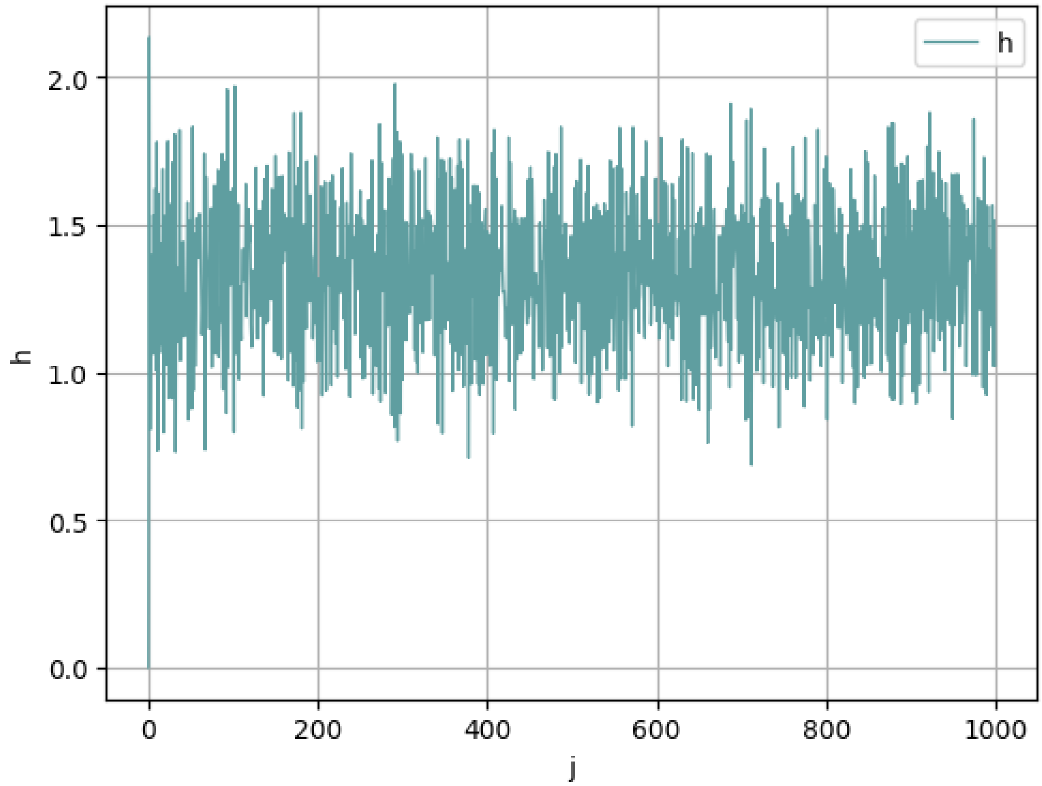

Рис. 2: Визуализация полученной реализации $\{h_n\}$

времени $l = 10$.
Вычислим эмпирические характеристики двух процессов.

```
def emper(who, N, l):
  m = 1 / (N - l)
  sum = 0
  for k in range(l, N):
    sum += who[k]
  m *= sum
  s = 1 / (N - l)
  sum = 0
  for k in range(l, N):
    sum += (who[k] - m) ** 2
  s *= sum
  K = [0]
  for j in range(1, 4):
    sum = 0
    for k in range(j + 1 + l, N):
      sum += (who[k] - m) * (who[k - j] - m)
    K.append((1 / (N - l)) * sum)
  print(f"Выборочное среднее: {round(m, 4)}")
  print(f"Выборочное S: {round(s, 4)}")
```

```
  print(f"Выборочная ковариация: j = 1: {round(float(K[1]), 4)};
  j = 2: {round(float(K[2]), 4)};
  j = 3: {round(float(K[3]), 4)}")
```

Для гауссовского белого шума получим:
Выборочное среднее:

$$\overline{h_N} = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N} h_k = 1.5807.$$

Выборочная дисперсия:

$$\hat{\sigma_N^2} = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N}\left(h_k - \overline{h_N}\right)^2 = 0.0667.$$

Выборочная ковариация порядка j:

$$\hat{K_N}(j) = \frac{1}{N-l}\sum_{k=j+l+1}^{N}\left(h_k - \overline{h_N}\right)\left(h_{k-j} - \overline{h_N}\right),$$

$\hat{K_N}(1) = 0.0408$, $\hat{K_N}(2) = 0.0206$, $\hat{K_N}(3) = 0.0084$.
Для равномерно распределённого белого шума аналогично получим:
Выборочное среднее:

$$\overline{h_N} = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N} h_k = 1.5918.$$

Выборочная дисперсия:

$$\hat{\sigma_N^2} = \frac{1}{N-l}\sum_{k=l}^{N}\left(h_k - \overline{h_N}\right)^2 = 0.0724.$$

Выборочная ковариация порядка j:

$$\hat{K_N}(j) = \frac{1}{N-l}\sum_{k=j+l+1}^{N}\left(h_k - \overline{h_N}\right)\left(h_{k-j} - \overline{h_N}\right),$$

$\hat{K_N}(1) = 0.0473$, $\hat{K_N}(2) = 0.026$, $\hat{K_N}(3) = 0.0163$.
Теперь по формулам, полученным во 2 пункте вычислим теоретические характеристики и сравним их значения со значениями эмпирических.

```
def teor(who, a0, a1, b1, sigma):
  m = a0 / (1 - a1)
  d = (sigma ** 2) * (1 + ((a1 + b1) ** 2) / (1 - a1 ** 2))
  K = [0]
  for j in range(1, 4):
    tmp = (a1 + b1) * a1 ** (abs(j) - 1) * sigma ** 2 *
    (1 + (a1 + b1) * (a1 / (1 - a1 ** 2)))
    K.append(tmp)
```

```
print(f"Теоретическое мат. ожидание: {round(m, 4)}")
print(f"Теоретическая дисперсия: {round(d, 4)}")
print(f"Теоретическая ковариация: j = 1: {round(float(K[1]), 4)};
j = 2: {round(float(K[2]), 4)};
j = 3: {round(float(K[3]), 4)}")
```

$$Mh_n = \frac{a_0}{1-a_1} = 1.6$$

$$Dh_n = \sigma^2 + \frac{\sigma^2(a_1+b_1)^2}{1-a_1^2} = \sigma^2\left(1+\frac{(a_1+b_1)^2}{1-a_1^2}\right) = 0.0661$$

$$K_h(j) = \begin{cases} \sigma^2\left(1+\frac{(a_1+b_1)^2}{1-a_1^2}\right), & j=0 \\ \sigma^2(a_1+b_1)a_1^{|j|-1}\cdot\left(1+\frac{a_1}{1-a_1^2}\right), & j\neq 0 \end{cases}$$

$K_h(1) = 0.0411$, $K_h(2) = 0.0205$, $K_h(3) = 0.0103$.

	Mh_n	Dh_n	$K_h(1)$	$K_h(2)$	$K_h(3)$
Теор. значения	1.6	0.066	0.041	0.021	0.01
Эмпир. значения (гаусс.)	1.581	0.067	0.041	0.021	0.008
Эмпир. значения (равномер.)	1.592	0.072	0.047	0.026	0.016

Из таблицы видно, что значения теоретических и эмпирических показателей близки.

Вывод:

В ходе выполнения задания была изучена линейная стохастическая модель ARMA(1,1). Было найдено представление модели в виде одностороннего скользящего среднего, на её основе выведены основныее теоретические характеристики соответствующего процесса: математическое ожидание, дисперсия и автоковариационная функция. Были смоделированы две реализации случайного процесса $\{h_n\}$: с использованием гауссовского белого шума, а затем – с использованием равномерно распределённого белого шума. Для обеих реализаций были построены их графики, найдены эмпирические характеристики.

Приложение:

Полная версия программы, написанной на Python доступна по ссылке:

Рис. 3: https://colab.research.google.com/drive/1V5q616yvDTJnWnsaEC–tFHjvFo5qFvE?usp=sharing