МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Стохастический анализ и стохатические дифференциальные уравнения

Домашняя работа №4

«Численное решение СДУ методом Эйлера»

Группа ФН11-73Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Рассматривается скалярное СДУ (экономическое броуновское движение):

$$d\xi_t = a\xi_t dt + b\xi_t dW_t, \xi(0) = \xi_0, t \in [0, T], a > 0, b > 0.$$

1. Докажите, что $\xi_t = \xi_0 exp\{\left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bW_t\}$ – решение СДУ.
2. Смоделируйте реализацию винеровского процесса W_t, $t \in [0, T]$, вычислив значения W_{t_k} в точках $t_k = kh$, $k = \overline{0, N}$, $N = \frac{T}{h}$.
3. Выбрав значения исходных параметров, вычислите порождённую этой реализацией последовательность ξ_{t_k}, $k = \overline{0, N}$. 4. Постройте численное решение СДУ методом Эйлера (с той же реализацией W_t):

$$X_{k+1} = X_k + aX_k h + bX_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), k = \overline{0, N}.$$

5. Экспериментально исследуйте влияние волатильности на среднее значение отклониния точного и численного решений по 20 траекториям, вычислив $\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid$ для данной волатильности b и для увеличенной в 2-3 раза.
6. Экспериментально найдите порядок сходимости метода Эйлера.

О порядке сходимости метода

Пусть $\{X_k\}$, $k = \overline{0, N}$ – численное решение СДУ, построенное данным методом. Если существует постоянная $C > 0$, не зависящая от h и число $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in (0, \delta)$

$$M \mid \xi_T - X_N \mid \leq Ch^\gamma,$$

где ξ_t – точное решение, то γ – порядок сходимости метода на [0, T].

Суть эксперимента Для 5-8 значений $h = h_l$ по $n \approx 20$ реализациям оцениваем $M \mid \xi_T - X_N \mid$ по формуле

$$\varepsilon(h_l) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid .$$

Используя набор полученных данных $(h_l, \varepsilon(h_l))$, методом наименьших квадратов найдите оценку γ из логарифмического соотношения:

$$ln\varepsilon \leq lnC + \gamma lnh.$$

7. Выведите на печать нуобходимые графические иллюстрации и сформулируйте выводы.

Входные данные:

$T = 3$, $a = 0.08$, $b = 0.1$, $h = 0.25$, $\xi_0 = 100$.

Решение

1. Докажем, что $\xi_t = \xi_0 exp\{\left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bW_t\}$ – решение СДУ.

$$d\xi_t = a\xi_t dt + b\xi_t dW_t, \xi(0) = \xi_0, t \in [0, T], a > 0, b > 0.$$

Заменим: $\theta_t = ln\xi_t$, обозначим $g(t,x) = lnx$
По формуле Ито:

$$d(g(t,x)) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot A + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot B^2\right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot BdW_t,$$

В нашем случае $A = a\xi_t$, $B = b\xi_t$.
Получаем:

$$d\theta_t = \left(\frac{1}{x} \cdot a\xi_t - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \cdot b^2\xi_t^2\right)\bigg|_{x=\xi_t} dt + \frac{1}{x} \cdot b\xi_t\bigg|_{x=\xi_t} dW_t$$

$$d\theta_t = \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) dt + bdW_t$$

Таким образом:

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) dt + \int_0^t bdW_t = \theta_0 + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) t + bW_t$$

$$\xi_t = exp\theta_t = exp\{\theta_0 + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) t + bW_t\} =$$

$$= exp\{ln\xi_0 + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) t + bW_t\} =$$

$$= \xi_0 exp\{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) t + bW_t\}$$

Таким образом, $\xi_t = \xi_0 exp\{\left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bW_t\}$.
2. Смоделируем реализацию винеровского процесса W_t, $t \in [0,T]$, вычислив значения W_{t_k} в точках $t_k = kh$, $k = \overline{0,N}$, $N = \frac{T}{h}$.
Пусть W_t – стандартный винеровский процесс ($\mu = 0, \sigma = 1$).

$$N = \frac{T}{h} = \frac{3}{0.25} = 12.$$

Начальное значение $W_{t_0} = W_0 = 0$.
Для стандартного винеровского процесса $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \sim N(0, \sigma\sqrt{t_{k+1} - t_k}) = N(0, \sqrt{h})$. Тогда $W_{t_{k+1}} = \eta_k + W_{t_k}$, где $\eta_k \sim N(0, \sqrt{h})$.
Сгенерируем $\{\eta_k\}$ и $\{W_t\}$:

$$\{\eta_k\} = [0.4577, -0.3018, 0.5811, -0.3007, -0.7987, 0.1989, 0.6029, 0.5281, 0.4263, 0.3447, -0.1124, -0.2611]$$

$$\{W_t\} = [0, 0.4578, 0.1560, 0.7371, 0.4364, -0.3623, -0.1634, 0.4395, 0.9676, 1.3939, 1.7386, 1.6262, 1.3651]$$

Код реализации:

```
def Wiener_process_generator(T, h):
  N = int(T / h)
  w = [0]
  eta = np.random.normal(0, np.sqrt(h), N)
  for val in eta:
```

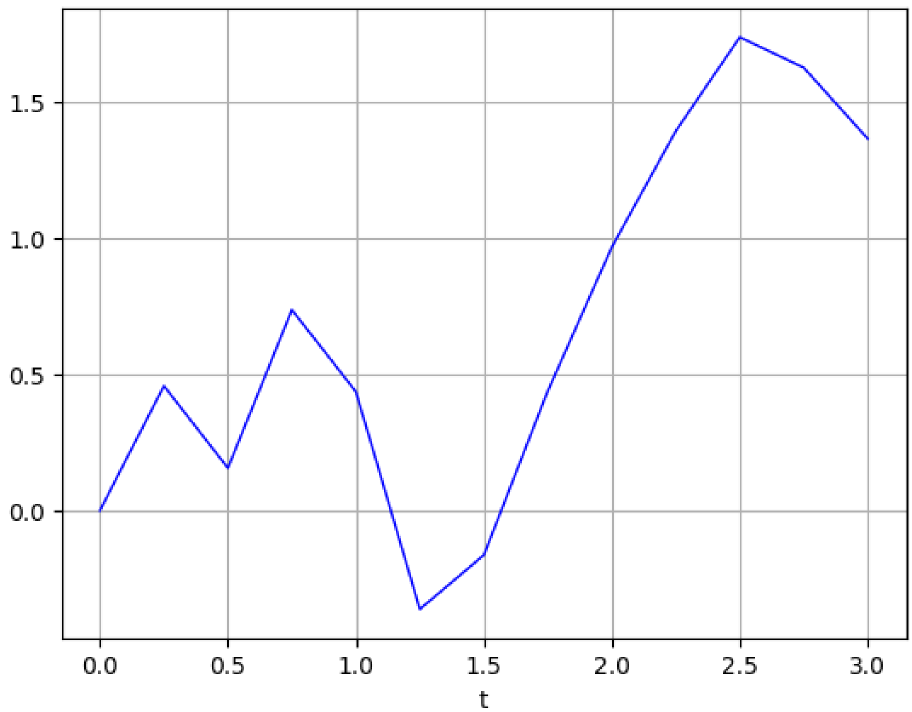

Рис. 1: Смоделированный винеровский процесс W_t

```
    w.append(w[-1] + val)
  print(f"eta_k = {eta}")
  print(f"Wt = {w}")
  return N, w
```

3. Вычислим порождённую этой реализацией последовательность ξ_{t_k}, $k = \overline{0, N}$.

$\{\xi_{t_k}\} = [100, 106.67, 105.45, 113.88, 112.60, 105.92, 110.10, 119.15, 127.99, 136.09, 143.53, 144.61, 143.55]$

Код реализации:

```
def xi_generator(a, b, T, N, xi_0, Wt):
  xi = [xi_0]
  t_arr = np.linspace(0, T, N+1)
  for t, w_t in zip(t_arr[1:], Wt[1:]):
    xi.append(xi_0 * np.exp((a - b ** 2 / 2) * t + b * w_t))
  print(f"xi_tk = {xi}")
  return xi
```

4. Построим численное решение СДУ методом Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + aX_kh + bX_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), k = \overline{0, N}.$$

$\{_k\} = [100, 106.58, 105.49, 113.73, 112.59, 105.85, 110.07, 118.91, 127.56, 135.55, 142.94, 144.19, 143.31]$

Код реализации:

```
def Eulers_method(a, b, T, N, xi_0, Wt):
  X = [xi_0]
  for i in range(1, N+1):
    X.append(X[-1] + a * X[-1] * h + b * X[-1] * (Wt[i] - Wt[i - 1]))
  print(f"X_k = {X}")
  return X
```

Сравним полученные решения графически на рис. 2.

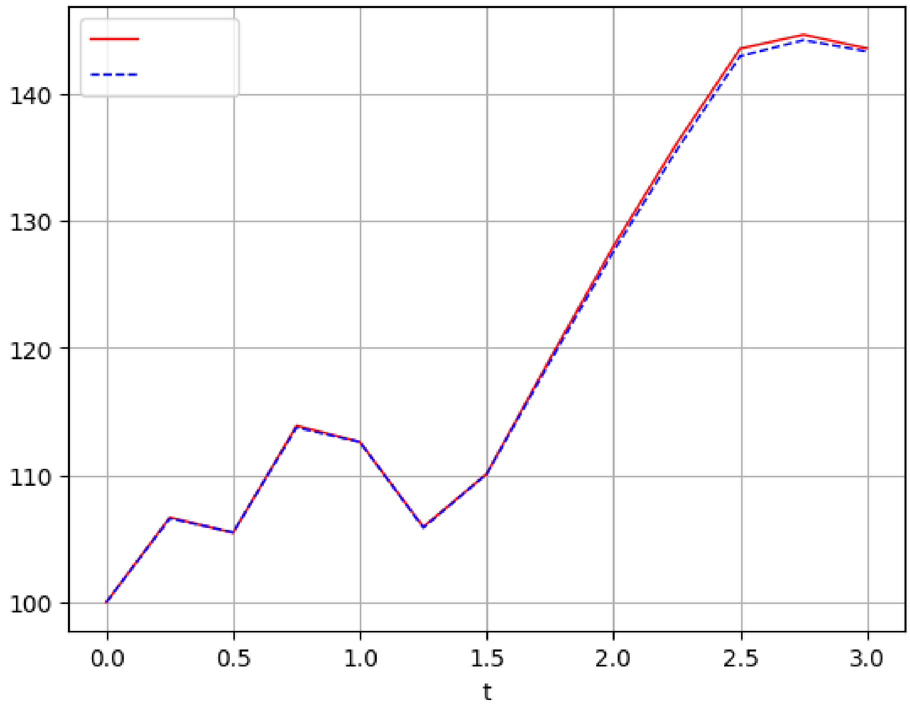

Рис. 2: Сравнение последовательностей $\{\xi_{t_k}\}$ и $\{_k\}$

5. Экспериментально исследуем влияние волатильности на среднее значение отклониния точного и численного решений по 20 траекториям, вычислив $\frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid$ для данной волатильности b и для увеличенной в 2 и 3 раза.
Код реализации:

```
def volatility_experiment(n, a, b, T, h, xi_0):
  N = int(T / h)
  for vol in (b, b*2, b*3):
    su = 0
    for i in range(n):
      w = [0]
      eta = np.random.normal(0, np.sqrt(h), N)
      for val in eta:
        w.append(w[-1] + val)
      xi_last = xi_0 * np.exp((a - vol ** 2 / 2) * T + vol * w[-1])
      X = [xi_0]
```

```
    for i in range(1, N+1):
      X.append(X[-1] + a * X[-1] * h + vol * X[-1] * (w[i] - w[i - 1]))
    su += abs(xi_last - X[-1])
  print(f"b = {round(vol, 3)}: {round(su / n, 3)}")
```

Получаем:

$$b = 0.1 : \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.939;$$

$$b = 0.2 : \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 1.940;$$

$$b = 0.3 : \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 5.777.$$

Таким образом, при увеличении волатильности возрастает отклонение точного и численного решений.
6. Экспериментально найдём порядок сходимости метода Эйлера.
Вычислим:

$$\varepsilon(h_l) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid .$$

для

$$\{h_l\} = [0.25, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005, 0.001].$$

Код реализации:

```
def order_of_convergence(n, a, b, T, h, xi_0):
  N_arr = np.array([12, 20, 30, 60, 100, 300, 600, 3000])
  h_arr = T/N_arr
  eps = []
  for h_cur, N_cur in zip(h_arr, N_arr):
    su = 0
    for i in range(n):
      w = [0]
      eta = np.random.normal(0, np.sqrt(h_cur), N_cur)
      for val in eta:
        w.append(w[-1] + val)
      xi_last = xi_0 * np.exp((a - b ** 2 / 2) * T + b * w[-1])
      X = [xi_0]
      for i in range(1, N_cur + 1):
        X.append(X[-1] + a * X[-1] * h_cur + b * X[-1] * (w[i] - w[i - 1]))
      su += abs(xi_last - X[-1])
    eps.append(su / n)
  x = np.log(np.array(h_arr).astype(float))
  y = np.log(np.array(eps).astype(float))
  m = len(h_arr)
```

```
beta = (m * sum([i * j for i, j in zip(x, y)]) - sum(x) * sum(y)) /
(m * sum([i ** 2 for i in x]) - sum(x) ** 2)
alpha = (sum(y) - beta * sum(x)) / m
return h_arr, eps, x, y, alpha, beta
```

$$\varepsilon(0.25) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.511;$$

$$\varepsilon(0.15) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.505;$$

$$\varepsilon(0.1) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.439;$$

$$\varepsilon(0.05) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.356;$$

$$\varepsilon(0.03) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.224;$$

$$\varepsilon(0.01) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.122;$$

$$\varepsilon(0.005) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.092;$$

$$\varepsilon(0.001) = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_T^{(j)} - X_N^{(j)} \mid = 0.035;$$

Пусть $\{X_k\}$, $k = \overline{0, N}$ – численное решение СДУ, построенное данным методом. Если существует постоянная $C > 0$, не зависящая от h и число $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in (0, \delta)$

$$M \mid \xi_T - X_N \mid \leq Ch^{\gamma},$$

где ξ_t – точное решение, то γ – порядок сходимости метода на [0, T].
Найдём оценку γ из соотношения:

$$\ln \varepsilon \leq \ln C + \gamma \ln h.$$

Для удобства вычислений введём обозначения: $\ln \varepsilon = Y$, $\ln C = \alpha$, $\ln h = X$, $\gamma = \beta$ и перейдём к равенству, введя ошибку ρ:

$$Y = \alpha + \beta X + \rho.$$

Тогда:

$$\{X\} = [-1.386, -1.897, -2.303, -2.996, -3.507, -4.605, -5.298 - 6.908]$$

$$\{Y\} = [-0.672, -0.684, -0.824, -1.032, -1.496, -2.105, -2.388, -3.348]$$

Найдём решение с помощью простейшей линейной регрессии:

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}$$

$$(F^T F)^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix}$$

$$F^T Y = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (F^T F)^{-1} F^T Y = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i \\ n\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2};$$

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}.$$

Получаем:

$$\alpha = 0.276;$$

$$\beta = 0.511.$$

Графический результат решения уравнения представлен на рис. 3.

Вывод:

В ходе решения данной задачи были найдены аналитическое решение стохастического дифференциального уравнения и численное его решение с помощью метода Эйлера, которое оказалось достаточно близко к аналитическому решению. Далее была экспериментально исследована зависимость отклонения численного и аналитического решений от волатильности и обнаружено, что при увеличении волатильности увеличивается отклонение этих решений друг от друга. Также был экспериментально определен порядок сходимости метода Эйлера, который составил 0.511.

Приложение:

Полная версия программы, написанной на Python доступна по ссылке:

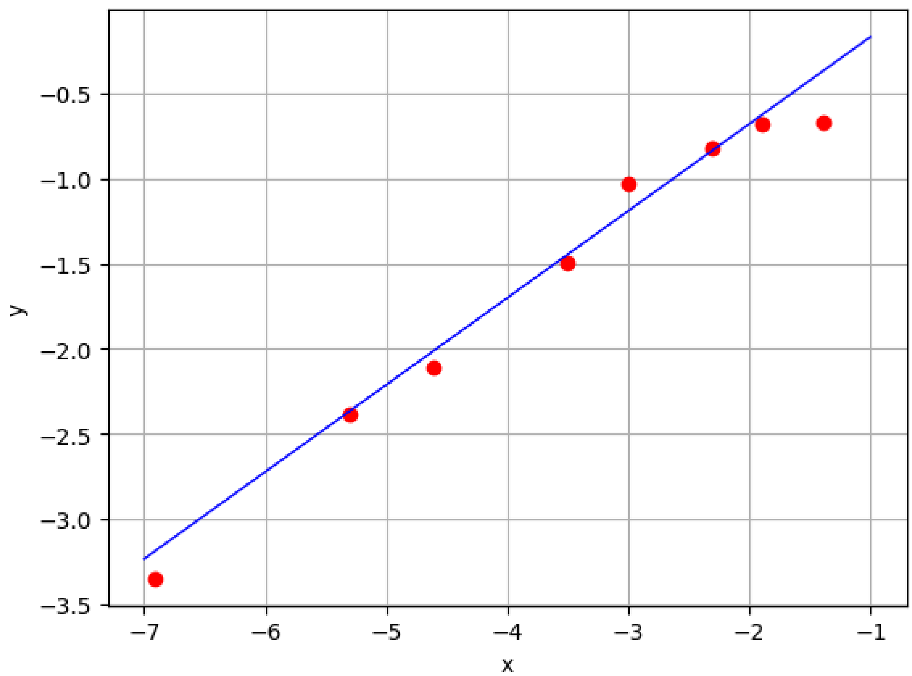

Рис. 3: Решение уравнения $Y = \alpha + \beta X + \rho$

Рис. 4: https://colab.research.google.com/drive/1125lUkoG49FR6mL60EZNQJBpfi$_c rKdV?usp = sharing$