МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория случайных процессов

Домашняя работа №2-3

«Вычисление финальных вероятностей»
и
«Закон распределения времени пребывания в подмножестве»

Группа ФН11-63Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

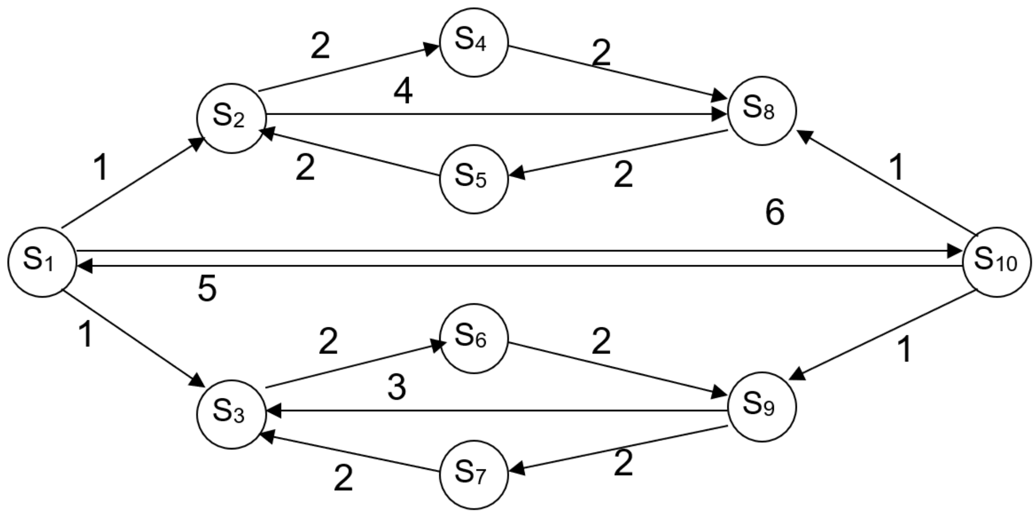
Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание 2

Напишите систему уравнений Колмогорова для Марковского процесса, заданного следующим графом. Найдите вектор финальных вероятностей состояний, если в начальный момент времени $p_1(0) = 1, p_i(0) = 0, i \neq 1$



Решение

Согласно заданному размеченному графу состояний, имеем матрицу интенсивностей переходов:

$$Q = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Составим дифференциальные уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1(t)' = -8p_1(t) + 5p_{10}(t); \\ p_2(t)' = p_1(t) - 6p_2(t) + 2p_5(t); \\ p_3(t)' = p_1(t) - 2p_3(t) + 2p_7(t) + 3p_9(t); \\ p_4(t)' = 2p_2(t) - 2p_4(t); \\ p_5(t)' = -2p_5(t) + 2p_8(t); \\ p_6(t)' = 2p_3(t) - 2p_6(t); \\ p_7(t)' = -2p_7(t) + 2p_9(t); \\ p_8(t)' = 4p_2(t) + 2p_4(t) - 2p_8(t) + p_{10}(t); \\ p_9(t)' = 2p_6(t) - 5p_9(t) + p_{10}(t); \\ p_{10}(t)' = 6p_1(t) - 7p_{10}(t); \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) + p_6(t) + p_7(t) + p_8(t) + p_9(t) + p_{10}(t) = 1; \\ p_1(0) = 1; \\ p_k(0) = 0, \qquad k = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \end{cases}$$

Перепишем систему в изображениях:

$$\begin{cases} s\widetilde{p_1}(s) - 1 = -8\widetilde{p_1}(s) + 5\widetilde{p_{10}}(s); \\ s\widetilde{p_2}(s) = \widetilde{p_1}(s) - 6\widetilde{p_2}(s) + 2\widetilde{p_5}(s); \\ s\widetilde{p_3}(s) = \widetilde{p_1}(s) - 2\widetilde{p_3}(s) + 2\widetilde{p_7}(s) + 3\widetilde{p_9}(s); \\ s\widetilde{p_4}(s) = 2\widetilde{p_2}(s) - 2\widetilde{p_4}(s); \\ s\widetilde{p_5}(s) = -2\widetilde{p_5}(s) + 2\widetilde{p_8}(s); \\ s\widetilde{p_6}(s) = 2\widetilde{p_3}(s) - 2\widetilde{p_6}(s); \\ s\widetilde{p_7}(s) = -2\widetilde{p_7}(s) + 2\widetilde{p_9}(s); \\ s\widetilde{p_8}(s) = 4\widetilde{p_2}(s) + 2\widetilde{p_4}(s) - 2\widetilde{p_8}(s) + \widetilde{p_{10}}(s); \\ s\widetilde{p_9}(s) = 2\widetilde{p_6}(s) - 5\widetilde{p_9}(s) + \widetilde{p_{10}}(s); \\ s\widetilde{p_{10}}(s) = 6\widetilde{p_1}(s) - 7\widetilde{p_{10}}(s). \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом Крамера, получаем:

$$\begin{cases} \widetilde{p_1}(s) = \frac{s+7}{s^2+15s+26}; \\ \widetilde{p_2}(s) = \frac{s^3+11s^2+32s+52}{s^5+25s^4+204s^3+688s^2+832s}; \\ \widetilde{p_3}(s) = \frac{s^3+14s^2+77s+130}{s^5+24s^4+185s^3+602s^2+728s}; \\ \widetilde{p_4}(s) = \frac{2s^3+22s^2+64s+104}{s^6+27s^5+254s^4+1096s^3+2208s^2+1664s}; \\ \widetilde{p_5}(s) = \frac{20s^2+176s+312}{s^6+27s^5+254s^4+1096s^3+2208s^2+1664s}; \\ \widetilde{p_6}(s) = \frac{2s^3+28s^2+154s+260}{s^6+26s^5+233s^4+972s^3+1932s^2+1456s}; \\ \widetilde{p_7}(s) = \frac{12s^2+56s+104}{s^6+26s^5+233s^4+972s^3+1932s^2+1456s}; \\ \widetilde{p_8}(s) = \frac{10s^2+88s+156}{s^5+25s^4+204s^3+688s^2+832s}; \\ \widetilde{p_9}(s) = \frac{6s^2+28s+52}{s^5+24s^4+185s^3+602s^2+728s}; \\ \widetilde{p_{10}}(s) = \frac{6}{s^2+15s+26}. \end{cases}$$

Найдём предельные вероятности:

$$\pi_k = \lim_{t\to+\infty} p_k(t) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{p_k}(s), \quad k = \overline{1,n}.$$

Получим:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0; \\ \pi_2 = \frac{1}{16}; \\ \pi_3 = \frac{5}{28}; \\ \pi_4 = \frac{1}{16}; \\ \pi_5 = \frac{3}{16}; \\ \pi_6 = \frac{5}{28}; \\ \pi_7 = \frac{1}{14}; \\ \pi_8 = \frac{3}{16}; \\ \pi_9 = \frac{1}{14}; \\ \pi_{10} = 0. \end{cases}$$

Вектор финальных вероятностей:

$$\Pi = (0\ \frac{1}{16}\ \frac{5}{28}\ \frac{1}{16}\ \frac{3}{16}\ \frac{5}{28}\ \frac{1}{14}\ \frac{3}{16}\ \frac{1}{14}\ 0); \quad 0 + \frac{1}{16} + \frac{5}{28} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{28} + \frac{1}{14} + \frac{3}{16} + \frac{1}{14} + 0 = 1$$

Вывод.

Полученный вектор соответствует очевидным соображениям о том, что рассматриваемую систему можно разделить на две подсистемы: $S_A = \{S_1, S_{10}\}$ и $S_B = \{S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$. Также видно, что при выходе из подсистемы A вернуться обратно невозможно, поэтому значения π_1 и π_{10} нулевые.

Задание 3

В условиях задания 2 найдите закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний U. Выпишите плотность в виде смеси распределений, укажите параметры смеси. Найдите среднее время пребывания системы в подмножестве состояний U, где $U = \{S_1, S_{10}\}$

Решение

Закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний $U = \{S_1, S_{10}\}$ имеет вид:

$$P_{T_U}(t) = 2p_1(t) + 2p_{10}(t)$$

Так как подмножество U не замкнуто, найдём $p_1(t)$ и $p_{10}(t)$, решив систему:

$$\begin{cases} p_1(t)' = -8p_1(t) + 5p_{10}(t); \\ p_{10}(t)' = -7p_{10}(t) + 6p_2(t). \end{cases}$$

Переходим к изображениям:

$$\begin{cases} s\widetilde{p_1}(s) - 1 = -8\widetilde{p_1}(s) + 5\widetilde{p_{10}}(s); \\ s\widetilde{p_{10}}(s) = -7\widetilde{p_{10}}(s) + 6\widetilde{p_1}(s). \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \widetilde{p_1}(s) = \frac{s+7}{s^2+15s+26}; \\ \widetilde{p_{10}}(s) = \frac{6}{s^2+15s+26}. \end{cases}$$

Вернёмся к оригиналам:

$$\begin{cases} p_1(t) = \frac{5e^{-2t}}{11} + \frac{6e^{-13t}}{11}; \\ p_{10}(t) = \frac{6e^{-2t}}{11} - \frac{6e^{-13t}}{11}. \end{cases}$$

Тогда закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний $U = \{S_1, S_{10}\}$:

$$P_{T_U}(t) = 2e^{-2t}$$

Найдём среднее время пребывания:

$$M\xi = \int\limits_0^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$