МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория случайных процессов

Домашняя работа №7

Группа ФН11-63Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Задана ковариационная функция стационарного случайного процесса $X(t)$:

$$K_X(t) = (1 + 2\sin|\tau|)exp(-2\tau^2)$$

Найдите:
1) ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса $Y(t) = X'(t)$;
2) Взаимную ковариационную функцию $R_{XX'}(t, s)$;
3) Ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса $Z(t) = X(t) + X'(t)$.

Решение

1)

$$Y(t) = X'(t)$$

Ковариационная функция:

$$K_Y(\tau) = K_{X'}(\tau) = -K''_X(\tau) = -[(1 + 2\sin|\tau|)exp(-2\tau^2)]'' =$$
$$= -\frac{2\cos|\tau| - 2(1 + 4\tau^2)\cos|\tau|}{exp(2\tau^2)|\tau|} + \frac{2\sin|\tau|}{exp(2\tau^2)} + 4exp(-2\tau^2) - 16\tau^2 exp(-2\tau^2) +$$
$$+ \left(8exp(-2\tau^2) - 32\tau^2 exp(-2\tau^2)\right)\sin|\tau| + \frac{8\tau^2\cos|\tau|}{|\tau|exp(2\tau^2)}$$

Дисперсия:

$$D_Y(t) = K_Y(0) = 4$$

Нормированная ковариационная функция:

$$\rho_Y(\tau) = \frac{K_Y(\tau)}{K_Y(0)} = -\frac{\cos|\tau| - (1 + 4\tau^2)\cos|\tau|}{2exp(2\tau^2)|\tau|} + \frac{\sin|\tau|}{2exp(2\tau^2)} + exp(-2\tau^2) - 4\tau^2 exp(-2\tau^2) +$$
$$+ \left(2exp(-2\tau^2) - 8\tau^2 exp(-2\tau^2)\right)\sin|\tau| + \frac{2\tau^2\cos|\tau|}{|\tau|exp(2\tau^2)}$$

2) Взаимная ковариационная функция $R_{XX'}(t, s)$:

$$R_{XX'}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}K_X(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}(1 + 2\sin|t - s|)exp(-2(t - s)^2)$$

Рассмотрим два случая:
1) $t > s$:

$$R_{XX'}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}K_X(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}(1 + 2\sin|t - s|)exp(-2(t - s)^2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}(1 + 2\sin(t-s))exp(-2(t-s)^2) =$$
$$= -2\cos(t-s)exp(-2(t-s)^2) + 4(1+2\sin(t-s))exp(-2(t-s)^2)(t-s) =$$
$$= 2exp(-2(t-s)^2)((2+4\sin(t-s))(t-s) - \cos(t-s))$$

2) $t < s$:

$$R_{XX'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}K_X(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}(1+2\sin|t-s|)exp(-2(t-s)^2) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}(1+2\sin(s-t))exp(-2(t-s)^2) =$$
$$= 2\cos(s-t)exp(-2(t-s)^2) + 4(1+2\sin(s-t))exp(-2(t-s)^2)(t-s) =$$
$$= 2exp(-2(t-s)^2)((2+4\sin(s-t))(t-s) + \cos(s-t))$$

Таким образом получаем, что:

$$R_{XX'}(t,s) = 2exp(-2(t-s)^2)((2+4\sin|t-s|)(t-s) - \cos|t-s|sign(t-s))$$

3)

$$Z(t) = X(t) + X'(t)$$

Ковариационная функция:

$$K_Z(\tau) = K_X(\tau) - K_X'(\tau) + K_X'(\tau) + K_{X'}(\tau) =$$
$$= (1+2\sin|\tau|)exp(-2\tau^2) - \frac{2\cos|\tau| - 2(1+4\tau^2)\cos|\tau|}{exp(2\tau^2)|\tau|} + \frac{2\sin|\tau|}{exp(2\tau^2)} +$$
$$+4exp(-2\tau^2) - 16\tau^2 exp(-2\tau^2) + \left(8exp(-2\tau^2) - 32\tau^2 exp(-2\tau^2)\right)\sin|\tau| + \frac{8\tau^2\cos|\tau|}{|\tau|exp(2\tau^2)}$$

Дисперсия:

$$D_Z(t) = K_Z(0) = 1 + 4 = 5$$

Нормированная ковариационная функция:

$$\rho_Z(\tau) = \frac{K_Z(\tau)}{K_Y(0)} =$$
$$= \frac{(1+2\sin|\tau|)exp(-2\tau^2)}{5} - \frac{2\cos|\tau| - 2(1+4\tau^2)\cos|\tau|}{5exp(2\tau^2)|\tau|} + \frac{2\sin|\tau|}{5exp(2\tau^2)} +$$
$$+\frac{4}{5}exp(-2\tau^2) - \frac{16}{5}\tau^2 exp(-2\tau^2) + \left(8exp(-2\tau^2) - 32\tau^2 exp(-2\tau^2)\right)\frac{\sin|\tau|}{5} + \frac{8\tau^2\cos|\tau|}{5|\tau|exp(2\tau^2)}$$

2) Взаимная ковариационная функция $R_{XX'}(t,s)$:

$$R_{XX'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} K_X(t,s)$$

Рассмотрим два случая:
1) $t > s$:

$$R_{XX'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} K_X(t,s) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}(1 + 2\sin(t-s))exp(-2(t-s)^2) =$$
$$= exp(-2(t-s)^2)(-4(t-s)(2\sin(s-t) - 1) - 2\cos(s-t))$$
$$= exp(-2(t-s)^2)(-4(t-s)(-2\sin(t-s) - 1) - 2\cos(s-t))$$

2) $t < s$:

$$R_{XX'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} K_X(t,s) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}(1 + 2\sin(s-t))exp(-2(t-s)^2) =$$
$$= exp(-2(t-s)^2)(4(t-s)(2\sin(s-t) + 1) + 2\cos(s-t)) =$$
$$= exp(-2(t-s)^2)(-4(s-t)(2\sin(s-t) + 1) + 2\cos(s-t))$$

Таким образом получаем, что:

$$R_{XX'}(t,s) = exp(-2(t-s)^2)(-4|t-s|((-2\sin|t-s| - 1) - 2\cos(s-t))sign(t-s))$$
$$= -4|t-s|exp(-2(t-s)^2)(-2\sin|t-s| - 1 - 2\cos(s-t))sign(t-s))$$
$$= 4|t-s|exp(-2(t-s)^2)(2\sin|t-s| + 1 + 2\cos(s-t))sign(s-t))$$