МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория случайных процессов

Домашняя работа №5

«Моделирование двумерного винеровского процесса»

Группа ФН11-63Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

1. На интервале $[0,\, T]$ смоделируйте n траекторий двумерного винеровского процесса интенсивности σ с шагом $\frac{h}{2}$.
2. Выведите на печать 5-7 траекторий (каждую на отдельном рисунке с шагом h и $\frac{h}{2}$).
3. Для каждой траектории вычислите:
1) Вариации компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}|,\, \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}|\right)$. Найдите среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}\left(h\right),\, Var^{(2)}\left(h\right)\right)$ по всем траекториям.
2) Суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}|^2,\, \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}|^2\right)$. Найдите среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}\left(h\right),\, SqVar^{(2)}\left(h\right)\right)$.
4. Уменьшите значение h в два раза и вычислите $\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ и $\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$. Сравните полученные значения для исходного и уменьшенного шага и объясните результат.
5. Вычислите теоретическую вероятность $P\left(|\overline{W}_T| \geq z\right)$ и сравните её с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня z в момент T.
6. Задавшись некоторым значением z_1, экспериментально исследовать закон распределения момента $\tau_{z_1} = inf\{t > 0 || \overline{W}_t| \geq z_1\}$ первого достижения уровня z_1. Для этого каждую из n траекторий надо продолжать моделировать до момента $\tau_{z_1} = \tau_{z_1}\left(n\right)$. Собранную статистику $\tau_{z_1}\left(1\right),\, ,\tau_{z_1}\left(2\right),\, ,\ldots,\tau_{z_1}\left(n\right)$ подвергнуть первоначальной обработке (группировка, гистограмма относительных частот).
Сформулировать выводы.

Входные данные:
T: 10
n: 120
σ: 0.6
h: 0.05
z: 3

Решение

1. Моделирование траекторий двумерного винеровского процесса

$$N = \frac{T}{h} = 200$$

1) Полагаем $\overline{W}_0 = (0, 0)$.
2) Смоделируем $2N$ пар СВ $\left(\xi^{(1)}_k,\, \xi^{(2)}_k\right)$ с независимыми компонентами, распределёнными по закону $N\left(0,\, \sigma\sqrt{\frac{h}{2}}\right)$. Тогда для моделирования винеровского процесса с шагом h в качестве приращений будем использовать суммы вида $\left(\xi^{(1)}_{2k-1} + \xi^{(1)}_{2k},\, \xi^{(2)}_{2k-1} + \xi^{(2)}_{2k}\right)$, компоненты которых

распределены $N\left(0,\ \sigma\sqrt{h}\right)$ по свойствам нормального закона.

$$\xi_k^{(1)} = (-0.0125,\ -0.0437,\ 0.0629,\ \ldots,\ -0.2059,\ -0.067,\ -0.041)$$
$$\xi_k^{(2)} = (-0.0684,\ -0.1066,\ 0.0869,\ \ldots,\ 0.0376,\ 0.1176,\ -0.1539)$$

3) Вычисляем $\left(W_{(k+1)h}^{(1)},\ W_{(k+1)h}^{(2)}\right) = \left(W_{kh}^{(1)},\ W_{kh}^{(2)}\right) + \left(\xi_{2k-1}^{(1)} + \xi_{2k}^{(1)},\ \xi_{2k-1}^{(2)} + \xi_{2k}^{(2)}\right)$

$$\left(W_h^{(1)},\ W_h^{(2)}\right) = (0,\ 0) + (-0.0125 - 0.0437,\ -0.0684 - 0.1066) = (-0.0562,\ -0.175)$$

и так далее.

4) Получаем последовательность точек $\left(W_{kh}^{(1)},\ W_{kh}^{(2)}\right)$. Соединяем эти точки для наглядности отрезками прямых, получаем смоделированную траекторию.

2. Вывод траекторий и их визуализация

Графическое изображение нескольких получившихся траекторий представлено на Рис. 1, а ниже представлены сами траектории (1 - 6):

Траектория №1

$$W_{kh}^{(1)} = (0.0,\ -0.0562,\ -0.1194,\ \ldots,\ -2.2005,\ -2.3153,\ -2.4233)$$
$$W_{kh}^{(2)} = (0.0,\ -0.175,\ -0.0675,\ \ldots,\ 2.202,\ 2.3932,\ 2.3568)$$

Траектория №2

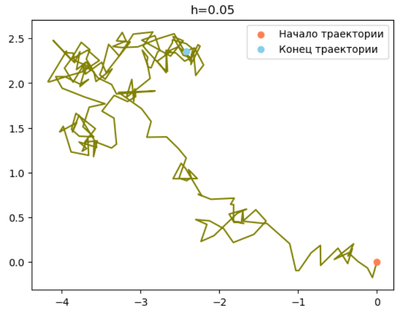
$$W_{kh}^{(1)} = (0.0,\ -0.0118,\ -0.1663,\ \ldots,\ -3.5556,\ -3.4468,\ -3.384)$$
$$W_{kh}^{(2)} = (0.0,\ -0.0179,\ -0.0691,\ \ldots,\ -1.7461,\ -1.6954,\ -1.6564)$$

Траектория №3

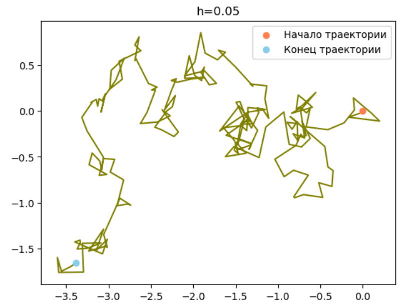
$$W_{kh}^{(1)} = (0.0,\ -0.1454,\ -0.1288,\ \ldots,\ 2.1715,\ 2.4543,\ 2.2074)$$
$$W_{kh}^{(2)} = (0.0,\ 0.1055,\ 0.1783,\ \ldots,\ -1.2885,\ -1.1967,\ -1.3264)$$

Траектория №4

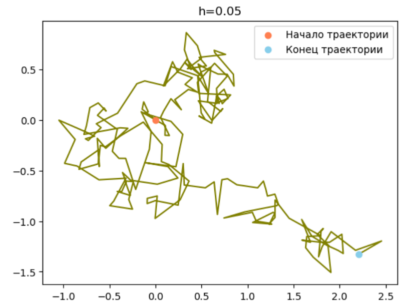
$$W_{kh}^{(1)} = (0.0,\ -0.0329,\ 0.0545,\ \ldots,\ -3.3817,\ -3.3716,\ -3.4244)$$
$$W_{kh}^{(2)} = (0.0,\ -0.0977,\ -0.1535,\ \ldots,\ 0.163,\ 0.1222,\ 0.1491)$$



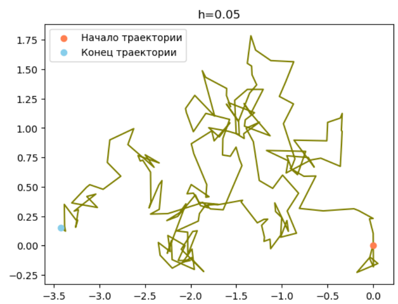
(a) Траектория №1



(b) Траектория №2

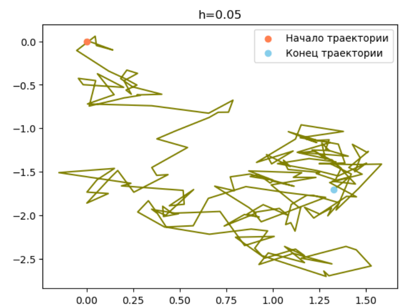


(c) Траектория №3



(d) Траектория №4

(e) Траектория №5



(f) Траектория №6

Рис. 1: Траектории двумерного винеровского процесса, смоделированного с шагом $h = 0.05$

Траектория №5

$$W^{(1)}_{kh} = (0.0,\ -0.0526,\ 0.0996,\ \dots,\ 0.1754,\ 0.1505,\ 0.1874)$$
$$W^{(2)}_{kh} = (0.0,\ 0.1761,\ 0.1413,\ \dots,\ 1.3533,\ 1.4246,\ 1.3669)$$

Траектория №6

$$W^{(1)}_{kh} = (0.0,\ -0.0077,\ 0.1402,\ \dots,\ 1.3191,\ 1.4116,\ 1.3272)$$
$$W^{(2)}_{kh} = (0.0,\ 0.0166,\ -0.0993,\ \dots,\ -1.6099,\ -1.562,\ -1.7084)$$

3. Вычисления

1) Вариации компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}|,\ \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}|\right)$ для каждой траектории:

$$(24.1959,\ 22.2625)$$

$$(20.4868,\ 21.6810)$$
$$(22.4155,\ 21.1007)$$
$$\dots$$
$$(22.2207,\ 19.9977)$$
$$(20.2204,\ 19.1441)$$

$$(21.0824,\ 21.4758)$$

Среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}\left(h\right),\ Var^{(2)}\left(h\right)\right)$ по всем траекториям:

$$(21.4339,\ 21.4522)$$

2) Суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}|^2,\ \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}|^2\right)$ для каждой траектории:

$$(4.4023,\ 3.6970)$$

$$(3.2852,\ 3.7181)$$

$$(4.0283,\ 3.6421)$$

$$\ldots$$

$$(3.5856,\ 2.9863)$$

$$(3.3007,\ 2.9323)$$

$$(3.7021,\ 3.5869)$$

Среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}\left(h\right),\ SqVar^{(2)}\left(h\right)\right)$ по всем траекториям:

$$(3.5934,\ 3.5986)$$

4. Уменьшаем h в два раза и повторяем пункты 1-3 с новым h

$$\frac{h}{2} = 0.025$$

Смоделируем и изобразим траектории с новым значением $\frac{h}{2} = 0.025$
Графическое изображение нескольких получившихся траекторий представлено на Рис. 2, а ниже представлены сами траектории (1 - 6):

Траектория №1

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.0125,\ -0.0562,\ \ldots,\ -2.3153,\ -2.3823,\ -2.4233)$$

$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.0684,\ -0.175,\ \ldots,\ 2.3932,\ 2.5108,\ 2.3568)$$

Траектория №2

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.0234,\ -0.0118,\ \ldots,\ -3.4468,\ -3.424,\ -3.384)$$

$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.05,\ -0.0179,\ \ldots,\ -1.6954,\ -1.6811,\ -1.6564)$$

Траектория №3

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.1777,\ -0.1454,\ \ldots,\ 2.4543,\ 2.3409,\ 2.2074)$$
$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ 0.2085,\ 0.1055,\ \ldots,\ -1.1967,\ -1.2652,\ -1.3264)$$

Траектория №4

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.0643,\ -0.0329,\ \ldots,\ -3.3716,\ -3.4061,\ -3.4244)$$
$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ 0.0075,\ -0.0977,\ \ldots,\ 0.1222,\ 0.0612,\ 0.1491)$$

Траектория №5

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.1124,\ -0.0526,\ \ldots,\ 0.1505,\ 0.2774,\ 0.1874)$$
$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ 0.1914,\ 0.1761,\ \ldots,\ 1.4246,\ 1.4649,\ 1.3669)$$

Траектория №6

$$W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ 0.0463,\ -0.0077,\ \ldots,\ 1.4116,\ 1.4275,\ 1.3272)$$
$$W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} = (0.0,\ -0.1173,\ 0.0166,\ \ldots,\ -1.562,\ -1.7428,\ -1.7084)$$

Вычислим:
1) Вариации компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(1)}_{k\frac{h}{2}}|,\ \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(2)}_{k\frac{h}{2}}|\right)$ для каждой траектории:

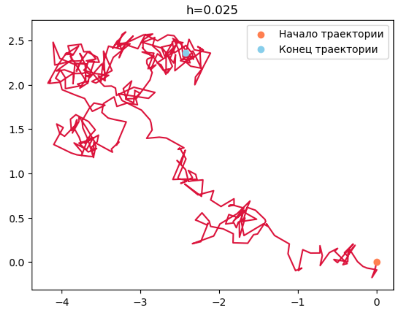
$$(33.5606,\ 31.3327)$$
$$(29.6476,\ 30.6999)$$
$$(29.8537,\ 30.3046)$$
$$\ldots$$
$$(30.6551,\ 28.5061)$$
$$(28.9402,\ 30.1666)$$
$$(30.2751,\ 30.3372)$$

Среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\ Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ по всем траекториям:

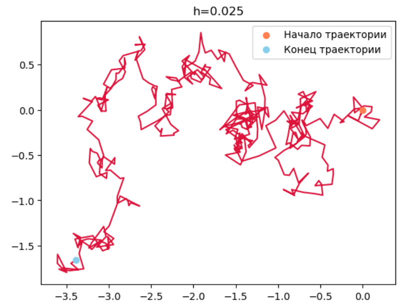
$$(30.2481,\ 30.3853)$$

2) Суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k |W^{(1)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(1)}_{k\frac{h}{2}}|^2,\ \sum_k |W^{(2)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(2)}_{k\frac{h}{2}}|^2\right)$ для каждой траектории:

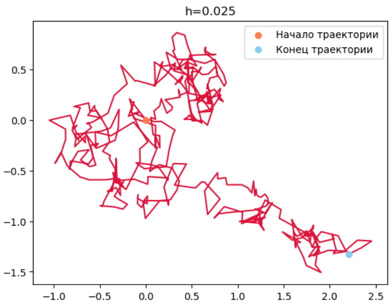
$$(4.256,\ 3.8783)$$



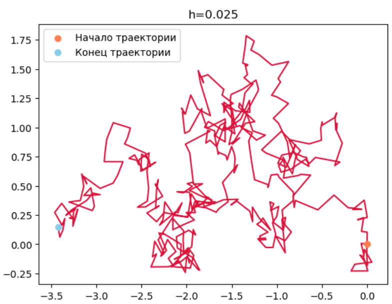
(a) Траектория №1



(b) Траектория №2

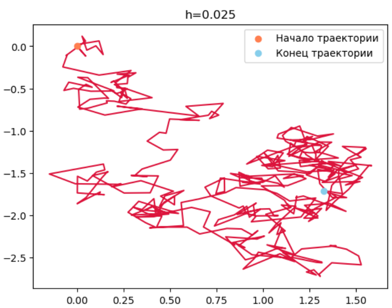


(c) Траектория №3



(d) Траектория №4

(e) Траектория №5



(f) Траектория №6

Рис. 2: Траектории двумерного винеровского процесса, смоделированного с шагом $\frac{h}{2} = 0.025$

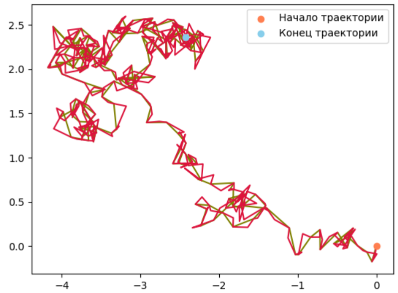
$$(3.3652,\ 3.6119)$$
$$(3.608,\ 3.6927)$$
$$\dots$$
$$(3.6887,\ 3.1484)$$
$$(3.2207,\ 3.4858)$$
$$(3.5819,\ 3.6875)$$

Среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\ SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ по всем траекториям:

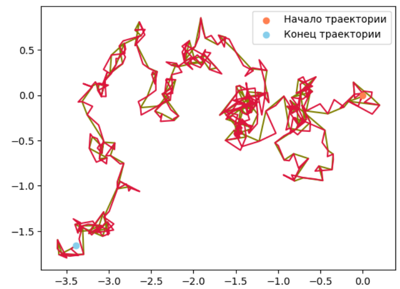
$$(3.5963,\ 3.6204)$$

Рассмотрим совместные графики траекторий с разными h

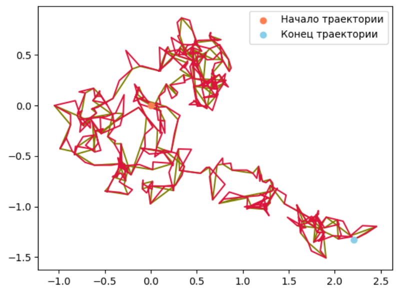
На Рис. 3 представлены совместные графики траекторий 1 - 6.
На получившихся графиках присутствует много линий, поэтому для более детального рассмотрения, изобразим только несколько шагов (см. Рис. 4).



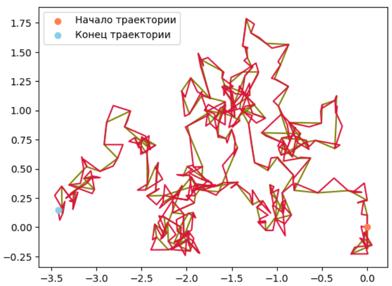
(a) Траектория №1



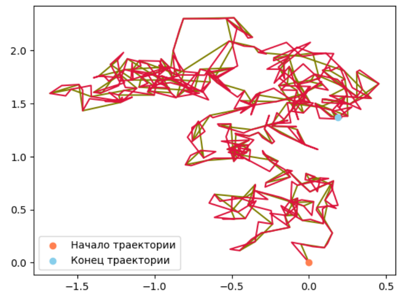
(b) Траектория №2



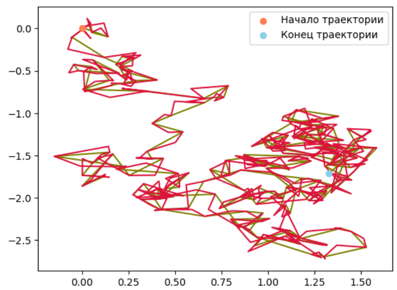
(c) Траектория №3



(d) Траектория №4

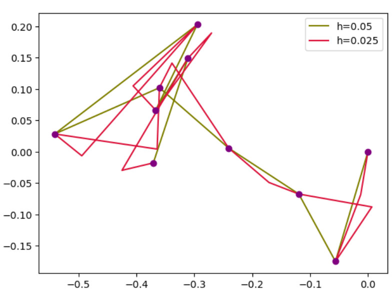


(e) Траектория №5

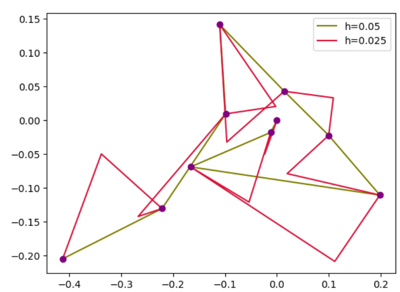


(f) Траектория №6

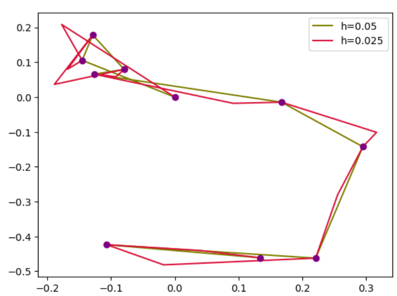
Рис. 3: Совместные графики траекторий двумерного винеровского процесса, смоделированного с шагом $h = 0.05$ и $\frac{h}{2} = 0.025$



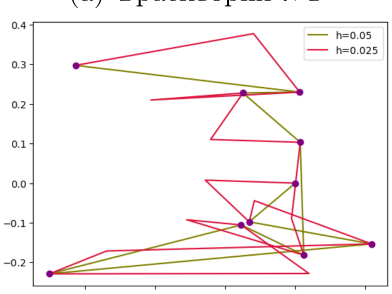
(a) Траектория №1



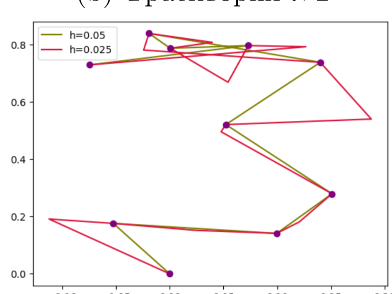
(b) Траектория №2



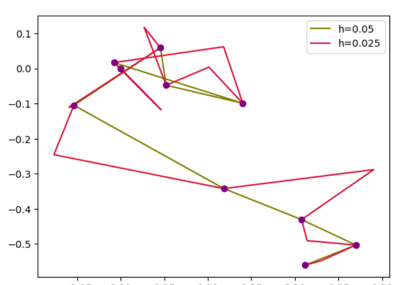
(c) Траектория №3



(d) Траектория №4



(e) Траектория №5



(f) Траектория №6

Рис. 4: Совместные графики 10-ти и 19-ти шагов траекторий двумерного винеровского процесса, смоделированного с $h = 0.05$ и $\frac{h}{2} = 0.025$ соответственно

Сравним $\left(Var^{(1)}\left(h\right),\, Var^{(2)}\left(h\right)\right)$ **и** $\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$:

$$\left(Var^{(1)}\left(h\right),\, Var^{(2)}\left(h\right)\right) = (21.4339,\ 21.4522)$$
$$\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right) = (30.2481,\ 30.3853)$$

Сравним $\left(SqVar^{(1)}\left(h\right),\, SqVar^{(2)}\left(h\right)\right)$ **и** $\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$:

$$\left(SqVar^{(1)}\left(h\right),\, SqVar^{(2)}\left(h\right)\right) = (3.5934,\ 3.5986)$$
$$\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right),\, SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right) = (3.5963,\ 3.6204)$$

Видно, что с измельчением разбиения среднее значение вариаций компонент увеличилось, а среднее значение суммы квадратов приращений компонент существенно не изменилось.
Можно сделать вывод о том, что для винеровского процесса при измельчении разбиения сумма приращений стремится к бесконечности, а сумма квадратов приращений стремится к дисперсии, которая равна $T\sigma^2 = 3.6$.

5. Вычисление теоретической и эмпирической вероятностей достижения указанного уровня z в момент T

1) Теоретическая вероятность

$$P\left(|\overline{W}_T| \geq z\right) = P\left(\sqrt{\left(W_T^{(1)}\right)^2 + \left(W_T^{(2)}\right)^2} \geq z\right) = P\left(\sqrt{\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} \geq \frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right) =$$

$$= P\left(\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 \geq \left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right),$$

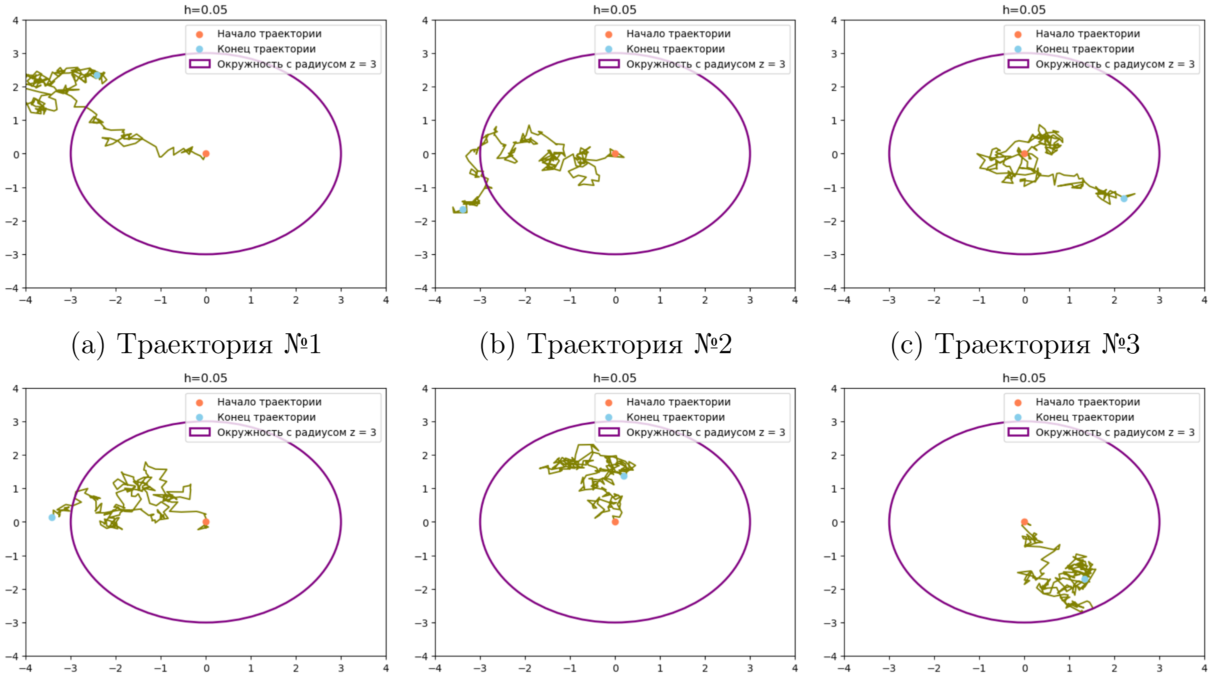
где $\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)$ и $\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}$ – независимые случайные величины, распределённые по стрндартному нормальному закону, следовательно, $\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 \sim \chi^2\left(2\right)$.
Тогда:

$$P\left(\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 \geq \left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right) =$$

$$= 1 - P\left(\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 < \left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right) = 1 - F_{\chi^2(2)}\left(\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right) = 1 - F_{\chi^2(2)}\left(\frac{z^2}{\sigma^2 T}\right) =$$

$$= 1 - F_{\chi^2(2)}\left(2.5\right) = 1 - 0.7135 = 0.2865$$

2) Эмпирическая вероятность
Для вычисления эмпирической вероятности достижения указанного уровня z в момент T



(a) Траектория №1 (b) Траектория №2 (c) Траектория №3

(d) Траектория №4 (e) Траектория №5 (f) Траектория №6

Рис. 5: Траектории двумерного винеровского процесса, смоделированного с шагом $\frac{h}{2} = 0.05$ относительно окружности с радиусом $z = 3$

найдём количество траекторий, которые в момент времени $T = 10$ находятся за пределами окружности радиуса $z = 3$. Получаем, что в момент времени $T = 10$ за пределами окружности радиуса $z = 3$ находятся 32 траектории, тогда

$$P\left(|\overline{W}_T| \geq z\right) = \frac{32}{n} = \frac{32}{120} = 0.2667$$

На Рис. 5 изображены несколько траекторий (1-6) и окружность с радиусом $z = 3$.

6. Экспериментальное исследование закона распределения момента $\tau_{z_1} = inf\{t > 0 | |\overline{W}_t| \geq z_1\}$ первого достижения уровня z_1

Пусть теперь:

$$z_1 = 2$$

Получаем, что 114 траекторий из 120 достигают уровень z_1, следовательно, вероятность достижения уровня z_1 равняется 0.95.
Рассмотрим множество моментов τ_{z_1}:

$$\tilde{T} = (0.85,\ 2.75,\ 7.9,\ 0.9,\ 3.1, \ldots, 2.15,\ 1.45,\ 5.15,\ 2.9,\ 2.05)$$

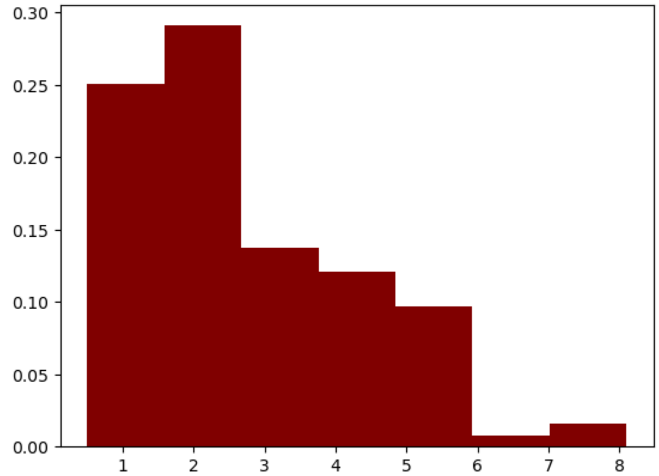


Рис. 6: Распределение момента $\tau_{z_1} = inf\{t > 0 || \overline{W}_t| \geq z_1\}$ при $z_1 = 2$

Минимальное значение $\tau_{z_1} = 0.5$
Максимальное значение $\tau_{z_1} = 8.1$
Выборочное среднее: 2.7803

Пусть теперь:

$$z_1 = 7$$

Тогда получаем, что 71 траектория из 120 достигает уровень z_1, следовательно, вероятность достижения уровня z_1 равняется 0.5917.
Рассмотрим множество моментов τ_{z_1}:

$$\tilde{T} = (8.5,\ 6.65,\ 6.2,\ 5.75,\ 2.9, \ldots, 4, 6,\ 9.75,\ 6.65,\ 3.55,\ 2.9)$$

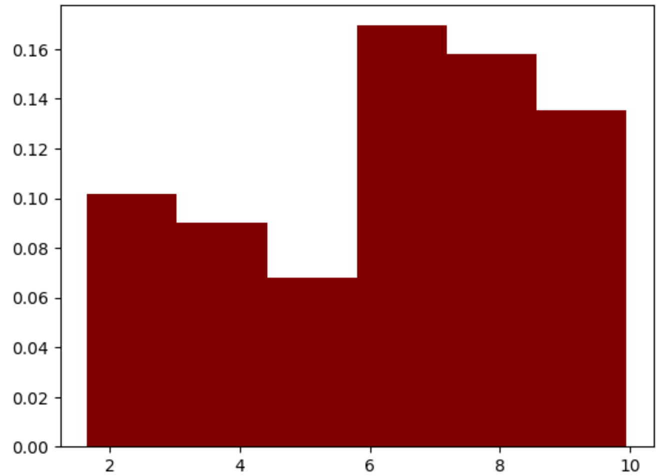


Рис. 7: Распределение момента $\tau_{z_1} = inf\{t > 0||\overline{W}_t| \geq z_1\}$ при $z_1 = 7$

Минимальное значение $\tau_{z_1} = 1.65$
Максимальное значение $\tau_{z_1} = 9.95$
Выборочное среднее: 6.2586

В процессе перебора значений z_1 экспериментально подтверждается логичный вывод о том, что с ростом z_1 выборочное среднее растёт, а количество элементов в множестве моментов τ_{z_1} уменьшается.

Выводы

В ходе работы были выполнены все пункты поставленного задания. Смоделированны траектории двумерного винеровского процесса и на их основе проведены необходимые рассчёты. Траектории визуализированы. Ключевые выводы сделаны в ходе работы и приведены в отчёте в соответствующих пунктах.

Код

Работа выполнена на языке программирования *Python*
Ниже представлены основные фрагменты кода:

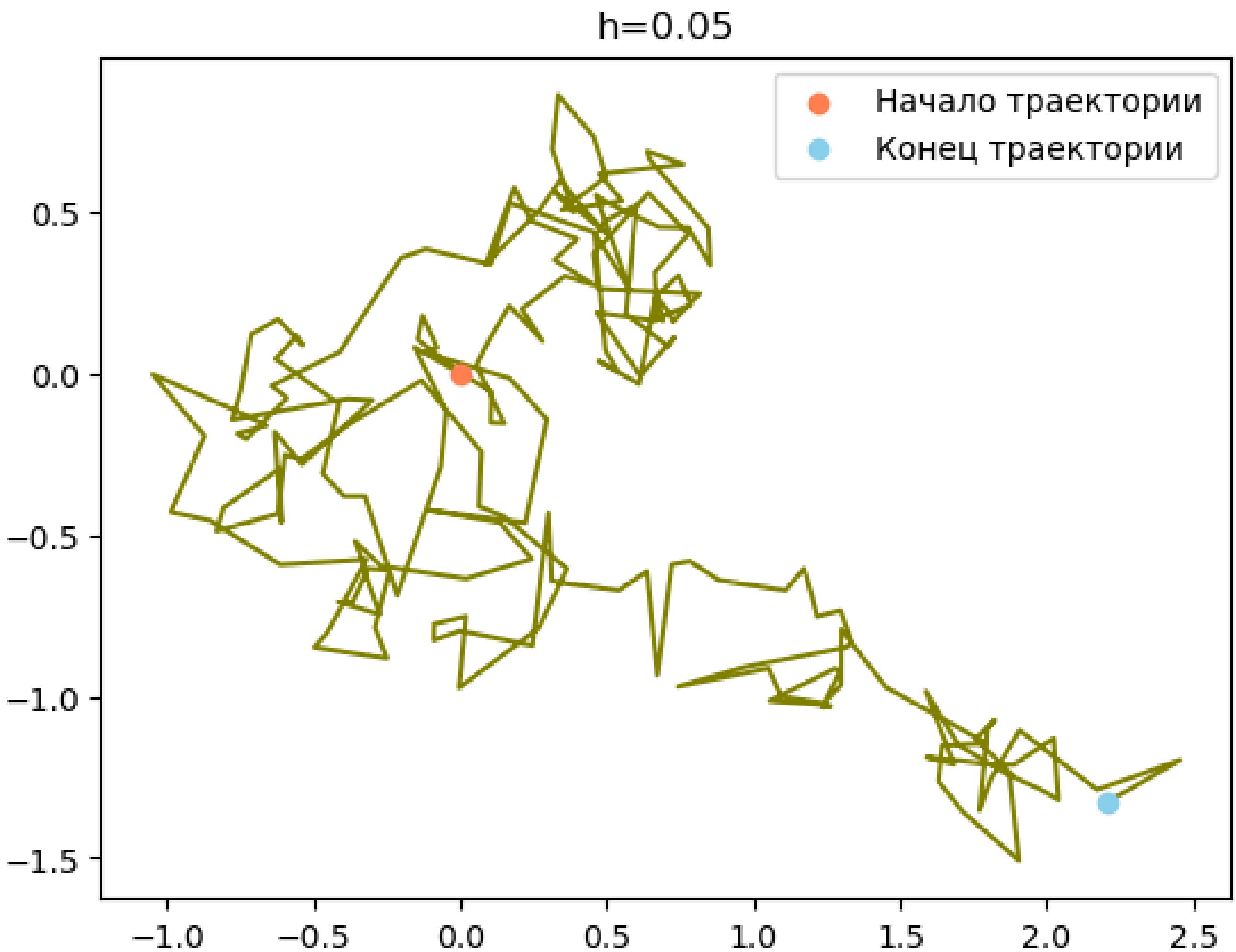
```
# Формирование двумерного винеровского процесса

W1 = []
W2 = []
XI = []
tau = []
for i in range(n):
    w11 = np.zeros(N1 + 1)
    w12 = np.zeros(N1 + 1)
    w21 = np.zeros(N2 + 1)
    w22 = np.zeros(N2 + 1)
    xi1 = np.random.normal(0, sigma*np.sqrt(h/2), 2*N1)
    xi2 = np.random.normal(0, sigma*np.sqrt(h/2), 2*N1)
    XI.append((xi1, xi2))
    flag = True
    for j in range(0, N1):
        w11[j + 1] = w11[j] + xi1[2*j] + xi1[2*j + 1]
        w12[j + 1] = w12[j] + xi2[2*j] + xi2[2*j + 1]
        if (w11[j + 1] ** 2 + w12[j + 1] ** 2 >= z1 and flag):
            tau.append((j + 1) * h)
            flag = False
    for j in range(0, N2):
        w21[j + 1] = w21[j] + xi1[j]
        w22[j + 1] = w22[j] + xi2[j]

    W1.append((w11, w12))
    W2.append((w21, w22))


# Вычисление характеристик двумерного винеровского процесса

# Вариации компонент
VAR = []
for i in range(n):
  var1 = 0
  var2 = 0
  for j in range(N1):
        var1 += abs(W1[i][0][j + 1] - W1[i][0][j])
        var2 += abs(W1[i][1][j + 1] - W1[i][1][j])
  VAR.append((var1, var2))

print("Вариации компонент для каждой траектории: ")
```

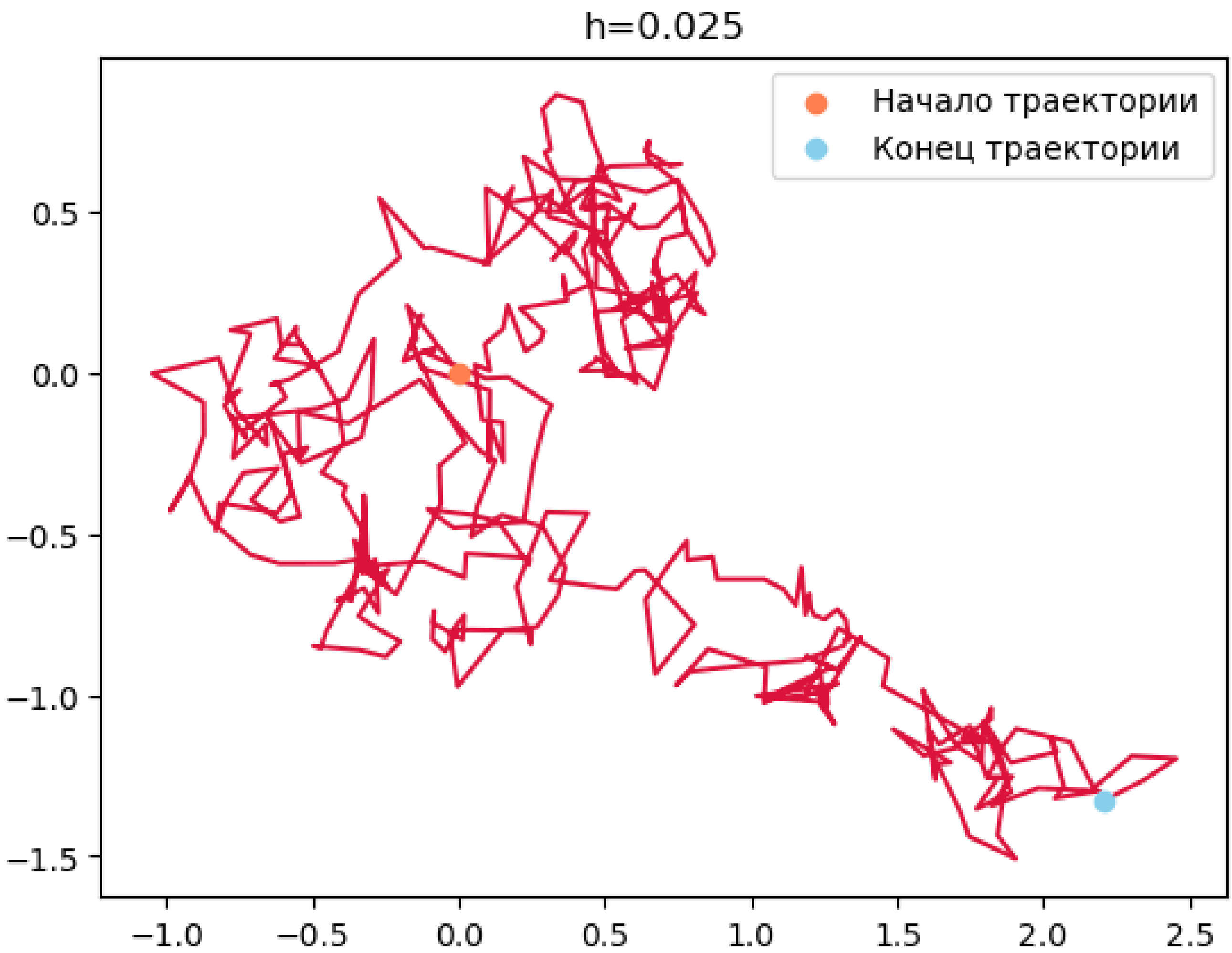
```
for i in range(3):
    print(f"({round(VAR[i][0], 4)},\:{round(VAR[i][1], 4)})\\")
print("\dots\\")
for i in range(len(VAR) - 1, len(VAR) - 4, -1):
    print(f"({round(VAR[i][0], 4)},\:{round(VAR[i][1], 4)})\\")

# Среднее значение вариации
sum_x = 0
sum_y = 0
for i in range(len(VAR)):
  sum_x += VAR[i][0]
  sum_y += VAR[i][1]
print()
print("Среднее значение вариации: ")
print(f"({round(sum_x / len(VAR), 4)},\:{round(sum_y / len(VAR), 4)})\\")

# Суммы квадратов приращений компонент
sqVAR = []
for i in range(n):
  sqvar1 = 0
  sqvar2 = 0
  for j in range(N1):
        sqvar1 += abs(W1[i][0][j + 1] - W1[i][0][j]) ** 2
        sqvar2 += abs(W1[i][1][j + 1] - W1[i][1][j]) ** 2
  sqVAR.append((sqvar1, sqvar2))
print()
print("Суммы квадратов приращений компонент: ")

for i in range(3):
    print(f"({round(sqVAR[i][0], 4)},\:{round(sqVAR[i][1], 4)})\\")
print("\dots\\")
for i in range(len(sqVAR) - 1, len(sqVAR) - 4, -1):
    print(f"({round(sqVAR[i][0], 4)},\:{round(sqVAR[i][1], 4)})\\")

# Среднее значение этих сумм
sum_x = 0
sum_y = 0
for i in range(len(sqVAR)):
  sum_x += sqVAR[i][0]
  sum_y += sqVAR[i][1]
print()
print("Среднее значение этих сумм: ")
print(f"({round(sum_x / len(sqVAR), 4)},\:{round(sum_y / len(sqVAR), 4)})\\")

# Вычисление вероятностей
sum = 0
```

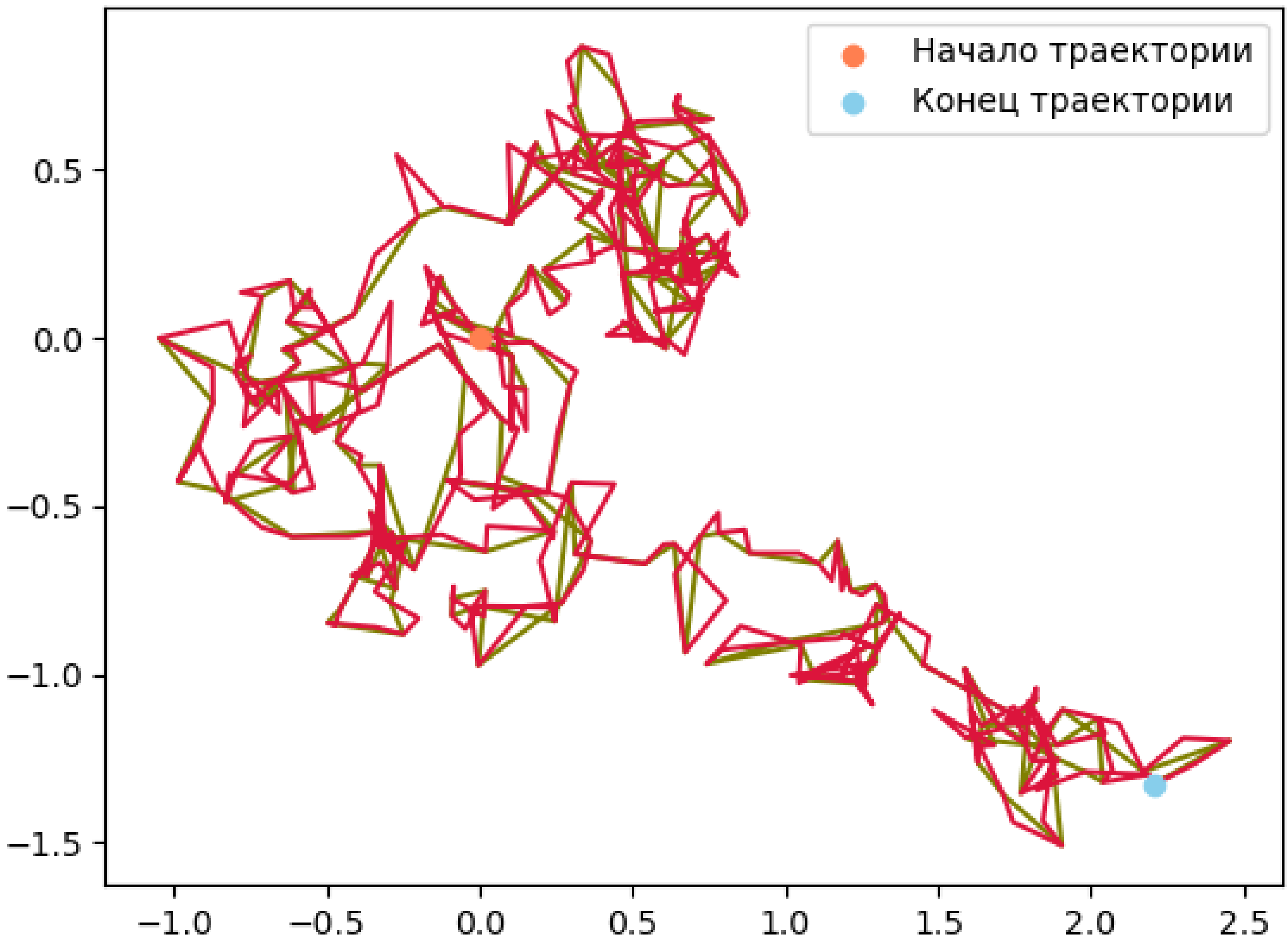
```
for i in range(n):
  if np.sqrt(W2[i][0][-1] ** 2 + W2[i][1][-1] ** 2) >= z:
    sum += 1
print("Эмпирическая вероятность: ")
print(sum)
print(round(sum / n, 4))
```

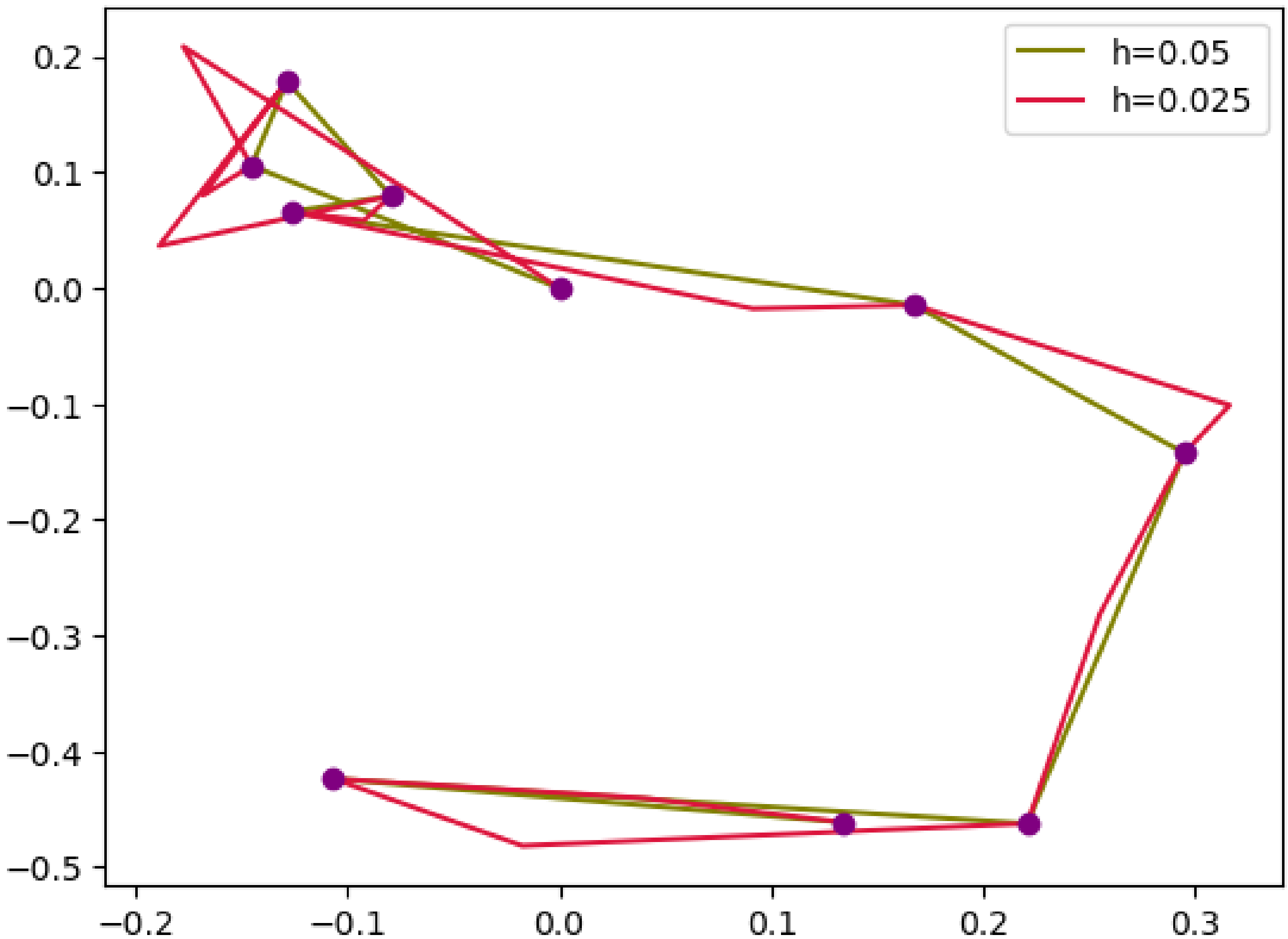
Приложение

По ссылке доступны анимации нескольких траекторий двумерного винеровского процесса с разными значениями h:
https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1sl35Jp4ajqwqzWktuiP-1951CArbTDcp

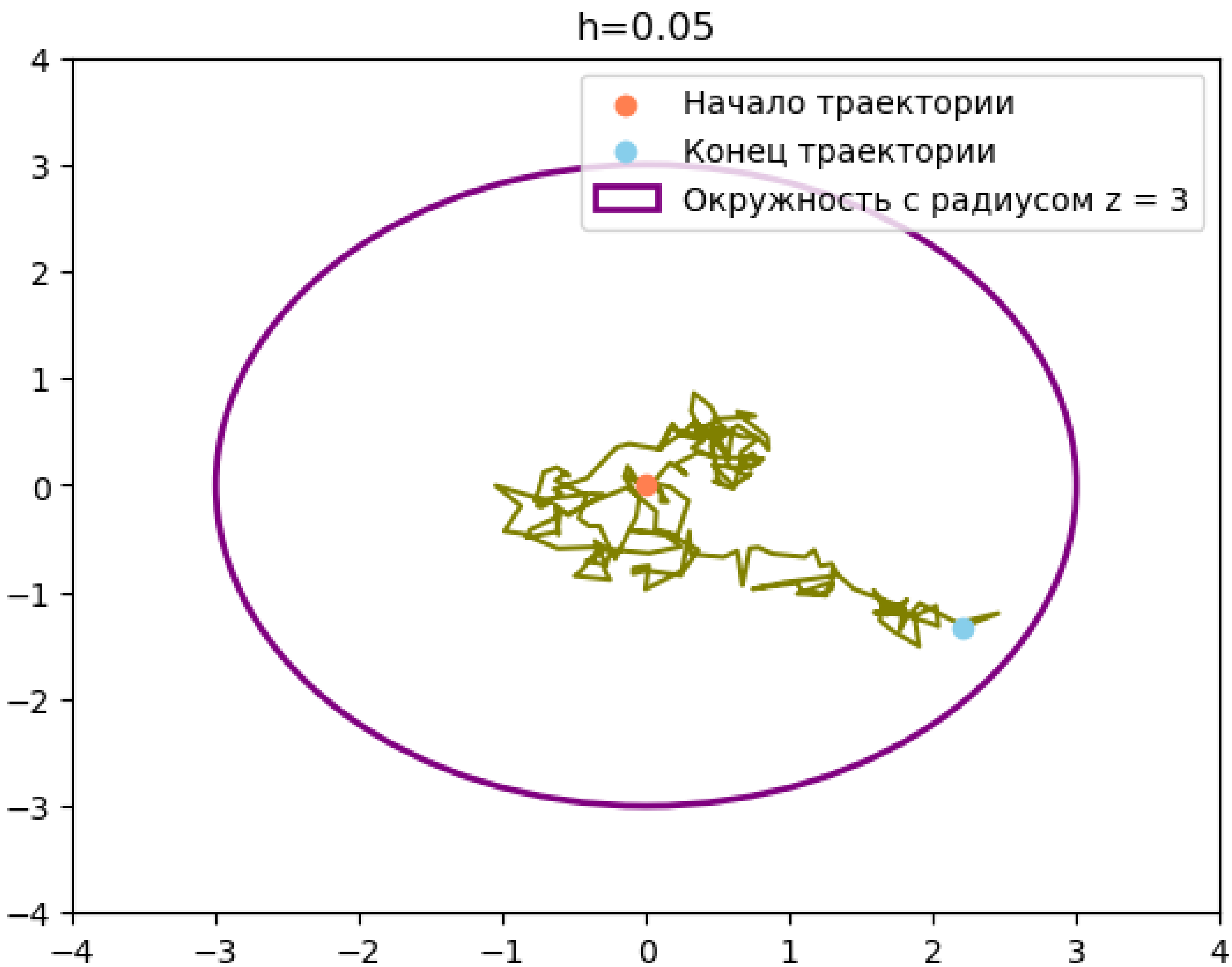

h=0.05
Начало траектории
Конец траектории
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5


h=0.025
Начало траектории
Конец траектории
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5


Начало траектории
Конец траектории
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5



h=0.05
h=0.025
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.2
−0.1
0.0
0.1
0.2
0.3


h=0.05
Начало траектории
Конец траектории
Окружность с радиусом z = 3
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4