

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ  
КАФЕДРА  
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория случайных процессов

Домашняя работа №6

Группа ФН11-63Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

## Задание

Задан случайный процесс  $X(t)$ . Найдите (не дифференцируя и не интегрируя  $X(t)$ ):

- 1) Математическое ожидание  $m_X(t) = M[X(t)]$ , ковариационную функцию  $K_X(t_1, t_2)$  и дисперсию  $D_X(t)$  случайного процесса  $X(t)$ ;
- 2) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса  $Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ ;
- 3) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса  $Y_2(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$ ;
- 4) Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса  $Y_3(t) = \int_0^t X(s)ds$ ;
- 5) Взаимные ковариационные функции  $R_{XX'}(t_1, t_2)$  и  $R_{X'X}(t_1, t_2)$ .

**Входные данные:**

$X(t) = Ut + V \cos t$ , где случайный вектор  $(U, V)$  имеет математическое ожидание  $(0, -2)$  и ковариационную матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## Решение

- 1) **Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса  $X(t)$**

Математическое ожидание процесса  $X(t)$ :

$$m_X(t) = M[X(t)] = M(Ut + V \cos t) = tMU + \cos tMV = -2 \cos t$$

Ковариационная функция процесса  $X(t)$ :

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= \text{cov}(Ut_1 + V \cos t_1, Ut_2 + V \cos t_2) = \\ &= t_1 t_2 \text{cov}(U, U) + t_1 \cos t_2 \text{cov}(U, V) + t_2 \cos t_1 \text{cov}(U, V) + \cos t_1 \cos t_2 \text{cov}(V, V) \end{aligned}$$

Подставляем значения ковариации, взятые из ковариационной матрицы, получаем:

$$K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 + t_1 \cos t_2 + t_2 \cos t_1 + 2 \cos t_1 \cos t_2$$

Дисперсия процесса  $X(t)$ :

$$D_X(t) = K_X(t, t) = tt + t \cos t + t \cos t + 2 \cos t \cos t = t^2 + 2t \cos t + 2 \cos^2 t$$

2) Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса

$$Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Математическое ожидание процесса  $Y_1(t)$ :

$$m_{Y_1}(t) = \frac{d}{dt}(m_X(t)) = \frac{d}{dt}(-2 \cos t) = 2 \sin t$$

Ковариационная функция процесса  $Y_1(t)$ :

$$\begin{aligned} K_{Y_1}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (t_1 t_2 + t_1 \cos t_2 + t_2 \cos t_1 + 2 \cos t_1 \cos t_2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} (t_2 + \cos t_2 - t_2 \sin t_1 - 2 \cos t_2 \sin t_1) = 1 - \sin t_2 - \sin t_1 + 2 \sin t_1 \sin t_2 \end{aligned}$$

Дисперсия процесса  $Y_1(t)$ :

$$D_{Y_1}(t) = K_{Y_1}(t, t) = 1 - \sin t - \sin t + 2 \sin t \sin t = 1 - 2 \sin t + 2 \sin^2 t$$

3) Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса

$$Y_2(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$$

Математическое ожидание процесса  $Y_2(t)$ :

$$m_{Y_2}(t) = m_X(t) + \frac{d}{dt} m_X(t) = -2 \cos t + 2 \sin t$$

Ковариационная функция процесса  $Y_2(t)$ :

$$\begin{aligned} K_{Y_2}(t_1, t_2) &= \text{cov} \left( X(t_1) + \frac{dX(t_1)}{dt_1}, X(t_2) + \frac{dX(t_2)}{dt_2} \right) = K_X(t_1, t_2) + R_{XX'}(t_1, t_2) + R_{X'X} + K_{X'}(t_1, t_2) = \\ &= K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_1, t_2) = \\ &= (t_1 t_2 + t_1 \cos t_2 + t_2 \cos t_1 + 2 \cos t_1 \cos t_2) + (t_2 + \cos t_2 - t_2 \sin t_1 - 2 \cos t_2 \sin t_1) + \\ &\quad + (t_1 + \cos t_1 - t_1 \sin t_2 - 2 \cos t_1 \sin t_2) + (1 - \sin t_2 - \sin t_1 + 2 \sin t_1 \sin t_2) \end{aligned}$$

Дисперсия процесса  $Y_2(t)$ :

$$D_{Y_2}(t) = K_{Y_2}(t, t) = t^2 + 2t + 2 \sin^2 t - 2 \sin t + 2 \cos^2 t + 2t \cos t - 4 \sin t \cos t + 1$$

4) Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса

$$Y_3(t) = \int_0^t X(s) ds$$

Математическое ожидание процесса  $Y_3(t)$ :

$$m_{Y_3}(t) = \int_0^t m_X(s) ds = -2 \sin t$$

Ковариационная функция процесса  $Y_3(t)$ :

$$\begin{aligned}
 K_{Y_3}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (s_1 s_2 + s_1 \cos s_2 + s_2 \cos s_1 + 2 \cos s_1 \cos s_2) ds_1 ds_2 = \\
 &= \int_0^{t_1} \left( \frac{t_2^2 s_1 + t_2^2 \cos s_1}{2} + s_1 \sin t_2 - \sin(s_1 - t_2) + \sin(s_1 + t_2) \right) ds_1 = \\
 &= \frac{t_1^2 t_2^2 + 2 t_2^2 \sin t_1}{4} + \frac{t_1^2 \sin t_2}{2} + \cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)
 \end{aligned}$$

Дисперсия процесса  $Y_3(t)$ :

$$D_{Y_3}(t) = K_{Y_3}(t, t) = \frac{t^4 + 4t^2 \sin t}{4} + 2 \sin t^2$$

5) **Взаимные ковариационные функции  $R_{XX'}(t_1, t_2)$  и  $R_{X'X}(t_1, t_2)$**

$$R_{XX'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} (t_1 t_2 + t_1 \cos t_2 + t_2 \cos t_1 + 2 \cos t_1 \cos t_2) = t_1 + \cos t_1 - t_1 \sin t_2 - 2 \cos t_1 \sin t_2$$

$$R_{X'X}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} (t_1 t_2 + t_1 \cos t_2 + t_2 \cos t_1 + 2 \cos t_1 \cos t_2) = t_2 + \cos t_2 - t_2 \sin t_1 - 2 \cos t_2 \sin t_1$$