

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Теория случайных процессов

Домашняя работа №8

Группа ФН11-63Б

Вариант 2

Студент: Айгистова Д.Р.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Оценка:

Москва 2023

Задание

Стационарные случайные процессы связаны соотношением:

$$a_1 \frac{dY}{dt} + b_1 Y = a_2 \frac{dX}{dt} + b_2 X$$

Найдите $K_Y(\tau)$, если известна $K_X(\tau)$. Вычислите DY_t .

По условию:

$$K_X(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|);$$

$$\alpha = 1; \beta = 0; D = 2; a_1 = 2; b_1 = 3; a_2 = 4; b_2 = 1.$$

Решение

Подставляем заданные значения, получаем:

$$K_X(\tau) = 2e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$$

$$2 \frac{dY}{dt} + 3Y = 4 \frac{dX}{dt} + X$$

Найдём спектральную плотность процесса X по готовой формуле из лекций:

$$S_X(\omega) = \frac{4}{\pi(1 + \omega^2)^2}$$

Найдём частотную характеристику:

$$\Phi(i\omega) = \frac{4i\omega + 1}{2i\omega + 3}$$

Тогда спектральная плотность процесса:

$$S_Y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 \cdot S_X(\omega) = \left| \frac{4i\omega + 1}{2i\omega + 3} \right|^2 \cdot \frac{4}{\pi(1 + \omega^2)^2} = \frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4}{\pi(1 + \omega^2)^2}$$

Найдём $K_Y(\tau)$:

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} d\omega$$

При $\tau \geq 0$:

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

Найдём особые точки:

$\omega_1 = \frac{3}{2}i$ — полюс первого порядка;

$\omega_2 = i$ — полюс второго порядка.

Найдём вычеты:

$$\operatorname{res}(F(\omega), \omega_1) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{3}{2}i} \frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} \cdot \left(\omega - \frac{3}{2}i\right) = \frac{112ie^{-\frac{3\tau}{2}}}{15\pi}$$

$$\operatorname{res}(F(\omega), \omega_2) = \lim_{\omega \rightarrow i} \left(\frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} \cdot (\omega - i)^2 \right)' = -\frac{e^{-\tau}i(410 - 150\tau)}{50\pi}$$

Для $\tau \geq 0$ получаем:

$$K_Y(\tau) = 2\pi i \left(\frac{112ie^{-\frac{3\tau}{2}}}{15\pi} - \frac{e^{-\tau}i(410 - 150\tau)}{50\pi} \right) = -\frac{224e^{-\frac{3\tau}{2}}}{15} + \frac{e^{-\tau}(410 - 150\tau)}{25}$$

При $\tau < 0$: Найдём особые точки:

$\omega_3 = -\frac{3}{2}i$ – полюс первого порядка;

$\omega_4 = -i$ – полюс второго порядка.

Найдём вычеты:

$$\operatorname{res}(F(\omega), \omega_3) = \lim_{\omega \rightarrow -\frac{3}{2}i} \frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} \cdot \left(\omega + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{112ie^{\frac{3\tau}{2}}}{15\pi}$$

$$\operatorname{res}(F(\omega), \omega_4) = \lim_{\omega \rightarrow -i} \left(\frac{16\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 9} \cdot \frac{4e^{i\omega\tau}}{\pi(1 + \omega^2)^2} \cdot (\omega + i)^2 \right)' = \frac{e^{\tau}i(410 + 150\tau)}{50\pi}$$

Для $\tau < 0$ получаем:

$$K_Y(\tau) = -2\pi i \left(-\frac{112ie^{\frac{3\tau}{2}}}{15\pi} + \frac{e^{\tau}i(410 + 150\tau)}{50\pi} \right) = -\frac{224e^{\frac{3\tau}{2}}}{15} + \frac{e^{\tau}(410 + 150\tau)}{25}$$

В итоге:

$$K_Y(\tau) = -\frac{224e^{-\frac{3|\tau|}{2}}}{15} + \frac{e^{-|\tau|}(410 - 150|\tau|)}{25}$$

Вычислим DY_t :

$$DY_t = K_Y(0) = -\frac{224}{15} + \frac{410}{25} = \frac{22}{15}.$$