```
import pandas as pd
import numpy as np
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import solve
```

Задача:

Дана однородная Марковская цепь с данным числом состояний $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$. Ненулевые переходные вероятности $p_{ij}, i \neq j$, заданы ниже.

Число состояний Марковской цепи: $m = 5$
Переходные вероятности: $p_{12} = 0.1, p_{23} = 0.2, p_{21} = 0.1, p_{34} = 0.3, p_{45} = 0.4, p_{51} = 0.5$
Шаги: $k = 25$
Траектории: $n = 100$

Задание:

1. Выпишите матрицу переходных вероятностей;
2. Изобразите размеченный граф Марковской цепи;
3. Докажите, что цепь эргодическая;
4. Смоделируйте вектор начальных вероятностей $p(0)$ согласно приложенному алгоритму;
5. Вычислите безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на k-ом шаге по формуле из *лекции 1* для полученного $p(0)$;
6. Смоделируйте n траекторий полученной цепи за k шагов. Несколько траекторий выведите на печать;
7. По полученным реализациям траекторий найдите вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на k-ом шаге;
8. Сравните найденные эмпирические вероятности с теоретическими для k-ого шага;
9. Вычислите финальные вероятности для рассматриваемой Марковской цепи (*лекция 2*) и сравните их с вероятностями состояний на k-ом шаге;
10. Сформулируйте выводы.

```
m = 5
k = 25
n = 100
```

1

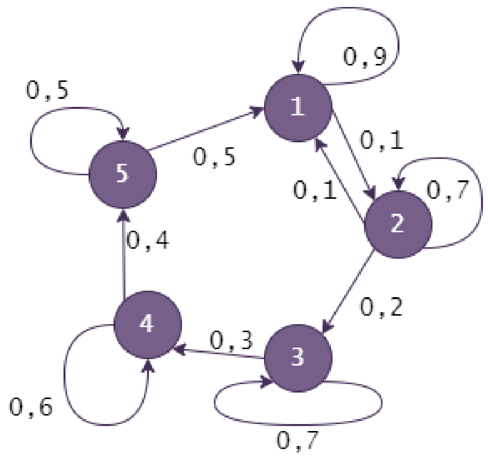
Выпишем матрицу переходных состояний:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
P = np.array([[0.9, 0.1, 0, 0, 0],
     [0.1, 0.7, 0.2, 0, 0],
     [0, 0, 0.7, 0.3, 0],
     [0, 0, 0, 0.6, 0.4],
     [0.5, 0, 0, 0, 0.5]])
```

2

Изобразим размеченный граф Марковской цепи:



3

Марковская цепь является эргодической, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, 0 < \pi_j < 1, \sum\limits_j \pi_j = 1$.

```
P_2 = np.linalg.matrix_power(P, 2)
print("n = 2:\n", P_2)
P_3 = np.linalg.matrix_power(P, 3)
print("\nn = 3:\n", P_3)
P_500 = np.linalg.matrix_power(P, 500)
print("\nn = 500:\n", P_500)
P_1000 = np.linalg.matrix_power(P, 1000)
print("\nn = 1000:\n", P_1000)
```

```
n = 2:
 [[0.82 0.16 0.02 0.   0.  ]
 [0.16 0.5  0.28 0.06 0.  ]
 [0.   0.   0.49 0.39 0.12]
 [0.2  0.   0.   0.36 0.44]
 [0.7  0.05 0.   0.   0.25]]

n = 3:
 [[0.754 0.194 0.046 0.006 0.   ]
 [0.194 0.366 0.296 0.12  0.024]
 [0.06  0.    0.343 0.381 0.216]
 [0.4   0.02  0.    0.216 0.364]
 [0.76  0.105 0.01  0.    0.125]]

n = 500:
 [[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
 [0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
 [0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
 [0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
 [0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]]

n = 1000:
 [[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
```

```
[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]
[0.53892216 0.17964072 0.11976048 0.08982036 0.07185629]]
```

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, 0 < \pi_j < 1$.

```
print(np.sum(P_1000[0]).round(5))
```

```
1.0
```

Следовательно, $\sum\limits_j \pi_j = 1$. Таким образом, Марковская цепь является эргодической.

4

Моделируем вектор начальных состояний $p(0)$. Для этого:

- Генерируем вектор $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{m-1})$ из независимых и равномерно распределённых на отрезке $[0, 1]$ случайных величин

```
r = np.random.uniform(0, 1, m - 1)
print(r)
```

```
[0.3770199  0.7992701  0.64399013 0.64306595]
```

- Строим вариационный ряд $\overrightarrow{r_{()}} = (r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_{m-1}})$, т.е. упорядочиваем по возрастанию.

```
var_r = sorted(r)
for i in var_r:
  print(i)
```

```
0.3770199012947605
0.6430659498269742
0.6439901308408129
0.7992701019159666
```

- Находим длины отрезков, на которые вектор $\overrightarrow{r_{()}}$ разбивает отрезок $[0, 1]$ — получаем вектор начальных вероятностей $\vec{p} = (r_{i_1}, r_{i_2} - r_{i_1}, \ldots, 1 - r_{i_{m-1}}) = p(0)^T$

```
lengths = []
lengths.append(var_r[0])
for i in range(1, m - 1):
    length = var_r[i] - var_r[i - 1]
    lengths.append(length)
lengths.append(1 - var_r[m - 2])
print("Длины отрезков:")
for i in lengths:
  print(i)
print("Сумма этих длин:\n", sum(lengths))
```

```
Длины отрезков:
0.3770199012947605
0.2660460485322137
0.0009241810138387319
0.15527997107515368
0.2007298980840334
```

```
Сумма этих длин:
 1.0
```

5

Вычисляем безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на k -ом шаге для полученного $p(0)$:

```
k_i = rd.randint(0, 25)
P_k = np.linalg.matrix_power(P, k_i)
p_0 = lengths
total = np.dot(p_0, P_k)
print(total)
print(round(sum(total), 5))
```

```
[0.53913211 0.17952386 0.1196105  0.08977836 0.07195517]
1.0
```

6

Моделируем n траекторий полученной цепи за k шагов. Для этого:

- Генерируем равномерно распределённую на $[0, 1]$ случайную величину r_0 и по вектору $p(0)$ разыгрываем начальное состояние следующим образом: если $r_0 \leq r_{i_1}$, то полагаем $\xi_0 = S_1$, если $r_{i_1} < r_0 \leq r_{i_2}$, то полагаем $\xi_0 = S_2$ и т.д. Пусть $\xi_0 = S_{j_0}$.
- Генерируем ещё одно значение r_1 и по строке с номером j_0 матрицы P аналогично предыдущему пункту разыгрываем значение $\xi_1 = S_{j_1}$.
- Повторяем алгоритм заданное число k раз. Получаем выборочную траекторию цепи: $S_{j_0}, S_{j_1}, \ldots, S_{j_k}$.
- Повторяем процедуру $1) - 3)$ заданное число n раз.

```
def stp_0(r0):
  if (r0 <= var_r[0]): return 1
  if (var_r[0] < r0 <= var_r[1]): return 2
  if (var_r[1] < r0 <= var_r[2]): return 3
  if (var_r[2] < r0 <= var_r[3]): return 4
  if (r0 > var_r[3]): return 5

def stp_1(r1, num):
  num -= 1
  if num == 0:
    if (r1 <= 0.1): return 2
    else: return 1
  if num == 1:
    if (r1 <= 0.1): return 1
    if (0.1 < r1 <= 0.3): return 3
    else: return 2
  if num == 2:
    if (r1 <= 0.3): return 4
    else: return 3
  if num == 3:
    if (r1 <= 0.4): return 5
    else: return 4
  if num == 4:
    if (r1 <= 0.5): return 1
    else: return 5

tracks = []
for i in range(n):
```

```
for i in range(n):
  track = []
  r_0 = rd.random()
  first = stp_0(r_0)
  track.append(first)
  nu = first
  for j in range(k):
    r_ = rd.random()
    tmp = stp_1(r_, nu)
    track.append(tmp)
    nu = tmp
  tracks.append(track)
```

Напечатаем несколько траекторий:

```
print("1-я траектория: ", tracks[0][0:13])
print("                ", tracks[0][13::])
print("50-я траектория: ", tracks[n // 2][0:13])
print("                 ", tracks[n // 2][13::])
print("100-я траектория: ", tracks[n - 1][0:13])
print("                  ", tracks[n - 1][13::])
print("Случайная траектория ", tracks[rd.randint(0, 100)][0:13])
print("                     ", tracks[rd.randint(0, 100)][13::])
```

```
1-я траектория:  [2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5]
                 [5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
50-я траектория:  [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
                  [1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 1]
100-я траектория:  [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3]
                   [3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 3]
Случайная траектория  [2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5]
                      [4, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

7

По полученным реализациям траекторий найдём вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на k-ом шаге. Для этого подсчитываем число n_j смоделированных траекторий, находящихся в состоянии S_j на k-ом шаге и делим на общее число траекторий n. Получаем вектор $\hat{p}(k)$ и сравниваем его с $p(k)$.

```
sost = [0] * m
for i in range(n):
  if tracks[i][k_i] == 1:
    sost[0] += 1
  elif tracks[i][k_i] == 2:
    sost[1] += 1
  elif tracks[i][k_i] == 3:
    sost[2] += 1
  elif tracks[i][k_i] == 4:
    sost[3] += 1
  elif tracks[i][k_i] == 5:
    sost[4] += 1
```

```
print("Число траекторий,\nнаходящихся в каждом состоянии\nна случайном k-ом шаге:\n", sost)
```

```
Число траекторий,
находящихся в каждом состоянии
на случайном k-ом шаге:
 [65, 15, 6, 8, 6]
```

```
p_k_ = [x / n for x in sost]


print("Вектор эмпирических безусловных вероятностей\nсостояний цепи на случайном k-ом шаге:\n", p_k_
print("Проверка, сумма вероятностей равна: ", round(sum(p_k_), 5))
```

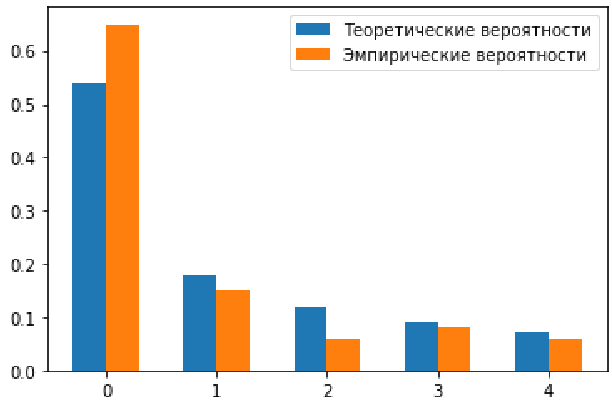
```
Вектор эмпирических безусловных вероятностей
состояний цепи на случайном k-ом шаге:
 [0.65, 0.15, 0.06, 0.08, 0.06]
Проверка, сумма вероятностей равна:  1.0
```

8

Теперь сравним $\hat{p}(k)$ с $p(k)$:

```
fig = plt.figure(figsize=(6, 4))
ax = fig.add_subplot()

x = np.arange(5)
y1 = total
y2 = p_k_
w = 0.3
ax.bar(x - w/2, y1, width=w, label = "Теоретические вероятности")
ax.bar(x + w/2, y2, width=w, label = "Эмпирические вероятности")
ax.legend()
plt.show()
```



9

Вычислим финальные вероятности для рассматриваемой Марковской цепи и сравним их с вероятностями состояний на k-ом шаге:

- Транспонируем матрицу переходных состояний:

$$P^T = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Составляем СЛАУ, добавляя балансное уравнение: $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$

Получаем:

$$\begin{cases} 0.9\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.5\pi_5 = \pi_1, \\ 0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 = \pi_2, \\ 0.2\pi_2 + 0.7\pi_3 = \pi_3, \\ 0.3\pi_3 + 0.6\pi_4 = \pi_4, \\ 0.4\pi_4 + 0.5\pi_5 = \pi_5, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

```
SLAU = np.array([[-0.1, 0.1, 0, 0, 0.5],
                 [0.1, -0.3, 0, 0, 0],
                 [0, 0.2, -0.3, 0, 0],
                 [0, 0, 0.3, -0.4, 0],
                 [1, 1, 1, 1, 1]])
slau = np.array([0, 0, 0, 0, 1]).reshape((5, 1))
total_1 = solve(SLAU, slau)
total_1 = total.transpose()
print(total_1)
print(round(sum(total_1), 5))
```

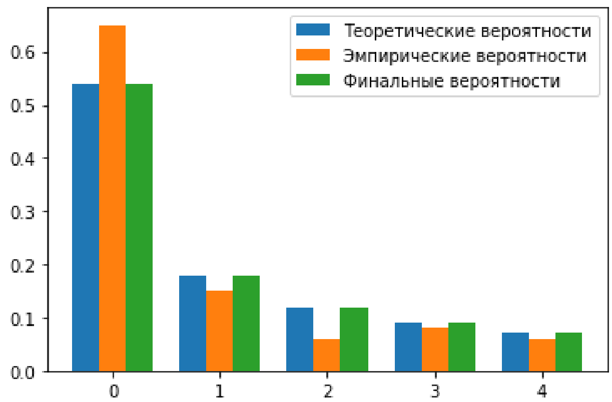
```
[0.53913211 0.17952386 0.1196105  0.08977836 0.07195517]
1.0
```

Получаем финальные вероятности:

$$\{0.53892216, 0.17964072, 0.11976048, 0.08982036, 0.07185629\}$$

```
fig = plt.figure(figsize=(6, 4))
ax = fig.add_subplot()

x = np.arange(5)
y1 = total
y2 = p_k_
y3 = total_1
w = 0.25
ax.bar(x - w, y1, width=w, label = "Теоретические вероятности")
ax.bar(x, y2, width=w, label = "Эмпирические вероятности")
ax.bar(x + w, y3, width=w, label = "Финальные вероятности")
ax.legend()
plt.show()
```



Выводы:

В ходе работы мной были выполнены все шаги обработки входных данных, таким образом получены: матрица переходных вероятностей, размеченный граф Марковской цепи, смоделированный вектор начальных вероятностей $p(0)$, безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на k-ом шаге для полученного $p(0)$, смоделированные n траекторий полученной цепи за k шагов, вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на k-ом шаге, графическое сравнение эмпирических вероятностей с теоретическими для k-ого шага, финальные вероятности, а так же их графическое сравнение с теоретическими вероятностями на k-ом шаге и с эмпирическими вероятностями на k-ом шаге. По первой диаграмме видно, что эмпирические вероятности в целом распределены как и теоретические, этот факт воспроизводится с каждой новой генерацией случайных величин. По второй диаграмме видно, что теоретические вероятности на k-ом шаге равны финальным вероятностям на k-ом шаге.