

Índice general

Agradecimientos	I
Índice general	IV
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
Resumen	XI
1. Introducción	1
1.1. Justificación	2
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
2. Fundamentos teóricos	5
2.1. Definición de Grünwald-Letnikov	5
2.1.1. Definición de derivada de Grünwald-Letnikov	6
2.1.2. Definición de integral de Grünwald-Letnikov	6
2.1.3. Método numérico para la definición de GL	6
2.2. Definición de Riemann-Liouville	7
2.2.1. Definición de integral de Riemann-Liouville	7
2.2.2. Definición de derivada de Riemann-Liouville	8
2.3. Transformada de Laplace de integrales y derivadas fraccionarias	8
2.4. Expansión de fracciones continuas (CFE)	8
2.4.1. Análisis de error de la CFE	12
2.5. Escalamiento en frecuencia	16
2.6. Teoría de filtros	17
2.6.1. Filtros de primer orden	17
2.6.2. Filtros de segundo orden	19

3. Implementación	23
3.1. ¿Qué es una FPAA?	23
3.2. Características de la tarjeta y requerimientos	23
3.2.1. Alimentación de la tarjeta	23
3.2.2. Instalación de drivers	24
3.2.3. Jumpers por defecto	24
3.2.4. Tamaño variable de cadena de FPAAs	25
3.2.5. DIP Switches	26
3.2.6. Filtros Rauch y buffers de salida	26
3.2.7. Circuito de prueba	28
3.3. AnadigmDesigner2	29
3.3.1. Comunicación con AD2	29
3.3.2. Configuración de relojes	31
3.4. NI ELVIS II+	32
3.4.1. Instalación	32
3.5. Implementación con aproximación de primer orden	33
3.5.1. Filtro bilineal configuración polo y cero	33
3.5.2. Filtro bilineal configuración pasabajas y pasaaltas	40
3.6. Implementación con aproximación de segundo	42
4. Analisis de no se que ahorita	35
A. Códigos	37
B. Diagramas de flujo	41
C. Gráficas de análisis de integrador fraccionario con CFE	43
D. Esquemático de QuadApex v2.0	53
Bibliografía	55

Índice de figuras

2.1. Diagramas de bode comparativos de integrador fraccionario $\alpha = 0.5$, funciones de transferencia de primer hasta quinto orden.	12
2.2. Diagrama de bode comparativo de función de transferencia escalada. . .	17
2.3. Singularidades de filtros de primer orden en el plano s	18
2.4. Definición de los parámetros ω_0 y Q de un par de polos conjugados. . .	20
2.5. Singularidades de filtros de segundo orden en el plano s	21
3.1. Diferentes representaciones de filtro Rauch.	27
3.2. Información de la placa desplegada por AD2.	31
3.3. Ventana de configuración de frecuencias de reloj AD2.	32
3.4. NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación. . . .	33
3.5. NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación. . . .	33
3.6. NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación. . . .	34
3.7. Diagrama de bode de ecuación (3.17) para un integrador fraccionario con $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$	36
3.8. Ventana de configuración de parámetros FilterBilinear.	37
3.9. Análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con CAM BilinearFilter.	39
3.10. Implementación de integrador de orden fraccionario utilizando la apro- ximación de primer orden.	40
3.11. Análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con suma de filtros.	42
C.1. Diagramas de magnitud de aproximaciones de integrador fraccionario general.	44
C.2. Diagramas de fase de aproximaciones de integrador fraccionario general.	45
C.3. Diagramas de error de magnitud de aproximaciones de integrador frac- cionario general.	46
C.4. Diagramas de error de fase de aproximaciones de integrador fraccionario general.	47

C.5. Diagramas de magnitud normalizada de aproximaciones de integrador fraccionario general.	48
C.6. Diagramas de fase normalizada de aproximaciones de integrador fraccionario general.	49
C.7. Diagramas de error de magnitud normalizada de aproximaciones de integrador fraccionario general.	50
C.8. Diagramas de error de fase normalizada de aproximaciones de integrador fraccionario general.	51
D.1. Diagrama esquemático de QuadApex v2.0	53

Índice de tablas

2.1.	Aproximaciones racionales de $\frac{1}{s^{0.5}}$	11
2.2.	Máximo error absoluto de magnitud en dB variando α y orden de función de transferencia.	13
2.3.	Máximo error absoluto de fase en grados variando α y orden de función de transferencia.	13
2.4.	Máximo error absoluto de magnitud normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.	14
2.5.	Máximo error absoluto de fase normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.	14
2.6.	Promedio de error absoluto de magnitud normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.	15
2.7.	Promedio error absoluto de fase normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.	15
3.1.	Resumen de jumper de la placa.	25
3.2.	DIP Switches	26
3.3.	CAMs básicos de AD2.	30
3.4.	Valores para configurar un filtro bilineal como integrador de orden fraccionario en el rango de ordenes de 0.1 a 0.95.	38
3.5.	Rango de frecuencias absolutas dependiente de F_c y el valor de n	38
3.6.	Valores para configurar implementación suma de pasabajas y paaltas de ordenes de 0.1 a 0.95.	41

Lista de códigos

A.1. Función <code>syms2tf</code>	37
A.2. Función <code>cfetf</code>	37
A.3. Función <code>A10_calculo_valores_FilterBilinear</code>	38
A.4. Función <code>A11_rango_de_frecuencias_absolutas_FilterBilinear</code>	38
A.5. Función <code>A12_grafica_analisis_de_frecuencias_FilterBilinear</code>	38
A.6. Función <code>B10_calculo_valores_suma_filtros</code>	39

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Cuando se comienza a estudiar cálculo de orden entero es necesario familiarizarse con la notación de los operadores matemáticos de la derivada y la integral, con el cálculo fraccionario ocurre lo mismo. En la actualidad la notación más utilizada para el cálculo entero es la dada por Leibniz en (1686), donde el operador diferencial de n -ésimo orden esta definido como: $\frac{d^n}{dt^n}$, D_t^n o simplemente D^n con $n \in \mathbb{N}$. Utilizando el mismo razonamiento, puede definirse su operador inverso (antiderivada) de manera que el operador inverso de la derivada de n -ésimo orden está dado por: ${}_a D_t^{-n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ representa el límite inferior del dominio de la región donde se aplica dicho operador.

Para generalizar el operador diferencial e integral para orden fraccionario se considera que este puede definirse para parámetros de orden real o incluso complejo. Esto implica que los operadores pueden definirse respectivamente como: D^α y ${}_a D_t^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es importante tener presente que no una hay una única definición para los operadores diferencial e integral fraccional, sino varias expresiones definidas por diferentes autores, entre las mas usadas se encuentran la definición de Grünwald-Letnikov (GL), la de Riemann-Liouville (RL) y la de Caputo (Ca), cada una de estas con sus ventajas y desventajas desde el punto de vista del análisis matemático, complejidad computacional e implementación [3].

2.1. Definición de Grünwald-Letnikov

Comenzamos considerando que para el caso de orden entero la n -ésima derivada para una función f con $n \in \mathbb{N}$ y $j > n$ esta dada por:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (2.1)$$

donde $\binom{n}{j}$ representa el coeficiente binomial dado por la expresión:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.2)$$

considerando valores negativos de n tenemos:

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-j+1)}{j!} = (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ esta definido como:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{2(n+1)\cdots(n+j-1)}{j!} \quad (2.4)$$

2.1.1. Definición de derivada de Grünwald-Letnikov

Generalizando la ecuación (2.1) podemos escribir la definición de derivada de orden fraccionario de orden α , ($\alpha \in \mathbb{R}$) como:

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.5)$$

para calcular el coeficiente binomial podemos utilizar la relación entre la función Gamma de Euler y el factorial definido como:

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (2.6)$$

donde la función Gamma de Euler con $r > 0$ esta definida como:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-t} dt \quad (2.7)$$

2.1.2. Definición de integral de Grünwald-Letnikov

Utilizando la ecuación (2.5) se puede definir un operador de tipo integral para la función f sobre el dominio temporal (a, t) considerando $n = \frac{t-a}{h}$ donde $a \in \mathbb{R}$ como:

$${}_a D_f^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \quad (2.8)$$

2.1.3. Método numérico para la definición de GL

Utilizando como base la ecuación (2.5) esta se puede discretizar para los puntos kh , ($k = 1, 2, \dots$) de la siguiente manera:

$$({\frac{L_m}{h}})D_{t_k}^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_{k-j}) \quad (2.9)$$

donde L_m es el tamaño de memoria (memory length), $t_k = kh$, h es el paso de tiempo del cálculo y $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ son coeficientes binomiales $C_j^{(\alpha)}$ ($j = 0, 1, \dots$). Para su calculo utilizamos la siguiente expresión:

$$C_0^{(\alpha)} = 1, \quad C_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) C_{j-1}^{(\alpha)} \quad (2.10)$$

Entonces, la solución numérica general de la ecuación diferencial fraccional:

$${}_a D_t^\alpha y(t) = f(y(t), t) \quad (2.11)$$

puede expresarse como:

$$y(t_k) = f(y(t_{k-1}), t_{k-1})h^\alpha - \sum_{j=1}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) \quad (2.12)$$

Para el termino de la memoria expresada por la sumatoria, el principio de memoria corta puede utilizarse. Entonces el indice superior de la sumatoria en la ecuación (2.12) se cambiará por ν con las siguientes consideraciones: se usa $\nu = k$ para $k < (\frac{L_m}{h})$ y $\nu = (\frac{L_m}{h})$ para $k \geq (\frac{L_m}{h})$, o sin usar el principio de memoria corta se utiliza $\nu = k$ para toda k .

2.2. Definición de Riemann-Liouville

Para esta definición consideramos la fórmula de Cauchy para la integral repetida que esta dada por:

$$f^{(-n)}(t) = \int_a^t \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad (2.13)$$

2.2.1. Definición de integral de Riemann-Liouville

Utilizando las propiedades de la función Gamma de Euler con el factorial y la ecuación (2.13) se puede escribir la definición de integral fraccionaria como:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2.14)$$

para $\alpha < 0$ y $a \in \mathbb{R}$. No obstante para el caso de $0 < \alpha < 1$ y $f(t)$ siendo una función casual, esto es, $f(t) = 0$ para $t < 0$, la integral fraccionaria esta definida como:

$${}_0D_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad t > 0 \quad (2.15)$$

2.2.2. Definición de derivada de Riemann-Liouville

De la ecuación (2.14) se puede escribir la definición de derivada fraccionaria de orden α de la siguiente manera:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.16)$$

donde $(n-1 < \alpha < n)$. Pero igual que con la integral si consideramos $0 < \alpha < 1$ y $f(t)$ una función casual, la derivada de orden fraccionaria se puede reescribir como:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.17)$$

2.3. Transformada de Laplace de integrales y derivadas fraccionarias

La transformada de Laplace de la integral fraccionaria ya sea para Riemann-Liouville o para Grünwald-Letnikov esta definida como:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^{-p}f(t)\} = s^{-p}F(s) \quad (2.18)$$

y dadas condiciones iniciales cero la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de orden r para Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo se reduce a:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^r f(t)\} = s^r F(s) \quad (2.19)$$

2.4. Expansión de fracciones continuas (CFE)

A una expresión de la forma:

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \ddots}}} \quad (2.20)$$

se le conoce como una fracción continua. En general $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3$ pueden ser cualquier número real o complejo, y el número de términos pueden ser finito o infinito.

Una manera más conveniente de escribir la ecuación (2.20) es:

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots}}} \quad (2.21)$$

y es la que se encontrará normalmente en libros y artículos. Ambas notaciones son muy similares y se puede pasar de una a otra sin mayor complicación.

De la ecuación (2.21) se pueden formar las siguientes fracciones:

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, \quad c_2 = a_1 + \frac{b_1}{a_2}, \quad c_3 = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3}}, \quad \dots \quad (2.22)$$

las cuales se obtienen, en sucesión, de cortar el proceso de expansión después del primer, segundo, tercer, \dots término. Estas fracciones son llamadas primer, segundo, tercer, \dots convergente, respectivamente, de la fracción continua. El n -ésimo convergente es:

$$c_n = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_n}}} \quad (2.23)$$

En 1776 Lagrange obtuvo la expansión de fracciones continuas (CFE) para la ecuación $(1+x)^\alpha$ como se muestra a continuación [25]:

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{1(1+\alpha)}{1 \cdot 2} x}} \quad (2.24)$$

$$1 + \frac{\frac{1(1-\alpha)}{2 \cdot 3} x}{1 + \frac{2(2+\alpha)}{3 \cdot 4} x}$$

$$1 + \frac{\frac{2(2-k)}{4 \cdot 5} x}{1 + \frac{3(3+\alpha)}{5 \cdot 6} x}$$

$$1 + \dots$$

y escrita de una manera más compacta:

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{1(1+\alpha)}{1 \cdot 2} x + \frac{1(1-\alpha)}{2 \cdot 3} x + \frac{2(2+\alpha)}{3 \cdot 4} x + \frac{2(2-\alpha)}{4 \cdot 5} x + \dots}} \quad (2.25)$$

la ecuación (2.25) puede reescribirse convenientemente multiplicando un m en el numerador y en el denominador como se muestra a continuación:

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-} \frac{\alpha x}{1} + \frac{\textcolor{red}{2} \cdot \frac{1(1+\alpha)}{1 \cdot 2} x}{\textcolor{red}{2} \cdot 1} + \frac{\textcolor{blue}{3} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \frac{1(1-\alpha)}{2 \cdot 3} x}{\textcolor{blue}{3} \cdot 1} + \frac{\textcolor{blue}{3} \cdot \frac{2(2+\alpha)}{3 \cdot 4} x}{1} + \dots \quad (2.26)$$

hay que notar que cada denominador esta compuesto por 2 términos, esto se puede ver claramente en la ecuación (2.24), y que contando el término del numerador, m se tiene que agregar en 3 lugares distintos. Si se eligen $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, \dots de manera que se simplifique la ecuación obtenemos:

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-} \frac{\alpha x}{1} + \frac{(1+\alpha)x}{2} + \frac{(1-\alpha)x}{3} + \frac{(2+\alpha)x}{2} + \frac{(2-\alpha)x}{5} + \dots \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) se puede encontrar en distintos artículos [17, 16], no obstante para programar un algoritmo que obtenga la aproximación de $(1+x)^\alpha$ hasta el n -ésimo convergente resulta poco intuitiva. Para este fin la ecuación (2.25) resulta más sencilla y contiene un patrón que puede explotarse.

El n -ésimo término de la expansión de fracciones continuas para la ecuación (2.25) se puede calcular utilizando la siguiente ecuación:

$$\frac{\psi(n) [\psi(n) + (-1)^n \alpha]}{(n-1)n} \quad (2.28)$$

donde la función $\psi(x)$ para $x \geq 2$, $x \in \mathbb{Z}^+$ esta definida como¹:

$$\psi(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \quad (2.29)$$

La ecuación (2.28) se puede utilizar de manera recursiva desde el n -ésimo término hasta el segundo sin olvidar que a cada término se le debe sumar un uno. También vale la pena resaltar que el primer término de la expansión es $\frac{1}{1-} \frac{\alpha x}{1}$.

Sustituyendo $x = s - 1$ y limitando el número de términos de la ecuación (2.25) obtenemos la aproximación racional para s^α y para obtener la aproximación racional de $\frac{1}{s^\alpha}$ la expresión tiene que ser simplemente invertida. En el apéndice A.2 se encuentra un programa escrito en MATLAB que calcula la aproximación para un integrador fraccionario de orden α eligiendo el número de términos n utilizando el método de CFE descrito previamente.

En general la aproximación utilizando la CFE para un integrador fraccionario $\frac{1}{s^\alpha}$ utilizando los primeros dos términos resulta en una función de transferencia de primer orden como se muestra a continuación:

¹ $\lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior.

$${}_{(c_2)} \frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(1-\alpha)s + (1+\alpha)}{(1+\alpha)s + (1-\alpha)} \quad (2.30)$$

Al utilizar un número impar de términos el grado del numerador de la función de transferencia siempre será mayor en uno al del denominador, además de que el coeficiente de mayor grado del numerador siempre tendrá signo negativo, esto resulta problemático en la implementación y debido a estas observaciones es recomendable solo trabajar con un número par de términos.

La aproximación de segundo orden tiene la forma:

$${}_{(c_4)} \frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)} \quad (2.31)$$

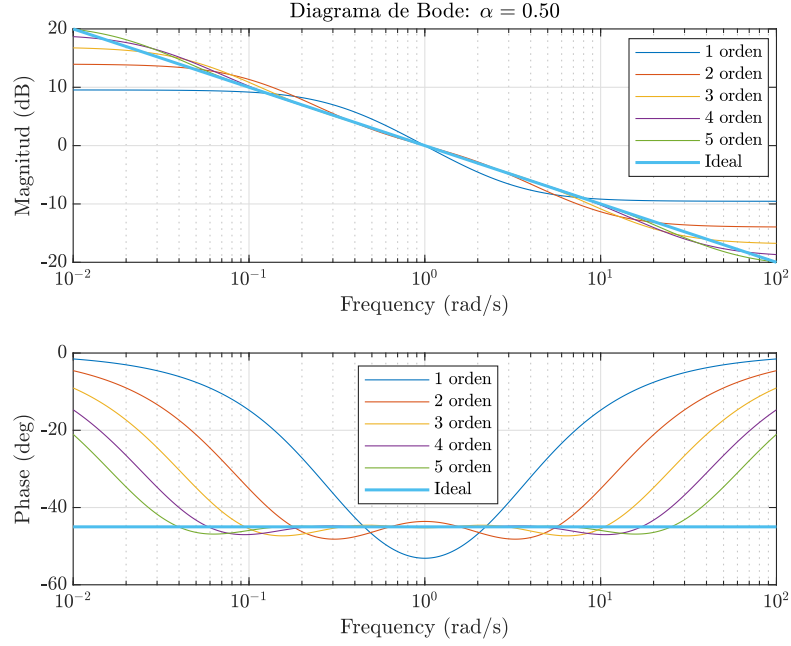
la ventaja de utilizar la aproximación de CFE es que convertimos el problema de orden fraccionario a uno de orden entero de manera sistemática. Tomemos como ejemplo un integrador de orden fraccionario con $\alpha = 0.5$, sus aproximaciones son las mostradas en la Tabla 2.1 y sus correspondientes diagramas de bode se muestran en la Figura 2.1.

Tabla 2.1: Aproximaciones racionales de $\frac{1}{s^{0.5}}$

Orden	No. de términos	Aproximación racional
1	2	$\frac{s+3}{3s+1}$
2	4	$\frac{s^2+10s+5}{5s^2+10s+1}$
3	6	$\frac{s^3+21s^2+35s+7}{7s^3+35s^2+21s+1}$
4	8	$\frac{s^4+36s^3+126s^2+84s+9}{9s^4+84s^3+126s^2+36s+1}$
5	10	$\frac{s^5+55s^4+330s^3+462s^2+165s+11}{11s^5+165s^4+462s^3+330s^2+55s+1}$

Analizando la Figura 2.1 se puede resaltar que en general la aproximación aumenta su ancho de banda conforme el orden de la función de transferencia aumenta y que de mismo modo el error con respecto al integrador ideal disminuye, lo cual era de esperarse, el ancho de banda útil es de 10^{-1} rad/s hasta 10^1 rad/s, es decir aproximadamente dos décadas, no obstante un análisis más profundo es necesario para notar otras peculiaridades que ocurren en este tipo de aproximaciones.

Figura 2.1: Diagramas de bode comparativos de integrador fraccionario $\alpha = 0.5$, funciones de transferencia de primer hasta quinto orden.



2.4.1. Análisis de error de la CFE

Si variamos el orden α del integrador y el orden de la función de transferencia aproximada podemos notar que entre más pequeño sea α más se alejada la aproximación con respecto a un integrador fraccionario ideal, esto considerando el ancho de banda útil (ver Figuras C.1, C.2). Para cuantificar lo anterior existen dos tipos de errores de interés, el error sin normalizar y el error normalizado.

El error en dB de la magnitud sin normalizar se puede calcular utilizando la siguiente ecuación:

$$\text{error}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{H(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \quad (2.32)$$

donde $H(j\omega)$ es el integrador ideal $\frac{1}{s^\alpha}$ y $G(j\omega)$ es la función de transferencia aproximada del integrador utilizando CFE $(c_n) \frac{1}{s^\alpha}$.

El error en grados de la fase sin normalizar se obtiene utilizando la siguiente ecuación:

$$\text{error}_{\text{deg}} = \angle H(j\omega) - \angle G(j\omega) \quad (2.33)$$

Debido a que un integrador fraccionario ideal es en esencia un polo en el origen elevado a una potencia, este tiene un comportamiento de -20α dB/década en magnitud y de -90α grados en fase [26]. Para normalizar el error este hecho resulta importante ya que la magnitud del integrador ideal en 0.1 rad/seg para cualquier α siempre será 20α dB y para 10 rad/seg de -20α dB, de manera similar la fase permanece constante

en -90α grados para cualquier α .

Entonces la ecuación para el error normalizado de magnitud es:

$$\text{error}_{\text{norm de mag}} = \frac{20 \log_{10} \left| \frac{H(j\omega)}{G(j\omega)} \right|}{20\alpha} = \frac{\log_{10} \left| \frac{H(j\omega)}{G(j\omega)} \right|}{\alpha} \quad (2.34)$$

y la ecuación para el error normalizado de fase es:

$$\text{error}_{\text{norm de fase}} = \frac{\angle H(j\omega) - \angle G(j\omega)}{90\alpha} \quad (2.35)$$

Para poder comparar los errores de manera precisa se debe calcular el valor absoluto de los errores para tener una medida de cuanto se aleja del integrador fraccionario ideal. En las Tablas 2.2 y 2.3 se muestran los errores absolutos máximos sin normalizar para la magnitud y la fase dependiente de α y el orden de la función de transferencia, estos datos se puede corroborar dirigiéndose a las gráficas de las Figuras C.3 y C.4.

Tabla 2.2: Máximo error absoluto de magnitud en dB variando α y orden de función de transferencia.

α/Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	0.4587	0.3333	0.2427	0.0620	0.0220
0.2	0.8931	0.6524	0.4665	0.1172	0.0423
0.3	1.2792	0.9426	0.6527	0.1596	0.0591
0.4	1.5942	1.1889	0.7838	0.1848	0.0710
0.5	1.8155	1.3748	0.8449	0.1904	0.0767
0.6	1.9193	1.4807	0.8259	0.1767	0.0755
0.7	1.8769	1.4676	0.7232	0.1458	0.0669
0.8	1.6464	1.2410	0.5415	0.1021	0.0510
0.9	1.1460	0.7507	0.2939	0.0513	0.0284

Tabla 2.3: Máximo error absoluto de fase en grados variando α y orden de función de transferencia.

α/Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	6.7092	2.8727	0.6548	0.5632	0.2796
0.2	13.2833	5.5250	1.2598	1.0838	0.5338
0.3	19.5614	7.7297	1.7677	1.5208	0.7390
0.4	25.3200	9.2514	2.1362	1.8358	0.8760
0.5	30.2099	9.8632	2.3294	1.9960	0.9311
0.6	33.6307	9.3936	2.3198	1.9760	0.8975
0.7	34.4722	7.8155	2.0880	1.7611	0.7756
0.8	30.6494	5.3543	1.6237	1.3492	0.5739
0.9	19.0601	2.5243	0.9255	0.7528	0.3080

A simple vista se podría creer que el error máximo aumenta conforme aumenta α , no obstante esto es falso debido a que no se esta teniendo en cuenta la escala de la

gráfica y por lo tanto las Tablas 2.2 y 2.3 únicamente nos dan información del total de error y no del porcentaje. Para tomar en cuenta la escala es necesario normalizar el error y de mismo modo calcular el valor absoluto de este. Las gráficas de la respuesta de magnitud y fase normalizadas se pueden encontrar en las Figuras C.5 y C.6, y las gráficas de los errores normalizados en las Figuras C.7 y C.8.

En las Tablas 2.4 y 2.5 se muestran los porcentajes del máximo error absoluto normalizados para la magnitud y la fase. Haciendo un análisis de estas tablas se puede llegar a la conclusión de que en efecto **el porcentaje de error es mayor cuanto más pequeño sea α** y esto es de gran interés para poder generar reglas de diseño en la implementación de circuitos integradores fraccionarios.

Tabla 2.4: Máximo error absoluto de magnitud normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.

α /Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	22.9364	16.6661	12.1365	3.1006	1.1022
0.2	22.3267	16.3092	11.6624	2.9299	1.0576
0.3	21.3204	15.7107	10.8780	2.6595	0.9850
0.4	19.9281	14.8618	9.7974	2.3094	0.8869
0.5	18.1555	13.7481	8.4493	1.9044	0.7669
0.6	15.9941	12.3390	6.8823	1.4724	0.6290
0.7	13.4063	10.4826	5.1656	1.0415	0.4779
0.8	10.2900	7.7565	3.3847	0.6380	0.3190
0.9	6.3665	4.1706	1.6328	0.2848	0.1578

Tabla 2.5: Máximo error absoluto de fase normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.

α /Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	74.5462	31.9184	7.2756	6.2574	3.1070
0.2	73.7962	30.6945	6.9988	6.0212	2.9653
0.3	72.4496	28.6284	6.5472	5.6324	2.7370
0.4	70.3334	25.6983	5.9338	5.0995	2.4334
0.5	67.1331	21.9182	5.1765	4.4355	2.0692
0.6	62.2790	17.3955	4.2958	3.6593	1.6620
0.7	54.7178	12.4056	3.3143	2.7954	1.2312
0.8	42.5686	7.4365	2.2552	1.8739	0.7971
0.9	23.5310	3.1165	1.1426	0.9293	0.3802

Dado que el máximo error ocurre en un rango de frecuencias muy corto es recomendable conocer de igual manera el error promedio, en las Tablas 2.6 y 2.7 se muestra el error promedio normalizado, este tipo de error presenta el mismo efecto de porcentaje de error con respecto a α que el máximo error normalizado. De los datos de las tablas podemos resaltar que en cuanto a magnitud, utilizar una aproximación de segundo orden en lugar de una de primer orden disminuye el error un 5.86 % para $\alpha = 0.1$ y

un 2.96 % para $\alpha = 0.9$, en fase el cambio es aún mas notorio, el error disminuye un 26.71 % para $\alpha = 0.1$ y un 5.61 % para $\alpha = 0.9$. No obstante si nos detenemos a pensar detenidamente, con un $\alpha = 0.9$ y una aproximación de primer orden el error promedio es de 4.22 % en magnitud y de 6.55 % en fase, el cual, para algunas aplicaciones puede resultar aceptable y cambiar por una aproximación de segundo orden no representaría una gran mejora, lo contrario ocurre con un $\alpha = 0.1$, al cambiar a una aproximación de segundo orden el error se reduce significativamente, aproximadamente a la mitad en magnitud y a un cuarto en fase, en este caso en definitiva vale la pena cambiar.

Tabla 2.6: Promedio de error absoluto de magnitud normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.

α /Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	13.4397	7.5755	2.4058	0.5407	0.2754
0.2	13.1089	7.3398	2.2960	0.5155	0.2639
0.3	12.5614	6.9432	2.1189	0.4751	0.2454
0.4	11.8034	6.3812	1.8827	0.4217	0.2203
0.5	10.8454	5.6502	1.5991	0.3580	0.1897
0.6	9.7075	4.7507	1.2822	0.2875	0.1548
0.7	8.4275	3.6945	0.9478	0.2133	0.1168
0.8	6.8606	2.5119	0.6123	0.1387	0.0772
0.9	4.2249	1.2563	0.2916	0.0667	0.0377

Tabla 2.7: Promedio error absoluto de fase normalizado en % variando α y orden de función de transferencia.

α /Orden	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}	5 ^{to}
0.1	34.9335	8.2174	2.6873	1.3313	0.3667
0.2	34.0430	7.8450	2.5975	1.2737	0.3498
0.3	32.5319	7.2389	2.4512	1.1805	0.3226
0.4	30.3547	6.4219	2.2473	1.0556	0.2864
0.5	27.4424	5.4308	1.9840	0.9042	0.2431
0.6	23.6947	4.3175	1.6640	0.7329	0.1948
0.7	18.9857	3.1492	1.2933	0.5488	0.1439
0.8	13.2152	2.0009	0.8821	0.3598	0.0929
0.9	6.5510	0.9388	0.4450	0.1742	0.0441

De ser necesario para convertir el error de magnitud normalizado de % a dB se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{error}_{\text{dB}} = 20\alpha \cdot \left(\frac{\%_{\text{error mag}}}{100} \right) \quad (2.36)$$

y para el error de fase normalizado de % a grados:

$$\text{error}_{\text{deg}} = 90\alpha \cdot \left(\frac{\%_{\text{error fase}}}{100} \right) \quad (2.37)$$

2.5. Escalamiento en frecuencia

Debido a que el ancho de banda del integrador fraccionario utilizando la aproximación de CFE es de aproximadamente dos décadas y se encuentra en un rango de frecuencia muy bajo, de 0.1 rad/s hasta 10 rad/s, el cual es un rango poco útil en aplicaciones reales, es necesario escalar la respuesta en frecuencia.

El escalamiento en frecuencia es el proceso de correr la respuesta en frecuencia de una red por arriba o por abajo del eje de frecuencia mientras se mantiene igual la impedancia [26].

El escalamiento de frecuencia se consigue multiplicando ésta por un factor de escalamiento k_f mientras se mantiene la impedancia igual. Si consideramos p la variable de frecuencia compleja actual y s la escalada, el proceso de escalamiento se define por la siguiente relación [27]:

$$s = k_f p \quad (2.38)$$

la ecuación (2.38) también se puede ver de la siguiente manera:

$$k_f = \frac{s}{p} = \frac{j\omega'}{j\omega} = \frac{\omega'}{\omega} \quad (2.39)$$

donde ω' es la frecuencia escalada y ω es la frecuencia actual de referencia.

Para entender de mejor manera el escalamiento en frecuencia estudiemos el siguiente ejemplo, consideremos la siguiente función de transferencia:

$$N(p) = \frac{20p}{p^2 + 12p + 20} \quad (2.40)$$

la cual corta el eje de la frecuencia en 0.1 rad/s y 200 rad/s. Si deseamos que la respuesta en magnitud permanezca idéntica pero desplazada a la derecha en un factor de cien, es decir, que las frecuencias escaladas corten el eje de frecuencia en 10 rad/s y 20k rad/s, entonces $k_f = \frac{10}{0.1} = 100$, sustituyendo la ecuación (2.38) en (2.40):

$$N(s) = \frac{200sk_f^{-1}}{s^2k_f^{-2} + 12sk_f^{-1} + 20} = \frac{200k_f s}{s^2 + 12k_f s + 20k_f^2} \quad (2.41)$$

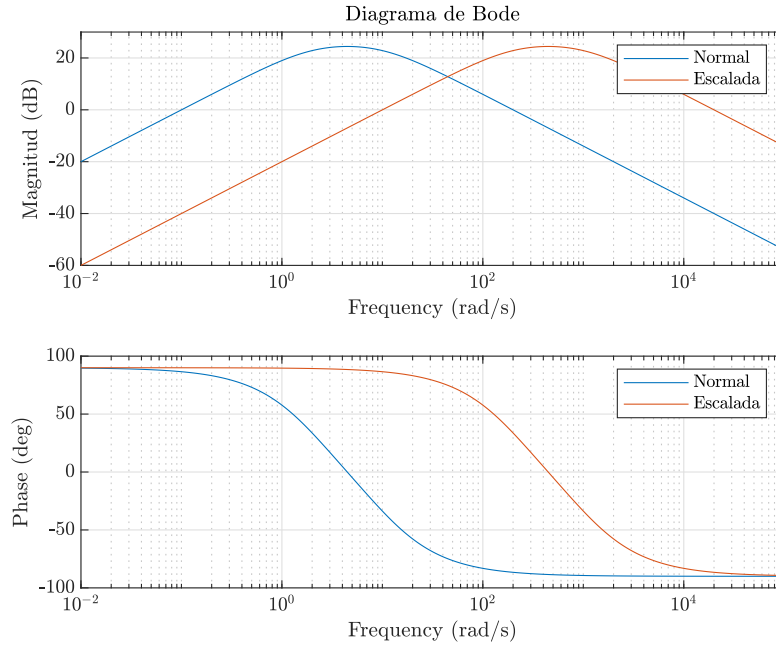
entonces la función de transferencia escalada resulta:

$$N(s) = \frac{200(100)s}{s^2 + 12(100)s + 20(100)^2} \quad (2.42)$$

En la Figura 2.2 se muestra el resultado de aplicar el escalamiento en frecuencia a la ecuación 2.40. Si se desea aplicar el escalamiento en Hz, simplemente se tiene que tener en consideración el factor de conversión, como ejemplo, si se desea que las frecuencias que corten el eje de la frecuencia sean 0.1 Hz y 200 Hz entonces:

$$k_f = \frac{0.1 \text{ Hz} \cdot \frac{2\pi \text{ rad/s}}{1 \text{ Hz}}}{0.1 \text{ rad/s}} = 2\pi \quad (2.43)$$

Figura 2.2: Diagrama de bode comparativo de función de transferencia escalada.



Esta metodología se puede aplicar a cualquier función de transferencia y tiene la ventaja de solo ser necesario modificar el factor de escalamiento k_f una vez obtenida la expresión escalada.

2.6. Teoría de filtros

Las funciones de transferencia obtenidas de la CFE pueden ser llevadas al mundo real utilizando filtros, ya sean activos, pasivos, de primer orden (bilineales), segundo orden (bicuadráticos) o de ordenes superiores usando una combinación de ambos. Por esta razón es de interés estudiar brevemente la teoría de filtros, tener presente las estructuras matemáticas más comunes en el diseño de filtros y sus principales características.

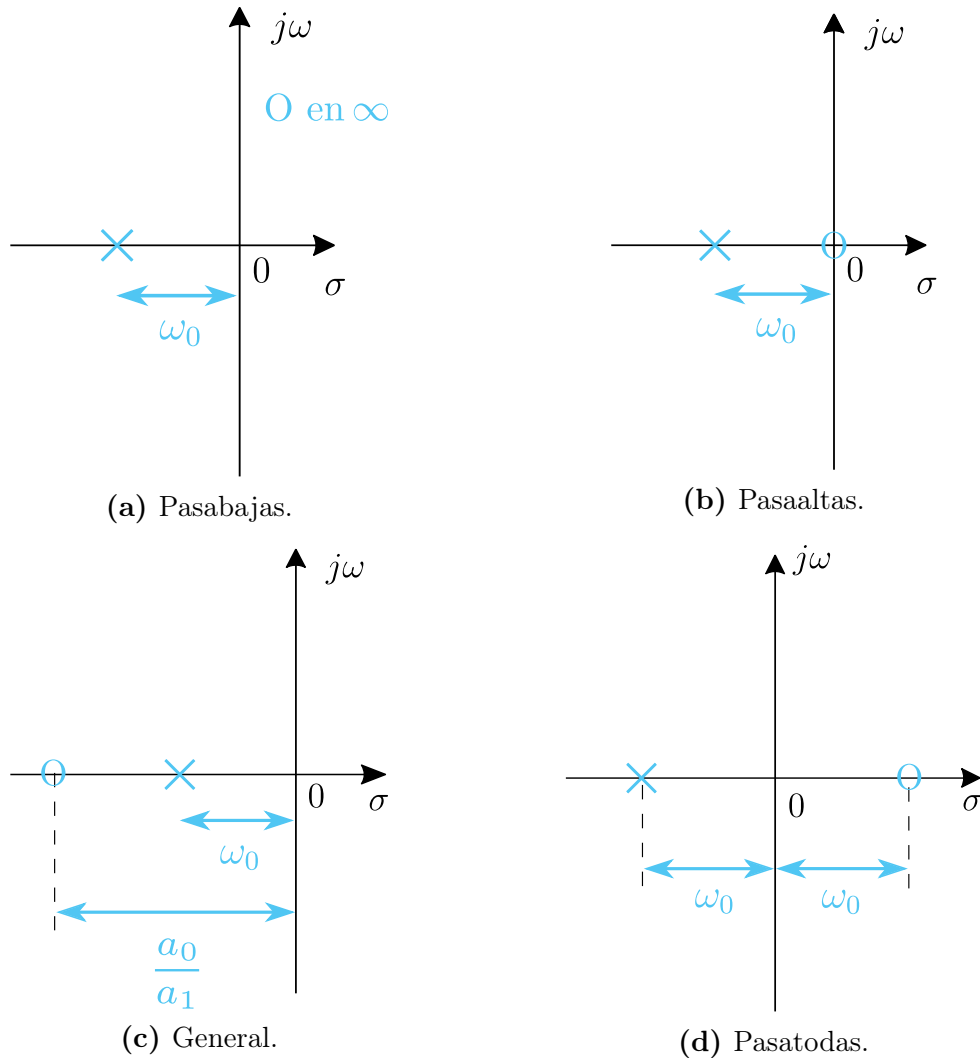
2.6.1. Filtros de primer orden

La función de transferencia general de primer orden está dada por la siguiente ecuación:

$$T(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0} \quad (2.44)$$

esta función de transferencia bilineal se caracteriza por tener un polo en $s = -\omega_0$, un cero en $s = -\frac{a_0}{a_1}$ y una ganancia de alta frecuencia que tiende a a_1 . Los coeficientes del numerador, a_0 y a_1 , determinan el tipo de filtro, ya sea pasabajas (LP), pasaaltas (HP), pasatodas (AP) o general. La realización activa provee considerablemente más versatilidad que su contra parte pasiva, en muchos casos la ganancia puede ser ajustada a un valor deseado, y algunos parámetros de las funciones de transferencia también sin afectar otros. La impedancia de salida de los circuitos activos es muy baja, haciendo que la colocación en cascada sea muy fácil. Sin embargo, los amplificadores operacionales limitan la operación a altas frecuencias de los circuitos activos [28]. En la Figura 2.3 se muestra la ubicación del polo y el cero de los diferentes tipos de filtros que se pueden formar para la configuración bilineal.

Figura 2.3: Singularidades de filtros de primer orden en el plano s .



Diferentes tipos de filtros nacen de ubicar el cero de la función de transferencia bilineal general (2.44) en distintos lugares, un cero en el infinito genera un filtro pasabajas de primer orden, y un cero en el origen un filtro pasaaltas. Un cero colocado

simétricamente relativo al eje $j\omega$ genera un pasatodas. Las ecuaciones básicas de los filtros de primer orden son las siguientes:

- Pasabajas (LP)

$$T(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0} \quad (2.45)$$

- Pasaaltas (HP)

$$T(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0} \quad (2.46)$$

- Pasatodas (AP)

$$T(s) = -a_1 \frac{s - \omega_0}{s + \omega_0} \quad (2.47)$$

2.6.2. Filtros de segundo orden

La función de transferencia general de un filtro de segundo orden o biquadrática se expresa en lo general en la forma estándar:

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2} \quad (2.48)$$

donde ω_0 y Q determinan los polos de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4Q^2}\right)} \quad (2.49)$$

al parámetro ω_0 se le conoce como frecuencia de polo, y representa la distancia radial entre el origen y el polo en el plano complejo s . Q es el factor de calidad de polo y determina la distancia de los polos desde el eje $j\omega$, una representación gráfica de estos parámetros se muestra en la Figura 2.4, entre más grande sea el valor de Q , más cerca estarán los polos el eje $j\omega$, y la respuesta del filtro se vuelve más selectiva. Un valor infinito para Q localiza a los polos sobre el eje $j\omega$ y puede producir oscilaciones sostenidas en la realización del circuito. Un valor negativo de Q implica que los polos se encuentran en la mitad derecha del plano s , lo cual ciertamente produce oscilaciones. Los ceros del filtro de segundo orden están determinados por los coeficientes del numerador, a_0 , a_1 y a_2 , en otras palabras los coeficientes del numerador determinan el tipo de filtro de segundo orden [28].

Para un filtro pasabajas (LP) de segundo orden, los dos ceros están en $s = \infty$ y su respuesta de magnitud muestra un pico para $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Para un pasaaltas (HP) los ceros están en $s = 0$ y su respuesta de magnitud también muestra un pico para $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Para un pasabanda (BP) un cero esta en $s = \infty$ y el otro en $s = 0$, la respuesta de magnitud tiene un pico en $\omega = \omega_0$, por lo tanto, la frecuencia central del filtro pasabandas es igual

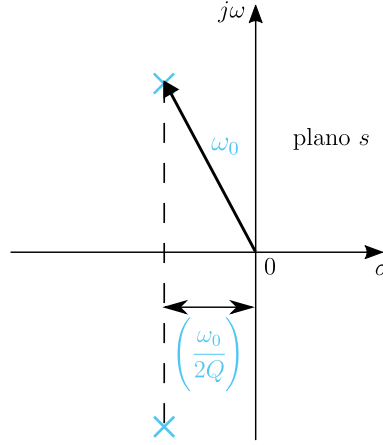
a la frecuencia de polo ω_0 . La selectividad de del filtro pasabanda de segundo orden es usualmente medida por su ancho de banda de 3 dB. Este es la diferencia entre las dos frecuencias ω_1 y ω_2 en las cuales la respuesta de magnitud es 3 dB por debajo de su valor máximo el cual ocurre en ω_0 . La ecuación que describe a las frecuencias ω_1, ω_2 es la siguiente:

$$\omega_1, \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4Q^2}\right)} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \quad (2.50)$$

Entonces el ancho de banda BW se define como:

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (2.51)$$

Figura 2.4: Definición de los parámetros ω_0 y Q de un par de polos conjugados.



Las ecuaciones básicas de filtros de segundo orden son las siguientes:

- Pasabajas (LP)

$$T(s) = \frac{a_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (2.52)$$

- Pasaaltas (HP)

$$T(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (2.53)$$

- Pasabandas (BP)

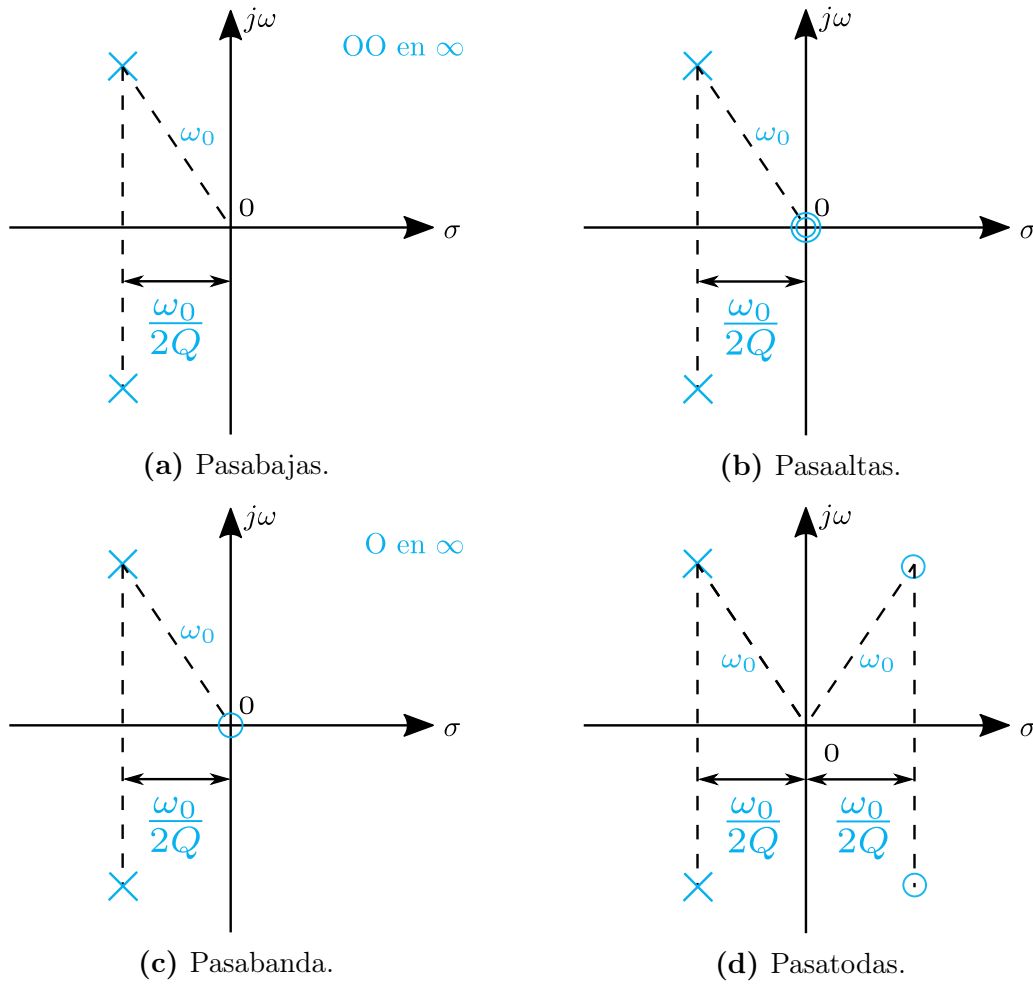
$$T(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (2.54)$$

- Pasatodas (AP)

$$T(s) = a_2 \frac{s^2 - \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (2.55)$$

En la Figura 2.5 se muestran las singularidades de los filtros más comunes de segundo orden.

Figura 2.5: Singularidades de filtros de segundo orden en el plano s .



Las estructuras matemáticas estudiadas en esta sección servirán como herramientas en secciones posteriores.

Capítulo 3

Implementación

3.1. ¿Qué es una FPAA?

Una FPAA por sus siglas en inglés (Field Programmable Analog Arrays) es un dispositivo analógico equivalente a las FPGA (Field Programmable Gate Arrays). A diferencia de las FPGA que contienen una gran cantidad de módulos y conexiones que permiten configuraciones arbitrarias de lógica combinatorial y secuencial, los FPAA generalmente contienen una pequeña cantidad de CABs (Configurable Analog Blocks). Los FPAA dirigidos al diseño analógico estándar generalmente presentan un CAB que contiene un amplificador operacional, un arreglo de capacitores programables, y ya sea un arreglo de resistencias programables para circuitos en tiempo continuo o switches configurables para circuitos de capacitores conmutados. Se trabajó con la tarjeta Anadigm QuadApex Development Board v2.0 de la empresa Anadigm, la cual contiene 4 FPAAs AN231E04 que pueden conectarse en cadena y es programada mediante el software AnadigmDesigner2 (AD2). El diagrama esquemático de la tarjeta se puede ver en la Figura D.1 del apéndice.

3.2. Características de la tarjeta y requerimientos

3.2.1. Alimentación de la tarjeta

Para el correcto funcionamiento de la tarjeta, esta debe ser alimentada con una fuente de voltaje regulada a 5V de al menos 500mA conectada a la clema de dos terminales. La placa está protegida contra la conexión de una fuente de voltaje con la polarización incorrecta. La tarjeta cuenta con un LED de color verde que indica que la placa se ha encendido correctamente.

3.2.2. Instalación de drivers

No conecte la placa QuadApex v2.0 a la PC vía cable USB, ni tampoco inicie AD2 ahora, el driver debe instalarse primero. Se asume que AD2 ya ha sido instalado y registrado en la computadora, de lo contrario entrar al link que aparece a continuación.

Para instalar AD2 basta con acceder al siguiente link y seguir los pasos que muestra la pagina:

https://www.anadigm.com/sup_downloadcenter.asp?tab=ad2

es recomendable guardar los datos de registro en un lugar seguro, al iniciar el programa por primera vez es necesario ingresar el **License ID** y la **License key**, estos estarán en el correo que le proporcionó a Anadigm.

El driver **CP210x_Drivers.exe** está incluido en el AD2 CD o se puede encontrar en la página de Silicon Labs. Siga los siguientes pasos si es la primera vez que instala este driver, de lo contrario desinstale las versiones anteriores antes de continuar:

1. Ejecute como administrador el ejecutable CP210x_Drivers.exe. El destino por defecto del ejecutable es "C:\Silabs\Mcu\CP210x".
2. Para completar la instalación conecte la QuadApex v2.0 y enciéndala.
3. Acceda al administrador de dispositivos y en **Puertos (COM y LPT)** asegúrese que el driver este bien configurado, si no aparece un signo de admiración y se le asigne un puerto COM la instalación fue exitosa, de lo contrario dar clic derecho sobre el dispositivo y seleccionar **Actualizar controlador**, después buscar el driver en la ruta del paso 1.

el driver en este punto ya esta instalado. La instalación del driver y la asignación del puerto es necesaria solo una vez. Si se conecta subsecuentemente a otro puerto de USB de la PC puede ser necesario repetir el paso 3.

3.2.3. Jumpers por defecto

En la Tabla 3.1 se muestra una lista con los jumpers que contiene la placa, una descripción de su funcionamiento y su posición por defecto. Es importante colocar la FPAA con todos sus jumper en el estado por defecto para entender secciones posteriores y evitar errores. La placa no contiene una cantidad muy grande de jumpers y usualmente solo se modificarán los jumpers J8,9,10, los cuales son los que controlan la cantidad de FPPAs activas.

Tabla 3.1: Resumen de jumper de la placa.

Jumper	Función	Estado por defecto	Condición por defecto
J1	Conecta la sección digital a la sección analógica.	Todos los 13 jumpers deben estar conectados	Conecta completamente la alimentación, tierra y todas las señales digitales FPAA a la sección digital.
J2	Selecciona entre 16MHz y 40MHz para la fuente ACLK.	Jumpers off	ACLK=16MHz
J3	Permite la descarga de la configuración de prueba a todos los FPAA desde FLASH (después de reiniciar o apagar y encender). El circuito de prueba despliega ondas sinusoidales a todas las salidas FPAA.	Jumper off	Descarga del circuito de prueba deshabilitado
J4	Permite el almacenamiento de configuraciones primarias en el FLASH del PIC32 si el puente está activado.	Jumper off	No en modo de almacenamiento de configuraciones primarias.
J5	Jumper de repuesto.	Jumper off	-
J6	Un jumper en J5 deshabilitará el módulo oscilador de 16MHz y tristateará su salida. Esto significa que el pin ACLK de los FPAA no se sincronizará, tampoco se sincronizará el microcontrolador PIC32, por lo que toda la placa se desactivará efectivamente.	Jumper off	Oscilador de 16MHz habilitado
J7	Este jumper controla la generación de un suministro negativo (-3.3V) para las etapas del buffer de salida en la placa. El puente a la derecha desactiva el suministro negativo (lo ata al suelo). El puente a la izquierda permite el suministro.	Jumper a la izquierda	Alimentación negativa habilitada
J8,9,10	Estos jumpers en combinación con ACT1, ACT2, ACT3, ACT4 controlan la cadena de FPAAs.	Todos los jumpers especificados deben estar conectados	Todas las FPAAs en cadena
J11	Estos jumpers conectan el transceptor USB a la interfaz UART del microcontrolador PIC32. Si no se requiere control USB, estos 4 puentes se pueden quitar.	Todos los jumpers conectados	USB habilitado

3.2.4. Tamaño variable de cadena de FPAAs

La placa contiene 4 FPAAs en cadena. Esta cadena puede ser cortada a 3, 2 o 1, pero debe ser cortada deshabilitando FPAAs desde el final de la cadena (del lado derecho).

- Para reducir la cadena a 3 FPAAs, remueva los jumpers de **J10** y también el jumper marcado **ACT4** de **J1**. Esto deshabilitará FPPAA #4 (la más cercana a la fuente de alimentación.)
- Para reducir la cadena a 2 FPAAs, remueva los jumpers de **J9** y **J10** y también los jumpers marcados **ACT3** y **ACT4** de **J1**. Esto deshabilitará los FPAAs #3 y #4.
- Para reducir la cadena a 1 FPAA, remueva los jumpers de **J8**, **J9** y **J10** y también los jumpers marcados **ACT2**, **ACT3** y **ACT4** de **J1**. Esto deshabilitará los FPAA #2, #3 y #4.

Nota: si se configura una cadena de FPAA y luego se desconectan 1 o más FPAA de la cadena, los FPAA desconectados aún mantendrán su configuración hasta que se reinicie la placa o se vuelva a configurar la cadena (reducida).

3.2.5. DIP Switches

El usuario puede hacer sus propias conexiones en la placa con cables, pero hay un conjunto de DIP switches que permiten una fácil conexión de ciertas rutas entre los FPAA vecinos y entre los FPAA y los input/output buffers. Estos interruptores están abiertos por defecto, lo que significa que todos están hacia la izquierda. El usuario puede cerrar los interruptores empujándolos hacia la derecha. En la Tabla 3.2 se muestra un resumen de los switches. Los DIP switches son pequeños y del tipo deslizantes, por lo que se recomienda una herramienta afilada como un destornillador delgado para abrir y cerrar los switches. Algunos ejemplos se muestran a continuación:

1. Para conectar el filtro Rauch_#1_IO1 a I1 de la FPAA#1, cierre los 4 interruptores en S10.
2. Para conectar O4 del FPAA#1 a I1 del FPAA#2, cierre los 2 interruptores superiores de S2.
3. Para conectar O3 del FPAA#1 al buffer de salida BUF_#1_03, cierre ambos switches de S13.

Función	Tipo	Labels
Conectar filtros Rauch a entradas de FPAA	4way	S8,9,10,11,15,16,17,18
Conectar entre FPAAs	4way	S2,3,4,5,6,7
Conectar FPAA a buffers de salida	2way	S12,13,14,19

Tabla 3.2: DIP Switches

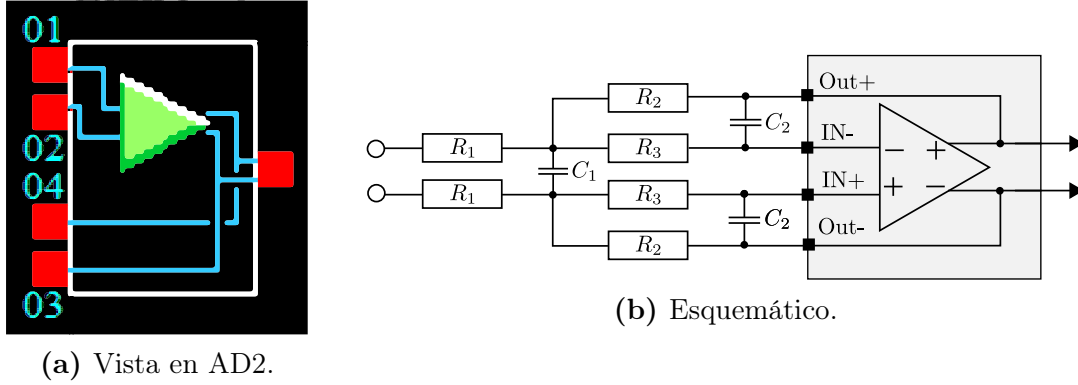
3.2.6. Filtros Rauch y buffers de salida

La tarjeta cuenta con 2 buffers de entrada llamados filtros Rauch listos para usar, **Rauch_#1_IO1** y **Rauch_#2_IO1**, estos son filtros multipropósito cuya su principal función es convertir una señal single-ended a una diferencial en la FPAA, internamente la FPAA trabaja únicamente con señales diferenciales y debido a esto el uso de estos filtros es imprescindible para introducir señales externas, por ejemplo de generadores de funciones u otros circuitos. Si se usa una señal single-ended, es necesario conectar IN- a GND y conectar la señal en IN+. Para activar el filtro es necesario hacerlo desde el software AD2 haciendo doble clic en la IO cell apropiada (IOCell1-4), seleccionar Input y después Amplifier (Filter), esto es debido a que el filtro funciona en combinación con un amplificador integrado en la FPAA y los componentes pasivos de montaje superficial que vienen soldados de fabrica.

Rauch_#1_IO1 está conectado a I/O1 de la FPAA #1 y esta configurado con una frecuencia de corte muy alta ($F_o = 490$ kHz), una $Q = 0.707$ y ganancia unitaria.

Los componentes pasivos que tiene son: $R_1 = R_2 = 22\text{k}\Omega$, $R_3 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 22\text{pF}$ y $C_2 = 10\text{pF}$. Rauch_#21_I01 está conectado a I/O1 de la FPAA #2 y esta configurado con una ganancia unitaria, una $Q = 0.707$ y una frecuencia de corte de poco más de 20 kHz, que es típica de una aplicación de audio. Los componentes pasivos respectivos son: $R_1 = R_2 = 470\text{k}\Omega$, $R_3 = 220\text{k}\Omega$, $C_1 = 22\text{pF}$ y $C_2 = 10\text{pF}$. En la Figura 3.1 se muestra la representación esquemática del filtro y como se ve en AD2.

Figura 3.1: Diferentes representaciones de filtro Rauch.



Las siguientes ecuaciones sirven para calcular la ganancia, frecuencia de corte y factor de calidad Q para cualquier filtro Rauch sobre la tarjeta:

$$G = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.1)$$

$$F_o = \frac{1}{2\pi R_2} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2C_1 C_2 R_1}} \quad (3.2)$$

$$Q = \sqrt{\frac{C_1 R_1}{2C_2 (R_1 + R_2)}} \quad (3.3)$$

no obstante si se desea hacer el proceso inverso y determinar los valores de los componentes requeridos para una ganancia, frecuencia de corte y Q especificadas, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

$$R_2 = R_1 G \quad (3.4)$$

$$R_3 = \frac{R_1 G}{G + 1} \quad (3.5)$$

$$C_1 = \frac{Q(G + 1)}{2\pi G F_o R_1} \quad (3.6)$$

$$C_2 = \frac{1}{4\pi G F_o Q R_1} \quad (3.7)$$

consideremos el siguiente ejemplo representativo. Construya un filtro Rauch con las siguientes características: ganancia de 1.5, una frecuencia de corte $F_o = 20$ kHz y $Q = 0.707$. Utilizando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$R_1 = 10\text{k}\Omega$$

$$R_2 = 15\text{k}\Omega$$

$$R_3 = 6\text{k}\Omega$$

$$C_1 = 0.938\text{nF}$$

$$C_2 = 0.375\text{nF}$$

[29]

La tarjeta también cuenta con 2 buffers de salida listos para usar, **Buf_#1_O3** y **Buf_#2_O3**, cuyo principal propósito es convertir la salida diferencial de la FPAA a una single-end. Buf_#1_O3 está conectado a O3 de la FPAA #1 y está configurado con una frecuencia de corte muy alta y una ganancia unitaria. Si se requiere una frecuencia de corte inferior, es muy fácil modificar este filtro sin quitar los componentes de montaje superficial debajo, simplemente agregando capacitores TH. Buf_#2_O3 está conectado a O3 de FPAA #2 y esta configurado con una ganancia unitaria y una frecuencia de corte de poco más de 20 kHz, que es típica de una aplicación de audio.

Cabe resaltar que para utilizar tanto los filtros Rauch como los buffers de salida sin cables adicionales es necesario cerrar los DIP switches correspondientes, no obstante se pueden cablear externamente a cualquiera de las entradas o salidas de las FPAA.

3.2.7. Circuito de prueba

La placa es capaz de autoconfigurar los FPAA con un circuito de prueba para una verificación rápida de la placa. Para hacer esto, coloque un jumper en **J3** y reinicie la placa. Todos los FPAA en la cadena ahora se configurarán con el circuito de prueba (el LED verde indica que la configuración fue exitosa). Este circuito de prueba genera una onda sinusoidal en todas las 7 salidas del FPAA (14 salidas diferenciales). La frecuencia de esta onda sinusoidal es de 1kHz en FPAA #1, 2kHz en FPAA #2, 4kHz en FPAA #3 y 8kHz en FPAA #4. Si se habilitan menos de 4 FPAA en la cadena, solo se configurarán aquellos FPAA que estén habilitados. Si se coloca un jumper en **J3** y **J4**, se cargará un circuito diferente en los FPAA. Este es un circuito de prueba especial

utilizado por Anadigm durante la producción. Se aconseja al usuario que no coloque jumpers en J3 y J4 al mismo tiempo.

3.3. AnadigmDesigner2

AD2 trabaja con módulos llamados CAMs (Configurable Analog Modules), estos aportan flexibilidad y sencillez en el proceso de diseño debido a que son bloques que hacen desde funciones sencillas como inversores o comparadores hasta diseños completos como filtros y multiplicadores. Los CAMs pueden interconectarse fácilmente unos con otros y únicamente necesitan pequeñas configuraciones para su correcto funcionamiento. Los CAMs más utilizados son los mostrados en la Tabla 3.3. En secciones posteriores se abordará con más detalle como configurarlos y cuales son las ecuaciones necesarias para calcular los parámetros de cada uno.

3.3.1. Comunicación con AD2

Ahora la placa puede ser programada lo que en este caso significa configurar los FPAA. Esto puede realizarse desde una PC o una laptop usando un cable estándar USB tipo A-B. La placa usa una emulación de comunicación serial de tal manera que desde la computadora la placa aparecerá como un puerto COM.

Para programar la placa conecte el cable USB entre la placa y la computadora y encienda la placa. Abra AD2 y haga clic en **Settings/Preferences**, después haga clic en la pestaña **Port**. En el menú desplegable **Select Port** debe estar el puerto COM correspondiente a la placa Anadigm. Este es en realidad un puerto COM virtual porque la placa tiene un **USB/UART bridge** llamado CP2102 el cual emula un puerto serial.

Seleccione el puerto COM correspondiente. Haga clic en **Apply**, después en **OK**. Para comprobar que AD2 ahora puede comunicarse con la placa, haga clic en **Target/Display Board Information**. El LED verde D4 se apagará.

La Figura 3.2 muestra la información que despliega AD2 acerca de la placa donde todas las 4 FPAA están configuradas en cadena. Si menos FPAA están configuradas entonces la información de la placa mostrará cuantas FPAA están disponibles.

Ahora debería ser posible descargar un circuito desde AD2. Para hacer esto simplemente se da clic sobre el icono de descarga (a la izquierda del signo de interrogación, debajo de Dynamic Config). Como alternativa presiona **Ctrl + W**. Un LED amarillo comenzará a parpadear mientras cada FPAA es configurada y finalmente un LED verde se encenderá indicando que todas las FPAA han sido configuradas correctamente. Un LED rojo indicará que la configuración falló. Es importante que el número de FPAA en AD2 coincida con el número de FPAA habilitadas en la placa. Por ejemplo, si la tarjeta fue configurada con una cadena de 3 FPAA, entonces estará esperando 3

Tabla 3.3: CAMs básicos de AD2.


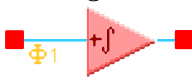

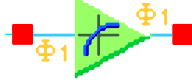
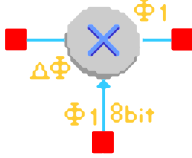

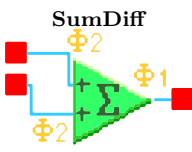
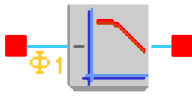
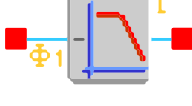
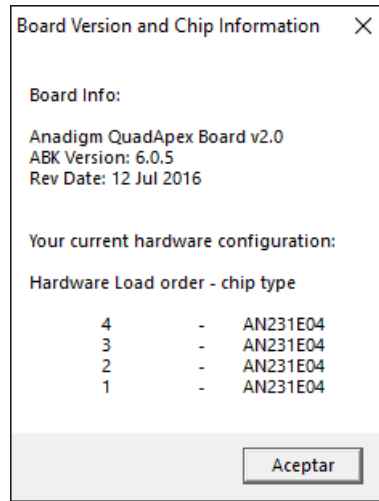
Nombre	Función de transferencia	Descripción
GainInv 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -G$	Ganancia inversora. Gain: 0.01 - 100.0 V/V
Integrator 	$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\pm K}{s}$	Integrador con una constante de integración programable. La salida puede ser inversora o no inversora.
Voltage 	$V_{out} = \pm 2$	Referencia de voltaje de ± 2 V.
TransferFunction 		Lookup Table: función de transferencia especificada por el usuario de 256 de pasos de cuantificación.
Multiplier 	$V_{out} = M \cdot V_x \cdot V_y$	V_x es la entrada de voltaje izquierda. V_y es la entrada de voltaje inferior cuantificado de 8 bits. M factor de multiplicación.
SumInv 	$V_{out} = -G_1 V_{in1} - G_2 V_{in2} - G_3 V_{in3}$	Configurable desde 2 hasta 3 entradas. Cada entrada tiene una ganancia programable. Configurable desde 2 hasta 4 entradas.
SumDiff 	$V_{out} = \pm G_1 V_{in1} \pm G_2 V_{in2} \pm G_3 V_{in3} \pm G_4 V_{in4}$	Las entradas pueden ser inversoras o no inversoras. Cada entrada tiene una ganancia programable. Configurable desde 2 hasta 4 entradas.
FilterBilinear 	Low Pass Bilinear Filter $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \pm \frac{2\pi f_0 G}{s + 2\pi f_0}$ High Pass Bilinear Filter $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Gs}{s + 2\pi f_0}$ ⋮	Puede ser configurado como pasabajas, pasaaltas, pasatodas o general (Polo y cero).
FilterBiquad 	Low Pass Biquadratic Filter $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\pm 4\pi^2 f_0^2 G}{s^2 + \frac{2\pi f_0}{Q}s + 4\pi^2 f_0^2}$ High Pass Biquadratic Filter $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{-Gs^2}{s^2 + \frac{2\pi f_0}{Q}s + 4\pi^2 f_0^2}$ ⋮	Puede ser configurado como pasabajas, pasaaltas, pasabanda, rechazabanda o general (Polos y ceros).

Figura 3.2: Información de la placa desplegada por AD2.

configuraciones de FPAA para ser descargadas desde AD2.

3.3.2. Configuración de relojes

Las configuraciones de los CAMs dependen de las frecuencias de reloj que se seleccionen para cada FPAA. Cada FPAA tiene dos fuentes de frecuencias de reloj de sistema **Sys1** y **Sys2**, y seis frecuencias de reloj de chip, desde **Clock 0** hasta **Clock 5** que son subdivisiones de cualquiera de las fuentes de reloj sistema. Seleccionar y configurar correctamente los relojes es importante ya que el rango de operación de los CAMs depende de esto.

La tarjeta tiene una fuente de frecuencia de reloj principal llamada **ACLK** o f_c cuya frecuencia es igual a 16 MHz y no puede ser cambiada. Sys1 y Sys2 dependen de esta frecuencia y pueden ser modificadas utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\text{Sys1} = \frac{f_c}{m} \quad \text{Sys2} = \frac{f_c}{m} \quad (3.8)$$

donde $m \in [1, 510]$ y es par. Usualmente Sys1 y Sys2 no se modifican pero es necesario entender que estas dos fuentes de frecuencias de reloj a su vez controlan a las fuentes de reloj de chip desde **Clock 0** hasta **Clock 5** dada la siguiente ecuación:

$$\text{Clock } h = \frac{\text{Sys1}}{n} \quad \text{Clock } h = \frac{\text{Sys2}}{n} \quad (3.9)$$

donde $n \in [1, 510]$ y es par y $h \in [0, 5]$. Configurar las fuentes de reloj de chip cobrará importancia en secciones posteriores y las ecuaciones anteriores no deben olvidarse.

3.4. NI ELVIS II+

El NI Engineering Laboratory Virtual Instrumentation Suite (NI ELVIS) es un dispositivo modular de laboratorio educativo de ingeniería que incluye un osciloscopio, multímetro digital, generador de funciones, fuente de alimentación variable, **analizador de Bode** y otros instrumentos comunes de laboratorio. Es necesario utilizar una PC en conjunto con la NI ELVIS para acceder a todas sus prestaciones y la comunicación entre las dos se hace vía USB.

3.4.1. Instalación

La NI ELVIS II+ requiere del software NI ELVISmx para su correcto funcionamiento, actualmente se encuentra en la versión 19.0 sin embargo la versión 16.0 posee mayor compatibilidad con la NI ELVIS II+ y es la que se recomienda instalar. El software se puede encontrar dirigiéndose al siguiente link:

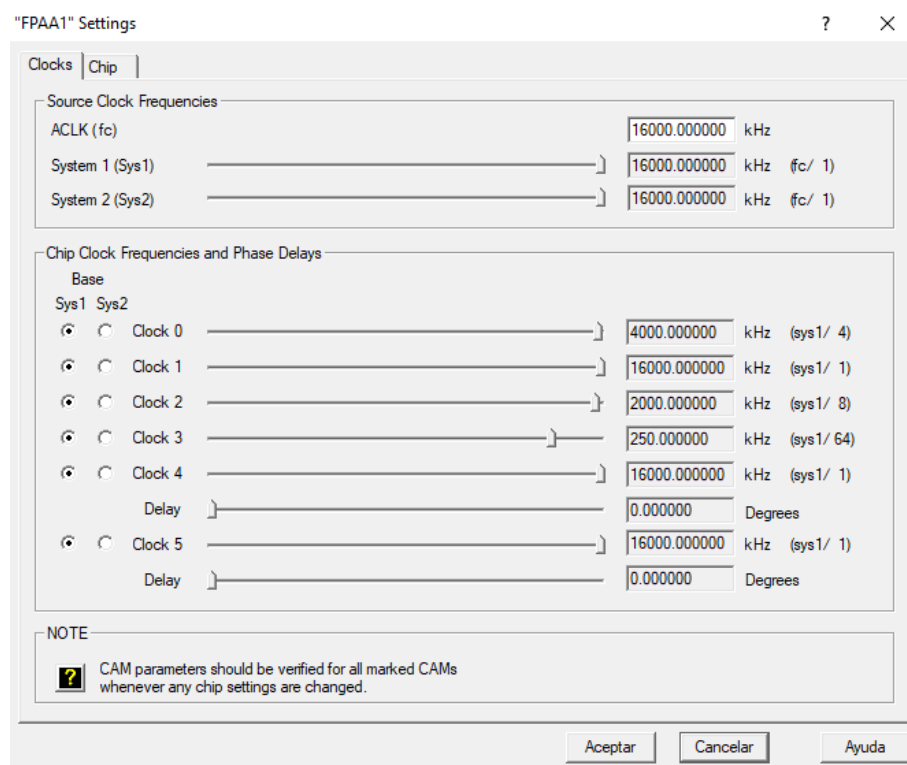
<https://www.ni.com/es-mx/support/downloads/drivers/download.ni-elvismx.html>

la instalación es directa y basta con leer cuidadosamente las ventanas emergentes para no cometer errores.

La Figura 3.4 muestra la NI ELVIS II+ donde los números representan lo siguiente:

1. Switch de alimentación de placa de prototipado, 2. Switch de alimentación principal,

Figura 3.3: Ventana de configuración de frecuencias de reloj AD2.



3. Conector de alimentación AC/DC, 4. Conector USB. para comprobar

1. Laptop, 2. Cable USB, 3. Fuente de alimentación AC/DC, 4. Al tomacorriente.

3.5. Implementación con aproximación de primer orden

3.5.1. Filtro bilineal configuración polo y cero

Para realizar la implementación física de la aproximación de primer orden del integrador fraccionario se utilizó el CAM **FilterBilinear** en su modo **Pole and Zero**, esto debido a su flexibilidad y semejanza con la función de transferencia de la aproximación de la CFE de primer orden. La función de transferencia del CAM en este modo es la siguiente:

Figura 3.4: NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación.

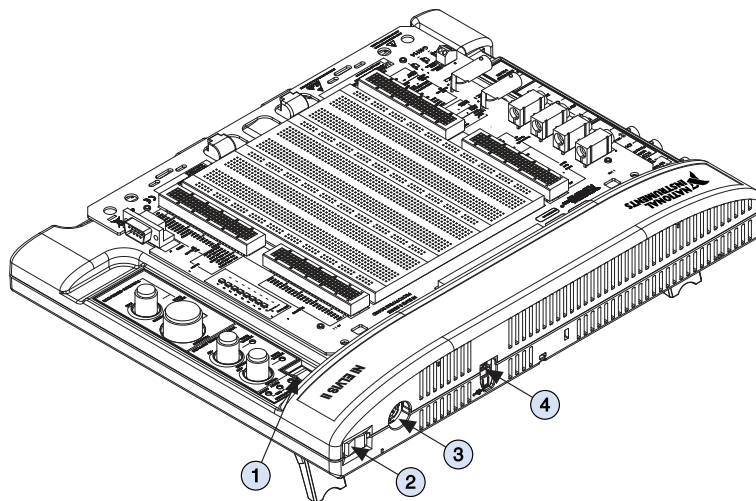


Figura 3.5: NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación.

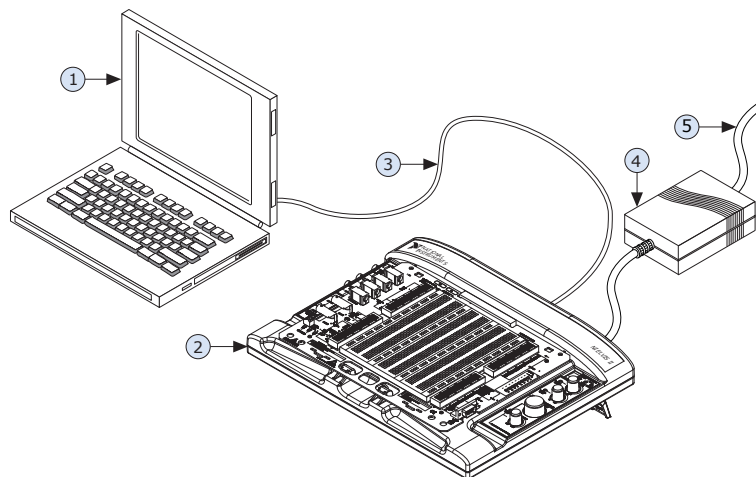
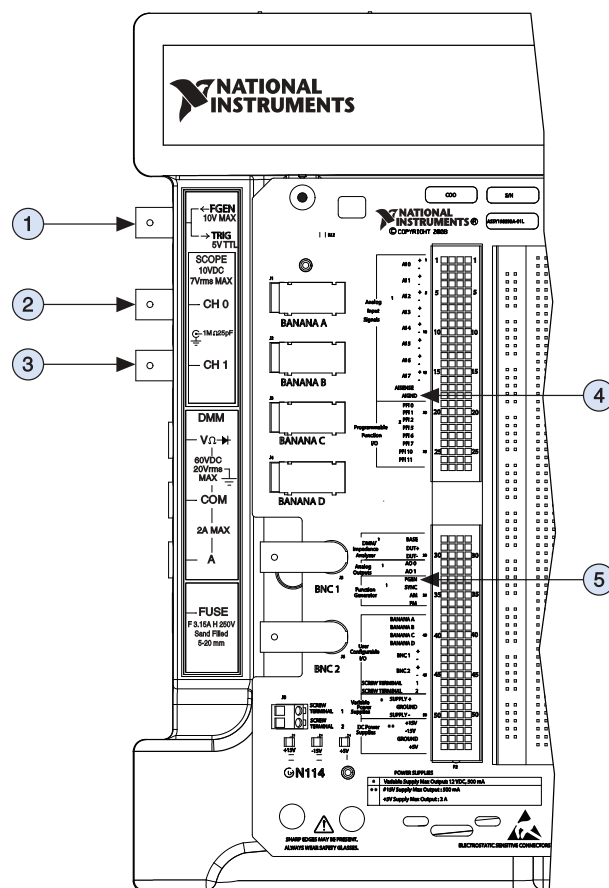


Figura 3.6: NI ELVIS II+ vista general conectores y switches de alimentación.



$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = -\frac{G_H(s + 2\pi f_z)}{s + 2\pi f_p} \quad (3.10)$$

donde G_L esta definida como:

$$G_L = \frac{f_z}{f_p} G_H \quad (3.11)$$

y donde G_L es la ganancia en DC, G_H es la ganancia de alta frecuencia, f_p es la frecuencia del polo y f_z es la frecuencia del cero. Si se utiliza un CAM de ganancia inversora (**GainInv**) se puede prescindir del signo negativo de la ecuación (3.10).

La función de transferencia de la aproximación con la CFE de primer orden, como se mencionó anteriormente es la siguiente:

$$\frac{1}{(c_2) s^\alpha} \approx \frac{(1 - \alpha)s + (1 + \alpha)}{(1 + \alpha)s + (1 - \alpha)} \quad (3.12)$$

si consideramos la siguiente sustitución:

$$A = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3.13)$$

podemos reescribir la ecuación (3.12) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(c_2) s^\alpha} \approx \frac{As + 1}{s + A} \quad (3.14)$$

no obstante el ancho de bando de la ecuación (3.14) es de 10^{-1} rad/s hasta 10^1 rad/s, ver Figura 2.2, lo cual es un rango de frecuencias muy bajo y presenta dificultades en su implementación. Por esta razón se opta por aplicar un escalamiento en frecuencia a la ecuación (3.14) utilizando los siguiente pasos:

1. Cambiamos la variable compleja por p la cual representa la frecuencia actual:

$$N(p) = \frac{Ap + 1}{p + A} \quad (3.15)$$

2. Utilizamos la sustitución $p = \frac{s}{k_f}$:

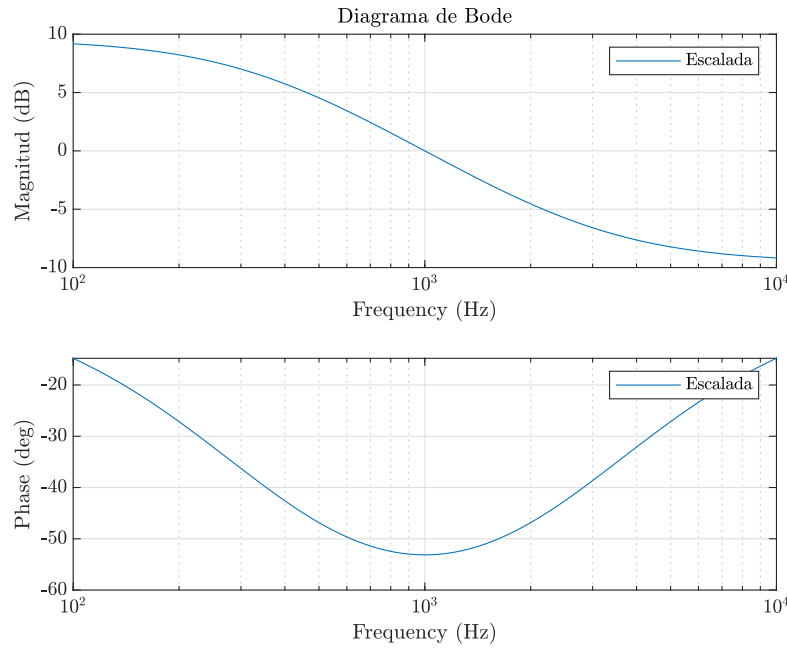
$$N(s) = \frac{Ask_f^{-1} + 1}{sk_f^{-1} + A} \quad (3.16)$$

3. Reescribimos de una manera más conveniente:

$$\frac{1}{(c_2) s^\alpha} \approx \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \quad (3.17)$$

El factor de escalamiento k_f se puede elegir a conveniencia dependiendo del ancho de banda necesario, no obstante la frecuencia de entrada de la mayoría de los CAM esta limitada aproximadamente a valores menores de 2 MHz, esto debido a que el tipo de procesamiento de señal del CAM se basa en arquitecturas de datos muestreados. Por esta razón se opta por un escalamiento con un factor $k_f = 2\pi 1000$. En la Figura 3.7 se muestra el resultado de aplicar el escalamiento. El nuevo ancho de banda abarca desde 100 Hz hasta 10 kHz el cual se encuentra dentro del rango de operación de los CAMs.

Figura 3.7: Diagrama de bode de ecuación (3.17) para un integrador fraccionario con $k_f = 2\pi 1000$ y $\alpha = 0.5$.



Para poder configurar el CAM FilterBilinear es necesario encontrar los valores correctos para los parámetros G_H , G_L , f_z y f_p dado un orden α , y esto se logra igualando las ecuaciones (3.17) y (3.10) con el fin de encontrar expresiones para calcularlos.

$$\frac{G_H(s + 2\pi f_z)}{s + 2\pi f_p} = \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \quad (3.18)$$

de la ecuación (3.18) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$G_H = A \quad (3.19)$$

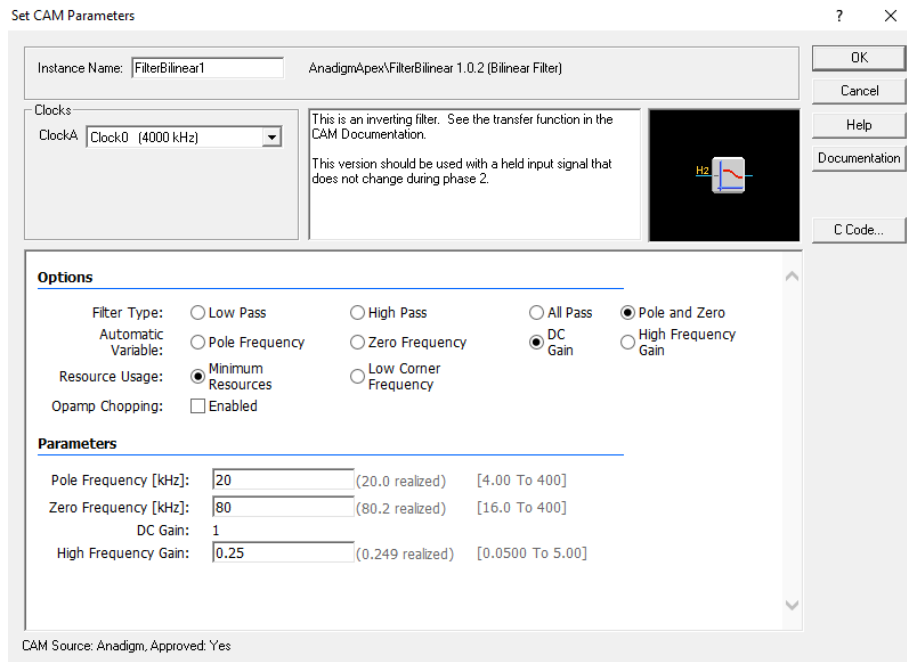
$$f_p = \frac{Ak_f}{2\pi} \quad (3.20)$$

$$f_z = \frac{k_f}{2A\pi} \quad (3.21)$$

$$G_L = \frac{1}{A} \quad (3.22)$$

utilizando las ecuaciones anteriores y considerando $k_f = 2\pi 1000$ obtenemos los datos de la Tabla 3.4, esta tabla se puede generar utilizando el código del apéndice A.3, sin embargo debido a que el CAM FilterBilinear depende directamente de la frecuencia de reloj que se seleccione en el parámetro **ClockA** no todos los valores de la tabla pueden ser ingresados, en la ventana de configuración aparecerán marcados en color rojo, por lo tanto es necesario hacer un análisis de frecuencias para este parámetro. En la ventana de configuración del CAM, ver Figura 3.8, se pueden ingresar 3 de los 4 parámetros requeridos, el parámetro restante es calculado automáticamente. Por simplicidad se eligió que el parámetro que se calcule automáticamente sea **DC Gain**.

Figura 3.8: Ventana de configuración de parámetros FilterBilinear.



Los límites absolutos de los valores que se pueden ingresar para las frecuencias f_z y f_p son $[\frac{F_c}{1000}, \frac{F_c}{10}]$ donde F_c es la frecuencia de reloj que se selecciona para el parámetro **ClockA** y los límites de ganancia están interrelacionados con los otros parámetros que pueden restringir el rango a menos que el límite absoluto el cual es $[0.01 \frac{V}{V}, 100.0 \frac{V}{V}]$.

Hay que tener presente que F_c puede ser cualquier Clock, desde el 0 hasta el 5, en otras palabras, F_c es igual a la ecuación (3.9). Un análisis de todas las posibles frecuencias para F_c dependiente de las subdivisiones dadas por n se muestran en la Tabla 3.5, si se desea ver la tabla completa se puede usar el código del apéndice A.4.

Para demostrar que no todos los valores de la Tabla 3.4 pueden ser implementados debido al rango de frecuencias absolutas mostradas en la Tabla 3.5 consideremos los siguientes ejemplos:

Tabla 3.4: Valores para configurar un filtro bilineal como integrador de orden fraccionario en el rango de ordenes de 0.1 a 0.95.

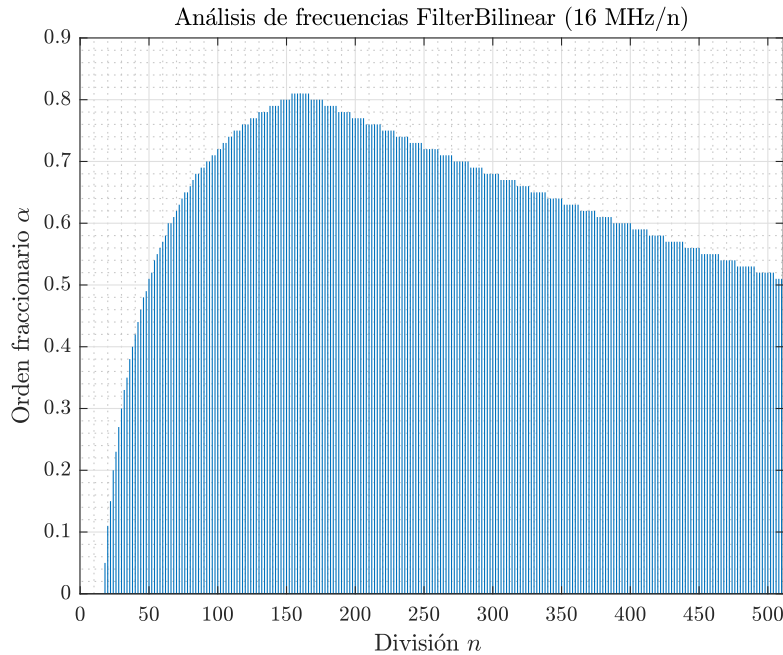
α	f_p [kHz]	f_z [kHz]	G_L	G_H
0.10	0.818182	1.222222	1.222222	0.818182
0.15	0.739130	1.352941	1.352941	0.739130
0.20	0.666667	1.500000	1.500000	0.666667
0.25	0.600000	1.666667	1.666667	0.600000
0.30	0.538462	1.857143	1.857143	0.538462
0.35	0.481481	2.076923	2.076923	0.481481
0.40	0.428571	2.333333	2.333333	0.428571
0.45	0.379310	2.636364	2.636364	0.379310
0.50	0.333333	3.000000	3.000000	0.333333
0.55	0.290323	3.444444	3.444444	0.290323
0.60	0.250000	4.000000	4.000000	0.250000
0.65	0.212121	4.714286	4.714286	0.212121
0.70	0.176471	5.666667	5.666667	0.176471
0.75	0.142857	7.000000	7.000000	0.142857
0.80	0.111111	9.000000	9.000000	0.111111
0.85	0.081081	12.333333	12.333333	0.081081
0.90	0.052632	19.000000	19.000000	0.052632
0.95	0.025641	39.000000	39.000000	0.025641

Tabla 3.5: Rango de frecuencias absolutas dependiente de F_c y el valor de n .

F_c [kHz]	n	min= $F_c/1000$ [kHz]	max= $F_c/10$ [kHz]
16000.0000	1.0000	16.0000	1600.0000
8000.0000	2.0000	8.0000	800.0000
4000.0000	4.0000	4.0000	400.0000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
31.6206	506.0000	0.0316	3.1621
31.4961	508.0000	0.0315	3.1496
31.3725	510.0000	0.0314	3.1373

Imaginemos que queremos implemetar un integrador de orden fraccionario con la aproximación de primer orden, un $\alpha = 0.9$ y escalado en frecuencia para que su ancho de banda se encuentre entre 100 Hz y 10 kHz. Dados los requerimientos anteriores $k_f = 2\pi 1000$ y utilizando la Tabla 3.4 sabemos que $f_p = 0.052632$, $f_z = 19.0$, $G_L = 19.0$ y $G_H = 0.052632$. Como se mencionó anteriormente la fuente de frecuencia de reloj principal $f_c = 16$ MHz no puede modificarse y de mismo modo se recomienda que Sys1 y Sys2 tampoco se modifiquen, es decir $m = 1$. Se opta por utilizar el Clock 0 para configurar el CAM FilterBilinear y que este dependa de Sys1 = 16 MHz. Para que los datos que se ingresen en la ventana de configuración del CAM sean validos estos deben encontrarse dentro del rango de frecuencias absolutas de la Tabla 3.5, por lo tanto se tiene que elegir un n adecuado de tal manera que $F_c = \text{Clock 0} = \frac{\text{Sys1}}{n}$ cumpla con los limites absolutos de frecuencia, en otras palabras que los parámetros f_z y f_p se encuentren dentro del rango $[\frac{F_c}{1000}, \frac{F_c}{10}]$. El rango de frecuencias en el que nos tenemos que encontrar para poder implemetentar el integrador es $[f_p, f_z] = [0.052632, 19.0]$, no obstante el proceso de encontrar n es muy laborioso debido a que podría haber más de un valor que haga posible que se encuentren dentro del rango, de mismo modo podría ocurrir el caso contrario y ninguna n cumplir. Por esta razón en el Apéndice A.5 se muestra un código para resolver este problema, este genera una gráfica, ver Figura 3.9, la cual muestra la relación entre n y el orden α , en otras palabra hasta que orden fraccionario podemos implementar dependiendo del valor de n .

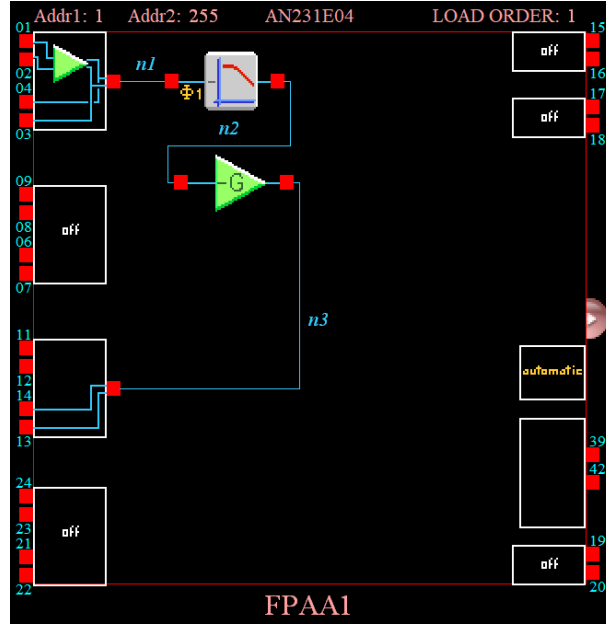
Figura 3.9: Análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con CAM BilinearFilter.



Analizando la Figura 3.9 podemos notar que $n = 160$ es el valor con el cual podemos

implementar la mayor cantidad de integradores fraccionarios. Haciendo los cálculos $\text{Clock } 0 = \frac{16\text{MHz}}{160} = 100\text{kHz}$. No obstante únicamente podemos implementar integradores fracciones de orden α dentro del rango $[0.01, 0.81]$. En la Figura 3.10 se muestra el diagrama de implementación en AnadigmDesigner2.

Figura 3.10: Implementación de integrador de orden fraccionario utilizando la aproximación de primer orden.



3.5.2. Filtro bilineal configuración pasabajas y pasaaltas

Otra alternativa para implementar el integrador es utilizando la combinación de un filtro pasaltas y pasabajas sumandose. Esto se puede lograr utilizando dos CAM **FilterBilinear** en su modo **Low Pass** y **High Pass** y un CAM **SumInv** para realizar la suma. La función de transferencia del CAM en el modo pasabajas es la siguiente:

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \pm \frac{2\pi f_0 G_1}{s + 2\pi f_0} \quad (3.23)$$

y la función de transferencia del CAM en el modo pasaaltas es la siguiente:

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = - \frac{G_2 s}{s + 2\pi f_0} \quad (3.24)$$

donde G_1 y G_2 es la ganancia pasabanda para cada uno de los respectivos filtros y f_0 es la frecuencia de corte en la cual la ganancia es $-3 + 20\log_{10}G$. El CAM **SumInv** debe configurare para dos entradas, ambas como inversoras. La función de transferencia resultante es:

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = \frac{2\pi f_0 G_1}{s + 2\pi f_0} + \frac{G_2 s}{s + 2\pi f_0} = \frac{G_2 s + G_1 2\pi f_0}{s + 2\pi f_0} \quad (3.25)$$

Si igualamos la aproximación de primer orden escalada de la ecuación (3.17) con la función de transferencia resultante (3.25) obtenemos:

$$\frac{G_2 s + G_1 2\pi f_0}{s + 2\pi f_0} = \frac{As + k_f}{s + Ak_f} \quad (3.26)$$

de la ecuación (3.26) se deducen las siguientes ecuaciones:

$$G_1 = \frac{1}{A} \quad (3.27)$$

$$G_2 = A \quad (3.28)$$

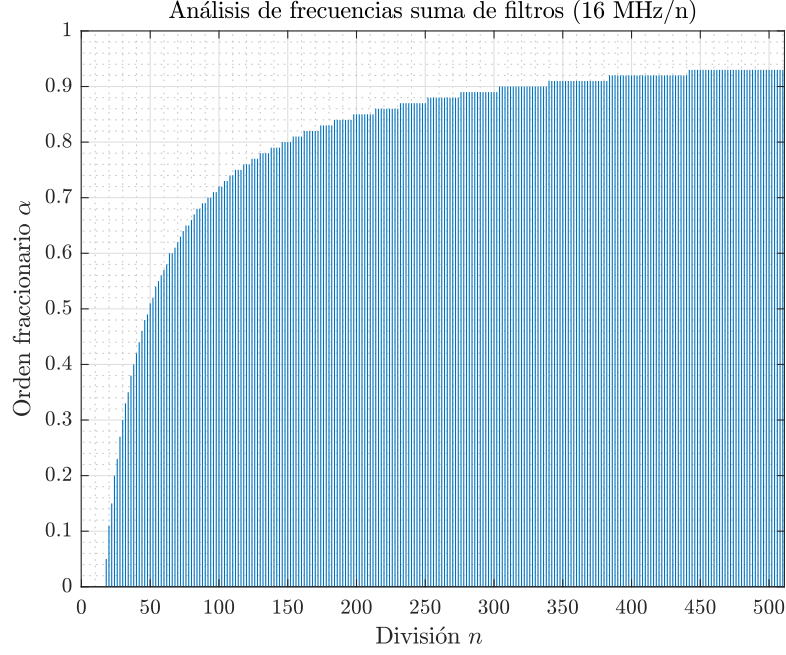
$$f_0 = \frac{Ak_f}{2\pi} \quad (3.29)$$

Los límites absolutos de los valores que se pueden ingresar para f_0 son $[\frac{F_c}{1000}, \frac{F_c}{10}]$. No obstante los límites absolutos de frecuencia también están interrelacionados con el valor de ganancia que puede restringir el rango a menos de sus límites absolutos y viceversa. Si consideramos $k_f = 2\pi 1000$ y utilizando las ecuaciones anteriores obtenemos los datos de la Tabla 3.6, esta tabla se puede generar utilizando el código del apéndice A.6

Tabla 3.6: Valores para configurar implementación suma de pasabajas y paaltas de ordenes de 0.1 a 0.95.

α	G_1 [LP]	G_2 [HP]	f_0 [kHz]
0.10	1.222222	0.818182	0.818182
0.15	1.352941	0.739130	0.739130
0.20	1.500000	0.666667	0.666667
0.25	1.666667	0.600000	0.600000
0.30	1.857143	0.538462	0.538462
0.35	2.076923	0.481481	0.481481
0.40	2.333333	0.428571	0.428571
0.45	2.636364	0.379310	0.379310
0.50	3.000000	0.333333	0.333333
0.55	3.444444	0.290323	0.290323
0.60	4.000000	0.250000	0.250000
0.65	4.714286	0.212121	0.212121
0.70	5.666667	0.176471	0.176471
0.75	7.000000	0.142857	0.142857
0.80	9.000000	0.111111	0.111111
0.85	12.333333	0.081081	0.081081
0.90	19.000000	0.052632	0.052632
0.95	39.000000	0.025641	0.025641

Figura 3.11: Análisis de orden fraccionario dependiente de n para implementación con suma de filtros.



3.6. Implementación con aproximación de segundo

FilterBiquad

$$\frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)} = - \frac{G_H \left(s^2 + \frac{2\pi f_z}{Q_z} s + 4\pi^2 f_z^2 \right)}{s^2 + \frac{2\pi f_p}{Q_p} s + 4\pi^2 f_p^2} \quad (3.30)$$

donde G_L esta definida como:

$$G_L = G_H \left(\frac{f_z}{f_p} \right)^2 \quad (3.31)$$

y donde G_L es la ganancia en DC

$$\frac{1}{s^\alpha} \underset{(c_4)}{\approx} \frac{(\alpha^2 - 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)s^2 + (8 - 2\alpha^2)s + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)} \quad (3.32)$$

$$D = \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} \quad (3.33)$$

$$C = \frac{8 - 2\alpha^2}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} \quad (3.34)$$

$${}_{(c_4)} \frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{Ds^2 + Cs + 1}{s^2 + Cs + D} \quad (3.35)$$

$$N(p) = \frac{Dp^2 + Cp + 1}{p^2 + Cp + D} \quad (3.36)$$

$$N(s) = \frac{D(sk_f^{-1})^2 + Csk_f^{-1} + 1}{(sk_f^{-1})^2 + Csk_f^{-1} + D} \quad (3.37)$$

$$N(s) = \frac{Ds^2 + Ck_f s + k_f^2}{s^2 + Ck_f s + Dk_f^2} \quad (3.38)$$

$$\frac{G_H \left(s^2 + \frac{2\pi f_z}{Q_z} s + 4\pi^2 f_z^2 \right)}{s^2 + \frac{2\pi f_p}{Q_p} s + 4\pi^2 f_p^2} = \frac{Ds^2 + Ck_f s + k_f^2}{s^2 + Ck_f s + Dk_f^2} \quad (3.39)$$

Hay que notar que hay que cumplir con:

$$G_H \frac{2\pi f_z}{Q_z} = \frac{2\pi f_p}{Q_p} \Rightarrow G_H \frac{f_z}{Q_z} = \frac{f_p}{Q_p} \quad (3.40)$$

Ecuaciones resultantes metodología 1, todo se calcula utilizando los valores D y C , por lo tanto $Q_z = Q_p$

$$G_H = D \quad (3.41)$$

$$f_z = \frac{k_f}{2\pi D^{\frac{1}{2}}} \quad (3.42)$$

$$f_p = \frac{D^{\frac{1}{2}} k_f}{2\pi} \quad (3.43)$$

$$Q_z = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{C} \quad (3.44)$$

$$Q_p = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{C} \quad (3.45)$$

$$G_L = \frac{1}{D} \quad (3.46)$$

Ecuaciones resultantes metodología 2, los factores de calidad Q_z y Q_p se eligen arbitrariamente

$$G_H = D \quad (3.47)$$

$$f_z = \frac{Ck_f Q_z}{D2\pi} \quad (3.48)$$

$$f_p = \frac{Ck_f Q_p}{2\pi} \quad (3.49)$$

Los limites absolutos para los valores que pueden ser ingresados para las frecuencias f_z y f_p son $[\frac{F_c}{500}, \frac{F_c}{10}]$. Sin embargo los límites de frecuencia también están interrelacionados con los otros valores de los parámetros, lo que puede restringir el rango a menos de sus límites absolutos.

Apéndice A

Códigos

```
1 % Convertir sym a funcion de transferencia
2 function R = syms2tf(G)
3     [symNum,symDen] = numden(G); % Obtener num y den funcion simbolica
4     TFnum = sym2poly(symNum);    % Convertir num sym a polinomio
5     TFden = sym2poly(symDen);    % Convertir den sym a polinomio
6     R = tf(TFnum,TFden);         % Generar funcion de transferencia
7 end
```

Código A.1: Función syms2tf

```
1 function R = cfetf(alfa,n)
2 % Calcula la aproximacion utilizando CFE de un integrador fraccional
3 % 1/s^(alfa)
4 %     R = cfetf(alfa,n)
5 %     alfa: es el orden del integrador
6 %     n    : es el numero de terminos de la aproximacion
7     syms s x;
8     eqns = sym(zeros(n,1));
9     for i=n:-1:2
10         if i == n
11             eqns(i) = 1 + n_term_cfe(i,alfa)*x;
12         else
13             eqns(i) = 1 + (n_term_cfe(i,alfa)*x)/eqns(i+1);
14         end
15     end
16     eqns(1) = 1/(1 - (alfa*x/eqns(2)));
17     derivate = simplify(subs(eqns(1),x,s-1));
18     integrator = collect(1/derivate);
19     sys = syms2tf(integrator);
20 %     pretty(integrator);
21     R = sys;
22 end
23 %% Funciones
24 function R = psi_cfe(x)
25     R = floor(x/2);
26 end
27
28 function R = n_term_cfe(n,k)
29     R = ( psi_cfe(n) * ( psi_cfe(n) + k*(-1)^n ) )/( (n-1)*(n));
30 end
```

Código A.2: Función cfetf

```

1 %% Clear subroutine
2 clear all;
3 close all;
4 clc;
5 %%
6 paso = 0.05;
7 alpha = (0.1:paso:0.95)';           % Orden del integrador
8 kf = 1250;                          % Factor de escalamiento
9 A = (1 - alpha)./(1 + alpha);
10 Gh = A;                            % Ganancia de alta frecuencia
11 Gl = 1./A;                         % Ganancia de baja frecuencia
12 fp = (A*kf)./(2*pi*1000);          % Frecuencia de polo en kHz
13 fz = (kf)./(A*2*pi*1000);          % Frecuencia de zero en kHz
14 T = table(alpha,fp,fz,Gl,Gh);
15 disp(T);
16
17 %% Latex table
18 T_latex.data = table(alpha,fp,fz,Gl,Gh);
19 T_latex.dataFormat = {'%1.2f',1,'%%.6f',4};
20 % disp(T_latex.data);
21 latex = latexTable(T_latex);

```

Código A.3: Función A10_calculo_valores_FilterBilinear

```

1 %% Clean subroutine
2 clear all;
3 close all;
4 clc;
5 format short;
6 %%
7 sys1 = 16e6;                        % 16 MHz
8 n = [1, ( 2:2:510)];
9 freq = ((sys1./n)/1000)';           % en kHz
10 freq_min = freq/1000;
11 freq_max = freq/10;
12 T = table(freq, n', freq_min, freq_max);
13 disp(T);

```

Código A.4: Función A11_rango_de_frecuencias_absolutas_FilterBilinear

```

1 %% Clean subroutine
2 clear all;
3 close all;
4 clc;
5 format short;
6 %% Calcular fp y fz
7 paso = 0.01;
8 alpha = (paso:paso:0.99)';          % Orden fraccionario
9 kf = 1250;                          % Factor de escalamiento
10 A = (1 - alpha)./(1 + alpha);
11 fp = (A*kf)./(2*pi*1000);           % Frecuencia de polo en kHz
12 fz = (kf)./(A*2*pi*1000);          % Frecuencia de cero en kHz
13
14 %% Rango de frecuencias absolutasAinz
15 sys1 = 16e6/6;                      % 16 MHz
16 n = [1, ( 2:2:510)];                % n
17 freqs = ((sys1./n)/1000)';          % in kHz
18 freq_min = freqs/1000;

```

```

19 freq_max = freqs/10;
20 %%
21 vv = zeros(size(freqs,1),9);           % Matriz binaria de verdad
22 for i=1:size(freqs,1)                 % Frecuencias
23     for j=1:size(alpha,1)             % Ordenes
24         cond1 = fp(j) >= freq_min(i) && fp(j) <= freq_max(i);
25         cond2 = fz(j) >= freq_min(i) && fz(j) <= freq_max(i);
26         if cond1 && cond2
27             vv(i,j) = 1;
28         else
29             vv(i,j) = 0;
30         end
31     end
32 end
33 R = [freqs freq_min freq_max vv];
34 % csvwrite('Analisis.csv',R);
35 %%
36 T = sum(vv,2);           % Suma horizontal
37 Tp = T*paso;             % Conversion
38 %% Graficar
39 bar(n,Tp,'DisplayName','Orden');
40 title('Frequency analysis FilterBilinear (16 MHz/n)','interpreter','latex');
41 xlabel('$n$', 'interpreter','latex');
42 ylabel('Fractional order $\alpha$', 'interpreter','latex');
43 % legend('interpreter','latex','FontSize',10);
44 grid on;
45 grid minor;
46 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');

```

Código A.5: Función A12_grafica_analisis_de_frecuencias_FilterBilinear

```

1 %% Clear subroutine
2 clear all;
3 close all;
4 clc;
5 %%
6 paso = 0.05;
7 alpha = (0.1:paso:0.95)';           % Orden del integrador
8 kf = 2*pi*1000;                     % Factor de escalamiento
9 A = (1 - alpha)./(1 + alpha);
10 G1 = 1./A;                         % Ganancia de alta frecuencia
11 G2 = A;                            % Ganancia de baja frecuencia
12 f0 = (A*kf)./(2*pi*1000);          % Frecuencia de polo en kHz
13 T = table(alpha,G1,G2,f0);
14 disp(T);
15
16 %% Latex table
17 T_latex.data = table(alpha,G1,G2,f0);
18 T_latex.dataFormat = {' %1.2f',1,' %6f',3};
19 % disp(T_latex.data);
20 latex = latexTable(T_latex);

```

Código A.6: Función B10_calculo_valores_suma_filtros

Bibliografía

- [1] J. M. M. Pacheco and E. T. Cuautle, *Electronic Design Automation of Multi-Scroll Chaos Generators*. BENTHAM SCIENCE PUB, 2010.
- [2] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca, and G. Sciuto, *A Concise Guide to Chaotic Electronic Circuits*. Springer-Verlag GmbH, 2014.
- [3] I. Petráš, *Fractional-Order Nonlinear Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [4] I. Petráš and J. Terpak, “Fractional calculus as a simple tool for modeling and analysis of long memory process in industry,” *Mathematics*, vol. 7, p. 511, jun 2019.
- [5] A. Tepljakov, E. A. Gonzalez, E. Petlenkov, J. Belikov, C. A. Monje, and I. Petráš, “Incorporation of fractional-order dynamics into an existing PI/PID DC motor control loop,” *ISA Transactions*, vol. 60, pp. 262–273, jan 2016.
- [6] S. W. Khubalkar, A. S. Junghare, M. V. Aware, A. S. Chopade, and S. Das, “Demonstrative fractional order – PID controller based DC motor drive on digital platform,” *ISA Transactions*, vol. 82, pp. 79–93, nov 2018.
- [7] M. D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer-Verlag GmbH, 2011.
- [8] G. Wang, D. Chen, J. Lin, and X. Chen, “The application of chaotic oscillators to weak signal detection,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, pp. 440–444, apr 1999.
- [9] V. Tepin, *Self-parametric chaotic oscillators for secure communication systems*. St. Petersburg State Polytech. Univ, 2002.
- [10] Y. Chen, I. Petras, and D. Xue, “Fractional order control - a tutorial,” *American Control Conference*, 2009.
- [11] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag GmbH, 2007.

- [12] E. Gunay and K. Altun, "A performance comparison study of programmable platforms: FPAA and FPGA implementation of COOK communication system," *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, sep 2017.
- [13] I. S. Jesus and J. A. T. Machado, "Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes," *Nonlinear Dynamics*, vol. 56, pp. 45–55, jun 2008.
- [14] K. Biswas, S. Sen, and P. Dutta, "Realization of a constant phase element and its performance study in a differentiator circuit," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 53, pp. 802–806, sep 2006.
- [15] A. Charef, "Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 153, pp. 714–720, nov 2006.
- [16] B. Krishna, "Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey," *Signal Processing*, vol. 91, pp. 386–426, Mar. 2011.
- [17] B. T. Krishna and K. V. V. S. Reddy, "Active and passive realization of fractance device of order $1/2$," *Active and Passive Electronic Components*, vol. 2008, pp. 1–5, 2008.
- [18] A. Tepljakov, E. Petlenkov, and J. Belikov, "Efficient analog implementations of fractional-order controllers," *Proceedings of the 14th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, may 2013.
- [19] L. Dorcak, J. Terpak, I. Petras, J. Valsa, and E. Gonzalez, "Comparison of the electronic realization of the fractional-order system and its model," *Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, may 2012.
- [20] N. Fragoulis, G. Souliotis, D. Besiris, and K. Giannakopoulos, "Field programmable analogue array design based on the wave active filter design method," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 63, pp. 889–895, oct 2009.
- [21] R. Caponetto and D. Porto, "Analog implementation of non integer order integrator via field programmable analog array," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, pp. 107–111, jan 2006.
- [22] C. Li, W. J.-C. Thio, J. C. Sprott, H. H.-C. Iu, and Y. Xu, "Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 29003–29012, 2018.

- [23] F. Jiang, X. Wang, J. Jin, and D. Yang, *The application of chaotic duffing oscillators to ballistocardiograph signal detection*. IEEE, jul 2010.
- [24] B. Kumari and N. Gupta, “Experimental investigation on chaotic oscillator coupled dielectric resonator antenna for medical applications,” *IEEE International Conference on Antenna Innovations & Modern Technologies for Ground, Aircraft and Satellite Applications (iAIM)*, nov 2017.
- [25] C. D. Olds, *Continued Fractions*. The Mathematical Association of America, 2009.
- [26] M. S. Charles Alexander, *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw-Hill Education, 2016.
- [27] L. P. Huelsman and P. E. Allen, *Introduction to the Theory and Design of Active Filters (Electrical Engineering Series)*. McGraw-Hill Book Company, 1980.
- [28] K. S. Adel S. Sedra, *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press Inc, 2015.
- [29] C. Muñoz-Montero, L. V. García-Jiménez, L. A. Sánchez-Gaspariano, C. Sánchez-López, V. R. González-Díaz, and E. Tlelo-Cuautle, “New alternatives for analog implementation of fractional-order integrators, differentiators and PID controllers based on integer-order integrators,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 90, pp. 241–256, jul 2017.