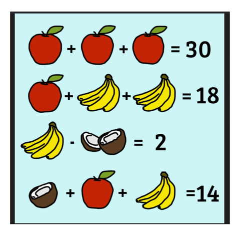
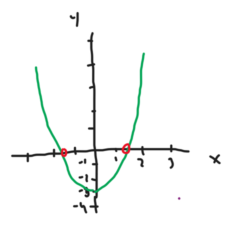
$x + x + x = 30$
$x + 4y + 4y = 18$
$4y - 2z = 2$
$z + x + 3y = 14$



$y = x^2 - 3$



$x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 3$
$x = \pm\sqrt{3}$

Ekvationssystem

Ett ekvationssystem består av en eller flera ekvationer, som skall lösas samtidigt

Att ha löst ett ekvationssystem innebär att man tagit reda på värdena för varje variabel som finns i det systemet, på ett sådant sett att alla ekvationer löses samtidigt av de

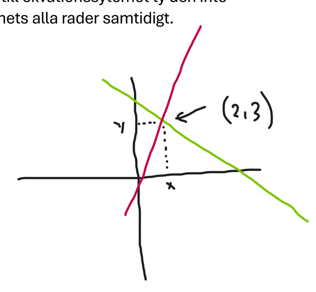
Exempel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Vår uppgift här är att hitta värden på x och y som uppfyller BÅDA raderna samtidigt.

Vi ser exempelvis att x=1 och y=4 uppfyller första raden, men inte andra. Således är detta (1,4) INTE en lösning till ekvationssytemet ty den inte uppfyller systemets alla rader samtidigt.

$x + y = 5 \rightarrow y = -x + 5$
$2x - y = 1 \rightarrow y = 2x - 1$



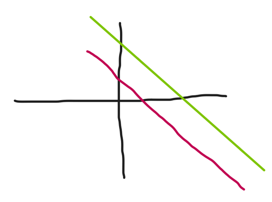
Lösning

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 2(5-y) - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 - 2y - y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ -3y = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Entydlig lösning!
(2,3)

$x + y = 5 \rightarrow y = -x + 5$
$x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3$



Lösning

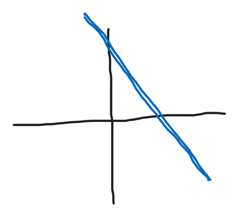
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ (5-y) + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 5 = 3 \end{cases}$$

Contradiction!
Inga lösningar existerar

När vi får en motsägelse på detta sätt innebär det att ekvationssystemet saknar lösning(ar).

Dvs, det går inte att hitta värden på variablerna som löser samtliga rader samtidigt.

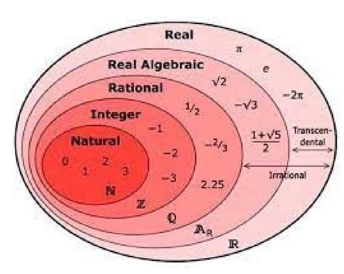
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 10 \\ 2y = -4x + 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$$



Lösning

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 4x + 2(10-2x) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 20 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 10 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Här är t en parameter, det kan vara vilket reellt tal som helst.

För att bespara oss oändligt med huvudvärk ska vi nu titta på mer effektiva sätt att lösa ekvationssystem på, än substitutionsmetoden ovan

$$\begin{array}{l} R_1 \; x + y = 5 \\ R_2 \; 2x - y = 1 \end{array} \rightarrow R_2 = R_2 - 2R_1 \rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -9 \end{cases} \rightarrow R_2 = \frac{R_2}{-3} \rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow R_1 = R_1 - R_2 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ovan metod kallas för rad-elimineringsmetoden.

Vi kan göra den ännu effektivare, genom att introducera en ny notation!

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = R_2 - 2R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = \frac{R_2}{-3} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow R_1 = R_1 - R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Entydlig lösning

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = R_2 - R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

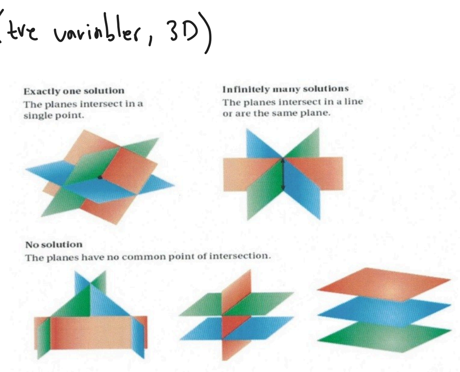
Contradiction!
Inga lösningar

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 20 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = R_2 - 2R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

oändligt med lösningar

Ekvationssystem i rummet (tre variabler, 3D)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y - z = -6 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \rightarrow R_3 = R_3 + 2R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = R_2 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow R_3 = R_3 - R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_3 \\ R_1 = R_1 - 3R_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow R_1 = R_1 + 2R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Entydlig lösning