Intro till matriser

Matriser är väldigt viktiga objekt inom algebra oc hhar tillämpningsområden inom i princip all modern ingenjörsvetenskap. Exempelvis inom ekonomi, medicin, datavetenskap & AI

Vad är en matris?

En matris är ett objekt rektangulärt objekt som har *m* st rader och *n* st kolumner. Varje *element* i en matris är generellt en reell siffra.

Exempel

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{n=2} \Big\} m = 2$$

Elementen för en matris A på rad nummer i och kolumn nummer j designerar vi med A_{ij} eller $A_{i,j}$

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = 3, \quad A_{21} = 4, \quad A_{22} = 5$$

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mn} \end{pmatrix}}^{n \text{ kolumner}} \Bigg\} m \text{ rader}$$

Observera att m inte nödväntigtvis behöver vara lika med n.

Dvs, antalet rader i en matris behöver generellt inte vara lika med antalet kolumner.

Matriser där m = n kallas för *kvadratiska* matriser

Matrisoperationer

Vi säger att två matriser A & B har samma dimension om de har lika många rader och lika många kolumner.

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = 2 \times 3 \qquad \dim(B) = 2 \times 3$$

Vi ser ovan att matriserna A och B har samma dimension (dvs lika många rader och kolumner) som varandra.

kräver att $\dim(A) = \dim(B)$

Addition av matriser av samma dimension definieras som elementvis addition

$$A + B = \begin{pmatrix} (3+1) & (1+0) & (2+1) \\ (5-1) & (4+0) & (3-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Subtraktion av matriser av samma dimension definieras som elementvis subtraktion

$$A - B = \begin{pmatrix} (3-1) & (1-0) & (2-1) \\ (5+1) & (4-0) & (3+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Helt oberoende av $\dim(A)$

Skalär multiplikation av en skalär k och en matris A definieras som elementvis multiplikation

$$kA = k \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot 3 & k \cdot 1 & k \cdot 2 \\ k \cdot 5 & k \cdot 4 & k \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$k = 3$

$$kA = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 15 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Några speciella matriser av dimensionerna 2x2 och 3x3

Zero matrix

$$O_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identity matrix

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim(A) = 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \dim(B) = 3 \times 3$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\cdot2 + 3\cdot1 + 1\cdot4) & (3\cdot0 + 3\cdot0 + 1\cdot3) & (3\cdot1 + 3\cdot2 + 1\cdot2) \\ (1\cdot2 + 2\cdot1 + 1\cdot4) & (1\cdot0 + 2\cdot0 + 1\cdot3) & (1\cdot1 + 2\cdot2 + 1\cdot2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 11 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \underset{\substack{2\times3 \\ m\times n}}{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{3\times3 \\ s\times t}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{2\times3 \\ m\times t}}{\begin{pmatrix} 13 & 3 & 11 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}} = C$$

$n = s$

För matrismultiplikation kräver vi att antalet kolumner **n** i A är samma som antalet rader **s** i B!

Givet att kravet ovan är uppfyllt kommer AB där dim(A) = **m**x**n** och dim(B) = **s**x**t**, resultera i en matris C med dim(C) = **m**x**t**.

Bekräfta att $\dim(C) = m \times t$ när ni gör uppgifter!

Matrismultiplikation med en vektor

En vektor **v** kan ses som en rad- eller kolonnmatris!

$$\bar{v} = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \bar{u} = \underset{1\times2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B\bar{v} = \underset{\substack{3\times2 \\ m\times n}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\substack{2\times1 \\ s\times t}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (4\cdot2 + 3\cdot1) \\ (2\cdot2 + 1\cdot1) \\ (5\cdot2 + 3\cdot1) \end{pmatrix} = \underset{\substack{3\times1 \\ m\times t}}{\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}}$$

Counting Rules for Matrix Operations

Matrix operations obey the following rules:

1. **Distributive Property**:

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

2. **Associative Property**:

$$A(BC) = (AB)C$$

3. **Scalar Multiplication**:

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

Key Notes:

- Matrix multiplication is in general **not commutative** ($AB \neq BA$).
- *Some* matrices are commutitative, i.e $AB = BA$, but this is not always the case.
- Verify dimensional compatibility before multiplying.