

Transponat

Att *transponera* en matris A görs ofta för att dimensioner ska sammanfalla vid beräkningar.

Att transponera en matris är väldigt enkelt. Vi byter helt enkelt plats på varje element i matrisen, på följande vis

$A_{i,j} \rightarrow A_{j,i}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$\dim(A) = 3 \times 3$   
 $\dim(A^T) = 3 \times 3$

För kvadratiska matriser är dimensionen av A och dess transponat samma!

$A_{11} = 1, A_{12} = 2, A_{13} = 3$   
 $A_{21} = 4, A_{22} = 5, A_{23} = 6$   
 $A_{31} = 7, A_{32} = 8, A_{33} = 9$

$A^T_{11} = 1, A^T_{12} = 4, A^T_{13} = 7$   
 $A^T_{21} = 2, A^T_{22} = 5, A^T_{23} = 8$   
 $A^T_{31} = 3, A^T_{32} = 6, A^T_{33} = 9$

Transponat är definierad för **alla** matriser, oavsett dimension

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\dim(B) = 2 \times 3$   
 $\dim(B^T) = 3 \times 2$

$B_{11} = 1, B_{12} = 2, B_{13} = 3$   
 $B_{21} = 4, B_{22} = 5, B_{23} = 6$

Generellt sätt gäller följande för transponat

$$\dim(A) = m \times n$$
$$\Rightarrow \dim(A^T) = n \times m$$

Om man ser på en vektor som en rad- eller kolonnmatris går det även att transponera den

$\bar{u} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad \bar{u}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$1 \times 2 \qquad 2 \times 1$

---

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$B \bar{u}^T = ?$  *gär ej*

$B \bar{u}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$

---

1. Anta nu vi har en matris A

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Beräkna  $(A^T)^T$

$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$

2. Zero matrix

Var för de om du multiplicerar  $O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

med ex  $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} ?$

$O_{3 \times 3} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Identity matrix

$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$I_{3 \times 3} B = ?$   
 $I_{3 \times 3} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B$

Identitetsmatrisen ger tillbaka samma kvadratiska matris som den multipliceras med!

När identitetsmatrisen multipliceras med en kvadratisk matris är operation dessutom **kommutativ**. Dvs

$I_{3 \times 3} B = B I_{3 \times 3} = B$

$B I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$