S13

Magnús Daníel Einarsson

17. apríl 2023

VV4. Próf í stærðfræði og reiknifræði 2019

D. Vigrar

1. Sýnið að vigrarnir a =(1,2,3), b =(4,2,0) og c =(1,0,1) séu línulega óháðir.
2. Hver margar gráður er hornið milli a og b?
3. Finnið bigur d þannig að a, b og d verði línulega háðir.
4. Nokkrir ætla að leggja í púkk til að kaupa hlut. Ef hver borgar átta peninga eru þrír peningar afgangs en ef hver borgar sjö vantar fjóra upp á. Þetta dæmi mætti leysa með því að leysa jöfnu $Ax = B$ þar sem A er 22 fylki og b^2. Ákvarðið A og b (ekki skal leysa jöfnuna).

Lausn:

1. $\begin{bmatrix} 1a + 4b + c \\ 2a + 2b + 0c \\ 3a + 0b + 1c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Með þessum upplýsingum getum við notað línu 3 og breytt henni. Þannig verður $c = -3a$
   Breytum næst c í línu 1 úr c yfir í -3a.
   $1a + 4b - 3a = 0$
   $-2a + 4b = 0$
   Nú vitum við að $4b = 2a$
   Þá eru $2b = a$
   Notum þessar tölur í línu 2 og fáum $2a + a = 0$
   Úr því $3a = 0$ þá erum við bara með eina lausn fyrir a. a verður að vera 0 til þess að þetta gangi upp.
   Næst getum við fært okkur í línu eitt þar sem jafnan var $-2a + 4b = 0$.
   Við vitum að a er 0, því er jafnan $4b = 0$ og með þessum upplýsingum getum við líka sagt eina talan sem gengur upp fyrir b er 0.
   Færum okkur í línu 3 þar sem a er 0 og fáum því $c = 0$. Þetta er nóg til þess að sanna að vigrarnir eru línulega óháðir.

2. Erum með jöfnuna $\theta = \arccos \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$
   Setjum tölur inn í staðinn þar sem x er a og y er b og fáum: $\theta = \arccos \frac{(1\cdot4)+(2\cdot2)+(3\cdot0)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{4^2+2^2}}$
   Úr þessu fáum við $1.07231589 rad$ og breytum því yfir í gráður með því að margfalda rad með 180 og deila svo með pí. $1.07231589 \cdot \frac{180}{\pi} = 61.43917480197$

3. Til þess að finna hvort vigrar eru línalega háðir þurfa tölur $c_1, ..., c_k$ þar sem ekki eru allar tölur 0 þannig að $c_1 x_1 + ... + c_k x_k = 0$

$$\begin{bmatrix} 1a + 4b + d_1x_1 \\ 2a + 2b + d_2x_2 \\ 3a + 0b + d_3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$1 + 4 + x_1 = 0$
$2 + 2 + x_2 = 0$
$3 + 0 + x_3 = 0$
Út frá þessu sjáum við að $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = -3$
Þess vegna er vigurinn d = (-5,-4,-3)

4. 8 peningar - verð = 3 í afgang
   7 peningar - verð = -4 sem vantar uppá
   A = $\begin{bmatrix} 8 \text{ -1} \\ 7 \text{ -1} \end{bmatrix}$ b = $\begin{bmatrix} 3 \\ \text{-4} \end{bmatrix}$

Leysið dæmi 2 á prófi frá apríl 2020

Gefið er fallið $f(x, y) = x^3 - 3xy - 3x^2 + y^2 + 6x - y + 8$

a) Ákvarðið stigul f.

b) Fallið hefur einn lággildispunkt með x > 1. Notið stigulinn til að ákvaðra hann

Lausn:

a) Byrjum á að finna afleiður með tilliti til x og tilliti til y.
   $f'(x) = 3x^2 - 3y - 6x + 6$
   $f'(y) = -3x + 2y - 1$

   f′(x,y) = $\begin{pmatrix} 3\text{x}^2 - 3y - 6x + 6 \\ \text{-3x+2y-1} \end{pmatrix}$

b) $-3x + 2y = 1$ og $2y = 3x + 1$ þá er $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
   $-3y = -4.5x - 1.5$
   Notum þessa jöfnu til þess að breyta -3y í jöfnunni $f'(x) = 3x^2 - 4.5x - 1.5 - 6x + 6$
   sem verður $f'(x) = 3x^2 - 10.5x - 4.5$
   Beytum annarsstigsmargliðu formúlu á þessa jöfnu til að finna þessi tvö x:
   $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
   $x = \frac{-10.5 \pm \sqrt{10.5^2 - 4 \cdot 4.5 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$
   Úr þessu fáum við tvö x. Annarsvegar er x = 0.5 og hinsvegar 3
   Þar sem lággildispunktur á að vera meira en 1 þá vitum við að x = 3
   Setjum gildi x í jöfnuna fyrir $f'(y)$ og fáum $-3 \cdot 3 + 2y - 1$
   Einangrum fyrir y og fáum að y=5

Notið regluna um Hesse-fylki og útgildi (í kafla 1.9) til að sýna að punkturinn sem fannst að ofan sé lággildi

Lausn:
Fáum niður tvær jöfnurnar úr fyrra dæmi: $f'(x) = 3x^2 - 3y - 6x + 6$
$f'(y) = -3x + 2y - 1$

Fyrir Hesse-fylki þarf að finna margliðu af þessum tveimur jöfnum á fjóra vegu.

∇^2 f(p) = $\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$
Setjum viðeigandi formúlur í hvern lið.

$$\nabla^2 f(p) = \begin{bmatrix} f_{xx}(6x-6) & f_{xy}(-3) \\ f_{yx}(-3) & f_{yy}(2) \end{bmatrix}$$

Finnum næst det(A) með formúlunni A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\det(A) = ad - bc$
Fáum því $\det(A) = (6x-6) \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) = 12x - 21$
Ef det(A)>0 og a>0 þá hefur f staðbundið lággildi í (x,y) og höfum við því sannað að jafnan er með staðbundið lággildi.