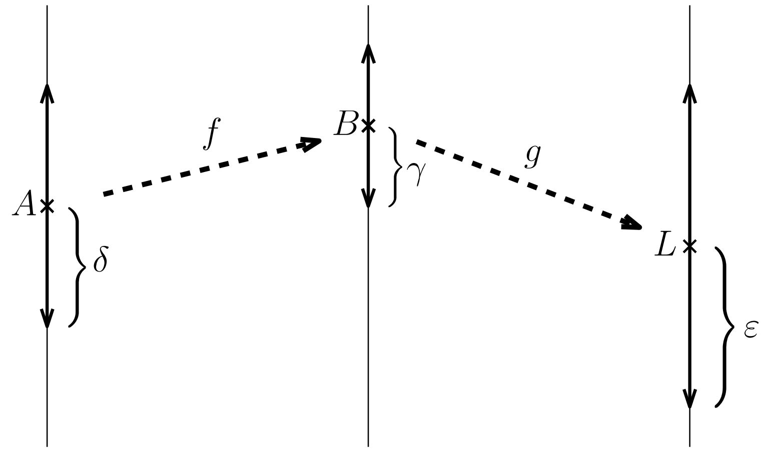

Obrázek 5.1: Ilustrace k důkazu věty o limitě složené funkce

Důkaz. (Viz Obrázek 5.1.) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Naším cílem je ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že $g(f(\mathcal{P}(A,\delta)))$ je podmnožina $\mathcal{U}(L,\varepsilon)$.

Protože $\lim_{x\to B} g(x) = L$, existuje $\gamma > 0$ takové, že

$$g(\mathcal{P}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon). \tag{5.1}$$

Protože $\lim_{x\to A} f(x) = B$, tak pro toto γ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(B,\gamma). \tag{5.2}$$

Jediná obtíž nyní je ta, že okolí $\mathcal{U}(B,\gamma)$ není obsaženo v okolí $\mathcal{P}(B,\gamma)$ – má navíc bod B. Nyní musíme využít toho, že platí jedna z podmínek P1 a P2.

Pokud je splněna podmínka P1, tj. pokud platí $g(B) = L$, tak inkluze (5.1) se dá zesílit na

$$g(\mathcal{U}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon). \tag{5.3}$$

Pak obtíž mizí a pomocí (5.2) a (5.3) dostaneme

$$g(f(\mathcal{P}(A,\delta))) \subseteq g(\mathcal{U}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to A} g(f(x)) = L$.

Pokud je splněna podmínka P2, můžeme $\delta > 0$ zvolit tak, aby navíc platilo $\delta < \delta_0$, a potom lze inkluzi (5.2) zesílit na

$$f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{P}(B,\gamma). \tag{5.4}$$

Obtíž opět mizí a pomocí (5.4) a (5.1) dostaneme

$$g(f(\mathcal{P}(A,\delta))) \subseteq g(\mathcal{P}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon)$$

a $\lim_{x\to A} g(f(x)) = L$. □