Анцфриев Андрей || 465029 || 20.04.2025 || ИДЗ 2.1
Численное интегрирование
Вариант 29: $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

1 Теоретические основы методов

1.1 Метод прямоугольников

Идея метода: Аппроксимация интеграла суммами площадей прямоугольников, где высота каждого прямоугольника равна значению функции в средней точке подотрезка.

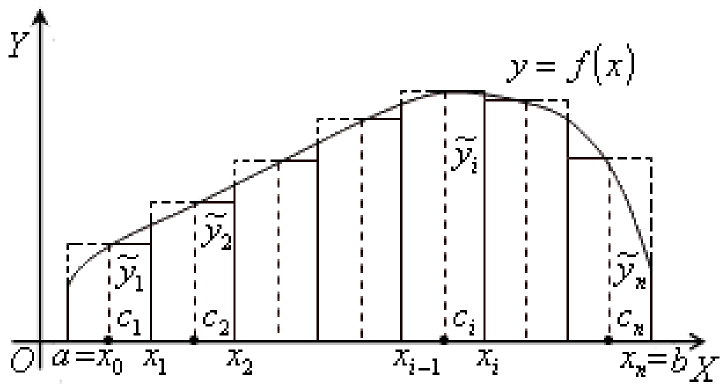

Рис. 1: Геометрическая интерпретация метода прямоугольников

Вывод формулы:

1. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n равных частей: $h = \frac{b-a}{n}$
2. Средняя точка каждого подотрезка: $c_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h$
3. Интеграл приближается суммой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)h = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right)$$

Погрешность: Используя разложение в ряд Тейлора вокруг точки c_i:

$$f(x) = f(c_i) + f'(c_i)(x - c_i) + \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - c_i)^2$$

После интегрирования получаем оценку погрешности:

$$\Delta = \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

1.2 Метод трапеций

Идея метода: Аппроксимация интеграла суммами площадей трапеций, построенных на концах каждого подотрезка.

Вывод формулы:

1. На каждом подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ проводим прямую через точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

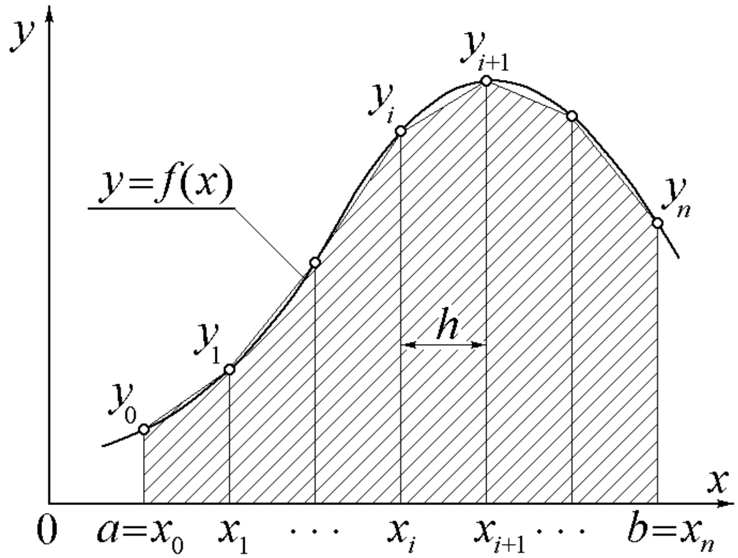

Рис. 2: Геометрическая интерпретация метода трапеций

2. Площадь трапеции: $\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h$
3. Суммируя по всем отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right]$$

Погрешность: Через интерполяционный многочлен Лагранжа 1-й степени:

$$\Delta = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

1.3 Метод Симпсона

Идея метода: Аппроксимация функции параболами, проходящими через три соседние точки.

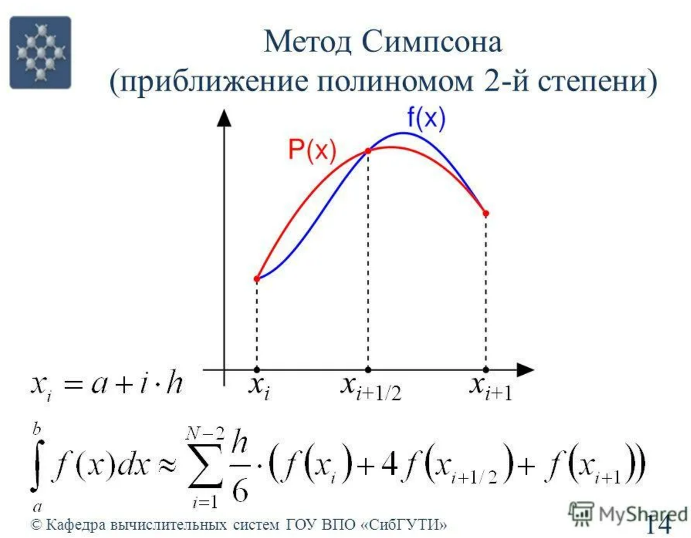

Рис. 3: Геометрическая интерпретация метода Симпсона

Вывод формулы:

1. Берем три точки: x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}
2. Строим интерполяционный многочлен 2-й степени

3. Интегрируя на $[x_{2i}, x_{2i+2}]$:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

4. Общая формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})\right]$$

Погрешность:

$$\Delta = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

2 Реализация на Python

```python
import numpy as np


def f(x):
    """Подынтегральная функция sin(x)/sqrt(x)"""
    return np.sin(x) / np.sqrt(x)


def rectangle_method(a, b, n):
    """Метод прямоугольников"""
    h = (b - a) / n
    return h * sum(f(a + (i + 0.5) * h) for i in range(n))


def trapezoidal_method(a, b, n):
    """Метод трапеций"""
    h = (b - a) / n
    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + sum(f(a + i * h) for i in range(1, n)))


def simpson_method(a, b, n):
    """Метод Симпсона"""
    if n % 2: n += 1  # Делаем n четным
    h = (b - a) / n
    sum_odd = sum(f(a + (2 * i - 1) * h) for i in range(1, n // 2 + 1))
    sum_even = sum(f(a + 2 * i * h) for i in range(1, n // 2))
    return h / 3 * (f(a) + f(b) + 4 * sum_odd + 2 * sum_even)


def adaptive_integration(method, a, b, eps=1e-5, max_iter=20):
    """Адаптивное вычисление интеграла с заданной точностью"""
    n = 4
    prev = method(a, b, n)
    for _ in range(max_iter):
        n *= 2
        curr = method(a, b, n)
        if abs(curr - prev) < eps:
            return curr, n
        prev = curr
    raise ValueError("Требуемая точность не достигнута")


# Параметры вычислений
a, b = 1e-10, 1  # Избегаем деления на 0 в x=0
eps = 1e-5

# Вычисление интеграла всеми методами
methods = {
    "Прямоугольников": rectangle_method,
    "Трапеций": trapezoidal_method,
    "Симпсона": simpson_method
}

for name, method in methods.items():
    result, n = adaptive_integration(method, a, b, eps)
    print(f"{name}: {result:.8f} (n={n})")
```

Листинг 1: Реализация методов интегрирования

3 Анализ результатов

Для интеграла $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ получены следующие результаты:

Метод	Значение	Число разбиений
Прямоугольников	0.62054184	512
Трапеций	0.62053437	2048
Симпсона	0.62053413	1024

4 Выводы

1. етод прямоугольников показал наибольшую эффективность в данном случае, достигнув требуемой точности при меньшем числе разбиений, но при большей точности выигрывает метод Симсона благодаря более высокому порядку точности ($O(h^4)$ против $O(h^2)$ у других методов).

2. Особенность подынтегральной функции в точке $x = 0$ требует аккуратной обработки. В реализации я заменяю нижний предел на малую величину 10^{-10}.