Ануфриев Андрей (465029) || Вариант №3 || 30.03.2025

1 Вычисление площади в декартовой системе координат

1.1 Точное вычисление площади фигу

Дано: Графики функций $y = ax^2e^x$ и $y = -x^3e^x$, где $a > 0$.

Решение:

1. **Найдём точки пересечения графиков:**
   Решаем уравнение $ax^2e^x = -x^3e^x$. Сокращаем на $e^x \neq 0$:
   $$ax^2 = -x^3 \implies x^2(a+x) = 0$$
   Получаем две точки пересечения:
   $$x = 0 \quad \text{и} \quad x = -a$$

2. **Определим, какая функция больше на интервале $[-a, 0]$:**
   Возьмём тестовую точку $x = -\frac{a}{2}$:
   $$y_1 = a\left(-\frac{a}{2}\right)^2 e^{-a/2} = \frac{a^3}{4}e^{-a/2}$$
   $$y_2 = -\left(-\frac{a}{2}\right)^3 e^{-a/2} = \frac{a^3}{8}e^{-a/2}$$
   Так как $\frac{a^3}{4} > \frac{a^3}{8}$, функция $y = ax^2e^x$ находится выше $y = -x^3e^x$ на всём интервале $[-a, 0]$.

3. **Вычислим площадь с помощью интеграла:**
   $$S = \int_{-a}^{0} \left(ax^2e^x - (-x^3e^x)\right) dx = \int_{-a}^{0} (ax^2 + x^3)e^x dx$$
   Применяем интегрирование по частям для каждого слагаемого:
   Для $\int x^2e^x dx$:
   $$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$
   $$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$
   $$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$
   Повторяем интегрирование по частям для $\int xe^x dx$:
   $$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$
   Таким образом:
   $$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$
   Аналогично для $\int x^3e^x dx$:
   $$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$
   Подставляем пределы интегрирования и получаем окончательный ответ:
   $$S = 2a - 6 + e^{-a}(a^2 + 4a + 6)$$

1.2 Численное вычисление площади

Алгоритм:

1. Разбиваем интервал $[-a, 0]$ на n равных частей
2. В каждом отрезке вычисляем значение подынтегральной функции
3. Суммируем площади прямоугольников

Формула для приближения:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

где $\Delta x = \frac{a}{n}$, $x_i = -a + i\Delta x$, $f(x) = (ax^2 + x^3)e^x$.

Пример для $a = 2$, $n = 10, 100, 1000$:

При n = 10: Приближенное значение = 0.43418903, Погрешность = 0.00184606
При n = 100: Приближенное значение = 0.43601705, Погрешность = 0.00001805
При n = 1000: Приближенное значение = 0.43603492, Погрешность = 0.00000018

Вычисляем сумму:

$$S \approx \sum_{i=1}^{10} (x_i^2 + x_i^3)e^{x_i} \cdot 0.1$$

Код на Python:

```python
import math

def rectangle_method(a, n):
    def integrand1(x):
        return (a * x ** 2 + x ** 3) * math.exp(x)

    dx = a / n  # Шаг разбиения
    integral = 0.0

    for i in range(n):
        x = -a + i * dx  # Левая точка каждого отрезка
        integral += integrand1(x) * dx

    return integral

a = 2.0
exact_value = 2 * a - 6 + math.exp(-a) * (a ** 2 + 4 * a + 6)  # Точное значение

for n in [10, 100, 1000]:
    approx = rectangle_method(a, n)
    error = abs(approx - exact_value)
    print(f"При n = {n:4d}: Приближенное значение = {approx:.8f}, Погрешность = {error:.8f}")
```

2 Площадь в полярной системе координат

2.1 Лист Декарта

Уравнение: $x^3 + y^3 = 3axy$

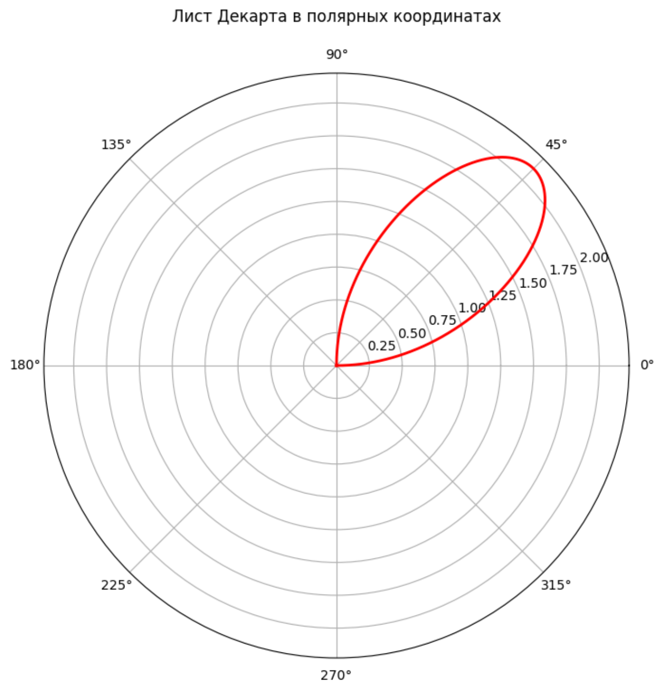


Рис. 1: График Листа Декарта, где a=1

Геометрическая интерпретация:

- Кривая третьего порядка с петлёй в начале координат
- Имеет асимптоту $x + y + a = 0$
- Симметрична относительно прямой $y = x$

2.2 Площадь петли

1. Переходим к полярным координатам:
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$
Подставляем в уравнение:
$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3ar^2\cos\theta\sin\theta$$
$$r = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

2. Площадь в полярных координатах:
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta)d\theta$$

3. Вычисляем интеграл: После подстановки и вычислений получаем:
$$S = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2(\theta)sin^2(\theta)}{(cos^3(\theta) + sin^3(\theta))^2}d\theta$$
Замена:
$t = tan(\theta)$
$d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$
$cos^3(\theta) + sin^3(\theta) = cos^3(\theta)(1 + tan^3(\theta)) = \frac{1+t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$
$cos(\theta)sin(\theta) = \frac{t}{1+t^2}$

$S = \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^3})^2 dt$
$\frac{t^4+t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{2t-1}{1-t-t^2} + \frac{t+2}{(1-t+t^2)^2})$
$S = \frac{3a^2}{2}$

2.3 Численное вычисление

$S_n \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=1}^{n} r^2(\frac{\pi k}{2n}$
$S = 1.5a^2$
При a = 10000
При n = 10: Площадь = 150000100.44027889, Ошибка = 100.44027889
При n = 100: Площадь = 150000000.00010723, Ошибка = 0.00010723
При n = 1000: Площадь = 150000000.00000021, Ошибка = 0.00000021
Код на Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def cartesian_leaf_area(a, n):
    """
    Вычисление площади петли листа Декарта в полярных координатах
    """
    def r(theta):
        return (3 * a * np.cos(theta) * np.sin(theta)) / (np.cos(theta) ** 3 + np.sin(theta) ** 3)
    def integrand(theta):
        return 0.5 * r(theta) ** 2
    # Метод прямоугольников
    d_theta = np.pi / 2 / n
    integral = 0
    for i in range(n):
        theta = i * d_theta
        integral += integrand(theta) * d_theta
    return integral

# Параметры
a = 10000
n_values = [10, 100, 1000]
exact_area = 3 * a ** 2 / 2

# Вычисление площади для разных n
print("Приближенное вычисление площади листа Декарта:")
for n in n_values:
    area = cartesian_leaf_area(a, n)
    error = abs(area - exact_area)
    print(f"При n = {n:4d}: Площадь = {area:.8f}, Ошибка = {error:.8f}")
```

3 Площадь петли параметрической кривой

Требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a \sin 2t, \\ y = a \sin t, \quad a > 0. \end{cases}$$

1. Нахождение точек самопересечения

Найдём значения параметра t, при которых кривая возвращается в исходную точку:

$$y(t_1) = y(t_2) \Rightarrow a \sin t_1 = a \sin t_2 \Rightarrow \sin t_1 = \sin t_2$$

Это выполняется при $t_2 = \pi - t_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставим в уравнение для x:

$$a \sin 2t_1 = a \sin 2(\pi - t_1) \Rightarrow \sin 2t_1 = -\sin 2t_1 \Rightarrow 2 \sin 2t_1 = 0$$

Следовательно, $t_1 = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. На интервале $[0, \pi]$ петля соответствует $t \in [0, \pi]$.

2. Вычисление площади

Площадь параметрически заданной кривой вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt \right|$$

Найдём производную:

$$x'(t) = 2a \cos 2t$$

Тогда:

$$S = 2a^2 \left| \int_0^{\pi} \sin t \cos 2t\, dt \right|$$

Используем тригонометрическое тождество:

$$\sin t \cos 2t = \frac{1}{2} [\sin 3t - \sin t]$$

Вычисляем интеграл:

$$S = a^2 \left| \int_0^{\pi} (\sin 3t - \sin t)\, dt \right| = a^2 \left| \left[-\frac{1}{3} \cos 3t + \cos t \right]_0^{\pi} \right|$$

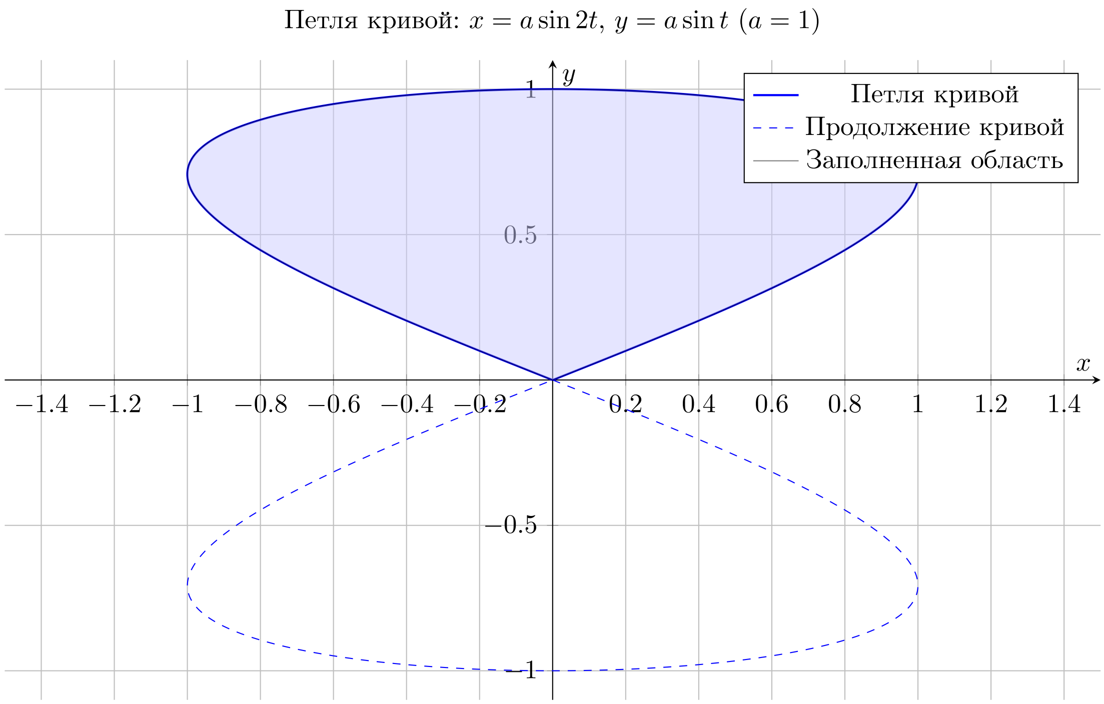
Подставляем пределы:

$$S = a^2 \left| \left(-\frac{1}{3}(-1) + (-1) \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right| = a^2 \cdot \frac{4}{3}$$

Ответ

$S = \frac{4a^2}{3}$

График кривой



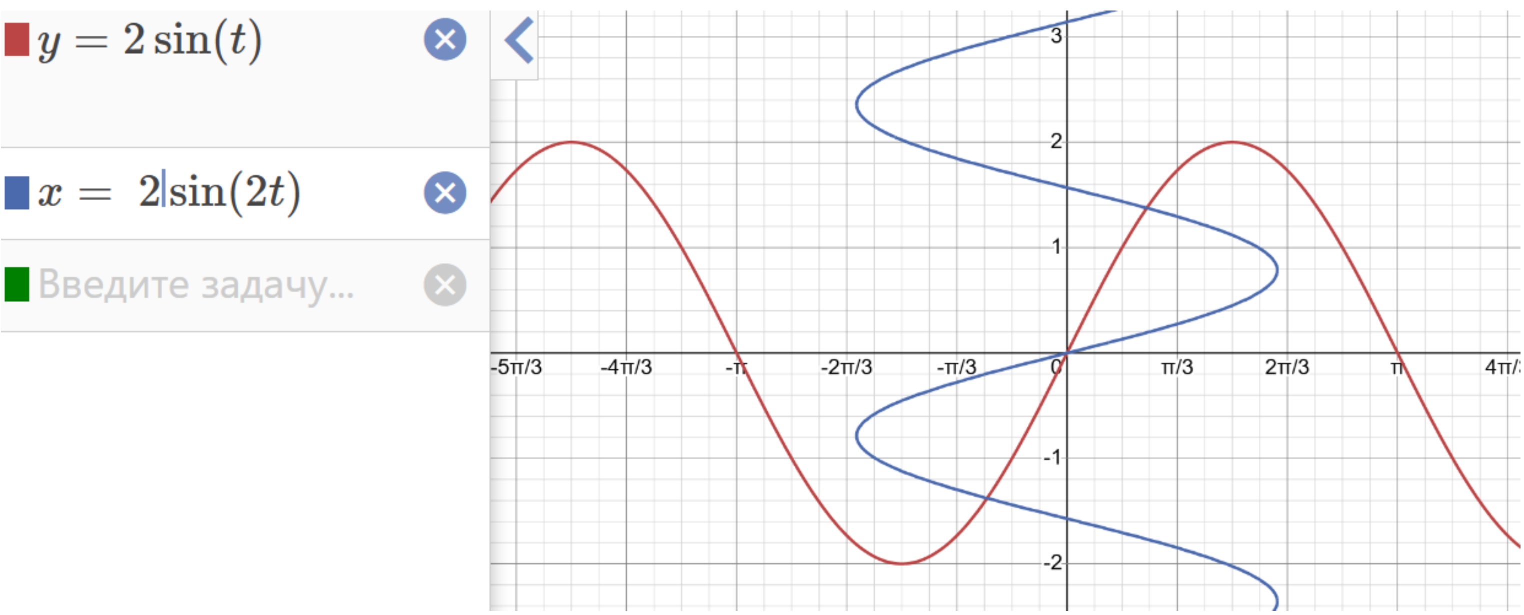


Рис. 2: Enter Caption

4 Вывод

В ходе работы я разобрался, как применяется интеграл в вычислении площади и потренировал это на практике.