Ануфриев Андрей Сергеевич || 465029 || ИДЗ 1.3

Исследование несобственных интегралов на сходимость

1.Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x - e^{-x}} - 2\right| dx$$

Анализ:

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x - e^{-x}} - 2\right|$ неотрицательна. Исследуем поведение на бесконечности и в окрестности нуля.

- При $x \to \infty$:
  $e^x - e^{-x} \approx e^x$, следовательно $\frac{x}{e^x - e^{-x}} \approx xe^{-x} \to 0$.
  Тогда $f(x) \approx \frac{2}{x^2}$. Интеграл $\int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx$ сходится.
- При $x \to 0$:
  Разложим в ряд: $e^x - e^{-x} \approx 2x + \frac{x^3}{3}$,
  $\frac{x}{e^x - e^{-x}} \approx \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}$,
  $f(x) \approx \frac{1}{x^2}\left|\frac{1}{2} - 2\right| = \frac{3}{2x^2}$.
  Интеграл $\int_0^1 \frac{3}{2x^2} dx$ расходится.

Вывод:

Интеграл расходится.

2. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} dx$$

1. В точках $x_n = n\pi$ (где $\sin x_n = 0$):
$$f(x_n) = \frac{n\pi}{1+0} = n\pi \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty$$
2. Для $x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$:
$$\int_{n\pi - \pi/2}^{n\pi + \pi/2} f(x) dx \geq \text{const} > 0$$
3. Сумма таких интегралов:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{const} = +\infty$$

Вывод: Интеграл расходится, так как функция не стремится к нулю и имеет бесконечную серию "пиков"

3. Интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x(\pi - 2x)^5}} dx$$

Анализ:

Подынтегральная функция имеет особенности в точках $x = 0$ и $x = \pi/2$.

- При $x \to 0^+$:
  $\ln \sin x \approx \ln x$,
  $(\pi - 2x)^5 \approx \pi^5$,
  $f(x) \approx \frac{\ln x}{\sqrt{x\pi^5}}$.
  Интеграл $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

- При $x \to \pi/2^-$:
  Пусть $t = \pi/2 - x$:
  $\ln \sin x \approx \ln \cos t \approx -\frac{t^2}{2}$,
  $(\pi - 2x)^5 = (2t)^5$,
  $f(x) \approx \frac{-t^2/2}{\sqrt{(\pi/2)(2t)^5}} \approx -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} t^{-1/2}$.
  Интеграл $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ сходится.

Вывод:
Интеграл сходится.

4. Интеграл:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$$

4.1. Замена переменной Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Пределы интегрирования:

- При $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$
- При $x = 1 \Rightarrow t = 1$

Преобразуем интеграл:

$$I = \int\limits_{+\infty}^{1} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} \sin t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} \sin t \, dt$$

4.2. Применение признака Дирихле Рассмотрим:

$$f(t) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t}, \quad g(t) = \sin t$$

Условия признака Дирихле:

1. Функция $f(t)$ монотонно убывает к 0 при $t \to +\infty$:
   - $\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)$ убывает (так как $\frac{1}{t^2}$ убывает)
   - $\frac{1}{t}$ убывает
   - Произведение убывающих функций убывает
   - Предел: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$
2. Первообразная $g(t)$ ограничена:

$$\left| \int\limits_{1}^{T} \sin t \, dt \right| = |\cos 1 - \cos T| \leq 2$$

Следовательно, по признаку Дирихле интеграл I сходится.

4.3. Исследование на абсолютную сходимость Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \left| \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} \sin t \right| dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} |\sin t| dt$$

Оценим подынтегральную функцию:

- При $t \to +\infty$: $\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) \approx \frac{1}{t^2}$
- Следовательно: $\frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} \approx \frac{1}{t^3}$

- $|\sin t| \leq 1$

Получаем оценку:

$$\frac{\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t}|\sin t| \leq \frac{1}{t^3}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ сходится (поскольку $3 > 1$), следовательно исходный интеграл сходится абсолютно.

Вывод

$$\boxed{\text{Интеграл } \int\limits_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ сходится абсолютно}}$$