# Дискретная математика

## Глава 6. Цепи и антицепи

А. В. Пастор

19.03.2024

## Цепи и антицепи

- Напомним, что частично упорядоченным множеством называется упорядоченная пара $(X, \succ)$, где $X$ — множество и $\succ$ — отношение частичного порядка на $X$.
- Для определенности будем считать, что $\succ$ — отношение строгого частичного порядка, то есть оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

### Определение

Пусть $(M, \succ)$ — конечное частично упорядоченное множество.

- *Цепью* в $M$ называется линейно упорядоченное подмножество $X \subset M$
  - т. е. элементы $X$ образуют монотонную последовательность

$$x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_m.$$

- *Антицепью* в $M$ называется подмножество $Y \subset M$, любые два различных элемента которого *несравнимы*
  - т. е. такие $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $y_i \not\succ y_j$ при $i \neq j$.

# Цепи и антицепи с точки зрения орграфов

## Замечание

- Пусть $(M, \succ)$ — конечное частично упорядоченное множество.
- Построим соответствующий ему орграф $D_M$ следующим образом:
  - $V(D_M) = M$;
  - $A(D_M) = \{xy \mid x \succ y\}$.
- Заметим, что тогда
  - $D_M$ — орграф без циклов;
  - цепь в $M$ — это простой ориентированный путь в $D_M$;
  - антицепь в $M$ — это независимое множество в $D_M$.
- Обратно, любой орграф $D$ без циклов задает отношение частичного порядка на множестве своих вершин.
  - Для этого нужно построить *транзитивное замыкание* орграфа $D$, то есть провести стрелки, соединяющие начало любого простого пути в $D$ с его концом.

Далее, нас будут интересовать разбиения $M$ на наименьшее возможное число цепей и на наименьшее возможное число антицепей.

## Теорема Мирского

### Теорема (Мирский, 1971)

*Длина максимальной цепи в $M$ равна минимальному количеству антицепей, на которые разбивается $M$.*

Доказательство.

- Пусть $m$ — длина максимальной цепи в $M$;
- $k$ — минимальное число антицепей, на которые разбивается $M$.
- Неравенство $k \geq m$ тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что $k \leq m$. Для этого нужно построить разбиение множества $M$ на $m$ антицепей.
  - Пусть $\ell(x)$ — длина максимальной цепи с началом в $x$.
  - Для каждого $i \in [1..m]$ введем обозначение $Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \ell(x) = i\}$.
  - Легко видеть, что $Y_1, \ldots, Y_m$ — антицепи в $M$, причем каждый элемент $M$ принадлежит ровно одной из этих антицепей.
  - Следовательно, $Y_1, \ldots, Y_m$ — разбиение $M$ на $m$ антицепей. □

# Теорема Мирского и раскраски графов



## Замечание

- Наряду с орграфом $D_M$, можно также рассмотреть соответствующий неориентированный граф $G_M \overset{\text{def}}{=} \underline{D_M}$.
- Заметим, что тогда
  - цепи в $M$ соответствуют кликам в графе $G_M$;
  - антицепи в $M$ соответствуют независимым множествам в $G_M$.
- Тогда длина максимальной цепи в $M$ равна $\omega(G_M)$;
- минимальное число антицепей, на которые разбивается $M$, равно $\chi(G_M)$.
- То есть теорема Мирского утверждает, что $\chi(G_M) = \omega(G_M)$.
- Легко видеть, что аналогичное равенство верно и для любого индуцированного подграфа $G_M$.

## Определение

Граф $G$ называется *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа $H$ выполнено равенство $\chi(H) = \omega(H)$.

- То есть из теоремы Мирского следует, что граф $G_M$ — совершенный.

## Теорема Дилуорса

### Теорема (Дилуорс, 1950)

*Размер максимальной антицепи в $M$ равен минимальному количеству цепей, на которые разбивается $M$.*

### Замечание

Эта теорема уже была доказана в курсе теории графов, как следствие теоремы Галлаи-Мильграма. Здесь мы приведем другое доказательство теоремы Дилуорса.

Доказательство. Пусть $n$ — размер максимальной антицепи в $M$; $k$ — минимальное число цепей, на которые разбивается $M$.

- Как и в предыдущей теореме, неравенство $k \geq n$ тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что $k \leq n$. Для этого нужно построить разбиение множества $M$ на $n$ цепей.
- Пусть $M = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ и $D = D_M$ — соответствующий орграф.

## Доказательство теоремы Дилуорса

- "Удвоим" орграф $D$. Т. е. построим следующий двудольный граф $H$:
  - каждой вершине $u_i \in M$ ставим в соответствие пару вершин $a_i, b_i$;
  - пусть $A = \{a_1, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, \dots, b_p\}$, $V(H) = A \cup B$;
  - если в $D$ есть стрелка $u_i u_j$, то проводим в $H$ ребро $a_i b_j$.
- Можно считать, что $b_i$ — это "*вход*" в вершину $u_i$, а $a_i$ — "*выход*".
- Докажем, что $\beta(H) \geq p - n$.
  - Действительно, пусть $W$ — вершинное покрытие в $H$.
  - Рассмотрим подмножество $W' \subset M$, состоящее из элементов, соответствующих вершинам из $W$.
  - Тогда $W'$ — вершинное покрытие в $D$.
  - Следовательно, $M \setminus W'$ — независимое множество, т. е. антицепь в $M$.
- По теореме Кёнига $\alpha'(H) = \beta(H) \geq p - n$.
- Тогда в $G$ есть паросочетание $S$, где $|S| \geq p - n$.
- Пусть $F$ — множество стрелок $D$, соответствующих ребрам из $S$.
- Рассмотрим подграф $D' = (M, F)$ орграфа $D$.
- В нем $p$ вершин и не менее $p - n$ стрелок.

## Завершение доказательства теоремы Дилуорса

- Все компоненты слабой связности $D'$ — простые ориентированные пути.
  - Компонента не может быть циклом, т. к. в $D$ циклов нет.
- Эти пути являются цепями в $M$ и задают разбиение $M$ на цепи.
- Путей не более $n$, т. к. если в пути $\ell$ стрелок, то в нем $\ell + 1$ вершина. □

### Замечание

Мы вывели теорему Дилуорса из теоремы Кёнига. Можно сделать и наоборот. Давайте выведем теорему Кёнига из теоремы Дилуорса.

- Пусть $H = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф.
- Обозначим через $D$ ориентацию графа $H$, в которой все стрелки ориентированны из $V_1$ в $V_2$.
- Орграф $D$ задает отношение частичного порядка на множестве $V = V_1 \cup V_2$.
- Очевидно, что любая цепь в получившемся частично упорядоченном множестве состоит из не более, чем двух вершин. Более того, цепи из двух элементов — это стрелки орграфа $D$.

## О связи теорем Дилуорса и Кёнига



- Таким образом, любое разбиение $V$ на непересекающиеся цепи состоит из нескольких не имеющих общих концов стрелок (эти стрелки задают некоторое паросочетание в $H$) и отдельных вершин.
- Следовательно, минимальное количество цепей, на которые можно разбить $V$, равно $v(H) - \alpha'(H)$.
- С другой стороны, подмножество $W \subset V$ является антицепью если и только если $W$ является независимым множеством в графе $H$.
- Таким образом, размер максимальной антицепи равен $\alpha(H) = v(H) - \beta(H)$.
- Тогда по теореме Дилуорса $v(H) - \alpha'(H) = v(H) - \beta(H)$, откуда $\alpha'(H) = \beta(H)$. $\square$

## Применение теоремы Дилуорса



### Теорема (Эрдёш-Секереш)

*Из любой последовательности различных вещественных чисел длины $mn+1$ можно выбрать либо возрастающую подпоследовательность из $m+1$ числа, либо убывающую подпоследовательность из $n+1$ числа.*

Доказательство.

- Пусть $L = (x_1, x_2, \dots, x_{mn+1})$ — последовательность из условия.
- Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{mn+1}\}$ и введем на нем следующее отношение порядка:
  - $a \succ b$, если и только если $a > b$ и число $a$ стоит левее, чем $b$.
- Тогда любая убывающая подпоследовательность в $L$ является цепью, а любая возрастающая подпоследовательность — антицепью.
- Предположим, что возрастающей подпоследовательности из $m+1$ числа в $L$ нет. Тогда размер максимальной антицепи не более $m$.
- По теореме Дилуорса, $X$ можно разбить на не более, чем $m$ цепей. Одна из них будет иметь длину хотя бы $n+1$ и задаст искомую убывающую подпоследовательность. □

## Системы подмножеств и симметричные цепи



### Определение

- Пусть $X$ — конечное множество, $|X| = n$ и $M = \mathcal{P}(X)$.
- Зададим на $M$ отношение частичного порядка $A \subset B$.
- Цепь $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ в $(M, \subset)$ называется *симметричной*, если выполняются следующие два условия:

  1. $|A_1| + |A_k| = n$;
  2. $\forall i \in [1..k-1]\,(|A_{i+1}| = |A_i| + 1)$.

### Замечание

- В частности, тогда $|A_i| + |A_{k+1-i}| = n$ при всех $i \in [1..k]$.
- Элементы множества $M$ можно записывать как последовательности нулей и единиц (т.е. элементы из $\{0,1\}^n$).

## Системы подмножеств и симметричные цепи

- Пусть $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ — элементы $\{0,1\}^n$.
  - Тогда $A \prec B$, если $\forall i\,(a_i \le b_i)$ и хотя бы одно из неравенств строгое.
  - Симметричная цепь в $\{0,1\}^n$ — это такая последовательность упорядоченных наборов нулей и единиц, в которой каждый следующий набор получается из предыдущего заменой одного нуля на единицу и суммарное число единиц в первом и последнем наборе равно $n$.

### Теорема

*Множество $M$ можно разбить на $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$ симметричных цепей.*

Доказательство. Индукция по $n$.

База: при $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $(n-1 \to n)$: пусть $X = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

- Рассмотрим множество $X' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. По индукционному предположению, $\mathcal{P}(X')$ можно разбить на симметричные цепи.
- Пусть $C = \{A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k\}$, где $A_1 \subset \ldots \subset A_{k-1} \subset A_k$ — одна из цепей в разбиении $\mathcal{P}(X')$ на симметричные цепи.

## Системы подмножеств и симметричные цепи



- Тогда рассмотрим следующие цепи в $\mathcal{P}(X)$:
  - $C'_i$: $A_1 \subset \ldots \subset A_{k-1} \subset A_k \subset A_k \cup \{x_n\}$;
  - $C''_i$: $A_1 \cup \{x_n\} \subset \ldots \subset A_{k-1} \cup \{x_n\}$ (в случае $k > 1$).
- Легко видеть, что цепи $C'_i$, $C''_i$ симметричны и все цепи такого вида задают разбиение множества $\mathcal{P}(X)$.
- Количество цепей равно $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$, поскольку каждая симметричная цепь в $\mathcal{P}(X)$ содержит ровно одно подмножество мощности $[\frac{n}{2}]$. $\square$

# Теорема Шпернера



**Теорема (Шпернер, 1928)**

*Пусть $X$ — конечное множество, $|X| = n$ и $M = \mathcal{P}(X)$. Тогда размер максимальной антицепи в $M$ равен $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$.*

Доказательство.

- Мы доказали, что $M$ можно разбить на $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$ симметричных цепей.
- Следовательно, по теореме Дилуорса, размер максимальной антицепи в $M$ не превосходит $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$.
- С другой стороны, антицепь размера $\mathrm{C}_n^{[\frac{n}{2}]}$ в $M$ есть: это все подмножества мощности $[\frac{n}{2}]$. □

- На самом деле, этот результат является частным случаем более общей теоремы.
- В ней мы, в частности, получим другое доказательство теоремы Шпернера.

# Неравенство Любелла — Ямамото – Мешалкина



## Теорема (Любелл, 1966)

*Пусть $X$ — конечное множество, $|X| = n$, $M = \mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{F}$ — антицепь в $M$. Тогда*

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mathrm{C}_n^{|A|}} \le 1.$$

Доказательство.

- Рассмотрим все возможные *максимальные цепи* в $M$. То есть последовательности подмножеств вида

$$\varnothing = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n = X.$$

- Всего таких цепей $n!$. Каждое подмножество $A \subset X$ содержится ровно в $|A|!(n-|A|)!$ максимальных цепях.
- При этом, каждая максимальная цепь пересекает антицепь $\mathcal{F}$ максимум по одному элементу.
- Следовательно, $\sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!(n-|A|)! \le n!$.
- Сократив это неравенство на $n!$, получим требуемое. □