1 Вычисление площади в декартовой системе координат

Вычисление длины кривой

1) Параметрически заданная кривая

Дана кривая, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x(t) = 6 - 3t^3 \\ y(t) = \dfrac{9(2t^2 - t^4)}{8} \\ \text{с ограничением } y \geq 0 \end{cases}$$

Шаг 1: Находим производные
Сначала вычислим производные обеих координат по параметру t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6 - 3t^3) = -9t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{18t^2 - 9t^4}{8}\right) = \frac{36t - 36t^3}{8} = \frac{9t(1 - t^2)}{2}$$

Шаг 2: Вычисляем подынтегральное выражение
Для нахождения длины кривой используем формулу:

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Вычислим выражение под корнем:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-9t^2)^2 + \left(\frac{9t(1 - t^2)}{2}\right)^2 = 81t^4 + \frac{81t^2(1 - 2t^2 + t^4)}{4}$$

Упростим:

$$= \frac{324t^4 + 81t^2 - 162t^4 + 81t^6}{4} = \frac{81t^6 + 162t^4 + 81t^2}{4} = \frac{81t^2(t^4 + 2t^2 + 1)}{4}$$

$$= \frac{81t^2(t^2 + 1)^2}{4}$$

Таким образом:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{9t(t^2 + 1)}{2}$$

Шаг 3: Определяем пределы интегрирования
Из условия $y \geq 0$ получаем:

$$2t^2 - t^4 \geq 0 \Rightarrow t^2(2 - t^2) \geq 0 \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Шаг 4: Вычисляем длину кривой
Интеграл для всей кривой:

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{9t(t^2 + 1)}{2} dt = 0$$

(интеграл от нечётной функции в симметричных пределах).

Для положительной части ($t \in [0, \sqrt{2}]$):

$$L = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{9t(t^2+1)}{2} dt = \frac{9}{2} \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}(1+1) = 9$$

Полная длина кривой (с учётом симметрии):

$$L_{\text{полная}} = 2 \times 9 = 18$$

Ответ: Длина кривой равна $\boxed{18}$.

Задача 2: Кривая в полярных координатах

Дана кривая:

$$\begin{cases} r(t) = 1 + \cos t \\ \varphi(t) = t - \tan\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

Требуется найти длину дуги от точки $A(2, 0)$ до точки $B(1, \pi/2)$.

Шаг 1: Формула длины дуги Для полярных координат длина дуги вычисляется по формуле:

$$L = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt$$

Шаг 2: Вычисляем компоненты Найдём производную:

$$\frac{dr}{dt} = -\sin t$$

Вычислим подкоренное выражение:

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1+\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 + 2\cos t$$

Используя тригонометрическое тождество:

$$2 + 2\cos t = 4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Таким образом:

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = 2\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

Шаг 3: Определяем пределы интегрирования Найдём значения параметра t для заданных точек:

- Для точки $A(2, 0)$:

$$1 + \cos t = 2 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$$

- Для точки $B(1, \pi/2)$:

$$1 + \cos t = 1 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Шаг 4: Вычисляем длину дуги Поскольку $\cos(t/2) \geq 0$ на промежутке $[0, \pi/2]$, модуль можно опустить:

$$L = \int_0^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = 2\sqrt{2}$$

Ответ: Длина дуги равна $\boxed{2\sqrt{2}}$.