DOI:10.16402/j.cnki.issn1008-3383.2013.04.071

高速公路收费站设计中的排队论模型分析

刘维维[1],雷　博[2],马伟思[2],黄泽滨[2]
(1.中交第一公路勘察设计研究院有限公司;2.长安大学)

摘　要: 针对高速公路收费站设计不合理导致交通拥堵、安全问题,通过对 M/M/n 和 M/M/1 排队理论的分析,结合高速公路收费系统的特点,建立了用于高速公路收费站台设计的排队论模型。该模型给出了高速公路收费亭数目设计的理论依据,从而提供了一种解决收费站设计的合理方法。同时,运用 Visual Basic 6.0 程序进行了编程,给出了在一定服务水平条件下,不同收费亭可以服务的交通量。

关键词: 高速公路; 收费站设计; 排队论; 模型

中图分类号: U492　　**文献标识码:** C　　**文章编号:** 1008-3383(2013)04-0184-02

1　前　言

随着国民经济的快速发展,人们的生产生活节奏越来越快,这就要求交通为人们提供一个快捷和安全的出行平台。虽然高速公路能够解决这一问题,但其存在的各种问题依然严重影响着人们的出行,尤其收费站问题。在高速公路的设计中,如果收费站的规模设置的不合理,会造成严重的交通拥堵、安全问题。在交通高峰期,收费站经常出现拥挤现象,甚至车辆在收费广场内多次变换车道、抢占收费车道,大大增加了车辆间发生交织和冲突的几率。因此,如何合理的设置收费站收费亭的个数,如何根据车流大小决定收费亭的开启数量,是高速公路收费站设计和管理的重点问题。

排队论(Queuing Theory),是研究系统随机聚散现象和随机服务系统工作过程的数学理论和方法。高速公路收费系统,是一个典型的排队系统。而高速公路收费站存在的问题就是没有处理好排队收费问题,造成拥堵。本文从排队论基本理论出发,探讨高速公路收费站收费系统设计的优化问题。

2　收费站设计中的排队论模型建立

图 1 为一最简单的排队系统模型。排队系统包括三个组成部分: 输入过程、排队规则和服务机构。

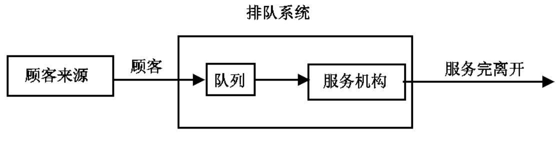

图 1　排队论模型示意图

输入过程考察的是顾客到达服务系统的规律。它可以用一定时间内顾客到达数或前后两个顾客相继到达的间隔时间来描述,一般分为确定型和随机型两种。随机型的输入是指在时间 t 内顾客到达数 $n(t)$ 服从一定的随机分布。如服从泊松分布,则在时间 t 内到达 n 个顾客的概率为

$$P_n(t)=\frac{e-\lambda t(\lambda t)^n}{n!}(n=0,1,2,\cdots\cdots,N)$$

排队论中相继到达的顾客的间隔时间 T 服从负指数分布,即

$$P(T\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}$$

上面两式中 λ 为单位时间顾客期望到达数,称为平均到达率; $1/\lambda$ 为平均间隔时间。在排队论中,讨论的输入过程主要是随机型的。

排队规则分为等待制、损失制和混合制三种。这里运用的排队规则是属于等待制,即当顾客到达时,所有服务机构都被占用,则顾客排队等候。

服务机构可以是一个或多个服务台。多个服务台可以是平行排列的,也可以是串连排列的。服务时间一般也分成确定型和随机型两种。而随机型服务时间 v 则服从一定的随机分布。一般采用负指数分布,其分布函数是

$$P(v\leqslant t)=1-e^{-ut}(t\geqslant 0)$$

式中: μ 为平均服务率, $1/\mu$ 为平均服务时间。

服务机构排队系统问题的求解。

研究排队系统问题的主要目的是研究其运行效率,考核服务质量,以便据此提出改进措施。通常评价排队系统优劣有 6 项数量指标。

(1) 系统负荷水平 ρ: 它是衡量服务台在承担服务和满足需要方面能力的尺度; (2) 系统空闲概率 P_0: 系统处于没有顾客来到要求服务的概率; (3) 队长: 系统中排队等待服务和正在服务的顾客总数,其平均值记为 L_S; (4) 队列长: 系统中排队等待服务的顾客数,其平均值记为 L_g; (5) 逗留时间: 一个顾客在系统中停留时间,包括等待时间和服务时间,其平均值记为 W_S; (6) 等待时间: 一个顾客在系统中排队等待时间,其平均值记为 W_g。

高速公路上的车辆陆续到达收费站,排队等候,依次接受收费服务,然后离开收费站。如果到达的车辆不能及时得到服务,就产生了排队现象,高速公路收费系统,是一个典型的排队系统。该收费站系统采用标准的 $M/M/C/\infty/\infty/$FCFS 的排队模型。

上述符号中第一个 M 为车辆到达时间间隔,高速公路上的交通量较城市道路要小,可以用泊松分布描述车辆的到达,用负指数分布描述车辆到达的时间间隔; 第二个 M 为收费服务时间,根据调查研究,该服务时间满足正太分布,一般的统计结果为 8 s; C 为收费站收费亭个数; 理想状态假设: 系统能容纳无限多个车辆,道路上的车源也是无限的; FCFS 为系统采用先到先服务的规则。

在收费站排队系统中,车辆排队方式是多路排队多通道服务: 指每个通道各排一个队,每个通道只为其相对应的一队车辆服务,车辆不能随意换队。当 C 值取 1 时,即为单路排队单通道服务系统,表示只有一个收费窗口的收费系统,所以,多路排队多通道服务系统相当于多个 $M/M/1$ 单通道系统组成的排队系统。

在收费站排队模型中,相关符号定义如下: λ 为系统中车辆为 n 时的平均到达强度(到达强度以单位时间内到达的车辆数表示); μ 为系统车辆数为 n 时收费员平均(期望)服务强度(服务强度以单位时间内服务的车辆数表示); P_n 为系统在时刻 t 有 n 辆车的概率; C 为系统收费亭数目。

收稿日期: 2012-12-05

系统中主要研究和计算的数量指标有：L 为系统期望车辆数，亦称队长；L_q 为系统期望排队车辆数，亦称排队长；W 为车辆在系统内的期望停留时间；W_q 为车辆在系统内的期望等待时间。

3　单通道服务模型 $M/M/1$ 模型建立

（1）单通道服务时，模型如图 2 所示。设车辆平均到达率为 λ（辆/h），系统平均服务率为 μ（辆/h），交通强度或服务程度为 ρ。则

$$\rho = \lambda/\mu < 1$$

由递推公式，系统中有 n 辆车的概率为

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0$$

由概率性质知

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

即 $P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = P_0 \dfrac{1}{1-\rho} = 1$

从而有

$$\begin{cases} P_0 = 1 - \rho \\ P_n = (1-\rho) \cdot \rho^n \end{cases}$$

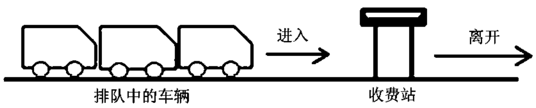

图 2　单通道服务模型

（2）系统中的队列长度 L——期望车辆数

根据系统中有 n 辆车的概率 P_n，可知系统中的队长 L 为

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-\rho) \cdot \rho^n = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^n + \cdots = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

即 $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

（3）系统的排队长 L_q——系统中等待的平均车辆数

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-\rho)\rho^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^n = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda^2/\mu(\mu-\lambda)$$

（4）车辆在系统内的期望停留时间 W

车辆在收费站排队系统中的期望逗留时间 W 是随机变量，可以证明，它服从参数为 $\mu - \lambda$ 的负指数分布，分布函数和密度函数为

$$\begin{cases} F(\omega) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)\omega} \\ f(\omega) = (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)\omega} \end{cases}$$

（5）车辆在系统内的期望等待时间 W_q

车辆在系统内的期望等待时间 W_q 应该为期望停留时间 W 减去平均服务时间，即

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

4　多通道服务模型 $M/M/n$ 模型建立

由于多通道服务模型即 $M/M/n$ 模型相当于多个 $M/M/1$ 模型，因而在计算多通道模型时，只需计算其中一个 $M/M/1$ 模型，然后乘以收费亭数即可，在复杂交通情况下可以适当乘以修正系数。

5　模型应用分析

在收费站排队模型中，如果 $P < 1$，则系统稳定；如果 $P > 1$，系统的排队长度将会无限增大，出现“爆炸”现象，因此要调整平均服务强度 μ，使满足条件是 $\lambda < \mu$，保持稳定状态即确保排队能够消散，在收费系统中就是能够使排队车辆在一定时间里面通过收费站，从而保证交通的流畅；如果系统是稳定的，但排队和等待时间很长，也要调整平均服务强度，使其排队长和等待时间在预定的期望值内。

高速公路收费站服务等级可根据下表服务区等级划分标准确定，一般情况下采用二级服务标准，即排队车辆不大于 4 辆。

表 1　服务区等级划分标准

服务水平	平均排队车辆数	司机乘客感觉
一级	≤ 1	良好
二级	≤ 4	一般
三级	≤ 8	焦躁
四级	> 8	无法忍受

对于人工收费站，服务时间根据以往经验，取 8 s，每个收费窗口的平均服务率 $\mu_0 = 3\,600/8 = 450$ 辆/h。根据 3 节中公式，运用 Visual Basic 6.0 程序编写程序，计算不同收费亭数时的服务水平，即服务小时交通量，见表 2。

表 2　不同排队车辆时不同收费台的服务小时交通量

排队车辆	收费亭数			
	四	三	二	一
1	373	356	329	278
2	746	712	658	556
3	1 118	1 068	988	834
4	1 491	1 424	1 317	1 112
5	1 864	1 780	1 647	1 390
6	2 237	2 136	1 976	1 669
7	2 610	2 492	2 305	1 947
8	2 982	2 848	2 635	2 225
9	3 355	3 204	2 964	2 503
10	3 728	3 560	3 294	2 781

（1）在进行公路收费站设计时，根据预测高峰小时交通量以及所需的服务水平，根据当地的实际情况，通过上表选择所需的收费亭数量。

（2）在实际运营阶段，根据当地某固定时段的车流量的大小，通过上表选择需要开放的收费亭数，从而降低资源的消耗，达到节约能源的目的。

6　总　结

此模型建立的目的之一是确定高速路上同一地点的最优收费亭数 C 和单位时间服务车辆数的能力。可以根据道路预测交通量推测平均车辆到达率 λ，根据每个收费窗口服务一辆汽车的平均时间 t 计算系统平均服务率 μ（人工停车收费系统取 $t = 8$ s，智能收费系统根据实际服务时间取值），利用 2 节中公式计算队长、排队长、等待时间等，进而求得所需的收费亭数，也可根据不同时段公路上的交通状态确定不同时段收费站服务台窗口的数目，从而降低收费站服务台的运营成本。

本文利用系统工程理论中的排队论的基本原理，结合高速公路收费站系统的特殊性要求，建立收费站收费亭数目设计的排队论模型，给收费站收费亭数量的确定提供了一个解决方案。同时可以利用本模型，进行收费站通行能力分析。

参考文献：

[1]　《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，2005.

[2]　汤洪波，刘向远，等. 排队论在公路收费站服务台设计及管理中的应用[J]. 四川建筑，2009.

[3]　黄临娜. 排队论在成渝高速公路收费站服务台设计和管理中的应用[J]. 交通标准化，2007.

[4]　张政. 排队论在高速公路收费系统中的应用[J]. 西安航空技术高等专科学校学报，2006.