排队论在高速公路收费系统中的应用

张　政

（西安航空技术高等专科学校 基础部, 陕西 西安 710077）

摘　要: 目的　排队论在高速公路收费系统中的应用; 方法　建立比较合理的数学模型, 最后对模型进行优化以达到更理想的效果; 结果　通过对模型的优化设计, 确定收费亭的数目, 使得在成本一定的情况下, 车辆排队等待的时间尽可能的短; 结论　排队论在高速公路收费系统优化设计中具有实际用途。

关键词: 排队论; 高速公路; 收费系统; 收费亭; 优化; 数学模型

中图分类号: O226　文献标识码: A　文章编号: 1008-9233(2006)05-0049-02

1　引言

在高速公路收费系统问题中, 如何使得车辆顺利通过收费站是本文主要研究的问题。我们知道, 高速公路收费效率由收费车道数, 交通量, 服务时间和服务水平三个因素确定。交通量越大, 需要的收费车道数就越多; 服务时间取决于收费方式、收费设施, 服务时间越短, 通行能力就越大, 需要的收费车道数就越少; 服务水平取决于道路等级和管理要求。在这里我们主要讨论车道数为 1 和(为一常数)的情况。

2　模型建立

收费过程分为汽车到达, 排队等候, 接受服务, 完成离去四步, 可以用排队论来模拟。模型具有以下特点:

输入流: 汽车到达是随机的, 其规律服从泊松分布;

排队及服务规则: 先到先服务, 无损失流(不会因等候时间太久而离去);

服务时间分布: 对每辆车的服务时间为随机变量, 可用负指数分布来模拟。

2.1　单路排队单通道服务模型

设汽车平均到达率为 λ(辆/小时), 系统平均服务率为 μ(辆/小时), 交通强度或服务程度为 ρ, $\rho = \lambda/\mu$。

系统中平均车辆数(辆)

$n = \rho/(1-\rho) = \lambda/(\mu-\lambda)$

队列中平均等待车辆数(辆), 即排队长度:

$q = \rho^2/(1-\rho)$

车辆在系统中平均耗时(秒): $d = 1/(\mu-\lambda)$

车辆在队列中平均耗时(秒): $w = \rho/(\mu-\lambda)$

2.2　单路排队多通道模型

在平峰时段, 车辆到达率比高峰时段小, 为了确定应开放的收费通道数量, 可以用单路排队多通道模型来计算。其最主要的特点是汽车可以随机选择排队长度最短的收费通道去排队。

设汽车平均到达率为 λ(辆/小时), 系统平均服务率为 μ(辆/小时), $\rho = \lambda/\mu$, 交通强度为 ρ/k, k 为收费通道数量。

系统中没有车辆的概率:

$$p(0) = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!\left[1-\frac{\rho}{k}\right]}\right]}$$

排队系统中有 n 辆车的概率:

$$p(n) = p(0)\frac{\rho^n}{n!} \cdots\cdots \text{当 } n < k \text{ 时}$$

$$p(n) = p(0)\frac{\rho^n}{k^{n-k}k!} \cdots\cdots \text{当 } n >= k \text{ 时}$$

系统中平均车辆数(辆):

$n = \rho + \rho^{k+1}p(0)/(k!k(1-\rho/k)^2)$

队列中平均等待车辆数(辆), 即排队长度

$q = n - \rho$

每一通道的等待车辆数(辆): $m = q/k$

车辆在系统中平均耗时(秒): $d = q/\lambda + 1/\mu$

收稿日期: 2006-05-17

作者简介: 张　政(1981-), 男, 陕西省西安市人, 本科, 西安航专基础部助教, 主要从事高等数学的教学和研究工作。

车辆在队列中平均耗时(秒):$w = q/\lambda$

3 $M/M/c$, $M/M/1$ 模型对比

高速公路收费系统分为标准 $M/M/c$ 和 $M/M/1$ 模型, 其中 $M/M/c$ 属于多收费亭的情形(同一地点), 且是多通道等待制。$M/M/1$ 属于单收费亭的情形, 且是单通道等待制。

两种模型概率运行指标对比

指标	模型	
	$M/M/c$	$M/M/1$
输入过程	服从泊松分布, 车辆源无限, 单个到来, 互相独立, 稳定状态。单队, 队长无限制, 先到先服务。	同前
服务机构	多站服务, 负指数分布, 相互协作。	单站服务
无车辆概率	$P_0=\left[\sum_{k=1}^{c-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{1}{c!}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\right]^{-1}$	$P_0=1-\rho$
车辆数为 n 的概率	$p_n=\begin{cases}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & n< c\\ \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & n> c\end{cases}$	$p_n=(1-\rho)\rho^n$
服务强度	$\rho=\lambda/(c\mu)$	$\rho=\lambda/\mu$
系统中平均车辆数	$L_s=L_q+c\rho$	$L_s=\lambda/(\mu-\lambda)$
等待车辆数	$L_q=\frac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0$	$L_q=\rho\lambda/(\mu-\lambda)$
逗留时间	$W_s=L_s/\lambda$	$W_s=1/(\mu-\lambda)$
等待时间	$W_q=L_q/\lambda$	$W_q=\rho/(\mu-\lambda)$
排队规则	单队, 队长无限制, 先到先服务。	同前

4 模型的优化设计

收费亭能力的优化设计主要是确定高速路上同一地点的最优收费亭数 C 和单位时间服务车辆数的能力。

4.1 在模型中最优的收费亭数 c 的确定

稳态情况下, 单位时间全部费用的期望值。

$z = c_s^1 c + c_w L$

其中, c_s^1 表示每个收费亭单位时间成本, 按经验作常数。

c_w 表示每辆车在系统停留单位时间的费用。

L 为系统平均队长, 即车辆平均数(随 c 的值不同而不同)

则 $L(c^*)-L(c^*+1)< c_s^1/c_w< L(c^*-1)-L(c^*)$

依次求 $c=1,2,3,\cdots$ 的 L 值, 由于 c_s^1/c_w 是已知数, 根据这个数落到哪个不等式区间就可确定 c^*。

4.2 在 $M/M/1$ 模型中求最优化服务率

目标函数 z 为单位时间成本与车辆在系统逗留费用之和。要求 z 的期望值最小。

$z = c_s\mu + c_w L_s$

其中, μ 表示单位时间内被服务完的车辆数。

c_s 表示当 $\mu=1$ 时, 收费亭单位时间费用, 取常数。

c_w 表示每辆车在系统中停留单位时间费用。

L_s 表示系统中平均队长。

求得: $\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{c_w}{c_s}\cdot\lambda}$

5 小结

在以上工作中, 主要针对单路排队单通道和单路排队多通道服务两种情况, 建立了相应的数学模型。最后, 又给出了模型的优化方案。但仍有几点建议:

(1) 系统的选择应综合分析各种限制条件, 通道多的系统车辆排队短, 服务水平高, 但建设规模大, 占地多, 投资大, 运营成本高;

(2) 做好交通量调查时计算分析的前提。

(3) 车辆在服务台停留时间长短对系统影响很大, 采用先进的收费系统, 缩短服务所需时间, 对减少运营成本, 提高服务水平, 效果显著。

参 考 文 献

[1] 《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[2] 罗荣贵. 排队模型及其应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.

[3] 王树禾. 数学模型基础[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1996.

[责任编辑、校对: 徐 行]

Queuing Theory's Application in Express Way Charging System

ZHANG Zheng

(Department of Basic Courses, Xi'an Aerotechnical College, 710077, Xi'an, Shaanxi, China)

Abstract: Target: Theory of queuing in the application of express charging system; **Approach**: Establishing relatively reasonable mathematic model, optimizing models to approach ideal consequence; **Outcome**: By a optimizing designing to confirm amount of charging toll booths enabling to shorten queuing time as possible; **Conclusion**: Theory of Queuing proved practical usage in optimized design of tolling.

Key Words: Theory of Queuing; Toll Booths; Optimization; Mathematic Models