Trabajo Práctico 2:
Residuos ponderados para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales

15 de agosto de 2019

Ejercicio 1: Plantee por residuos ponderados la solución a la siguiente ecuación diferencial sujeta a condiciones de contorno. Desarrolle hasta obtener las expresiones generales de las componentes de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes suponiendo $\hat{\varphi}(x) = \psi(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \varphi = 0, \qquad \varphi(x=0) = 0, \quad \text{y} \quad \varphi(x=1) = 0.7,$$

Utilice como familia $N_m(x) = \operatorname{sen}(m\pi x)$ con $m = 1, 2, \cdots, M$. La solución analítica es $\varphi(x) = 0.595643 \sinh(x)$. Cuando sea necesario integrar, utilizar el método de trapecios con $h = 0.1$.

(a) Resolver por subdominios utilizando los siguientes intervalos:

 (i) $[0, 0.6]$ y $[0.6, 1]$

 (ii) $[0, 0.3]$, $[0.3, 0.6]$ y $[0.6, 1]$

(b) Resolver por Galerkin para $M = 2$ y $M = 3$.

(c) Sacar conclusiones.

Ejercicio 2: Dada la siguiente ecuación diferencial y sus condiciones de contorno:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2z + 3sen(x) = 0, \quad \frac{dz}{dx}(x=0) = 1, \quad z(x=\pi) = 0$$

Desarrolle el planteo de residuos correspondiente hasta obtener las expresiones generales de las componentes de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes asumiendo $\hat{z}(x) = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)$. Aplique forma débil y utilice el método de Galerkin. Resuelva para $M = 2$. Considere la familia $N_m(x) = m(x-1)^2 + 1$. La solución analítica es $z(x) = sen(x)$.

Ejercicio 3: Un problema físico está gobernado por la ecuación:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi + 1 = 0, \qquad \varphi(x=0) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dx}(x=1) = -\varphi,$$

Encontrar una solución aproximada por el método de Galerkin para $M = 2$ aplicando forma débil. Utilizar la familia de funciones $N_m(x) = x^m$ (no se satisfacen ambas condiciones de contorno). Resolver las integrales con cuadratura de Gauss con 2 puntos. La solución analítica es $\varphi(x) = 0.94167 \sin(x) + \cos(x) - 1$.

Ejercicio 4: Considerando la siguiente ecuación diferencial sujeta a condiciones de contorno:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 3x^2 = 0, \qquad u(x=0) = 3, \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(x=2) = -0.3,$$

(a) Analice las siguientes opciones observando qué condiciones son satisfechas por las funciones $\psi(x)$ y $N_m(x)$. Posteriormente, elija una opción, desarrolle el planteo de residuos y resuelva. Utilice forma débil y método de Galerkin. Integre con Simpson 1/3 con $h = 0.25$. La solución analítica es $\varphi(x) = -x^4/4 + 7.7x + 3$.

 (i) $\psi = 3 - 0.9x$ con $N_1 = x(2-x)$ y $N_2 = x^2(2-x)$

 (ii) $N_1 = x + 1$ y $N_2 = x^2$

 (iii) $\psi = 3 - 0.3x$ con $N_1 = x(2-x)$ y $N_2 = x^2(2-x)$

(b) Resuelva con el método de Colocación por Subdominios utilizando como subdominios los intervalos [0,1] y [1,2]. ¿Qué observa?

Ejercicio 5: Plantee por residuos ponderados la solución a la ecuación diferencial sujeta a condiciones de contorno. Desarrolle hasta obtener las expresiones generales de las componentes de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes suponiendo $\hat{\varphi}(x) = \psi(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)$. Proponga las funciones $\psi(x)$ y familia $N_m(x)$ teniendo en cuenta qué condiciones se deben cumplir en los bordes. Resuelva por Galerkin para $M = 3$ (el método de integración es a elección). La solución analítica es $\varphi(x) = e^x - 1$.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \varphi - 1 = 0, \qquad \varphi(x = 0) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dx}(x = 1) = e^1,$$