José Cristian Gallardo Estrada

Tarea #3 .- Mecánica Analítica

Problema (1).-

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) \rightarrow$ Necesitamos deducir unas ecuaciones Euler-Lagrange que dependan de dichos parámetros.

$\rightarrow$ Sabemos que de el principio de mínima acción:

$$dS[x^A] = \left\{ \delta \int_t \mathcal{L}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\, dt \right\} \rightarrow \text{Expresión Lagrangiana a deducir.}$$

$$\Rightarrow \int_t d\mathcal{L}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\, dt = \int_t \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}(\delta \ddot{x}^A) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}(\delta \dot{x}^A) \cdot \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt \rightarrow \text{Expandiendo términos}$$

$$= \int_t \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\left(\frac{d}{dt}\delta \dot{x}^A\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\left(\frac{d}{dt}\delta x^A\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt$$

Si de la integral tomamos. $U = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A} \rightarrow dU = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}^A}\right)^{0}$

$dV = \frac{d}{dt} d\dot{x}^A \rightarrow V = \delta \dot{x}^A$

$S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A} \rightarrow dS = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right)$

$dt = \frac{d}{dt} dx^A \rightarrow t = \delta x^A$

Sustituyendo en la integral.

$$= \int_t \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right)(d\dot{x}^A) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right)(dx^A) + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt$$

$$+ \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A} d\dot{x}^A}\Big|_t^0 + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A} dx^A}\Big|_0^t = 0$$

Después tomamos:

$$P = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A} \rightarrow dp = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right)$$

$$dq = \frac{d}{dt}\delta x^A \quad q = \delta x^A$$

Volviendo a integrar:

$$d S[X^A] = \int_t \boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right)(\delta x^A) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right)(\delta x^A) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^A}\right) \cdots + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A)} \, dt - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\cancel{(\delta x^A)}\Big|_t^0 = 0$$

Para cumplir con la igualdad los términos con $[\,] = 0$

Puesto que la integral es independiente de T.

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^A}\right] dx^A = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^A} = 0$$

Expresión Euler Lagrange dependiente de aceleración, velocidad, posición y tiempo

Problema 2:

Tenemos el modelo Sigma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b$$

Vamos a definir la ecuación de Euler-Lagrange para nuestro modelo.

Calculando el primer término $\left(\frac{\partial L}{\partial q^\gamma}\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(\frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b\right) = \frac{\dot{q}^a \dot{q}^b}{2} \frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(g_{ab}(q^c)\right)$$

La derivada covariante de un tensor de Rango se define como:

$$\nabla_\gamma g_{ab} = \frac{\partial}{\partial q^\gamma} g_{ab} - \Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b} - \Gamma^\mu_{b\gamma} g_{a\mu}$$

Pero $\nabla_\gamma g_{ab} = 0$ que es la identidad de Ricci,

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \frac{\dot{q}^a \dot{q}^b}{2}\left[\Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b} + \Gamma^\mu_{b\gamma} g_{a\mu}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b\, \Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b} + \frac{\dot{q}^a \dot{q}^b}{2} \Gamma^\mu_{b\gamma} g_{a\mu}$$

$\rightarrow$ Nótese que tenemos una métrica que es simétrica $[\Gamma^\mu_{b\gamma} g_{\mu a}]$
a, b, μ son índices mudos

Por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \frac{\dot{q}^a \dot{q}^b}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}\, \Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b}\right] = \dot{q}^a \dot{q}^b\, \Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b}$$

Ahora para el término:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^r}\left(\frac{1}{2} g_{ab}\, \dot{q}^a \dot{q}^b\right) = \frac{1}{2} g_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^r}\left(\dot{q}^a \dot{q}^b\right)$$

Tenemos la derivada de un producto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = \frac{1}{2} g_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^r}\left(\dot{q}^a \dot{q}^b\right) = \frac{1}{2} g_{ab}\left[\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^\gamma}\dot{q}^b + \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^\gamma}\dot{q}^a\right]$$

El término de los corchetes podemos definirlo como "momento", el cual si son diferentes será 0 y si son iguales será 1. (Delta de Kroenecker).

Por definición

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} g_{ab}\left[\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^r}\dot{q}^b + \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^\gamma}\dot{q}^a\right] = \frac{1}{2} g_{ab}\left[\delta^a_\gamma \dot{q}^b + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ \delta^b_\gamma \dot{q}^a\right]$$

$$= \frac{1}{2} g_{ab}\,\delta^a_r\, \dot{q}^b + \frac{1}{2}\delta^b_\gamma\, \dot{q}^a \dot{q}^b$$

$$= \frac{1}{2} g_{\gamma b}\, \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{a\gamma}\, \dot{q}^a = \frac{1}{2}\left[2 g_{a\gamma}\, \dot{q}^a\right] = g_{a\gamma}\, \dot{q}^a$$

Entonces: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = g_{ar}\, \dot{q}^a$

Ahora $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(g_{a\gamma}\dot{q}^{a}\right) = \frac{dg_{a\gamma}}{dt}\dot{q}^{a} + \ddot{q}^{a}g_{a\gamma}$$

Trabajaremos con el término $\frac{d}{dt}g_{a\gamma}$

Por regla de la cadena:

$$\frac{d\, g_{a\gamma}}{dt} = \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^{c}}\frac{\partial q^{c}}{\partial t} = \dot{q}^{c}\frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^{c}} = \dot{q}^{c}\left[\Gamma_{ac}^{\mu}g_{\mu b} + \Gamma_{bc}^{\mu}g_{a\mu}\right]$$

Tenemos $\frac{\partial}{\partial q^{\gamma}}g_{ab} = \Gamma_{a\gamma}^{\mu}g_{\mu b} + \Gamma_{b\gamma}^{\mu}g_{a\mu}$

$$= \Gamma_{ac}^{\mu}g_{\mu b}\dot{q}^{c} + \Gamma_{bc}^{\mu}g_{a\mu}\dot{q}^{c}$$

$$= 2\,\Gamma_{ac}^{\mu}g_{\mu b}\dot{q}^{c} = \frac{dg_{a\gamma}}{dt}$$

Entonces todo el término será:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\right) = \left[\left(\frac{dg_{a\gamma}}{dt}\right)\dot{q}^{a} + \ddot{q}^{a}g_{a\gamma}\right]$$

$$= \left[2\Gamma_{ac}^{\mu}g_{\mu b}\dot{q}^{c}\right]\dot{q}^{a} + \ddot{q}^{a}g_{a\gamma}$$

$$= 2\,\Gamma_{ac}^{\mu}g_{\mu b}\dot{q}^{c}\dot{q}^{a} + \ddot{q}^{a}g_{a\gamma}$$

Procedimos a Completar Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^\gamma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\gamma}\right) = 0$$

$$\rightarrow \dot q^a \dot q^b \Gamma^\mu_{a\gamma} g_{\mu b} - 2\Gamma^\mu_{ac} g_{\mu b} \dot q^c \dot q^a - \ddot q^a g_{a\gamma} = 0$$

Ambos tienen todos los índices mudos, salvo uno covariante

Para poder sumarlos forzosamente ~~ambos~~ dichos índices son de la misma dimensión.

Por lo tanto, los primeros 2 términos podemos restarlos.

$$\rightarrow \Gamma^\mu_{ac} g_{\mu b} \dot q^c \dot q^a - \ddot q^a g_{a\gamma} = 0$$

Cambiamos $b=\gamma$ en el primer término, al ser libre.

$$\Gamma^\mu_{ac} g_{\mu\gamma} \dot q^c \dot q^a - \ddot q^a g_{a\gamma}$$

Factorizamos la métrica

$$-g_{\mu\gamma}\left[\Gamma^\mu_{ac} \dot q^c \dot q^a + \ddot q^a\right] = 0$$

Para el caso general $g_{\mu\gamma} = 0$

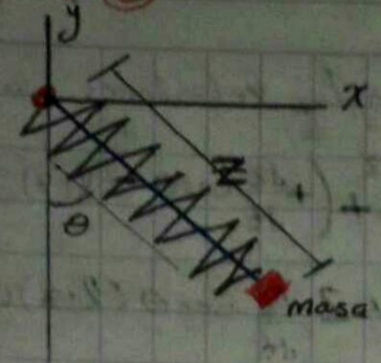
Por lo tanto

$$\Gamma^\mu_{ac} \dot q^c \dot q^a + \ddot q^a = 0$$

Por ser libre de la misma dimensión:

$$\boxed{\Gamma^\mu_{ac} \dot q^a \dot q^c + \ddot q^\mu = 0} \rightarrow \text{Ecuaciones Geodésicas}$$

Pregunta 3



El gráfico presenta un péndulo, reemplazado por un resorte, en reposo l y con una constante de elasticidad del resorte "K".

El sistema presentará deformación en el eje "z", donde a su longitud original "l" añadiremos su elongación "z" al resorte. Porque su longitud la tomaremos como "$l+z$".

El origen de los ejes coordenados se definen en el punto del eje de oscilación.

La posición de la partícula se define en dos ejes (x, y).

$$x = (l+z)\,\mathrm{Sen}\,\theta$$
$$y = -(l+z)\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

// $(l+z)$ porque se considera su longitud fija y elongación.

Las posiciones se derivan respecto al tiempo para obtener la velocidad.

$$\frac{dx}{dt} = (l+z)'\,\mathrm{Sen}\,\theta + (l+z)\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}\,\mathrm{Sen}\,\theta + (l+z)\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{Velocidad en } x.$$

$$\frac{dy}{dt} = -(l+z)'\,\mathrm{Cos}\,\theta + (l+z)\left(-\mathrm{Sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dz}{dt}\,\mathrm{Cos}\,\theta + (l+z)\,\mathrm{Sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{Velocidad en } y$$

° Construiremos la expresión de la energía cinética con las expresiones de velocidad

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{Donde } V^2 \text{ será } \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+(l+z)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

→ La construcción de la energía potencial debe considerarse la energía potencial de movimiento (mgh) y del resorte $(-kx)$.

$$V=mgh+\frac{1}{2}kz^2 \qquad h=(l+z)\cos\theta$$

$$\rightarrow V=mg(l+z)\cos\theta+\frac{1}{2}kz^2$$

Entonces el Lagrangiano será definido por $[T-V]$

$$L=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+(l+z)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]-mg(l+z)\cos\theta+\frac{1}{2}kz^2$$

Cada derivada la denotaremos por "$\dot{x}$".

$$L=\frac{1}{2}m\left[\dot{z}^2+(l+z)\dot{\theta}^2-mg(l+z)\cos\theta+\frac{1}{2}kz^2\right.$$

A las el Lagrangiano aplicaremos Euler Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$(l+z)\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\theta}{dt}\frac{dz}{dt}+g\sin\theta=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z - (l+z)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g\cos\theta = 0$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones diferenciales

De las ecuaciones obtenidas ~~ab~~ definimos que las segundas derivadas son $= 0$. Por lo que al simplificar tenemos:
primeras también

$$\frac{k}{m} z - g\cos\theta = 0$$

$g\sin\theta = 0$ → Para que se cumpla θ debe ser $= n\pi$.

$\frac{k\cancel{m}z}{m} = g\cos\theta$ (Despejamos z) $\quad \theta = 0$, $\theta = \pi$

$z = \frac{mg\overset{\pm 1}{\cos\theta}}{k}$ Como θ tomará valores de $n\pi$ → $\cos\theta$ será ± 1.

$$z = \frac{\pm mg}{k}$$

Valores del sistema de ecuaciones

$\theta_1 = 0 \qquad z_1 = \frac{mg}{z}$

$\theta_2 = \pi \qquad z_2 = \frac{-mg}{z}$

- Donde 0 y mg/k son puntos de equilibrio estables.
- π y $\frac{-mg}{k}$ son puntos de equilibrio inestables.

PREGUNTA 4:

Considerando $\mathcal{L} = e^{bt}\left(\frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} k^2 q^2\right)$ k, m y b constantes positivas.

a) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Calculamos $\frac{\partial L}{\partial q} = e^{bt}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}k^2(\cancel{2}q)\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = e^{bt}\left(-k^2 q\right) = -e^{bt}k^2 q$$

$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{bt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} m(\cancel{2}\dot{q})\right) = e^{bt}(m\dot{q})$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{bt}m\dot{q}\right) = m\left(e^{bt}\ddot{q} + \dot{q}\, b e^{bt}\right)$$

$$m\ddot{q}e^{bt} + m\dot{q}be^{bt} - \left(-e^{bt}k^2 q\right) = 0$$

$$m\ddot{q}e^{bt} + m\dot{q}be^{bt} + k^2 q e^{bt} = 0$$

$e^{bt}\left[m\ddot{q} + bm\dot{q} + k^2 q\right] = 0$ $\quad e$ nunca será $= 0$.

$\rightarrow m\ddot{q} + bm\dot{q} + k^2 q = 0$

$$\ddot{q} + b\dot{q} + \frac{k^2}{m} q = 0$$

Vemos que se asemeja a el oscilador armónico amortiguado.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0 x = 0$$

b) ~~$Q = \frac{q}{e}$~~ $Q = \frac{q}{e^{-bt/2}}$

$\rightarrow q = Qe^{-bt/2}$ Despejamos q.

Ahora buscamos $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}$$

Sustituimos en la expresión Lagrangiana original:

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left[\dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}\right]^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{\frac{-bt}{2}}\right]$$

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2e^{-bt} - \dot{Q}Qbe^{-bt} + \frac{b^2}{4}Q^2e^{-bt}\right) - \dots \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right]$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{8}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

Nótese que en el Lagrangiano no presenta dependencia explícita del tiempo, por lo que según el teorema de Noether podemos decir que la energía se conserva.

Obtenemos $\mathcal{H}$, expresándolo como la energía total.

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - L(Q_i, \dot{Q}_i)$$

Conservamos Q:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - L(Q, \dot{Q})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{1}{2}mbQ$$

$$\dot{Q}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right] = m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q}$$

Entonces:

$$\mathcal{H} = m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q - \frac{1}{8}mb^2Q^2 + $$
$$+\frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{8}mb^2Q^2 + \frac{1}{2}k^2Q^2$$

Dicha expresión la definimos como la energía conservada en términos Q.

Tomando:

$$Q = qe^{bt/2} \rightarrow \dot{Q} = \dot{q}e^{\frac{bt}{2}} + \frac{b}{2}qe^{bt/2}$$

Entonces: $E = \frac{1}{2}m\left[\dot{q}^2e^{bt} + bq\dot{q}e^{bt} + \frac{b^2}{4}q^2e^{bt}\right]$
$$-\frac{1}{8}mb^2q^2e^{bt} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{bt}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2e^{bt} + \frac{1}{2}mbq\dot{q}e^{bt} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{bt}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}e^{bt}\left[m\dot{q}^2 + mbq\dot{q} + k^2q^2\right]$$

Al realizar el cambio de variable tenemos que si hay dependencia del tiempo, por lo que si tenemos pérdida de Energía.