Teoría del Caos

Mecánica Analítica

Cesar David Aguirre Gutierrez

El caos se presenta cuando un sistema sometido a leyes o reglas determinadas se comporta de manera errónea y, podría parecer, aleatoria. El comportamiento dinámico de un sistema caótico tiene características diferentes a las de algún sistema que es puramente aleatorio. Una de las más importantes de ellas es la sensibilidad a las condiciones iniciales, así podríamos decir que dos estados inicialmente muy cercanos podrían dar lugar a estados futuros totalmente separados. Aunque Poincaré previó la sensibilidad a las condiciones iniciales, fue Edward Lorenz el primero en desarrollar un sistema caótico determinista, que poseía dicha propiedad, y fue Lorenz quien acuño la expresión "efecto mariposa" para ilustrar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Además de la sensibilidad a las condiciones iniciales, los sistemas caóticos poseen otras propiedades características como son la recurrencia, la autosimilaridad y la fractalidad. También no es necesario que un sistema dependa de un gran número de variables para que se comporte caóticamente, a veces basta solo con 3.

I. Atractores extraños

Cuando se representa gráficamente la evolución de un sistema caótico aparece un objeto geométrico peculiar: el atractor extraño. Un atractor extraño es un objeto que no llena completamente el volumen o el área que ocupa. Se dice que un atractor extraño es fractal. Las líneas que lo recorren, las trayectorias posibles del sistema que representa, se separan y se unen a la vez. Las propiedades matemáticas de los atractores extraños son particularmente singulares. Los atractores extraños aparecen en sistemas que disipan energía y que necesitan de un aporte continuo de energía desde el exterior. Como por ejemplo, el movimiento atmosférico toma la energía que necesita del calentamiento solar y la viscosidad del aire se encarga de disipar la energía en los torbellinos o en su defecto con el rozamiento con el suelo.

I. El atractor de Lorenz

Los puntos de equilibrio, órbitas estables y ciclos límite son atractores. Eso significa que si uno perturba ligeramente el sistema que se comporta tal y como dictan esas situaciones la evolución los volverá a llevar a su punto de equilibrio, órbita estable o ciclo límite según corresponda en cada caso. Quizás lo más simple sea pensarlo con el punto de equilibrio del oscilador con rozamiento. Si este está parado en su posición o punto de equilibrio, si lo perturbo un poco, lo muevo ligeramente, no tardará mucho en llegar de nuevo a su punto deequilibrio. Por eso decimos que tenemos un atractor, porque las distintas soluciones perturbadas del problema vuelven a la situación esperable. Lo que vio Lorenz en sus tablas de números era un nuevo tipo de atractor, un atractor extraño.

Lo que quiere decir eso es que ambas situaciones describen órbitas diferentes, no son la misma, pero su comportamiento se restringe ala misma región del espacio x, y, z. Esto nos lleva a dos

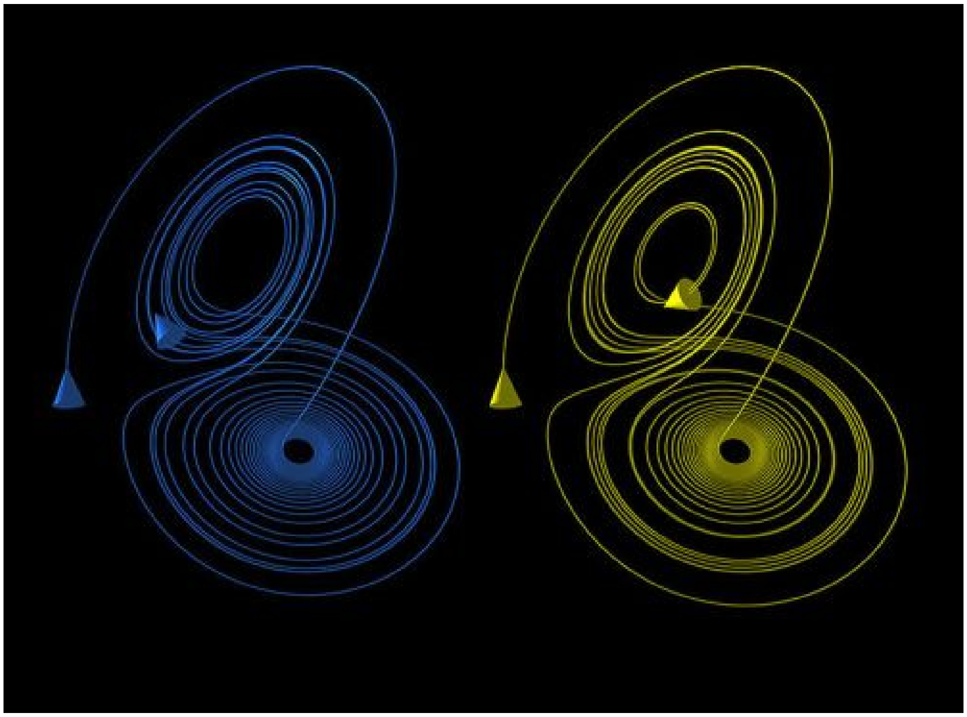

Figure 1: Atractor de Lorenz

de las características más fuertes del caos. Por un lado, variar las condiciones iniciales hace que cambie la órbita que describe el sistema en el espacio en el que lo representamos. Dos condiciones iniciales muy próximas dan lugar a órbitas muy diferentes. Sin embargo, todas las órbitas se encuentran en la misma región del espacio donde representamos la evolución del sistema, y esa región es el atractor.

II. Exponentes de Lyapunov

Para el desarrollo de modelos matemáticos deterministas, se pueden utilizar las ecuaciones diferenciales ordinarias. En general, cuanto más detallado es el modelo con respecto a la descripción del sistema, las ecuaciones aumentan su complejidad y dejan de ser lineales. Debido a la pérdida de linealidad, pueden existir determinadas condiciones donde el comportamiento de la solución a tiempos grandes es estocástico. Estas soluciones asintóticas acotadas que no convergen a ningún conjunto límite se las conoce como caóticas. Para caracterizar cuantitativamente este comportamiento es factible determinar por métodos numéricos los exponentes de Lyapunov.

Consideremos el espacio de fases asociado a una cierta dinámica autónoma, cada punto de este, espacio está en correspondencia con una única trayectoria la cual está parametrizada en el tiempo t. Sobre cualquier punto de esta curva nos preguntamos qué ocurre si nos desplazamos infinitesimalmente en una dirección, no tangente. Al cabo de un incremento δt,la nueva trayectoria pudo haberse acercado o alejado a la inicial, lo cual da una medida del comportamiento de la estabilidad local. Es importante remarcar que dada una trayectoria, la misma puede ser totalmente estable, totalmente inestable, o a lo largo de ella, puede tener puntos estables y puntos inestables.

Este concepto es fácilmente generalizable a dinámicas de orden superior.

Una segunda cuestión de interés en la teoría de sistemas dinámicos, consiste en determinar una medida de cuanto se separan a tiempo infinito diferentes trayectorias generadas con condiciones iniciales muy próximas y fundamentalmente establecer un parámetro que de este modo cuantifique el movimiento caótico. Como es sabido, uno de estos parámetros es el exponente de Lyapunov. Para determinar en forma elemental el exponente de Lyapunov consideremos la ecuación,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{1}$$

Se define al exponente de Lyapunov por

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right| \tag{2}$$

III. Fractales

Los fractales son la representación geométrica de la teoría del caos. Los fractales representan los sistemas dinámicos, la geometría de la naturaleza, las infinitas retro-alimentaciones, lo que no puede ser medido en términos Euclidianos. Podemos definir algunas propiedades de los fractales, un fractal tiene una estructura fina; esto es detalle en escalas arbitrariamente pequeña, un fractal es demasiado irregular para ser descripto con la geometría euclidiana tradicional, tanto local como globalmente, con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística, en general, la "dimensión fractal" es mayor que su dimensión topológica, etc.

Por lo tanto, el origen de los fractales es más bien un problema dinámico, no geométrico. Las leyes de su física son locales, pero los fractales nunca se organizan en las mayores distancias, a no ser que sean absolutamente deterministas

Figure 2: Ejemplo de visualización de un fractal

Conclusiones

Los conceptos matemáticos elaborados para entender el caos han encontrado aplicacion en otros campos de la ciencia, más allá de la física y las matemáticas. La biología, la química e incluso a la economía han hallado en las matemáticas del caos herramientas para estudiar sus propios sistemas. Como ha demostrado la teoría del caos, un sistema que se comporta de manera irregular no tiene por qué ser extremadamente complicado, quizá baste seguir la evolución de solo unas pocas variables para describir ese comportamiento.

References

[1] Teoria del Caos, Manuel Lozano Leyva, RBA.

[2] KOrsn98, "Chaos", H.J. Kors H.J. Korch y H.J Jodl, Springer Verlag.

[3] Chaos and Fractals in Engineering M. Nakagawa