

# Breve introducción al caos

Ramírez Esqueda, Edson Oswaldo  
ramirezee2016@licifug.ugto.mx

11 de noviembre de 2018

## Resumen

En el presente texto se realizó un breve ensayo sobre el caos, exponiendo el caos desde el punto de vista de una sistema dinámico, presentando una breve construcción matemática del asunto, el contexto histórico y ejemplos gráficos de algunos métodos comúnmente utilizados para estudiar el caos.

## 1. Nociones sobre el caos y reseña histórica

En algunas ocasiones podemos escuchar frases como: "La ciudad es un caos...." "Mi mente es un caos...", entre otras, pero, ¿qué es el caos? La Real Academia Española de Lengua (RAE) define el caos como:

1. m. Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos.
2. m. Confusión, desorden.
3. m. Fís. y Mat. Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con gran sensibilidad a las condiciones iniciales.

La característica principal del caos es la impredecibilidad, esto viene directamente de la fuerte dependencia de las condiciones iniciales. Desde la época de los grandes filósofos griegos se tenía una concepción del determinismo, aunque este pensamiento iba más ligado con el libre albedrío y la toma de decisiones de los seres humanos. Casi dos milenios después se desarrolló el cálculo (de forma simultánea por Isaac Newton y Gottfried Leibniz), ahí Newton utilizó las técnicas que desarrolló para describir cuantitativamente las leyes de Kepler; luego de Newton siguió el estudio de las ecuaciones diferenciales por una gran cantidad de matemáticos. A principios del siglo XIX el destacable matemático francés Pierre Simon de Laplace presentó el punto de vista determinista de la naturaleza, donde expuso que si se conocía la posición y velocidad de todas las partículas del universo, entonces se conocería el futuro de todas. Casi al final del siglo XIX, el físico matemático Henri Poincaré encontró el comportamiento caótico al estudiar la mecánica celeste. Se dio cuenta que movimientos de los cuerpos celestes que se creían simples eran muy complicados.

Con los años se encontraron una gran variedad de fenómenos naturales que presentan un comportamiento caótico, es decir,

que son altamente dependientes de las condiciones iniciales del sistema, es decir, dependen del estado previo en el que se encontraba el sistema. Pero fue hasta la década de los 1970's cuando con el avance computacional se pudieron entender algunos de estos fenómenos.

## 2. Los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos se caracterizan por una ecuación o un grupo de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de tal sistema. Los sistemas caóticos son sistemas dinámicos complejos que son "muy sensibles" a las condiciones iniciales.

Los sistemas dinámicos están compuestos por parámetros que varían en el tiempo, y una forma de denotarlos es:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t) \quad (1)$$

Comúnmente se clasifican los sistemas dinámicos en tres categorías: sistemas estables, sistemas inestables y sistemas caóticos. Los sistemas estables poseen dos soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas se mantienen cercanas al avanzar el tiempo, estos sistemas tienden a un punto u órbita según su dimensión (atractor). Los sistemas inestables por su parte un sistema inestable es aquel en el que dos soluciones con condiciones iniciales diferentes terminan divergiendo aun cuando las condiciones iniciales son pequeñas. El sistema inestable se aleja de los atractores. Finalmente, los sistemas caóticos no son inestables, sus soluciones se mueven alrededor de un atractor de manera irregular y al pasar el tiempo ambas soluciones no son cercanas, pero de forma cualitativa son similares.

Una clasificación un poco más acorde para tratar los sistemas es la clasificación en sistemas lineales y sistemas no lineales, a continuación se hace una breve descripción.

## 2.1. Sistemas lineales y los sistemas no lineales

Los sistemas lineales tienen una serie de propiedades que facilitan la construcción de soluciones generales, la propiedad más destacable es la superposición.

En cambio, los sistemas no lineales rara vez poseen la superposición y tampoco suelen tener una solución general, son escasas las ocasiones en que una ecuación tiene una solución analítica y en ocasiones no existe alguna solución. Aunque, a pesar de lo anterior, los sistemas no lineales tienen otras propiedades interesantes.

## 3. Ejemplo caótico mecánico: «El Circuito oscilador de van der Pol»

El ingeniero eléctrico van der Pol estudió un circuito oscilador similar al que se describe a continuación, considérese un circuito R, L, C con L y C lineales, y un resistor no lineal con características cúbicas, en el que pasa una corriente  $i_R = \alpha v(v^2 - 1)$  con  $\alpha > 0$ . Como el que se muestra en la Figura 1. Cuyas variables de estado se eligen en torno al inductor. Y del circuito se deduce que:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -i_L - i_R(v_C) \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_C \end{aligned} \quad (2)$$

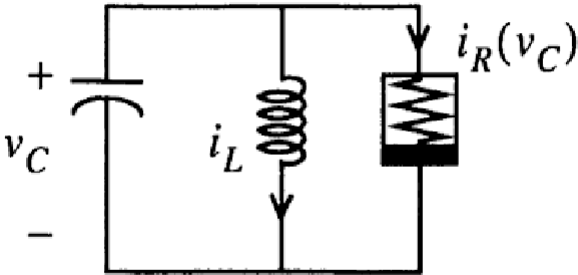


Figura 1: Diagrama del circuito eléctrico de van der Pol \*

Estas ecuaciones se pueden reescribir como:

$$CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} = -i_L - L\alpha v(v^2 - 1) \frac{di_L}{dt} \quad (3)$$

Renombrando las variables para tener un caso más general, no necesariamente un circuito eléctrico, se pueden aplicar esta ecuación para algunos fenómenos, llegando a la expresión:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4)$$

Una expresión más general de esta ecuación

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = A \cos(\omega t) \quad (5)$$

Esta última se puede utilizar para un circuito similar al de van der Pol, en el que además se tiene una FEM que oscilará en términos de una función coseno. Aunque para los fines del presente se considerará el caso homogéneo.

A continuación, se desarrollarán algunas de sus propiedades para entender la naturaleza caótica del sistema y la importancia de su estudio.

En la ecuación la parte  $\mu(1 - x^2)$  es el factor de amortiguamiento, que depende del sistema, no de factores externos. Si este fuera muy pequeño, se podría aproximar a la ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0 \quad (6)$$

Cuya solución está en términos de senos y cosenos, al igual que un oscilador armónico simple:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) + B \sin(\omega t + \delta) \quad (7)$$

Para ver el comportamiento de la ecuación y conocer algunas de sus propiedades se realiza un cambio de variables:  $\dot{x} = y$  y  $\ddot{x} = \dot{y}$ , y la ecuación de van der Pol cumple que,

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1-x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego para realizar un análisis local de puntos de equilibrio del se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1-x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por simple inspección se deduce que el origen es el único punto de equilibrio. El jacobiano general es:

$$DH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-2xy) & (\mu(1-x^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Al evaluarse el jacobiano en el origen, este se escribe como:

$$DH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Luego obteniendo el polinomio característico se obtienen las raíces

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad (8)$$

Por los conocimientos básicos de la mecánica clásica y las ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que mientras más crece el parámetro  $\mu$  se incrementará la amplitud, esto implica que el análisis es válido para valores donde  $\mu^2 < 4$  la parte imaginaria será distinta de cero, lo que implica que las soluciones giran. Del análisis local de este sistema se deduce que cerca del único punto de equilibrio las soluciones se comportan como espirales crecientes. A continuación, se muestran algunos ejemplos de soluciones numéricas obtenidas con diferentes valores de  $\mu$ .

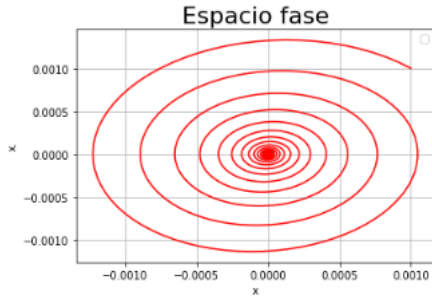


Diagrama de fase para -0.01

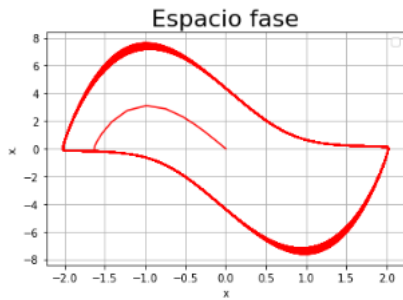


Diagrama de fase para 1

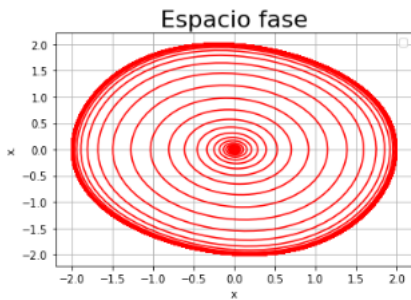


Diagrama de fase para 0.1

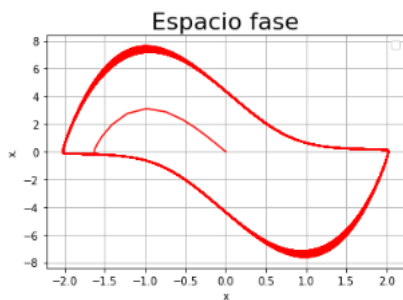


Diagrama de fase para 3

## 4. Mapeos

Un mapeo es una relación entre dos conjuntos, existen diferentes tipos de mapeos, pero para los fines de este trabajo considérese una función o mapeo de la forma:

$$F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, F \in C^1 \quad (9)$$

Este mapeo determina un sistema dinámico en el cual .<sup>el</sup> tiempo.<sup>es</sup> discreto por iteración, es decir,

$$x_{n+1} = F(x_n), n \in \mathbf{N} \quad (10)$$

Con esta definición el enésimo término de una órbita en términos del punto inicial  $x_0$  es:

$$x_n = F^n(x_0) \quad (11)$$

donde

$$F^n(x_0) \equiv F \circ F \circ \dots \circ F(x_0); F^0(x_0) \equiv x_0 \quad (12)$$

luego, por lo definido se tiene que por la regla de la cadena de diferenciación  $F^n \iota(x_0) = F'(x_{n-1}) F^{n-1} \iota(x_0)$ , el espacio fase es  $\mathbf{R}$  y por inducción matemática se tiene que:<sup>1</sup>

$$F^n \iota(x_0) = F'(x_{n-1}) F'(x_{n-2}) \dots F'(x_0) \quad (13)$$

En la ecuación (3) se definió una función iterativa, es posible escribir una ecuación diferencial utilizando una función  $f(\alpha, x_n)$  donde  $x_n$  se restringe a un número real entre el 0 y el 1, donde  $\alpha$  es un parámetro dependiente del modelo:

$$x_{n+1} = f(\alpha, x_n) \quad (14)$$

Es trivial notar que la función  $f(\alpha, x_n)$  genera el valor de  $x_{n+1}$  desde  $x_n$ , y al conjunto de puntos generados se le conoce como mapeo de la función misma.

### 4.1. Mapeo logístico

Considerar la ecuación logística:

$$f(\alpha, x) = \alpha x(1 - x) \quad (15)$$

así la ecuación se escribirá en su forma iterativa como:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) \quad (16)$$

Los resultados de la ecuación logística se observan y se comprenden más fácilmente en un mapa gráfico conocido como mapa logístico.

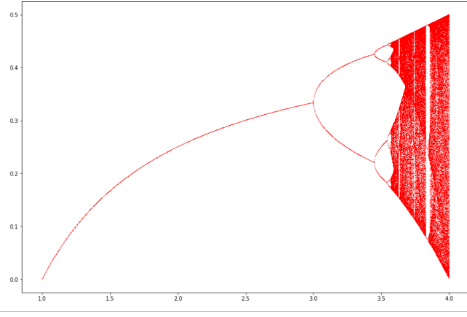


Figura 2: Diagrama de bifurcación formado con el mapeo logístico

## 5. Atractores extraños

Un atractor extraño consiste en una infinidad de puntos en el plano o en un espacio  $m$ -dimensional. Esos puntos corresponden a los estados de un sistema caótico. Los atractores extraños son objetos matemáticos relativamente abstractos, pero las computadoras les dan algo de vida y dibujan imágenes de estos.<sup>4</sup>

En la sección 2 se habló un poco de los sistemas dinámicos, como simplificar el problema consideraremos un sistema conformado por  $m$  parámetros, en el cual sus parámetros varían con el tiempo, como se denotó en la ecuación (1). Para determinar la evolución del sistema a través del tiempo (determinar su dinámica) se pueden considerar que los parámetros especifican el sistema en un tiempo  $t + 1$  y son dados como funciones de parámetros en un tiempo  $t$ . Así se escribe como:<sup>4</sup>

$$\begin{cases} x_1(t+1) = F_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \\ x_2(t+1) = F_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \\ \vdots \\ x_m(t+1) = F_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \end{cases}$$

Se asume que las funciones  $F_1, F_2, \dots, F_m$  son de clase  $C^1$ . Dadas las condiciones iniciales  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_m(0)$  para los parámetros y usando la definición previa, se calcula  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  sucesivamente para todos los enteros positivos  $t$ . Luego se dice que las funciones  $F_1, F_2, \dots, F_m$  determinan un sistema dinámico de tiempo discreto.

### 5.0.1. El atractor de Hénon

Este atractor es llamado así en honor a Michel Hénon, del observatorio en Nice, quien hizo los primeros cálculos con una HP-65. Este sistema describe el humo saliendo de un cigarro o la atmósfera de Júpiter.

Para un sistema con  $m = 2$  donde  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= y + 1 - ax^2 \\ F_2(x, y) &= bx \end{aligned} \quad (17)$$

con  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$ . El sistema dinámico (1) toma la forma:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= y(t) + 1 - ax(t)^2 \\ F_2(x, y) &= bx(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Dadas las condiciones  $x(0)$  y  $y(0)$  se puede calcular  $x(t)$  y  $y(t)$  para  $t = 1, 2, \dots, 10000$  para una instancia dada. Para este atractor en particular es muy útil una sección de Poincaré

### 5.1. Atractor de Lorenz, y predicciones meteorológicas

Los físicos y en general, los científicos utilizan ecuaciones de la forma (1) para describir sistemas que encuentran en la naturaleza o ecuaciones diferenciales cuando hay continuidad en el tiempo. Los científicos eligen algunos parámetros a considerar y descartan otros, comúnmente idealizan algunos aspectos de los fenómenos, un científico serio debe mostrar que el sistema natural que está considerando debe obedecer las leyes deterministas de la forma (1) con una buena aproximación.

Los científicos han observado comportamientos caóticos y turbulentos al estudiar la evolución en el tiempo de ciertos fenómenos naturales como los fluidos, y se han elaborado diversos modelos matemáticos como lo son las ecuaciones de Navier - Stokes, estas ecuaciones no han sido resueltas y forman parte de los « 7 problemas del milenio » planteados por el Instituto Clay, otorgando 1 millón de dólares a quien resuelva alguno de estos.

El atractor de Lorenz, llamado así por el meteorólogo americano profesor del MIT, aparece cuando se tiene un sistema dinámico de tres dimensiones, con tres parámetros variables. En donde  $x_1(t) = x$ ,  $x_2(t) = y$ ,  $x_3(t) = z$ . Lorenz consideró el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xy + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy + bz \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan una descripción de una capa de fluido horizontal calentada desde abajo. El líquido más caliente formado en la parte inferior es más ligero. Tiende a elevarse, creando corrientes de convección. Si el calentamiento es lo suficientemente intenso, la convección toma lugar para una instancia en la atmósfera y es altamente sensible a las condiciones iniciales. Esta es la razón por la que los meteorólogos no pueden predecir el estado de la atmósfera con precisión a un tiempo avanzado.<sup>4</sup>

Para mostrar gráficamente el atractor de Lorenz se eligen los parámetros fijos  $\sigma = 8$ ,  $b = 7/3$  y  $r = 28$ . En la publicación de Ruelle<sup>4</sup> se escogieron los valores  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $r = 28$ . Aunque en el presente trabajo se muestran otros valores.

## 6. Secciones de Poincaré

Una herramienta de mucho valor para el estudio de fluidos en una dinámica no lineal son las secciones de Poincaré. Henri Poincaré inventó una técnica para simplificar los diagramas de fase, pues en ocasiones pueden llegar a ser bastante complicados.

Una gráfica de sección de Poincaré es la secuencia de puntos formados por las intersecciones del recorrido de fase con esos planos paralelos en el espacio fase, proyectados sobre uno de los planos.<sup>2</sup>

Una gráfica de sección de Poincaré es comúnmente usada en flujos en 3D:

1. Estudiar la estabilidad de órbitas periódicas (ciclos límite).
2. Estudiar flujos periódicos en el tiempo. Esos son flujos no autónomos tales que  $f(x, t) = f(x, t + T)$  para algún  $T$ , y para toda  $x \in$

## 7. Exponentes de Lypunov

Los exponentes de Lypunov son un método cuantitativo para determinar el grado de dependencia de las condiciones iniciales de un sistema. El método fue inventado por el matemático ruso A. M. Lypunov. En estos se considera la transición de un estado  $x_0$  a un estado  $x_0 + \epsilon$ . Esa diferencia después de  $n$  iteraciones entre dos  $x_n$  se denota como:

$$d_n = \epsilon e^{n\lambda} \quad (19)$$

La diferencia inicial es  $d_0 = \epsilon$ , luego

$$d_1 = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \approx \epsilon \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \quad (20)$$

Y por inducción se tiene que:

$$d_1 = f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0) = \epsilon e^{n\lambda} \quad (21)$$

Despejando  $\lambda$  se tiene que:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right] \quad (22)$$

Y por regla de la cadena se tiene que:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{dF(x_i)}{dx} \right] \quad (23)$$

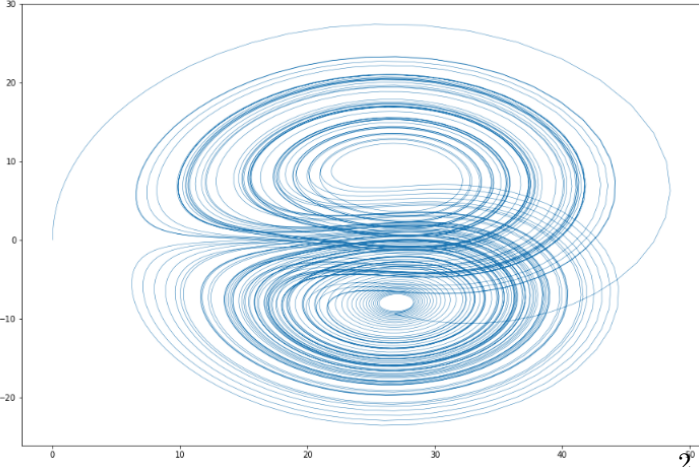


Figura 3: Atractor de Lorenz visto desde el plano xz

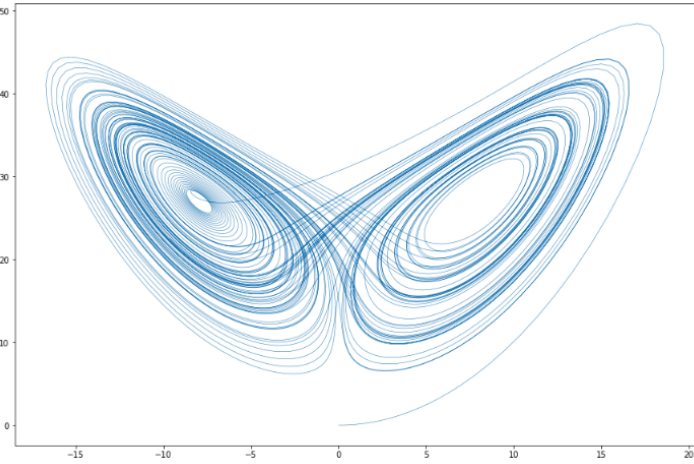


Figura 4: Atractor de Lorenz visto desde el plano yz

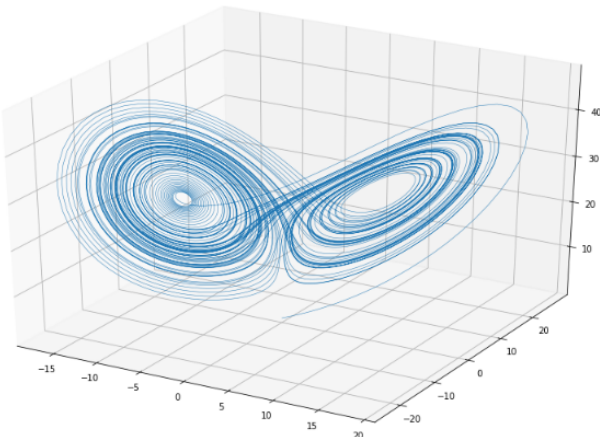


Figura 5: Atractor de Lorenz vista tridimensional

Como se ve, esto implica muchas iteraciones para poder aproximar al valor numérico del exponente. A continuación se muestra un ejemplo de un cálculo numérico realizado en Jupyter.

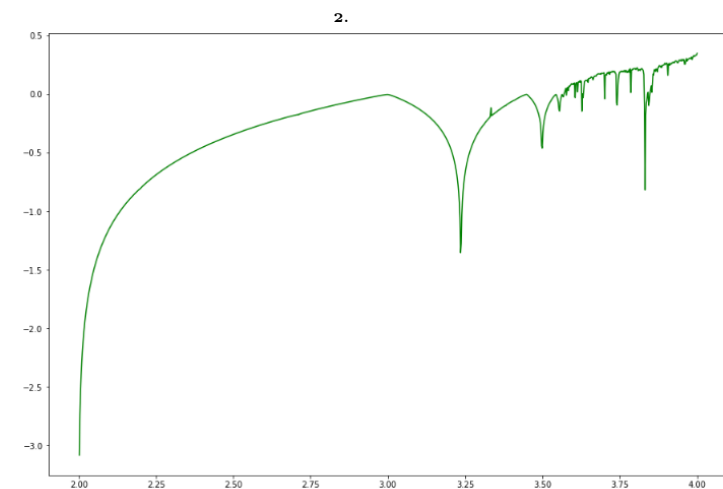


Figura 6: De los coeficientes de Lypunov

## 8. Fractales

En términos simples un fractal es un objeto matemático con una estructura geométrica básica está fragmentada o aparentemente irregular, la cual se repite a diferentes escalas.

Los fractales pueden formar algunas figuras muy interesante como se muestran en las figuras.



Figura 7: Conjunto de Julia

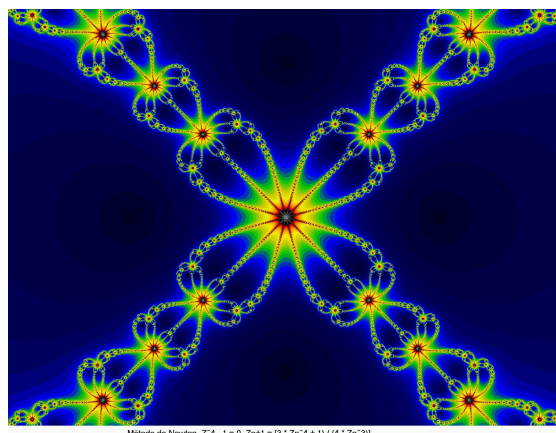


Figura 8: Fractales generados con el método de Newton

## 9. Conclusiones

En general, se estudiaron algunas propiedades básicas de la teoría del caos, la cual se desarrolló ampliamente desde los 70's y ha ido evolucionando mucho gracias a las computadoras, en el presente se incluyó un sistema caótico como es la ecuación del oscilador de van der Pol, se habló de un método cuantitativo para conocer la medida del caos (los exponentes de Lypunov) y se trabajó con unos objetos muy interesantes como los atractores (por ejemplo los atractores de Lorenz) y las secciones de Poincaré.

## 10. Códigos utilizados en Jupyter para generar los gráficos

```
%matplotlib inline
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def pend(y,t):
    x,xpunto = y
    dydt = [xpunto, -5*(1-x**2)*xpunto - x]
    return dydt

y0 = [0.001, 0.001]
t = np.linspace(1000, 200, 10000)

sol = odeint(pend, y0, t)
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'r')
plt.title("Espacio fase", fontsize=22)
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('x.')
plt.grid()
plt.show()
```

Código para la solución de la ecuación de van der Pol

```

import numpy as np
import pylab as py

def f(x, a):
    return a*x*(1-2*x)

# def g(x, a):
#     return a*(1-2*x)

#ex = []
ys = []
rs = np.linspace(1, 4, 1500)
for a in rs:
    x = 0.1
    # e = 0
    # for i in range(500):
    #     e = e + np.log(np.abs(g(x,a)))
    # for i in range(500):
    #     x = f(x, a)

    for i in range(400):
        x = f(x, a)
        ys.append([a, x])
    # ex.append([a, x])

py.figure(figsize=(15,10))
ys = np.array(ys)
py.plot(ys[:, 0], ys[:, 1], '.', color = "red", lw='0.5')
py.show()

```

### Código para la bifurcación

```

import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint

def f(sol, t, p):
    x_p = 8*(y-x)
    y_p = 28*x - y - x*z
    z_p = x*y - 2.333*z
    return [x_p, y_p, z_p]

t = np.linspace(0, 100, 10000)
con_ini = [0.01, 0.015, 0.03]
n = 10000

sol = odeint(f, con_ini, t, args=(n,))

x = sol[:, 0]
y = sol[:, 1]
z = sol[:, 2]

plt.figure(figsize = (15, 10))
plt.plot(z,y, lw='0.5')
plt.show()

```

### Código para la gráficas del atractor de Lorenz

## Referencias

- [1] Ingraham, R. (2010). A survey of nonlinear dynamics (1st ed.). Singapore: World Scientific.
- [2] Marion, J., Thornton, S. (1998). Classical dynamics of particles and systems. Fort Worth (TX): Harcourt Brace College Publishers.
- [3] Sastry, S. (1999). Nonlinear Systems. New York, NY: Springer New York.
- [4] Ruelle, D. (1980). Strange Attractors. In Chaotic Oscillators. Theory and applications (pp. 40 - 51). Tomasz Kapitaniak. Traducido por Tomasz Kapitaniak
- [5] Nuñez, H., Salas, A. (2013). Poincare, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. In Revista Mexicana de Física E 59 (pp. 91 - 100).
- [6] Siebert, W., Morel, J., Takens, F., Teissier, B. (2009). Local Lyapunov Exponents (pp. 10 - 12). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [7] Perez Lobato, G. (2018). Oscilador de Van der Pol.

\*La imagen fue tomada de la página 6 del libro Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control<sup>3</sup>