Universidad de Guanajuato

División de Ciencias e Ingenierías

Campus León

Ensayo sobre Caos

Luz Angélica Sosa Cortés

Mecánica Analítica

Dr. Gustavo Niz Quevedo

Fecha de entrega: domingo 11 de noviembre, 2018

RESUMEN:

Se presenta un ensayo sobre la teoría del caos y sus aplicaciones. Se discuten fundamentos teóricos como las secciones de Poincaré, atractores extraños, exponentes de Lyapunov, fractales y mapeos; así mismo se discute de bifurcaciones. En las aplicaciones se presenta un resumen detallado de la relevancia del caos en el abordaje de problemas en diferentes áreas de las ciencias naturales y sociales, tales como la Física, Astronomía, Matemáticas, Economía, Ciencias Biológicas, entre otras. Del mismo modo, se discute un ejemplo particular de un sistema mecánico caótico, el péndulo electromecánico. En conclusión, en este ensayo se observa que la teoría del caos es un área de desarrollo vertiginoso en la ciencia actual, con aplicaciones en prácticamente todos los campos del conocimiento.

ÍNDICE

I. Antecedentes 3

II. Fundamentos de la teoría del caos 4

2.1 Fractales y atractores *4*

2.2 Bifurcaciones y exponentes de Lyapunov *6*

2.3 Los aportes de Poincaré a la teoría del caos *6*

2.4 Mapeos caóticos *7*

2.4.1 Mapeo logístico 7

2.4.2 Mapeo Tent 7

2.4.3 Mapeo de Bernoulli 8

2.4.4 Mapeo seno 8

III. Aplicaciones de la teoría del caos 8

IV. Sistema caótico mecánico: Péndulo electromecánico 9

V. Conclusiones 11

Referencias 12

I. ANTECEDENTES

El caos es el fenómeno relacionado a la impredecibilidad en un sistema determinístico y no debe ser entendido como desorden, sino más bien debe considerarse como una clase de orden con periodicidad. En un sistema caótico se incluyen elementos de orden a largo tiempo; por consiguiente, un sistema caótico no es un sistema aleatorio, sino más bien determinístico; pero sí es impredecible en el largo tiempo.[1,2]

El concepto de caos en la mecánica clásica está asociado a la sensibilidad extrema de un sistema a sus condiciones iniciales. Esto es que dos estados caóticos con condiciones iniciales muy cercanas divergirán exponencialmente en el tiempo, donde la tasa de esta separación es caracterizada por el exponente de Lyapunov. Los sistemas caóticos presentan dos propiedades relevantes.[3,4]

1. Sistemas simples pueden producir resultados muy complicados.

2. Presentan extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

La ergodicidad es otra propiedad de los sistemas caóticos, la cual implica que después de un largo tiempo el sistema es igualmente probable de encontrarse en cualquier estado accesible de su espacio fase. La forma en que es representado en dicho espacio es igualmente relevante, y es referida como atractores extraños; los cuales tienen dimensiones no enteras, por lo que presentan características fractales. Estos consisten en un número infinito de estados cercanos.[1,3]

El trabajo pionero que dio origen a la ciencia del caos fue el estudio de Poincaré del problema de la interacción gravitacional de tres cuerpos.[5] Otros investigadores como Hietarinta y Mikkola han estudiado también este problema, y han demostrado que el movimiento de los cuerpos ligeros en la vecindad de dos masas pesadas tiene un comportamiento caótico. Este fenómeno es relevante para el estudio del movimiento de las lunas de planetas grandes o partículas en anillos planetarios como el de Saturno.[6]

El estudio del caos ha sido aplicado a sistemas tanto clásicos como cuánticos. Gubin y Santos han estudiado el caos cuántico en sistemas interactuantes de espines $1/2$. Ellos plantean que una de las principales señales de la existencia de caos cuántico es que el espectro de energía de aquellos sistemas cuánticos cuyas contrapartes clásicas son caóticas presentan repulsión de los niveles de energía.[3]

Otros temas particularmente interesantes en el estudio de los sistemas caóticos han sido la sincronización del caos y el control del caos. La sincronización implica que en dos sistemas caóticos el estado de uno asintóticamente alcance el estado del otro. Por su parte el control del caos hace uso del hecho de que una solución de estado estacionario caótico se encuentra entre un número infinito de soluciones periódicas inestables. Tanto la sincronización como el control del caos han conducido a un área de investigación interesante durante los últimos años, tanto por su interés científico como por sus aplicaciones.[2] A partir de la década de los 90s se hicieron avances significativos en el control de sistemas dinámicos mediante la manipulación de sistemas caóticos para alcanzar una dinámica deseada al incorporar apropiadamente algunos términos en las ecuaciones que los gobiernan. Estas aplicaciones han permitido el desarrollo de un campo innovador con nuevas perspectivas sobre la dinámica caótica de los sistemas que pudieran ser utilizadas en la comunicación privada para mejorar la seguridad de los mensajes encriptados.[2,7,8] Algunas aplicaciones que se han planteado sobre el control de los sistemas caóticos incluyen la estabilización de órbitas periódicas inestables en un circuito conducido de diodo, en láseres multimodales, así como también aplicaciones en el área médica en el estudio de la desestabilización del comportamiento periódico en el cerebro, donde la periodicidad es anormal y está asociada con convulsiones epilépticas, entre muchas otras aplicaciones en el campo de la ingeniería y las ciencias.

Otra aplicación de la teoría del caos es el estudio de los problemas de dispersión, que ha sido aplicada en años recientes a un número importante de áreas de la física y las matemáticas, tales como dinámica simbólica, dimensión fractal, entropía y bifurcaciones. Un problema de dispersión se define como uno en el cual se desea obtener la relación entre una variable de entrada que caracteriza una condición inicial para algún sistema dinámico y una variable de salida que caracteriza un estado final del sistema. Por ejemplo, el movimiento de una partícula puntual en un potencial V(x) de extensión espacial finita, definido como:

$$V(x) = \begin{cases} V & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases} \tag{1}$$

En el ejemplo mencionado un problema no caótico asociado sería aquel en el cual la función que relaciona el parámetro α, que caracteriza el movimiento o estado final de la partícula al pasar por la región de dispersión, $V(x)$, y el parámetro de impacto b, que caracteriza el estado inicial, es una curva simple, y que por tanto permite predecir el comportamiento subsecuente del sistema. El problema caótico asociado sería aquel en el cual la variable de salida α varía tan rápidamente con la variable de entrada b que no es posible obtener la relación funcional entre ellas, por lo que no se puede resolver el problema de predecir el estado final del sistema a partir de la variable de entrada.

Otros ejemplos de sistemas físicos donde la dispersión caótica es relevante son: la mecánica celeste, las trayectorias de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos, las líneas de trayectorias de los campos magnéticos, procesos hidrodinámicos, modelos de reacciones químicas, dispersión en física atómica y nuclear, entre otras.[5]

Es importante mencionar además que la teoría del caos también tiene aplicaciones en ciencias sociales, un ejemplo de ello es el estudio de Grandmont acerca de las bifurcaciones de las ecuaciones diferenciales no lineales para ser usada en la teoría económica.[9] En conclusión, los fundamentos de la teoría del caos han sido aplicados en las tres últimas décadas en prácticamente todas las áreas del conocimiento, lo cual ha sido posible gracias al desarrollo de la computación moderna, ya que muchas de las aplicaciones del caos conducen a problemas cuya solución sólo puede ser obtenida mediante métodos numéricos.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: La sección 2 presenta una descripción detallada de los fundamentos más relevantes de la teoría del caos, tales como: atractores extraños, fractales, exponentes de Lyapunov, los aportes de Poincaré a la teoría del caos y los mapeos utilizados en sistemas caóticos. La sección 3 presenta un resumen de algunas de las aplicaciones más importantes del caos en las ciencias y la ingeniería. La sección 4 presenta una discusión detallada de una aplicación particular a un sistema caótico mecánico: el problema de un péndulo electromecánico. Por último, las conclusiones del trabajo se presentan en la sección 5.

II. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DEL CAOS

El caos determinista estudia una serie de fenómenos de la teoría de sistemas dinámicos, la teoría de ecuaciones diferenciales y la mecánica clásica. En términos generales el caos determinista da lugar a trayectorias asociadas a la evolución temporal de forma irregular, esta irregularidad de las trayectorias se debe a la imposibilidad de predecir la evolución temporal del sistema a causa de su fuerte dependencia con pequeños cambios en las condiciones iniciales.

Por ende, para considerar a un sistema como caótico debe cumplir con presentar un movimiento oscilante de trayectoria cuasi periódica, ser un sistema determinista no-lineal y no azaroso, y presentar gran sensibilidad ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del sistema. Una definición matemática sería que si se tiene función f, tal que:

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1], para\ muchas\ iteraciones\ f\ es\ caótica\ en\ [0,1] \qquad (2)$$

Para comprender mejor las características que debe tener un sistema caótico, se presentan a continuación conceptos básicos de la teoría caótica.

2.1 Fractales y atractores

Edward Norton Lorenz fue un meteorólogo del MIT que construyó un modelo simplificado para explicar el comportamiento de la atmósfera, el cual era muy complejo. Debido a sus estudios se desarrolló una nueva teoría, la teoría del caos. A principios de los 60s, Lorenz se percató que a pequeñas variaciones en un sistema dinámico éstas pueden desencadenar resultados inesperados, el conocido efecto mariposa, presentado en 1972 en su libro "*Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*"[10,11]

Lorenz se dedicó a explorar las matemáticas subyacentes y publicó sus conclusiones en un trabajo titulado "*Deterministic Nonperiodic Flow*"[12], en el cual describió el comportamiento no-lineal de un sistema de 3 ecuaciones lineales correspondiente a un modelo simplificado de dinámica de fluidos, un sistema relativamente simple de ecuaciones que dieron lugar a un patrón de la complejidad infinita llamado atractor de Lorenz. James Yorke y Robert May analizaron matemáticamente el sistema descrito por la ecuación propuesta por Lorenz; Yorke probó que cualquier sistema unidimensional con un periodo regular de 3 mostrará trayectorias regulares y caóticas.[13] Se descubrieron luego efectos similares en genética, economía, dinámica de fluidos, epidemiología, fisiología.

Benoit Mandelbrot también realizó investigaciones acerca de la teoría de caos en distintos sistemas económicos, atmosféricos y computacionales. En 1975 utilizó por primera vez el término fractal aplicándolo a la representación geométrica de estos fenómenos; John Hubbard demostró la existencia de una continuidad lineal de todos los elementos de un gráfico fractal. Y Michael Henon fue quien demostró que los atractores extraños manifiestan un carácter fractal. Investigaciones realizadas en este ámbito muestran que todos los fractales parecen terminar en el conjunto de Mandelbrot, confirmándose el principio de universalidad propuesto por Mitchell Feigenbaum.[14] En 1977, Robert Shaw, observó los efectos de la teoría del caos programando el atractor de Lorenz en un computador analógico. Muchos otros se le unieron para intentar enlazar la teoría con lo experimental. Shaw descubrió la relación entre los atractores, el caos y la teoría de la información fundada en la entropía.[15]

En el estudio de sistemas dinámicos es usual utilizar ecuaciones que los describan para poder realizar predicciones a lo largo del tiempo. Pero analizar todas las variables implicadas en estos sistemas puede hacer en problema prácticamente inmanejable, por lo que se realizan simplificaciones en las que sólo se consideran las variables básicas de los sistemas. A pesar de esto, en ocasiones las ecuaciones pueden seguir siendo muy complejas; bajo ciertas hipótesis, el comportamiento de estos sistemas varía convergiendo a un estado particular o conjunto de estados periódicos o irregulares. Estos conjuntos a los que convergen las soluciones de los sistemas son llamados atractores.

Un atractor se define por tanto, como el patrón de la trayectoria que describe el comportamiento de un sistema en un espacio matemático; el cual debe ser un conjunto invariante, tener un conjunto de condiciones iniciales y ser mínimo. transición de un atractor a otro se le llama bifurcación. Existen diferentes tipos de atractores dependiendo de la dimensión del sistema en el espacio de fases, por lo que pueden clasificarse en 4 categorías[16-18]:

1. Atractor con un único punto de estabilidad.

2. Atractor periódico con periodo fijo.

3. Atractor cuasi periódico.

4. Atractor aperiódico o caótico.

En el espacio fase, los tres primeros tipos de atractores tienen formas con características cualitativas de punto, círculo y toroide, respectivamente; mientras que el cuarto tipo de atractores no tiene ninguna de estas formas clásicas o transformaciones, por lo que se conocen también como atractores extraños; estos suelen tener formas geométricas complejas, y a estas formas se les llama objetos fractales.

Mandelbrot introdujo la noción de fractales mediante sus imágenes, las cuales son mapeos iterativos en el plano complejo; y se refiere a las estructuras geométricas que describen a los sistemas y las cuales son invariantes ante cambios de escala. Estos objetos fractales presentan cierta dimensión no entera o dimensión fractal que mide el grado de irregularidad del sistema[18,19], y se expresa como:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \qquad (3)$$

donde $N(\varepsilon)$ es el número mínimo de bolas de radio ε necesarias para recubrir la superficie delimitada por un atractor. La geometría fractal permite interpretar al Universo como un sistema complejo, ésta es una representación de procesos iterativos no-lineales, lo cual permite obtener algoritmos simples que son pautas que se repiten en todas las escalas de un objeto fractal. Cabe destacar que las figuras u objetos fractales son finitos pues están limitados, pero al mismo tiempo son infinitos pues siempre se puede afinar la aproximación a la precisión modificando la escala.

2.2 Bifurcaciones y exponentes de Lyapunov

Como se ha mencionado anteriormente, los atractores presentan una dependencia sensible de las condiciones iniciales. Esto significa que dos trayectorias cercanas divergen, y cada una tendrá un futuro totalmente diferente de la otra. Este cambio en las trayectorias se presenta mediante diagramas de bifurcación, en los cuales se aprecia el carácter caótico del sistema a partir de la cuarta bifurcación. Dicha bifurcación está caracterizada por el exponente de Lyapunov, debido a que en el espacio de las fases correspondiente, las trayectorias divergen exponencialmente. La bifurcación entre dos trayectorias se puede expresar la siguiente manera:

$$\|\delta\| = \|\delta_0\| e^{\lambda t} \tag{4}$$

donde $\delta(t)$ es el vector que separa a las trayectorias, δ_0 es la separación inicial entre ellas y λ es el exponente Lyapunov. Así mismo, se puede obtener λ como:

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta f^t}{\delta_{x_0}} \right| \tag{5}$$

donde Δf^t es el cambio de la solución de una función que describe al sistema evaluada en dos condiciones iniciales cercanas de éste que difieren por una pequeña perturbación, δ_{x_0}. Si los exponentes de Lyapunov son positivos, las trayectorias divergen y el sistema es caótico; si son negativos, las trayectorias convergen y el sistema es no caótico. No existen soluciones analíticas reportadas para el cálculo de los exponentes de Lyapunov, estos sólo pueden ser obtenidos mediante métodos numéricos.[20,21]

En un sistema, el número de exponentes de Lyapunov es igual número de dimensiones del espacio-fase; y estos tienen las siguientes propiedades:

- Si el sistema es conservativo, la suma de todos los exponentes de Lyapunov debe ser cero.
- Si es sistema es disipativo, la suma será negativa.
- Si el sistema representa un flujo, siempre habrá un exponente nulo.
- En un sistema dinámico, la suma de los exponentes es positiva sí y sólo sí el sistema es abierto.

Un indicador importante de la presencia de caos en un sistema dinámico es el máximo exponente de Lyapunov, el cual es una medida de la divergencia exponencial de trayectorias cercanas. El inverso del mayor exponente de Lyapunov es conocido como el momento de Lyapunov, el cual también caracteriza el movimiento del sistema. Para trayectorias caóticas, éste será finito, mientras que para trayectorias no caóticas, será infinito.

2.3 Los aportes de Poincaré a la teoría del caos

El desarrollo de la teoría del caos ocurrió a finales del siglo XIX, cuando Henri Poincaré demostró que ciertos sistemas podían presentar un comportamiento irregular y aperiódico, a pesar del pensamiento de la época acerca del comportamiento regular y predictible de los sistemas mecánicos en la medida en que éstos resultaban descriptos por ecuaciones diferenciales. Poincaré abordó el problema de estos sistemas basado en un enfoque geométrico y topológico, de forma más cualitativa que cuantitativa; sus investigaciones brindaron el marco teórico para las actuales investigaciones sobre sistemas dinámicos inestables. Setenta años después de sus investigaciones, Edward Norton Lorenz, en 1963, obtuvo los primeros resultados cuantitativos. El comportamiento irregular correspondiente a estos sistemas pasó a denominarse caótico.

Un recurso ampliamente utilizado en física consiste en representar el comportamiento de un sistema dinámico en el espacio de las fases, dicha representación permite caracterizar de un modo más sencillo la estabilidad del comportamiento de los sistemas dinámicos. Un sistema es estable si sufre pequeñas variaciones frente a modificaciones también pequeñas de las condiciones iniciales. Las situaciones de evolución estable eran los casos típicamente estudiados durante el siglo XIX, cuando se creía que todo sistema regido por la clásica mecánica hamiltoniana debía cumplir con la propiedad de estabilidad en sus posibles evoluciones; los trabajos de Poincaré demostraron la existencia de sistemas hamiltonianos que pueden presentar evoluciones temporales inestables.[22]

Teniendo un sistema multidimensional representado en el estado de fase se puede obtener una representación bidimensional, a lo que se conoce como sección del espacio de fases o sección de Poincaré. Esta proyección muestra un conjunto de puntos que representan al sistema en distintos momentos. Estas secciones difieren de un diagrama de recurrencia debido a que en estos es el espacio y no el tiempo lo que determina los puntos a graficar. Se puede concluir que un sistema no es caótico si el mapa o sección de Poincaré consiste en una línea continua, mientras que se considerará como un sistema caótico si el mapa de Poincaré consta de puntos “aleatorios”.[23]

Poincaré también obtuvo resultados importantes acerca de la existencia y las propiedades de los ciclos límite de un sistema, estos ciclos límite son las soluciones periódicas a las tienden las trayectorias cercanas. De igual forma realizó una formulación que permitiese clasificar el comportamiento de un sistema dinámico, esta formulación es el teorema de Poincaré-Bendixon[24], en el que afirman:

> *“Un sistema diferenciable definido en un subconjunto abierto del plano todo conjunto compacto no vacío que sirva como conjunto límite de una órbita y que contenga un conjunto finito de puntos fijos, sólo podrá ser un punto fijo, una órbita periódica o un conjunto conexo compuesto por un número finito de puntos fijos y que incluya a las órbitas homoclínicas y heteroclínicas que los conecten…”* (Núñez-Yépez, H.N. and Salas-Brito, A. L.)

2.4 Mapeos caóticos

Un mapeo es una descripción matemática del comportamiento caótico de un sistema dinámico, permitiendo describir la secuencia temporal o progresión de un sistema no lineal en un momento particular, al investigar cómo el estado x_{n+1} del sistema depende del estado x_n. Matemáticamente, un mapeo puede representarse como:

$$x_{n+1} = f(\alpha, x_n) \qquad (6)$$

En esta ecuación la función $f(\alpha, x_n)$ asociada al estado $n - ésimo$ del sistema genera el estado $(n+1) - ésimo$. Así, la colección de todos los generados por esta función es llamada un mapeo.

En las secciones anteriores se discutieron varias técnicas de mapeo tales como los exponentes de Lyapunov, las secciones de Poincaré y los diagramas de bifurcación. En esta sección abordamos con más detalle la descripción de diversas técnicas de mapeo tales como el logístico, Tent, de Bernoulli, y seno[25].

2.4.1 Mapeo logístico

El mapeo logístico es un mapeo polinomial dado por la ecuación:

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x^n) \qquad (7)$$

donde el parámetro α es dependiente del modelo. Este tipo de mapeo ha sido empleado en el área biológica para describir el comportamiento caótico del crecimiento de poblaciones.

2.4.2 Mapeo Tent

El mapeo Tent presenta grandes similitudes con lo mapeo logístico. Su descripción matemática es la siguiente:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \alpha x_n & 0 \leq x_n \leq 0.5 \\ \alpha(1 - x^n) & 0.5 \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{8}$$

Tanto el mapeo logístico como el mapeo Tent presentan el fenómeno de homeomorfismo.

2.4.3 Mapeo de Bernoulli

El mapeo de Bernoulli es un mapeo lineal segmentado, cuya descripción matemática es:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha x_n & 0 \leq x_n \leq 0.5 \\ 2\alpha x_n - 1 & 0.5 \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{9}$$

2.4.4 Mapeo seno

A diferencia de los tres mapeos mencionados anteriormente, el mapeo seno no es un mapeo polinomial, este presenta las características de la misma función que lo defino, la función seno, razón por la cual podrían obtener valores negativos y positivos. La descripción matemática está acotada para sólo presentar valores positivos.

$$x_{n+1} = \alpha \sin(x_n)\,, para\ 0 \leq x_n \leq 1 \tag{10}$$

Cabe destacar que estos son sólo algunos de los mapeos más sencillos de implementar, debido a su carácter unidimensional. Pero existen muchos más, mucho más complejos.

III. APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL CAOS

Los primeros trabajos acerca del caos ocurrieron en los campos de la biología, meteorología, física, química y computación. Ahora, la literatura está repleta de muchos otros ejemplos sobre turbulencia y caos en diversos campos tales como la fisiología, geología, epidemiología, modelos teóricos de biología demográfica, economía, estadística, lógica y filosofía, y cualquier otra rama de la investigación científica.

A continuación, en la figura 1 se presenta un diagrama con un breve resumen de las diferentes áreas del conocimiento donde hoy en día en aplicada la teoría del caos, así como los principales problemas o temas abordados en cada una de ellas.

Astronomía	• Problema de 3 cuerpos. • Movimiento planetario.
Teoría de la Información	• Seguridad y encriptado de información.
Matemáticas	• Ecuaciones diferenciales no-lineales. • Teoría de números.
Fisiología, Biología y Epidemiología	• Variables fisiológicas generadas del electroencefalograma. • Datos de series de tiempos de sistemas biológicos. • Estudio de movimiento de poblaciones.
Economía	• Problemas de retroalimentación de la demanda y la oferta.
Filosofía y Lógica	• Estudios del comportamiento aparentemente aleatorio.
Mecánica Cuántica	• Estudio de la función de onda probabilística.
Y muchas otras áreas.	

Figura 1. Diagrama de las aplicaciones del caos.

IV. SISTEMA CAÓTICO MECÁNICO: PÉNDULO ELECTROMECÁNICO

La figura 2 muestra un diagrama de un péndulo electromecánico, donde el punto A es el soporte del péndulo de longitud l, y el cual es desplazado a lo largo del eje x por un motor. Así, el desplazamiento del punto A es una función del ángulo de giro θ del motor, dado por la ecuación:

$$r_A(t) = a\cos\theta + b\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

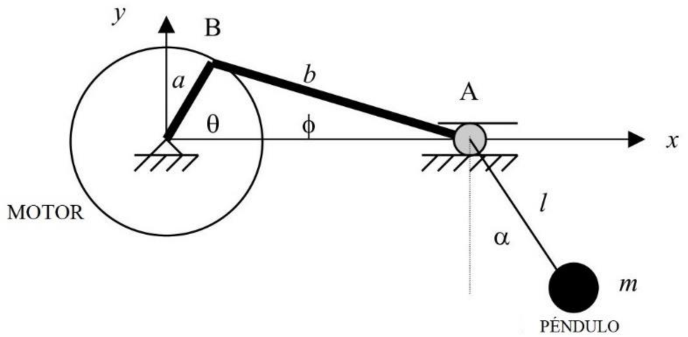

Figura 2. Diagrama del sistema de un péndulo electromecánico.[26]

Realizando el análisis de energía del sistema, se obtiene que

$$K = \frac{1}{2} I \ddot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[\left(-a\dot{\theta}F + l\dot{\alpha}\cos\alpha \right)^2 + (-l\dot{\alpha}\sin\alpha)^2 \right] \quad (12.a)$$

$$V = mgl(-\cos\alpha) \quad (12.b)$$

con

$$F = \left\{ 1 + \frac{\frac{a}{b}\cos\alpha}{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \sin\alpha \quad (12.c)$$

Este sistema ha sido estudiado por Belato[26], quien encontró que las ecuaciones del movimiento pueden ser escritas como

$$(I + \beta_4 F^2 \sin^2\alpha)\ddot{\theta} = \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 F^2)\dot{\theta} - \beta_4 \sin^2\alpha\, F\dot{F}\dot{\theta} - \beta_5 F(\cos\alpha + \dot{\alpha}^2)\sin\alpha \quad (13.a)$$

$$\ddot{\alpha} + \sin\alpha = \frac{a}{l}\left(F\ddot{\theta} + \dot{F}\dot{\theta}\right)\cos\alpha - \beta_6\dot{\alpha} \quad (13.b)$$

donde los coeficientes β_i representan parámetros de control del sistema. Como puede apreciarse, la solución de estas ecuaciones no puede ser obtenida analíticamente. Un tratamiento numérico de ellas es descrito en la referencia 26, donde se obtiene que el diagrama de frecuencia del sistema es como el que se muestra en la figura 3.

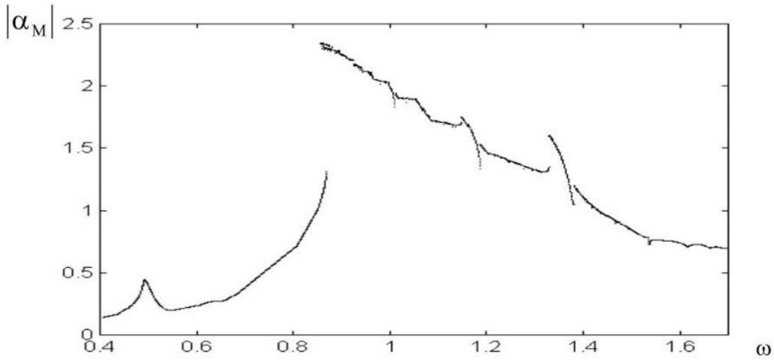

Figura 3. Diagrama de la respuesta en frecuencia del sistema.[26]

De la figura 3 se observa que la respuesta del sistema presenta un cambio brusco, con una discontinuidad súbita, el cual es atribuido al comportamiento caótico del mismo.

Una descripción del sistema en la referencia citada presenta los diagramas tanto del comportamiento del atractor caótico como de la sección de Poincaré. Así como un conjunto de distintos diagramas del espacio de fase para diferentes estados del sistema, el cual se presenta a continuación (Figura 4).

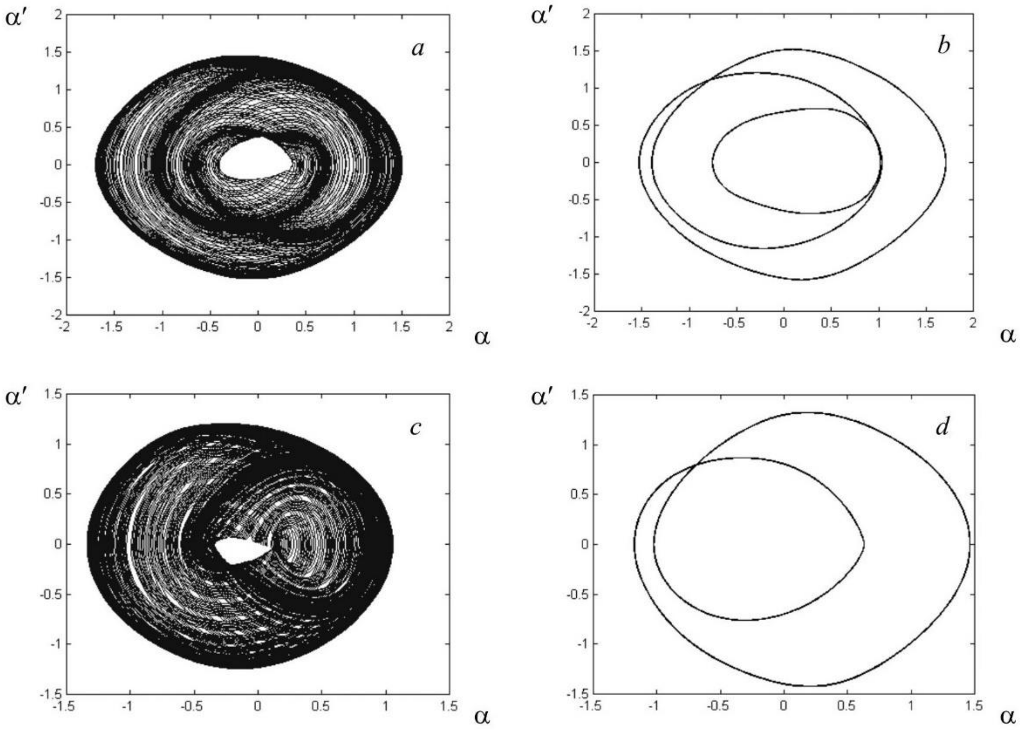

Figura 4. Diagramas del espacio de fases de diversos estados del sistema. [26]

V. CONCLUSIONES

Los sistemas caóticos están presentes en todas las áreas del conocimiento y su estudio se fundamenta en los trabajos pioneros de Poincaré y Lorenz, quienes estudiaron por primera vez el problema de la atracción gravitacional de tres cuerpos. A partir de sus observaciones fue posible comprender la dinámica de muchos sistemas tanto físicos como de muchas otras áreas de quehacer científico. Fue evidente que en muchas áreas del conocimiento, muchos sistemas dinámicos son altamente sensibles a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, hoy conocidos como sistemas dinámicos caóticos, dando lugar al área de la ciencia denominada Caos Determinístico.

Es importante destacar que un sistema caótico no es un sistema aleatorio pero que sí es impredecible en el largo tiempo. De igual forma, es imprescindible mencionar que a pesar de no haber una definición universal de lo que es el caos, sí hay un gran entendimiento de las características que debe presentar un sistema para ser considerado caótico.

Por otra parte, en este trabajo se discutieron algunos de los fundamentos esenciales de la teoría del caos. Se hizo además una revisión extensa de sus aplicaciones y se abordó la descripción de un sistema mecánico caótico particular.

En conclusión, es evidente que la teoría del caos es una de las áreas de la ciencia moderna con mayor aplicación en la ciencia y la ingeniería actual, debido por un lado a que permite una descripción más realista de los fenómenos de la naturaleza, muchos de los cuales en diversos regímenes presentan comportamientos no lineales; y por el otro, debido al vertiginoso desarrollo que la computación moderna ha tenido en las últimas décadas, permitiendo así obtener soluciones numéricas a las ecuaciones que describen los sistemas dinámicos caóticos y complejos.

REFERENCIAS

[1] MONTENEGRO-JOO, J. (2009). A pragmatic introduction to chaos theory for engineers. *Revista de la Facultad de Ingeniería Industrial* **12** 89-94.

[2] KENNEDY, M. P. AND OGORZALEK, M. J. (1997). Introduction to the special issue on chaos synchronization, control and applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **44** 853.

[3] GUBIN, A. AND SANTOS, L. F. (2012). Quantum chaos: An introduction via chains of interacting spins ½. *American Journal of Physics* **80** 246-251.

[4] FISHER, G. V. (1993). An introduction to chaos theory and some haematological applications. *Comparative Haematology International* **3** 43-51.

[5] OTT, E. AND TÉL, T. (1993). Chaotic scattering: An introduction. *Chaos* **3** 417-426.

[6] HIETARINTA, J. AND MIKKOLA, S. (1993). Chaos in the one-dimensional gravitational three-body problem. *Chaos* **3** 183-203.

[7] DITTO, W. L. AND SHOWALTER, K. (1997). Introduction: Control and synchronization of chaos. *Chaos* **7** 509-511.

[8] DONATI, S. AND MIRASSO, C. R. (2002). Introduction to the feature section on optical chaos and applications to cryptography. *IEEE Journal of Quantum Electronics* **38** 1138-1139.

[9] GRANDMONT, J. M. (2008). Nonlinear difference equations, bifurcations and chaos: An introduction. *Research in Economics* **62** 122-177.

[10] (2008). Edward Lorenz, father of chaos theory and butterfly effect, dies at 90. *MIT Tech Talk* **52** 2.

[11] LORENZ, E. N. (1972). Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?

[12] LORENZ, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** 130-141.

[13] LI, T. Y. AND YORKE, J. A. (1975) Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly* **82** 985-992.

[14] COLLE, R. (1998). Teorías del caos, cognitivismo y semántica. *Revista Latina de Comunicación Social* **3** 23-34.

[15] SHAW, R. (1981) Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *Zeitschrift für Naturforschung A* **36** 80-112.

[16] ANGELLI, J. P. AND BARREA, A. Reconstrucción de Atractores. *Revista de Educación Matemática* **21** 18-32.

[17] IZQUIERDO-SEBASTIÁN, J. (2009). Atractor extraño de Lorenz.

[18] CHATTERJEE, S. AND YILMAZ, M. R. (1992). Chaos, fractals and statistics. *Statistical Science* **7** 49-121.

[19] CASADO, M. P. (2014). Fractales y aplicaciones meteorológicas. *Revista Tiempo y Clima* **3** 17-21.

[20] DUBEIBE, F. L. (2013) Calculation of Largest Lyapunov Exponent with Mathematica. *Revista Colombiana de Física* **45** 151-155.

[21] ROMANELLI, L. (2006). Teoría del caos en los sistemas biológicos. *Revista Argentina de Cardiología* **74** 478-482.

[22] LOMBARDI, O. (1998). La teoría del caos y el problema del determinismo. *Diálogos* **72** 21-42.

[23] PORTER, M. A. AND LIBOFF, R. L. (2003). Caos en la escala cuántica. *Investigación y Ciencia* 76-82.

[24] NÚÑEZ-YÉPEZ, H. N. AND SALAS-BRITO, A. L. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de recurrencia. *Revista Mexicana de Física* **59** 91-100.

[25] MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, R. F. (2014). Fallas en el exponente de Lyapunov para representar el comportamiento caótico de los mapeos unidimensionales digitalizados. *American Journals* **6** 2855-2860.

[26] BELATO, D., WEBER, H. I., BALTHAZAR, J. M. AND MOOK, D. T. (2001). Chaotic vibrations of a nonideal electro-mechanical system. *International Journal of Solids and Structures* **38** 1699-1706.