Luz Angélica Sosa Cortés.
Mecánica Analítica.
Fecha de entrega: 01 de Noviembre de 2018.

Tarea 3

Pregunta 1

Partiendo del Principio del Cálculo Variacional, se tiene que si una curva que representa un trayecto entre dos puntos es una curva extrema, entonces cualquier segmento tendrá las mismas características.

Por otro lado, cualquier variación infinitesimal alrededor de un extremo es proporcional a $(\Delta x)^2$ por lo que se puede tomar como nula.

Luego, sea

$$P(x)|_{x_0} = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{d^2f}{dx^2}(\Delta x)^2$$

una aproximación cuadrática. Como x_0 es un punto extremo entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, y así

$$P(x) - f(x_0) = \frac{d^2f}{dx^2}(\Delta x)^2 \simeq 0$$

En este caso $x_0 \longrightarrow$ Función integral. Se debe hallar la función mínima

$$F = F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) \longrightarrow I = \int_k^{k+1} F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\, dt$$

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

Esta integral se pasa a una sumatoria

$$I \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\Delta t$$

Obteniendo el Lagrangiano en los dos puntos, k y k+1, se tiene

$$L_k = F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\,\Delta t$$

y

$$L_{k+1} = F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)\,\Delta t$$

Derivando estas expresiones

$$\frac{\partial L_k}{\partial q_k} = \frac{\partial F}{\partial q_k}\Delta t_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dq_k}\Delta t_k + \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k}\frac{d\ddot{q}_k}{dq_k}\Delta t_k + \frac{\partial F}{\partial t_k}\overset{\frac{1}{\dot{q}_k}}{\cancel{\frac{dt_k}{dq_k}}}\Delta t_k$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial q_k} = \frac{\partial F}{\partial q_k}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k}\frac{d\ddot{q}_k}{dq_k}\Delta t + 2\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial L_{k+1}}{\partial q_{k+1}} = \frac{\partial F}{\partial q_{k+1}}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_{k+1}}\frac{d\ddot{q}_{k+1}}{dq_{k+1}}\Delta t - 2\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{k+1}}$$

La diferencia mínima va a estar dada como

$$\frac{\partial L_k}{\partial q_k} + \frac{\partial L_{k+1}}{\partial q_{k+1}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_{k+1}}\right]\Delta t + \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial q_{k+1}}\right]\Delta t - 2\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{k+1}}\right] = 0$$

Entonces se tiene

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q}\right]\Delta t = 2\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{2}{\Delta t}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$$

y como Δt es muy pequeña, $\frac{2}{\Delta t} \rightarrow \frac{d}{dt}$, así

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

Pregunta 2

Teniendo

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

donde

$$g_{ab} = g_{ab}(q^a, q^b)$$

y sabiendo que la ecuación de Euler-Lagrange se expresa como

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

además, las coordenadas generalizadas son: q^a, q^b. Entonces se tendrán 2 ecuaciones de Euler-Lagrange.

- E-L para q^a:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^a}\left[g_{ab}(q^c)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^b\right] = 0$$

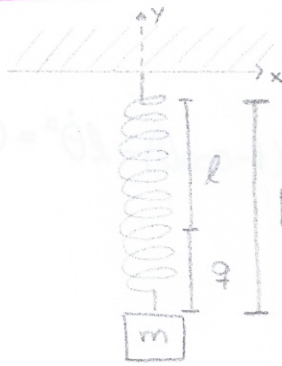
$$\frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^a}\left[g_{ab}(q^c)\right] - \frac{1}{2}\left[g_{ab}(q^c)\right]^{\circ}\dot{q}^b - \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\ddot{q}^b = 0$$

- Análogamente, para q^b:

$$\frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^b}\left[g_{ab}(q^c)\right] - \frac{1}{2}\left[g_{ab}(q^c)\right]^{\circ}\dot{q}^a - \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\ddot{q}^a = 0$$

Pregunta 3

a)



Donde q es la deformación del resorte debido a la masa y

$$h = q + \ell \ , \quad q = h - \ell$$

Las coordenadas generalizadas son: θ, q. Así

$$x = h\,\text{sen}\,\theta \ , \quad y = h\cos\theta$$

$$|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\dot{h}\,\text{sen}\,\theta + h\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{h}\cos\theta - h\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)^2}$$

$$|v|^2 = \dot{h}^2\,\text{sen}^2\theta + 2h\dot{h}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + h^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{h}^2\cos^2\theta - 2h\dot{h}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + h^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\theta$$

Entonces

$$T = \tfrac{1}{2}m|v|^2 = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2\right] = \underline{\tfrac{1}{2}m\left[\dot{q}^2 + (q+\ell)^2\dot{\theta}^2\right]} //$$

y

$$U = mgy + \tfrac{1}{2}ky^2 = mg(h-\ell) + \tfrac{1}{2}kq^2 = mgh(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}kq^2$$

$$\underline{U = mg(q+\ell)(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}kq^2} //$$

Construyendo el Lagrangiano:

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{q}^2 + (q+\ell)^2\dot{\theta}^2\right] - mg(q+\ell)(1-\cos\theta) - \tfrac{1}{2}kq^2$$

$$\underline{L = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}mq^2\dot{\theta}^2 + mq\ell\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg(q+\ell)(1-\cos\theta) - \tfrac{1}{2}kq^2} //$$

Ahora, obteniendo las ecuaciones de Euler-Lagrange para q:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = mq\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{\theta}^2 - mg(1-\cos\theta) - kq$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}$$

Por tanto,

$$mq\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}^2 - mg(1-\cos\theta) - kq - m\ddot{q} = 0$$

$$m\ddot{q} - m\dot{\theta}^2(q+l) + kq + mg(1-\cos\theta) = 0$$

$$\ddot{q} + g(1-\cos\theta) + \frac{k}{m}q - \dot{\theta}^2(q+l) = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{q} + q\left(\frac{k}{m} - \dot{\theta}^2\right) + g(1-\cos\theta) - l\dot{\theta}^2 = 0$$

De forma similar, el Lagrangiano para θ es:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(q+l)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mq^2\dot{\theta} + 2mql\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{\theta}(q^2 + 2ql + l^2)$$

Por tanto,

$$-mg(q+l)\,\mathrm{sen}\,\theta - m\ddot{\theta}(q+l)^2 = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{q+l} = 0$$

b) El péndulo tiene un punto de equilibrio establece para $\theta = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mg(q+l)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \longrightarrow \mathrm{sen}\,\theta = 0$$

y dos puntos de equilibrio inestables en donde $U = U_{max}$, que es máximo cuando $(1+\cos\theta)$ es máximo $\longrightarrow$ $\theta = \pm\pi$

c) Desarrollando U en serie de Taylor

$$U \simeq \frac{1}{2}kq^2 + 0 + \frac{1}{2}mg(q+l)\theta^2 + \dots$$

$$U \simeq \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2}mg\theta^2(q+l)$$

Pregunta 4

Considerando

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

a) La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -k^2 q e^{bt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{bt} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}e^{bt} + mb\dot{q}e^{bt}$$

Entonces,

$$-k^2qe^{bt} - m\ddot{q}e^{bt} - mb\dot{q}e^{bt} = 0 \longrightarrow \ddot{q} + b\dot{q} + \frac{k^2}{m}q = 0$$

b) Siendo $Q = e^{bt/2}q$, $\frac{dQ}{dt} = e^{bt/2}\dot{q} + \frac{b}{2}e^{bt/2}q$. Entonces

$$q = Qe^{-bt/2}$$

$$\dot{q} = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}$$

Por tanto,

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\left(Qe^{-bt/2}\right)^2\right]$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{b}{2}mQ\dot{Q} + \frac{b^2}{8}mQ^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

Partiendo del teorema de Noether, que dice

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\delta Q\right]$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\delta Q\right] - \delta L = 0$$

donde

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{1}{2}mQb$
- $\delta Q = \epsilon \dot{Q}$
- $\delta L = \epsilon \frac{dL}{dt}$

así, factorizando $\epsilon \frac{d}{dt}$, se tiene

$$\epsilon \frac{d}{dt}\left[(m\dot{Q} - \tfrac{1}{2}mbQ)\dot{Q} - L\right] = 0$$

sustituyendo L

$$\epsilon \frac{d}{dt}\left[\cancel{m\dot{Q}^2} - \tfrac{1}{2}mb\cancel{Q}\dot{Q} - \tfrac{1}{2}\cancel{m}\dot{Q}^2 - \tfrac{1}{2}m\left(\frac{Q^2b^2}{4} - \cancel{Q}\dot{Q}b\right) + \tfrac{1}{2}k^2Q^2\right] = 0$$

$$\epsilon \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \tfrac{1}{2}Q^2\left(k^2 - \frac{mb^2}{4}\right)\right] = 0$$

llamándole c a $\left(k^2 - \frac{mb^2}{4}\right)$,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \tfrac{1}{2}cQ^2 = T + V = E$$

Por tanto, E es la cantidad conservada. Reescribiéndola en términos de q

$$E = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{q}e^{bt/2} + \tfrac{b}{2}qe^{bt/2}\right]^2 + \tfrac{1}{2}c\left[qe^{bt/2}\right]^2$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{q}^2e^{bt} + \dot{q}qbe^{bt} + \tfrac{b^2}{4}q^2e^{bt}\right] + \tfrac{1}{2}cq^2e^{bt}$$

$$E = \tfrac{1}{2}me^{bt}\left(\dot{q} + \tfrac{b}{2}q\right)^2 + \tfrac{1}{2}q^2e^{bt}\left(k^2 - \frac{mb^2}{4}\right)$$