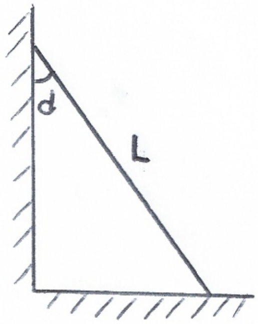
Problema 2:



- Los coordenadas del centro de masa son:

$$\left(x = \frac{1}{2}L\,\text{sen}\,d\ ,\ y = \frac{1}{2}L\cos d\right)$$

- Se puede suponer que el centro de masa tiene un MRU en X y un MUA en Y. Por tanto,

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}L\cos d$$

de esto se tiene que

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}\cos d} \qquad \wedge \qquad d = \arccos\left(\frac{gt^2}{L}\right)$$

$$\dot{y}_{CM} = \frac{dy}{dd}\frac{dd}{dt} = -\frac{1}{2}L\,\text{sen}\,d\left[\frac{-\frac{2gt}{L}}{\sqrt{1-\left(\frac{gt^2}{L}\right)^2}}\right] = \frac{Lgt\,\text{sen}\,d}{\sqrt{L^2-g^2t^4}}$$

y sustituyendo t

$$\dot{y}_{CM} = \frac{Lg\,\text{sen}\,d\sqrt{\frac{L}{g}\cos d}}{\sqrt{L^2-g^2\left(\sqrt{\frac{L}{g}\cos d}\right)^4}} = \frac{\text{sen}\,d\sqrt{Lg\cos d}}{\sqrt{1-\cos^2 d}} = \sqrt{Lg\cos d}$$

y para $\dot{x}_{CM}$

$$\dot{x}_{CM} = \frac{x}{t} = \frac{\frac{1}{2}L\,\text{sen}\,d}{\sqrt{\frac{L}{g}\cos d}} = \frac{1}{2}\text{sen}\,d\sqrt{\frac{Lg}{\cos d}}$$

Entonces $V_{CM} = \sqrt{\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2}$:

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{1}{4}\text{sen}^2 d\,\frac{Lg}{\cos d} + Lg\cos d}$$

- Energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 = \frac{1}{2}m\left[Lg\left(\frac{1}{4}\frac{\text{sen}^2 d}{\cos d} + \cos d\right)\right] = \frac{1}{8}mLg\left(\frac{3\cos^2 d + 1}{\cos d}\right)$$

- Energía potencial:

$$U = mgy_{CM} = \frac{1}{2}mgL\cos d$$

Como ya se obtuvo antes, por energías:

$$\alpha(t) = \arccos\left(\frac{gt^2}{L}\right) + \alpha_0$$

donde α_0 es el ángulo en $t=0$.

Por fuerzas se plantea:

$$\Sigma F_x \Rightarrow F_{pared} = m\ddot{x}_{cm} \quad , \quad \Sigma F_y \Rightarrow N - mg = m\ddot{y}_{cm}$$

Planteando la ecuación de inercia en el centro de masa

$$I\ddot{\alpha} = \frac{1}{2}NL\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}F_{pared}L\cos\alpha$$

donde

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{1}{2}L\left[\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\operatorname{sen}\alpha\right] \quad , \quad \ddot{y}_{cm} = -\frac{1}{2}L\left[\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \ddot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha\right]$$

entonces

$$\frac{1}{2}mL^2\ddot{\alpha} = \frac{1}{2}mgL\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{4}mL^2\operatorname{sen}\alpha\left[\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right] - \frac{1}{4}mL^2\cos\alpha\left[\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\operatorname{sen}\alpha\right]$$

reduciendo,

$$\frac{1}{6}L\ddot{\alpha} = g\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}L\ddot{\theta}$$

y resolviendo la ecuación

$$\frac{2}{3}L\ddot{\alpha} - g\operatorname{sen}\theta = 0 \longrightarrow \theta(t) = -\frac{3g}{2L}\operatorname{sen}t + C_1t + C_2$$

Aplicando condiciones iniciales donde para $t=0$, $\dot{\alpha}(t)=0$ y $\alpha=\alpha_0$.

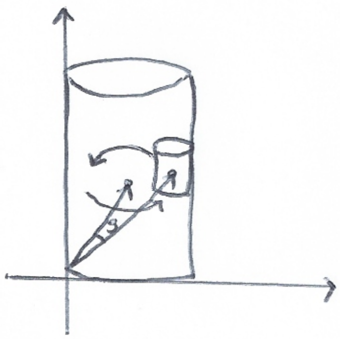
$$C_2 = \alpha_0 \quad , \quad C_1 = \frac{3g}{2L}$$

Entonces,

$$\alpha(t) = \frac{3g}{2L}(t - \operatorname{sen}t) + \alpha_0$$

Problema 3:

Se considera el tubo grande fijo y el pequeño girando alrededor de éste.



El arco descrito por el tubo pequeño está dado como:

$$L = s(R - r)$$

El radio máximo del tubo pequeño, analizando el problema en su centro de masa.

Por tanto,

$$s = \frac{L}{R-r}$$

La velocidad angular del tubo es:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dL}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{R-r}\frac{dL}{dt} = \frac{v}{R-r} \rightarrow v = \dot{s}(R-r)$$

Por otro lado

$$v = \omega r$$

entonces, igualando ambas expresiones

$$\omega r = \dot{s}(R-r)$$

$$\omega = \frac{\dot{s}(R-r)}{r}$$

Obteniendo el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\dot{s}(R-r)}$$