Luz Angélica Sosa Cortés
Mecánica Analítica
Fecha de entrega: 05 de Diciembre de 2018

Tarea 4

Pregunta 1:

a) Sabiendo que

- $q_1 = x\cos\mu - P_y \operatorname{sen}\mu$
- $q_2 = y\cos\mu - P_x \operatorname{sen}\mu$
- $P_1 = P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu$
- $P_2 = P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu$

Se despeja x de q_1 y P_2, y y de q_2 y P_1. Por tanto,

$$x = \frac{q_1 - P_y\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu} = \frac{P_y\cos\mu - P_2}{\operatorname{sen}\mu} \qquad (1)$$

$$y = \frac{q_2 - P_x\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu} = \frac{P_x\cos\mu - P_1}{\operatorname{sen}\mu} \qquad (2)$$

Encontrando P_y y P_x de (1) y (2) se llega a que

$$(q_1 - P_y\operatorname{sen}\mu)\operatorname{sen}\mu = (P_y\cos\mu - P_2)\cos\mu$$
$$P_y(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu) = q_1\operatorname{sen}\mu + P_2\cos\mu$$

y

$$(q_2 - P_x\operatorname{sen}\mu)\operatorname{sen}\mu = (P_x\cos\mu - P_1)\cos\mu$$
$$P_x(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu) = q_2\operatorname{sen}\mu + P_1\cos\mu$$

Sustituyendo P_y y P_x:

$$x = \frac{q_1 - q_1\operatorname{sen}^2\mu - P_2\operatorname{sen}\mu\cos\mu}{\cos\mu} = q_1\cos\mu - P_2\operatorname{sen}\mu$$

o

$$x = \frac{q_1\operatorname{sen}\mu\cos\mu + P_2\cos^2\mu - P_2}{\operatorname{sen}\mu} = q_1\cos\mu - P_2\operatorname{sen}\mu$$

$$y = \frac{q_2 - q_2 \operatorname{sen}^2\mu - P_1 \operatorname{sen}\mu\cos\mu}{\cos\mu} = q_2\cos\mu - P_1\operatorname{sen}\mu$$

o

$$y = \frac{q_2 \operatorname{sen}\mu\cos\mu + P_1\cos^2\mu - P_1}{\operatorname{sen}\mu} = q_2\cos\mu - P_1\operatorname{sen}\mu$$

Finalmente,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= q_1\cos\mu - P_2\operatorname{sen}\mu \\ y &= q_2\cos\mu - P_1\operatorname{sen}\mu \\ P_x &= P_1\cos\mu + q_2\operatorname{sen}\mu \\ P_y &= P_2\cos\mu + q_1\operatorname{sen}\mu \end{aligned}}$$

que tienen la misma forma que q_1, q_2, P_1, P_2, respectivamente. Por lo que se concluye que la transformación es canónica, $\forall\mu$.

b) Teniendo que $H = \frac{q_1^2 + q_2^2 + P_1^2 + P_2^2}{2}$, se obtiene

- $q_1^2 = (x\cos\mu + P_y\operatorname{sen}\mu)^2 = x^2\cos^2\mu + 2xP_y\operatorname{sen}\mu\cos\mu + P_y^2\operatorname{sen}^2\mu$
- $q_2^2 = (y\cos\mu + P_x\operatorname{sen}\mu)^2 = y^2\cos^2\mu + 2yP_x\operatorname{sen}\mu\cos\mu + P_x^2\operatorname{sen}^2\mu$
- $P_1^2 = (P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu)^2 = P_x^2\cos^2\mu - 2yP_x\operatorname{sen}\mu\cos\mu + y^2\operatorname{sen}^2\mu$
- $P_2^2 = (P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu)^2 = P_y^2\cos^2\mu - 2xP_y\operatorname{sen}\mu\cos\mu + x^2\operatorname{sen}^2\mu$

Sustituyendo lo anterior en H, se llega a que

$$H = \frac{1}{2}\Big[x^2(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu) + y^2(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu) + P_x^2(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu) + P_y^2(\cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu)$$
$$+ 2\operatorname{sen}\mu\cos\mu\,(xP_y + yP_x - yP_x - xP_y)\Big]$$

Por tanto,

$$H = \frac{x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2}{2}$$

c) Encontrando las ecuaciones de movimiento a partir del nuevo hamiltoniano se tiene que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{1}{2}(2P_x) = P_x$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{1}{2}(2P_y) = P_y$$

$$\dot{P_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{2}(2x) = -x$$

$$\dot{P_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{2}(2y) = -y$$

Imponiendo la restricción $y = P_y = 0$, se llega a que las ecuaciones de movimiento son

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= P_x \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{P_x} &= -x \\ \dot{P_y} &= 0 \end{aligned}}$$

Pregunta 2:

a) Partiendo del momento de inercia de un disco en torno a su eje de simetría dado como

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

donde $R^2 = x^2 + y^2$. Haciendo una transformación de las coordenadas como

$$\left.\begin{aligned} u &= x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha \\ v &= y \operatorname{sen}\alpha + x \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{Ejes principales.}$$

dados por la simetría del problema.

Escribiendo x y y en términos de u y v

$$x = \frac{u - y\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{v - y\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Entonces

$$(u - y\cos\alpha)\cos\alpha = (v - y\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

$$y(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha$$

Así,

$$x = \frac{u - \dfrac{(u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{u(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - u\cos^2\alpha + v\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}$$

Por tanto,

- $x = \dfrac{v\cos\alpha - u\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$

- $y = \dfrac{u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$

Sustituyendo x y y en I

$$R^2 = x^2 + y^2 = \frac{u^2 - 4uv\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + v^2}{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)^2}$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{M}{2}\left[\frac{u^2 - 4uv\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + v^2}{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)^2}\right]$$

b) Dado que

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

y en el problema

$$\vec{L} = I\vec{r}\times\vec{\omega}$$

Como ya conocemos I, y $|\vec{\omega}| = w$

$$|\vec{L}| = \frac{M}{2}\left[\frac{u^2 - 4uv\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + v^2}{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)^2}\right] A w\,\text{sen}(90° - \alpha)$$

En dirección z'.

c) Como la torca es

$$\tau = I\dot{\omega}$$

entonces

$$\tau = \frac{M\dot{\omega}}{2}\left[\frac{u^2 - 4uv\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + v^2}{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)^2}\right]$$

En dirección de z.