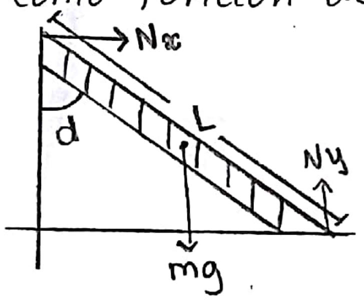
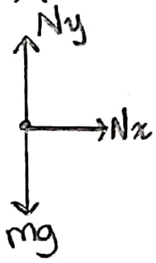
Tarea 1 Mecánica Analítica
Parte 2 - Cálculos analíticos
Equipo Cuchara
Integrantes

1. Rodrigo Aguilar Meneses
2. María José Fonseca Vázquez
3. Omar Alejandro Lezama Gallegos

2. Una escalera de longitud L descansa sobre una pared con un ángulo d con respecto a la vertical. No hay fricción entre la pared o el piso y la escalera.

a) Escribe la energía cinética y potencial de la escalera como función de $d(t)$.





Las distancias x y y del centro de masa (considerado en el punto medio) son:

$$x_{cm} = \frac{L}{2}\sin d$$

$$y_{cm} = \frac{L}{2}\cos d \text{, ya que}$$

$$\operatorname{sen} d = \frac{x}{L}$$

$$\cos d = \frac{y}{L}$$

Las velocidades en el centro de masa:

$$\dot{x}_{cm} = \frac{L}{2}\cos d\,\dot{d}$$

$$\dot{y}_{cm} = -\frac{L}{2}\sin d\,\dot{d}$$

Energía cinética

$$K_{lineal} = \frac{1}{2}mv^2 \text{, donde } v = \sqrt{\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{L^2}{4}\dot{d}^2(\cos^2 d + \sin^2 d)}$$

$$= \frac{L}{2}\dot{d}$$

$$K_{lineal} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{d}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}mL^2\dot{d}^2 \quad \#$$

Energía potencial

$$U = mg\,y_{cm}$$

$$= mg\frac{L}{2}\cos d \quad \#$$

b) Usando el método de la energía, escribe la ecuación de movimiento para $d(t)$. Repite el cálculo usando los principios de Newton y compara.

Principios de Newton

Antes de obtener las expresiones del segundo principio de Newton para los ejes coordenados, es conveniente obtener las expresiones de momento angular y torques.

$$L_{cm} = I_{cm}\dot{d} = \frac{1}{12} m L^2 \dot{d} \quad \text{(por geometría de la escalera)}$$

$$\sum T_{cm} = N_y \frac{L}{2}\sin d - N_x \frac{L}{2}\cos d$$

Pero

$$\sum T_{cm} = \frac{d}{dt} L_{cm}$$

Entonces

$$N_y \frac{L}{2}\sin d - N_x \frac{L}{2}\cos d = \frac{1}{12} m L^2 \ddot{d}$$

Aplicando el segundo principio de Newton

$$\sum F_x = N_x = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = N_y - mg = m\ddot{y}$$

Derivando $\dot{x}$ y $\dot{y}$ obtenidas en el inciso anterior

$$\ddot{x} = \frac{L}{2}\cos d\,\ddot{d} - \frac{L}{2}\sin d\,\dot{d}^2$$

$$\ddot{y} = -\frac{L}{2}\sin d\,\ddot{d} - \frac{L}{2}\cos d\,\dot{d}^2$$

Despejando N_x y N_y y sustituyendo $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$, las ecuaciones de fuerza son

$$N_x = m\left(\frac{L}{2}\cos d\,\ddot{d} - \frac{L}{2}\sin d\,\dot{d}^2\right)$$

$$N_y = m\left(-\frac{L}{2}\cos d\,\dot{d}^2 - \frac{L}{2}\sin d\,\ddot{d}\right)$$

Sustituyendo las normales en la expresión de torques

$$\sum T_{cm} = \frac{L}{2}\sin d\left(\cancel{-\frac{mL}{2}\cos d\,\dot{d}^2} - m\frac{L}{2}\sin d\,\ddot{d} + mg\right) -$$

$$-\frac{L}{2}\cos d\left(\frac{mL}{2}\cos d\,\ddot{d} - \cancel{\frac{mL}{2}\sin d\,\dot{d}}\right)$$

$$= -\frac{mL^2}{4}\sin^2 d\,\ddot{d} + \frac{Lm}{2} g\sin d - \frac{mL^2}{4}\cos^2 d\,\ddot{d}$$

$$= -\frac{mL^2}{4}\ddot{d} + \frac{Lm}{2} g\sin d = \frac{1}{12} m L^2 \ddot{d}$$

$$\frac{Lm}{2} g\sin d = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m L^2 \ddot{d}$$

$$\frac{g}{2}\sin d = \frac{1}{3} L \ddot{d}$$

Finalmente

$$\ddot{d} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin d$$

$$\ddot{d} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin d = 0$$

Energías

Retomando las expresiones

$$x_{cm} = \frac{L}{2}\sin d \qquad y_{cm} = \frac{L}{2}\cos d$$

$$K_{Lineal} = \frac{1}{8} m L^2 \dot{d}^2$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} m L^2$$

Por el movimiento de la escalera, habrá también energía cinética angular

$$K_{angular} = \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} I \dot{d}^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right) m L^2 \dot{d}^2$$
$$= \frac{1}{24} m L^2 \dot{d}^2$$

La energía cinética total es, entonces

$$K = K_{lineal} + K_{angular}$$
$$= \frac{1}{8} m L^2 \dot{d}^2 + \frac{1}{24} m L^2 \dot{d}^2$$
$$= \frac{1}{6} m L^2 \dot{d}^2$$

La energía potencial no cambia

$$U = mg\frac{L}{2}\cos d$$

Tomando como condición inicial $d(0) = d_0$ e igualando energía final e inicial

$$\frac{1}{6} \cancel{m} L^2 \dot{d}^2 + \cancel{m} g \frac{L}{2}\cos d = \cancel{m} g \frac{L}{2}\cos d_0$$ (no hay energía cinética inicial)

$$\frac{1}{6} L^2 \dot{d}^2 + g\frac{L}{2}\cos d = g\frac{L}{2}\cos d_0$$

$$L\dot{d}^2 + 3g\cos d = 3g\cos d_0$$

$$\dot{d}^2 + 3\frac{g}{L}\cos d = 3\frac{g}{L}\cos d_0$$

Derivando para tener la expresión en términos de segundas derivadas

$$2\ddot{d} - 3\frac{g}{L}\sin d = 0$$

$$\ddot{d} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin d = 0$$

//

Scanned by CamScanner

c) Muestra que la escalera pierde contacto con la pared al caer cuando $3\cos\alpha = 2\cos\alpha_0$, donde α_0 es el ángulo inicial entre la escalera y la pared en reposo.

El hecho de perder contacto con la pared implica $N_x = 0$

$$N_x = m\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\,\ddot{\alpha} - \frac{L}{2}\sin\alpha\,\dot{\alpha}^2\right)$$

$$0 = \cos\alpha\,\ddot{\alpha} - \sin\alpha\,\dot{\alpha}^2$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dot{\alpha}^2$$

De la ecuación de movimiento

$$\ddot{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dot{\alpha}^2 - \frac{3g}{2L}\sin\alpha = 0$$

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2L}\cancel{\sin\alpha}\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}$$

$$= \frac{3g}{2L}\cos\alpha$$

Finalmente, sustituyendo $\dot{\alpha}^2$ en la ecuación de energías

$$\dot{\alpha}^2 + 3\frac{g}{L}\cos\alpha = 3\frac{g}{L}\cos\alpha_0$$

$$\frac{3\cancel{g}}{\cancel{2}L}\cos\alpha + \frac{3\cancel{g}}{\cancel{L}}\cos\alpha = 3\frac{\cancel{g}}{\cancel{L}}\cos\alpha_0$$

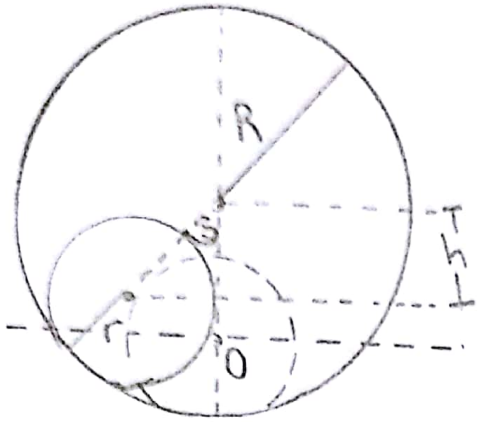
$$\cos\alpha\left(\frac{1}{2}+1\right) = \cos\alpha_0$$

$$\frac{3}{2}\cos\alpha = \cos\alpha_0$$

Por lo tanto

$$3\cos\alpha = 2\cos\alpha_0$$

3. Un tubo sólido pequeño de radio r se encuentra dentro de un tubo hueco más grande de radio R. Encuentra el periodo de las oscilaciones del tubo pequeño moviéndose dentro del grande alrededor de su punto de equilibrio.



Velocidad en coordenadas polares

$$\underline{v} = \underbrace{\dot{r}_1 \hat{e}_r}_{\text{velocidad radial}} + \underbrace{r_1\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}_{\text{velocidad angular}}$$

En nuestro caso (en magnitudes y $\theta = S$)

$$v = \cancel{\dot{r}_1}^{\,0} + r_1 \dot{S}$$

Sin embargo, esa distancia r_1 se relaciona con los radios r y R

$$r_1 = R - r$$

Entonces

$$v = (R-r)\dot{S}$$

Dado que $w = \frac{v}{r}$, entonces la velocidad angular entre los tubos cumple la relación

$$w = \frac{v}{r} = \frac{(R-r)}{r}\dot{S}$$

La velocidad cinética angular es

$$K_{angular} = I w^2 = \frac{I}{2}\left(\frac{(R-r)}{r}\dot{S}\right)^2$$

Pero por la geometría

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Entonces

$$K_{angular} = \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{S}^2$$

La velocidad cinética lineal

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{S}^2$$

La energía cinética total

$$K_T = (R-r)^2 \dot{S}^2 m \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} (R-r)^2 \dot{S}^2 m$$

Considerando el origen en el centro geométrico del tubo pequeño cuando no hay ángulo con la vertical y hay un punto de equilibrio estable, la altura es

$$h = (R-r) - (R-r)\cos s$$
$$h = (R-r)(1-\cos s)$$
$$h = (R-r)\left(1-\left(1-\frac{s^2}{2}\right)\right) \quad \text{aproximando } \cos s \approx 1-\frac{s^2}{2}$$
$$h = (R-r)(\quad)$$

La energía potencial

$$U = \frac{mg}{2}(R-r)s^2$$

Igualando las energías:

$$\cancel{K_{inicial}}^{\,0} + U_{inicial} = K_{final} + \cancel{U_{final}}^{\,0}$$
$$\frac{\cancel{m}g}{2}(R-r)s^2 = \frac{3}{4}(R-r)^2\dot{s}^2\cancel{m}$$
$$g(R-r)s^2 = \frac{3}{2}(R-r)^2\dot{s}^2$$

Pero $\dot{s} = \omega . s$, donde ω corresponde a la velocidad angular del tubo pequeño

$$g\cancel{(R-r)}\cancel{s^2} = \frac{3}{2}(R-r)^{\cancel{2}}\omega_2^2\cancel{s^2}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

Como

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$