Universidad de Guanajuato

División de Ciencias e Ingenierías

Mecáanica Analítica

Agosto-Diciembre 2018

Tarea 1

Equipo Cuchara

Rodrigo Aguilar Meneses
María José Fonseca Vázquez
Omar Alejandro Lezama Gallegos
Profesor: Gustavo Niz Quevedo

13 de septiembre de 2018

Resumen

Se utilizaron los conceptos básicos de programación y el lenguaje Python para generar un código que permita la aproximación de la solución de una ecuación trascendental y, a partir de dicha solución, se calcularon otras variables de interéspara el análisis.

1. Introducción

Una ecuación trascendental es aquella cuya solución no es posible encontrar mediante métodos analíticos. Por ejemplo, si se tiene una variable en su forma lineal igualada con una exponencial o un logaritmo, ya que al despejar alguna de las dos, la otra no será útil para realizar un despeje, como suele hacerse habitualmente.

Para poder encontrar soluciones a este tipo de ecuaciones, se puede recurrir a diversos métodos, como por ejemplo el de perturbaciones, expandiendo en series, o también se pueden utilizar métodos numéricos para encontrar las raíces de las ecuaciones.

Existen diversos métodos numéricos, como la secante, bisección, etcétera, por mencionar algunos.

A continuación, se muestra la resolución de una de ecuación trascendental, apoyándose de métodos numéricos.

2. Resolución del Problema

La ecuación que se debe resolver es la siguiente:

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT}) \tag{1}$$

Como se observa, al despejar de un lado de la ecuación para T, ya no es posible trabajar con la variable que se encuentra del otro lado.

2.1. Inciso a

Usando algún algoritmo recursivo, crea un código que calcule T para diferentes valores de k, el ángulo y la velocidad inicial.

Para calcular los valores de T para diferentes valores de k, el ángulo y la velocidad inicial se consideró como constante todo lo que multiplica al factor de $(1 - e^{kt})$, a esa constante se le llamó G. Se creó una función, llamada *constantG* para calcular su valor, para ello toma diferentes valores de k, v_0 y θ, y se tiene por separado la otra parte de la función que es $(1 - e^{kt})$. Se tienen 3 listas de los valores que se tomarán para k, v_0 y para θ. Con ésto, se calculan todas las combinaciones de estos valores y se resuelve para el tiempo, es un triple ciclo anidado en el que se iteran las 3 cifras, se calcula la constante G para cada uno de estos casos, después que calcula el tiempo de vuelo revisando la intersección entre las dos funciones (la lineal y la constante por la exponencial), para revisar esta intersección se usa un método numérico en el que se evalúa la diferencia absoluta entre ambas funciones. Si ésta es menor a la tolerancia (0.025) el punto de intersección es una solución para el tiempo de vuelo. La función que evalúa si se tiene una intersección se itera con un incremento de 0.05 para valores de t, lo que da una buena aproximación.

2.2. Inciso b

Con la velocidad inicial de 500m/s y un ángulo inicial de 65 grados, graficar el Rango contra k para (k=0, k=0.05 y otros 3 valores entre 0 y 1). Compararlo con la aproximación vista en clase basado en teoría de perturbaciones.

Se debe graficar el rango contra k, variando k, se tiene un valor de la velocidad inicial y el ángulo inicial. Se tiene una función con la que se calcula el rango en un tiempo t, llamada *horizontal*. Haciendo uso del tiempo de vuelo total T calculado en iteraciones, se evalúa horizontal en t = T, y el resultado se almacena en la variable *maxRange*. Los resultados se guardan en un archivo de nombre dataB.txt.

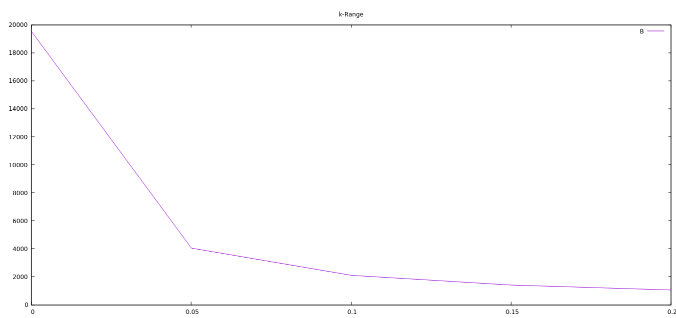

Figura 1: Gráfica del rango como función de k

En la Figura 1 se observa que a medida que la constante k incrementa el rango disminuye. Lo anterior coincide con lo esperado, dado que hay una resistencia del aire, mienytras más grande sea ésta menor distancia recorrerá el proyectil, en los siguientes gráficos se aprecia mejor la variación de la trayectoria del proyectil a medida que la resistencia del aire aumenta.

En la sección de conclusiones se compara con la teoría de perturbaciones.

2.3. Inciso c

Usando los mismos datos iniciales del punto anterior, graficar Distancia Vertical contra Distancia Horizontal para k=0, y otros 4 valores entre 0 y 1.

Se hicieron dos funciones llamadas *generateHorizontalData* y *generateVerticalData*, toman diferentes valores de la velocidad inicial y el ángulo, y se obtienen valores para diferentes valores de k, lo anterior realizado mediante iteraciones con t para obtener todos los puntos. Cuando k es igual a cero se tiene una función diferente, para valores de k distintos a cero se tiene una función con un ciclo while para conseguir todos los puntos.

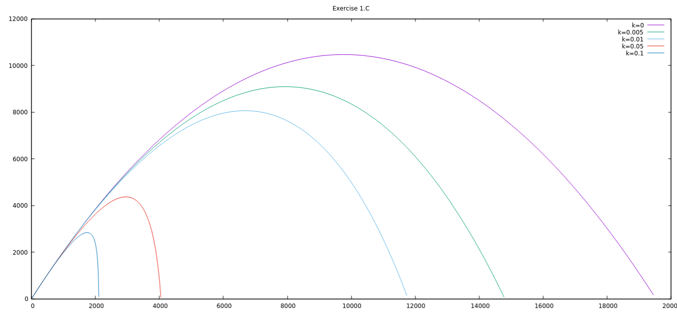

Figura 2: Distancia horizontal contra distancia vertical.

En la Figura 2 se graficaron 5 valores para k. A medida de que k aumenta, se reduce bastante la magnitud de la trayectoria en ambos ejes. El caso ideal, en el que k es igual a cero también se incluye en la gráfica, en él, la forma de la curva corresponde a una parábola que es la predicción mediante el modelo clásico usando los principios de Newton.

2.4. Inciso d

Usando los mismos datos iniciales que en los puntos antioreres, graficar Altura contra Tiempo, Valocidad Horizontal contra Tiempo y Velocidad Vertical contra Tiempo para k=0, y otros 4 valores entre 0 y 1.

Se pide un total de tres gráficas, por tanto fueron hechas tres funciones, una para cada gráfica. Como se parte de la misma velocidad inicial y ángulo, la función es básicamente la misma. Las funciones son: *generate_height_time_data*, *generate_horizontal_velocity_time_data* y *generate_vertical_velocity_time_data*. Las tres funciones hacen básicamente lo mismo. La que corresponde a altura vs tiempo (generate_height_time_data) calcula la altura vertical para $k = 0$ iterando t, y variando k con los otros 4 valores disponibles e iterando nuevamente, y lo guarda en el archivo de texto correspondiente. Para las dos funciones restantes se sigue la misma idea, calculándolo para la velocidad en x y y, respectivamente.

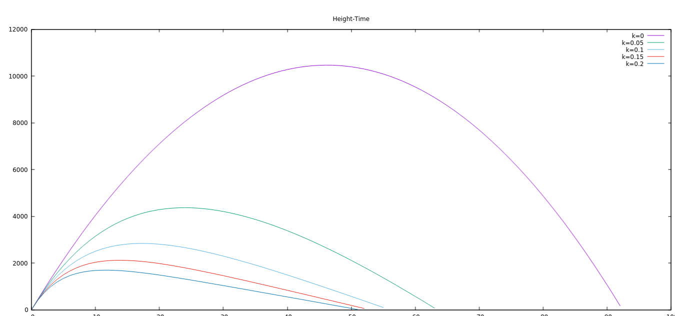

Figura 3: Altura como función del tiempo

En la Figura 3 se observa la altura como función del tiempo. En el caso ideal se tiene una parábola, el proyectil alcanza su punto máximo y cae en forma simétrica a la trayectoria que siguió al subir. Debido a la resistencia del aire, para valores de k diferentes de cero se tiene que el proyectil describe una curva muy similar a una parábola en los primeros valores del tiempo, pero al llegar al punto máximo tarda más tiempo en caer conforma aumenta la resistencia del aire.

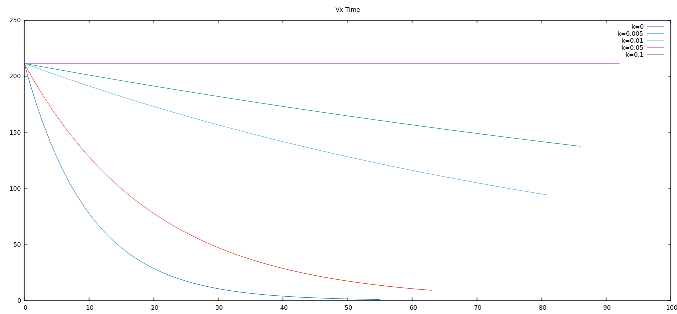

Figura 4: Velocidad horizontal como función del tiempo.

La velocidad horizontal como función del tiempo se aprecia en la Figura 4, cuando no hay resistencia la velocidad a lo largo de este componente es constante, como es de esperar. Cuando se tienen valores de k diferentes de cero la gráfica tiene una forma similar a una exponencial decayente, es decir, para valores de resistencia cada vez más grandes, la velocidad en el eje x disminuye considerablemente. Cabe mencionar que con valores de k pequeños, el decaimiento tiene la forma de una recta.

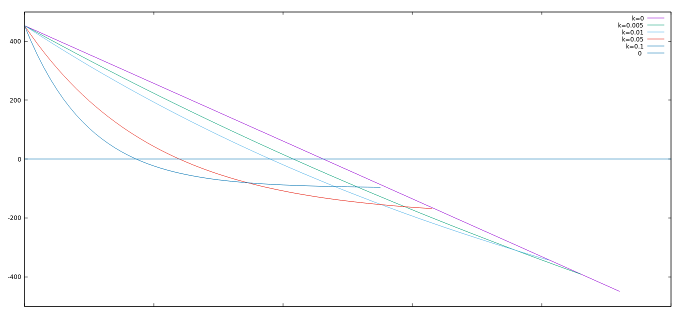

Figura 5: Velocidad vertical como función del tiempo.

El último caso de este inciso se observa en la Figura 5, en ella se coloca el valor para y igual a cero, pues la velocidad en este componente es positiva hasta que llega a su punto máximo, y negativa cuando pasa del punto máximo al eje de las abscisas. Si no hubiera fricción con el aire, la forma de la velocidad es una línea recta, la velocidad es máxima al inicio de la trayectoria y antes del impacto con el suelo, llega a su punto máximo en la mitad de su rango en x. Pero cuando se tienen valores de k mayores a cero, se nota que el punto máximo (el punto donde la velocidad es cero) se alcanza mucho antes, es decir, la influencia del aire impide que la trayectoria del proyectil sea mayor, tanto el altura como en rango.

2.5. Inciso e

Buscar el ángulo que da la distancia máxima numéricamente para k=0, y otros 4 valores entre 0 y 1.

Se generó una lista vacía, donde se guardarán los rangos máximos con cada ángulo, se van a evaluar. Después se entraa un ciclo while, donde θ se itera de 0 a 90. En ese ciclo se calcula el tiempo de vuelo para ese θ respectivo, iterando k -de un total de cinco-. La velocidad inicial se fija en 500, el rango se calcula a partir de ese tiempo de vuelo con la funci´´on mencionada con anterioridad. Ese valor se guarda en la lista de rangos y después el ángulo (la variable se llama *BestAngle* se guarda como

$$BestAngle = rangeList.index(max(rangeList))$$

Cabe señalar que *max* e *index* son funciones pertenecientes a la librería estándar de Python.

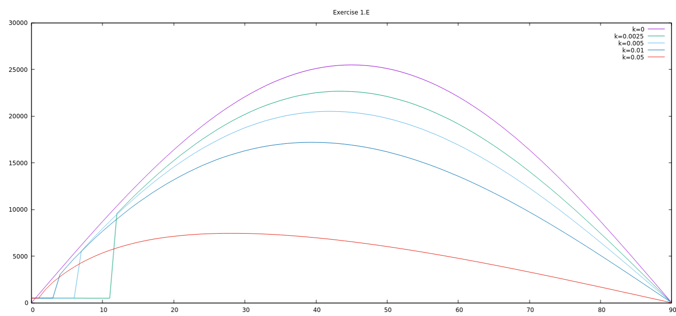

Figura 6: Distancia máxima respecto al ángulo.

El método anterior se ilustra en la Figura 6, para cada valor de k se tiene un ángulo al cual la distancia es máxima. La aproximación no es muy buena para valores pequeños de θ, por lo que se observan algunas líneas rectas al inicio de las curvas con valores más grandes de k. Los ángulos encontrados son los siguientes, para cada valor de k mostrado se tienen ángulos de: 45, 43, 42, 39 y 28 grados, respestivamente; por lo que el ángulo de inclinación para alcanzar un punto máximo en el recorrido del proyectil disminuye conforme la resistencia del aire aumenta.

3. Conclusiones

Se comprobaron mediante el uso de métodos numéricos las predicciones que se tienen tanto en la teoría clásica como en los modelos más realistas de la mecánica Newtoniana. Se desarrollaron nuevas habilidades para poder visualizar, mediante la programación adecuada, diferentes conceptos físicos y la relación entre ellos.

En general, con el programa realizado se puede hacer una comparación entre la solución numérica y el método de perturbación revisado en clase. Si bien la solución numérica no es una descripción completamente apegada a la reallidad, es una mejor herramienta para aproximar el rango y el tiempo de vuelo. Esto se ve reflejado en la gráfica del inciso b), en la Figura 1 , donde se tiene un decaimiento exponencial del rango en función de la constante k, mientras que en el método perturbativo es un decaimiento lineal que no se ajusta a las observaciones.

Más aún, los autores consideramos que el método numérico es más sencillo de manejar, puesto que se puede tomar un intervalo más grande para valores de k, y no se requiere hacer la despreciación de tantas cantidades como en el método perturbativo.