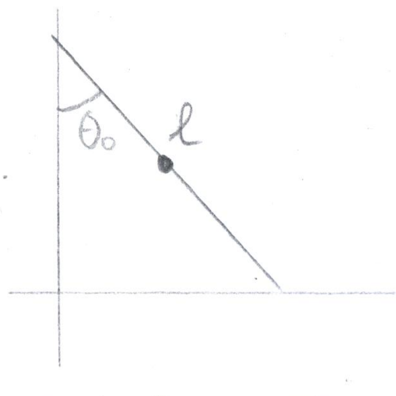
2) Una escalera de longitud ℓ descansa sobre una pared con un angulo θ_0 con respecto a la vertical. No hay friccion entre la pared o el piso y la escalera.

a) Escribe la energia cinetica y potencial de la escalera como funcion de $\theta(t)$



* localizando el centro de masas

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

Para la energía cinética tendremos 2 contribuciones (T. rotacional y T. traslacional) de ambas conocemos sus expresiones

$$T = T_r + T_T$$

donde $T_T = \frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{cm}\|^2$ y $T_r = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \qquad \|\dot{\vec{r}}_{cm}\| = \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2$$

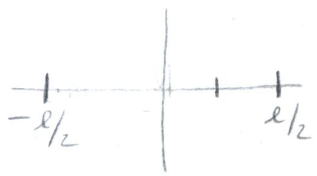
$$T_T = \frac{1}{8} M \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Contribución rotacional a la energía cinética

$$T_r = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{donde} \quad \omega = \dot{\theta}$$

si consideramos una distribución uniforme de masa en la escalera

$$I = \int x^2 \, dm$$



$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{\ell}$$

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{M}{\ell}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} \quad \frac{M}{\ell}\left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24}\right]$$

$$I = \frac{M\ell^2}{12}$$

$$T_r = \frac{M\ell^2}{24}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{Ml^2}{24}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}Ml^2\dot{\theta}^2 \qquad T = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2$$

Para la Energía Potencial, ésta se debe a la fuerza gravitacional

$U(y) = Mgy$ donde $y = \frac{l}{2}\cos\theta$

$$U(\theta) = \frac{Mgl}{2}\cos\theta$$

b) Usando el método de la Energía escribe la ecuación de movimiento para $\theta(t)$. Repite el cálculo usando las leyes de Newton y compara.

La Energía mecánica la podemos expresar en términos de las condiciones iniciales.

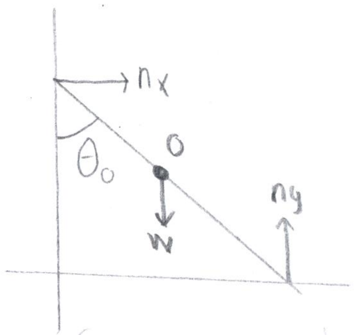
$$E = \frac{Mgl}{2}\cos(\theta_0)$$

$E = T + U$ por conservación de la energía

$$\frac{dE}{dt} = 0 , \qquad \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \qquad \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{d\theta}\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} - \frac{Mgl}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{1}{3}l\ddot{\theta} = \frac{g}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$



Análisis usando principios de Newton

Analizamos el torque respecto al punto O

$$\circlearrowleft^{+} \sum \tau_o = n_y \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta - n_x \frac{\ell}{2} \cos\theta$$

Conocemos las siguientes relaciones, ya que la escalera es un cuerpo rígido

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

del análisis de la Energía obtuvimos $I = \frac{1}{12} M\ell^2$

$$\tau = \frac{1}{12} M \ell^2 \ddot{\theta}$$

$$n_y \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta - n_x \frac{\ell}{2} \cos\theta = \frac{1}{12} M \ell^2 \ddot{\theta}$$

Por el segundo principio de Newton

$$\sum F_x = n_x = M\ddot{x} \qquad \sum F_y = n_y - W = M\ddot{y}$$

Si $x = \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta \qquad y = \frac{\ell}{2} \cos\theta$

$$\ddot{x} = \frac{\ell}{2} \cos\theta\, \ddot{\theta} - \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = -\frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta\, \ddot{\theta} - \frac{\ell}{2} \cos\theta\, \dot{\theta}^2$$

, hacemos la sustitución en el análisis de fuerzas

$$n_x = M\left(\frac{\ell}{2} \cos\theta\, \ddot{\theta} - \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}^2\right)$$

$$n_y - W = M\left(-\frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta\, \ddot{\theta} - \frac{\ell}{2} \cos\theta\, \dot{\theta}^2\right)$$

de la condición de equilibrio

$$n_y \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta - n_x \frac{\ell}{2} \cos\theta = \frac{1}{12} M \ell^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{M\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\left[-\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\,\ddot\theta-\frac{\ell}{2}\cancel{\cos\theta\,\dot\theta^2}+g\right]-\frac{M\ell\cos\theta}{2}\left[\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\ddot\theta-\frac{\ell}{2}\cancel{\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}M\ell^2\ddot\theta$$

$$-\frac{M\ell^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta\,\ddot\theta+\frac{M\ell g}{2}\operatorname{sen}\theta-\frac{M\ell^2}{4}\cos^2\theta\,\ddot\theta=\frac{1}{12}M\ell^2\ddot\theta$$

$$\frac{M\ell g}{2}\operatorname{sen}\theta-\frac{M\ell^2\ddot\theta}{4}=\frac{1}{12}M\ell^2\ddot\theta$$

$$\frac{g}{2}\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{12}\ell\ddot\theta+\frac{\ell\ddot\theta}{4}\qquad\frac{g}{2}\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{3}\ell\ddot\theta$$

$$\ddot\theta=\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$$

c) Muestre que la escalera pierde contacto con la pared al caer cuando $3\cos(\theta)=2\cos(\theta_0)$.

Cuando la escalera pierde contacto con la pared $n_x=0$

$$n_x\quad M\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\ddot\theta-\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2\right)\qquad n_x=0$$

obtenemos la relación:

$$\cos\theta\,\ddot\theta=\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2\longrightarrow\dot\theta^2=\operatorname{ctn}\theta\,\ddot\theta$$

Por la conservación de la Energía tenemos

$$E=T+U$$

$$\frac{Mg\ell}{2}\cos(\theta_0)=\frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2+\frac{Mg\ell}{2}\cos\theta\qquad\text{donde}\quad\dot\theta^2=\operatorname{ctn}\theta\,\ddot\theta$$

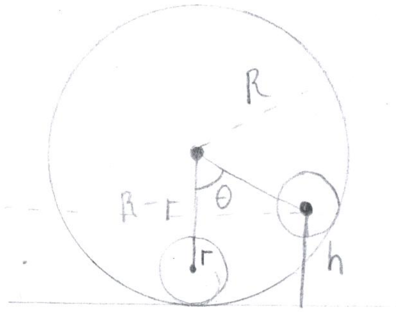
$$\frac{g}{2}\cos(\theta_0)=\frac{1}{6}\ell\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\ddot\theta+\frac{g}{2}\cos\theta$$, de la ecuación de movimiento $\ddot\theta=\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$

$$\frac{g}{2}\cos(\theta_0)=\frac{1}{6}\ell\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta+\frac{g}{2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\cos(\theta_0)=\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\cos(\theta_0)=\frac{3}{4}\cos(\theta)\qquad\boxed{2\cos(\theta_0)=3\cos\theta}$$

3) Un tubo sólido pequeño de radio r se encuentra dentro de un tubo más grande y hueco de radio R. Encuentra el periodo de las oscilaciones del tubo pequeño moviéndose dentro del grande alrededor de su punto de equilibrio.



En análisis de la Energía, el cilindro pequeño estará en equilibrio en 2 puntos para $\theta = 0$ y para $\theta = \theta_{max}$ por lo que podemos escribir su energía potencial respecto a h

$h = (R-r) - (R-r)\cos\theta \quad h = (R-r)(1-\cos\theta)$

$U(\theta) = mgh = mg(R-r)(1-\cos\theta)$

podemos expandir el $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$

aproximando a orden cuadrático y reescribiendo la energía

$U(\theta) = mg(R-r)\frac{\theta^2}{2}$

Podemos caracterizar el centro de masa del cilindro pequeño en términos de θ

$x = (R-r)\,\text{sen}\,\theta, \quad \vec{r}_{cm} = (R-r)(\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$

$y = (R-r)\cos\theta$

podemos obtener la velocidad

$\vec{\dot{r}}_{cm} = (R-r)(\cos\theta\,\dot{\theta}, -\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta})$

$\|\vec{\dot{r}}_{cm}\| = (R-r)\dot{\theta}$

De la relación entre variables angulares y lineales

$v = r\omega \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{\|\vec{\dot{r}}_{cm}\|}{r}$

$\omega = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta}$

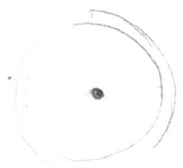
Para la energía cinética total

$T = T_T + T_r$

donde $T_T = \frac{1}{2} m \|\dot{\bar{r}}_{cm}\|^2$ y $T_r = \frac{1}{2} I \omega^2$

$T_T = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$ $\quad T_r = \frac{1}{2} I \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2$

la inercia rotacional para un tubo da



$I = \int x^2 \, dm \qquad dm = \frac{m}{\pi r^2}(2\pi x \, dx)$

$I = \int_0^r \frac{2 m x^3}{r^2} dx = \frac{2M}{r^2} \int_0^R x^3 dx \cdot \frac{2m}{r^2} \frac{x^4}{2}\Big|_0^R$

$I = \frac{1}{2} m r^2$ por lo que $T_r = \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

$T = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

Podemos obtener la energía para los puntos de interés θ_0 y θ y por conservación de la energía

$\underbrace{\cancel{T_i}}_{0} + U_i = T_f + \underbrace{\cancel{U_f}}_{0}$

$\frac{mg}{2}(R-\cancel{r})\,\theta^2 = \frac{3}{4} \cancel{m} (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

$\theta^2 = \frac{3}{2} \frac{(R-r)}{g} \dot{\theta}^2 \qquad \theta = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(R-r)}{g}}\, \dot{\theta}$

$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(R-r)}{g}} = \frac{2\pi}{T}$

El periodo de oscilación

$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{R-r}}$