Método perturbativo

Universidad de Guanajuato
División de Ciencias e Ingenierías
Mecánica Analítica
Loma del Bosque 103, Lomas del Campestre
C. P. 37150
León, Guanajuato
México
De la Cruz Echeveste Óscar *(e-mail: o.delacruzlo2015@licifug.ugto.mx)*
López Vega Juan Manuel *(e-mail: lopezvj2015@licifug.ugto.mx)*
Moreno Hernández Ana Isabel *(e-mail: morenoha2016@licifug.ugto.mx)*
Moreno López Noemí Lizbeth *(e-mail: morenoln2016@licifug.ugto.mx)*

***Resumen*—Se realizó un método recursivo para determinar los valores de T para los cuales una función no lineal dependiente de T es cero. Para realizar este método, se toma en cuenta la igualdad $f(T) = g(T)$ y se resta por ambos lados la función $f(T)$, es decir, $g(T) - f(T) = 0$. Con esta nueva igualdad, se sabe que las soluciones de T son las raíces de $g(T) - f(T)$. La expresión fundamental del método de Newton-Raphson es muy utilizada para localizar raíces de funciones y es sencillo aplicarla en un método numérico recursivo.**

Existe una serie de fenómenos radioactivos en los que la ***radioactividad parece estar ligada a la materia en cantidad imponderable, la radiación no es permanente****, desaparece con el tiempo.*

-Marie Curie

El artículo es devoto a la determinación de las raíces de **sistema no lineal *(ceros de la función).*** La pregunta general posa en el simple caso de una **función de valores reales de una variable real,** esto es: *dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.*

El **método de Newton-Raphson** es extensamente aplicado a problemas para encontrar el cero de una función, como este caso. Suponga $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f \in C^2[a, b]$, esto es $D_x f$ **existe** y es **contínua**. Si x_* es un cero de f y x un punto en la vecindad de x_*, tal que $x_* = x + h$, entonces por el **Teorema de Taylor**

$$f(x_*) = f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2++\frac{1}{3!}f'''(x)h^3+\cdots \tag{1}$$

$$f(x_*) = f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \theta(h^2) = 0 \tag{2}$$

Ya que asumimos que x está en la vecindad de x_*, esto es h es pequeño, $\theta(h^2)$ es despreciable. Esto implica

$$h \approx \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3}$$

si $f'(x) = 0$, por lo tanto

$$x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4}$$

es una mejor aproximación para x_*. Esto prepara el escenario para el **método de Newton-Raphson**, que comienza con una aproximación inicial x_0 y genera la secuencia $x_k{}_{k=0}^{\infty}$ definido por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{5}$$

Para cada x_k corresponde una línea tangente $l(x) = f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$, se usa el cero de la línea tangente para aproximar el cero de $f(x)$, luego, nuevamente se repite el proceso con x_{k+1} hasta obtener la mejor aproximación considerando una **tolerancia** propuesta por el usuario. Por lo tanto, el método involucra la linealización de la función, es decir, la función $f(x)$ es reemplazada por una función lineal $l(x)$ tal que $l(x_k) = f(x_k)$ y $l'(x_k) = f'(x_k)$.

El análisis de convergencia: en resumen, con el método de Newton-Raphson, se generará una secuencia de números $x_{k,k\geq 0}$ que **converge** a cero (x_*) de f si

- f'' es contínua
- x_* es un simple cero de f y
- x_0 está lo suficientemente cerca de x_*.

Es posible determinar el error del método numérico por medio del teorema de Taylor, analizando las siguientes derivadas. Una buena aproximación para métodos numéricos, pero poco precisa consiste en el cociente del valor determinado como la **raíz de la función** y el valor correspondiente a la iteración anterior, el error se considera en porcentaje.

Es importante señalar que el error en unidades porcentuales es menor a la tolerancia establecida por el diseñador, tan pequeña como se considere. El método se produce de tal forma que haya un límite en el número de iteraciones, y dentro de este número se encuentre la solución cuyo error es menor a la tolerancia. La manera de aproximar el error (e), utilizada en este método es:

$$e = \frac{x_k}{x_{k-1}} 100\,\% \tag{6}$$

donde x_k representa a la última iteración o el valor para el cual $f - g$ es igual a cero, x_{k-1} es la penúltima iteración del método numérico.

En física existe el concepto de **fuerzas de arrastre o fuerzas retardantes** las cuales son proporcionales a la velocidad del objeto de estudio perteneciente a un marco de referencia inercial, cuando se trata a un objeto de dimensiones no despreciables, es importante realizar el análisis de su dinámica en el **centro de presión**, la dinámica corresponde a los **principios de Newton.**

Para un proyectil en dos dimensiones con resistencia al aire proporcional a la velocidad se tienen las siguientes condiciones iniciales: la posición en x y en y en el tiempo $t = 0$ son $x(0) = 0 = y(0)$, y las velocidades en x y en y en $t = 0$ son $\dot{x} = v_0 cos\theta = U$ y $\dot{y} = v_0 sin\theta = V$.

Haciendo un análisis de fuerzas utilizando los principios de Newton y considerando la fuerza resistiva al aire $\vec{F_R} = -mk\vec{v}$, se encuentra que las ecuaciones de movimiento para $x(t)$ y $y(t)$ son

$$x(t) = -\frac{U}{k}(e^{-kt} - 1) \tag{7}$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{Vk + g}{k^2}(e^{-kt} - 1) \tag{8}$$

El tiempo total en el que el proyectil se dispara y cae a tierra puede calcularse utilizando la expresión de la posición en y con respecto al tiempo. Se sabe que $y = 0$ cuando $t = T$ siendo T el tiempo de vuelo, entonces:

$$y(T) = -\frac{g}{k}T - \frac{Vk + g}{k^2}(e^{-kT} - 1) = 0 \tag{9}$$

Así,

$$T = \frac{kV + g}{kg}(1 - e^{-kt}) \tag{10}$$

Esta última expresión es la ecuación trascendental, y para conocer las soluciones de T utilizamos el método de Newton-Raphson. Este método encuentra las raíces de una función igualada a cero. Si definimos $g(T) = T$ y $f(T) = \frac{kV+g}{kg}(1 - e^{-kt})$, es obvio que $g(T) = f(T)$. Al restar $g(T)$ en ambos lados de la igualdad, obtenemos $f(T) - g(T) = 0 = G(T)$. Con esta nueva expresión $G(T)$, podemos emplear la fórmula del método de Newton-Raphson, ya que se trata de una nueva función igualada a cero, donde las raíces de esta nueva función serán las soluciones de T.

Así, la ecuación para el método de Newton-Raphson será

$$T_{i+1} = T_i - \frac{G(T_i)}{\dot{G}(T_i)} \tag{11}$$

donde

$$G(T_i) = \frac{kV + g}{kg}(1 - e^{-kT_i}) - T_i \tag{12}$$

$$\dot{G}(T_i) = \frac{kV + g}{g}e^{-kT_i} \tag{13}$$

La ventaja al utilizar este método es que $\dot{G}$ no es igual a cero.

Para determinar el ángulo para el cual se obtiene el mayor alcance, variando los valores de k, es necesario definir, para el tiro parabólico una expresión que relacione al alcance máximo (x_R) con el ángulo de incidencia (θ), la expresión es la siguiente:

$$x_R = \frac{v_o^2 sen2\theta}{g}(1 - \frac{4kv_o}{3g}sen\theta) \tag{14}$$

Para determinar un máximo alcance, es necesario derivar la expresión anterior respecto al parámetro del cual nos interesa su dependencia, en este caso, el ángulo, e igualar a cero, donde la recta tangente a la función tiene pendiente cero. Así, derivando, igualando a cero y simplificando obtenemos la siguiente expresión:

$$12kv_0 sin^3\theta - 6g sin^2\theta - 8kv_0 sin\theta + 3g = 0 \tag{15}$$

Debido a la complejidad de la ecuación, y a que la última ecuación está igualada a cero, podemos utilizar el método de Newton-Raphson para encontrar las soluciones de θ donde x es un máximo o un mínimo.

Al simplicarse dicha expresión, ahora tenemos el valor de $f(\theta)$ y su derivada que también puede calcularse $f'(\theta)$ en un punto como primera aproximación a su raíz. Dado que f es cíclica, se toma en cuenta el primer punto θ_k como el más cercano a cero, así, el método converge al valor que se encuentra dentro del rango $[0, \pi/2]$. Además, para asegurarnos de que la raíz encontrada en el método de Newton-Raphson no es un mínimo, podemos graficar la ecuación 14 con respecto a la variación de θ y elegir un valor de θ cercano al máximo de x, para que el método de Newton-Raphson encuentre el valor de θ que genera un máximo en el alcance horizontal. Note que la expresión 14 depende de parámetros como $g, v_o, y\theta$, se asigna un valor a k, v_o y θ corresponde a la variable independiente.

Esta metodología es una de las miles que pueden ser utilizadas, se eligió debido a la rapidez de covergencia, pero el lector puede comparar con otros métodos para elegir el que mejor se ajuste a su función.

I. Conclusiones

Se estudió la dinámica de un objeto inmerso en un marco de referencia inercial, el movimiento de éste corresponde a un tiro parabólico considerando las fuerzas de arrastre en su análisis, respecto a los principios de Newton. Se calcularon los valores de la variable independiente en la **ecuación trascendental** para los cuales dos funciones se intersectan, es decir, el valor de dicha variable para el cual las funciones equivalen por medio de un método numérico refiriéndose a una función no lineal en conjunción de $f(T), g(T)$.

Referencias

[1] Introduction to Numerical Methods. *Jeffrey R. Chasnov*. The Hong Kong University of Science and Technology Department of Mathematics Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong.

[2] Feynman, Richard. Leighton, Robert B. Sands, Matthew. *Física Volumen II: Electromagnetismo y materia*. Editorial Pearson. 1998.