Cálculos Analíticos

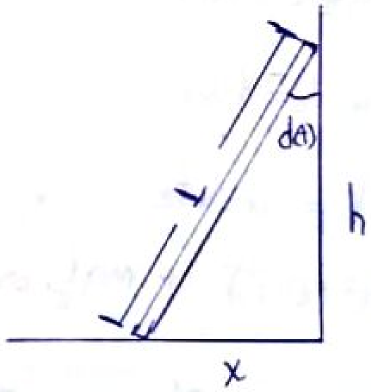
Integrantes:

- Daniel Rodrigo Garduño Roa
- José Salvador Negrete Serrato
- Edgar Daniel Ocampo Ortíz
- Edson Osvaldo Ramírez Esqueda

2. Una escalera de longitud L descansa sobre una pared con un ángulo d respecto a la vertical. No hay fricción entre la pared o el piso y la escalera.

a) Escribe la energía cinética y potencial de la escalera como función de d(t).

Se considera un espacio bidimensional, y por simetría el centro de masa se encuentra en $\frac{L}{2}$, es decir, $h_{CM} = \frac{L}{2}\cos d$ y $x_{CM} = \frac{L}{2}\operatorname{sen} d$.



$V \equiv$ Energía potencial

$T \equiv$ Energía cinética

$$V = mgy = \underline{mg\frac{L}{2}\cos d} \,//$$ (Desde el centro de masa)

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{donde} \quad v^2 = \left(\frac{dh_{CM}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{CM}}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dh_{CM}}{dt} = -\frac{L}{2}\operatorname{sen} d(t)\, d'(t) \quad \text{y} \quad \frac{dx_{CM}}{dt} = \frac{L}{2}\cos d(t)\, d'(t)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(-\frac{L}{2}\operatorname{sen} d(t)\, d'(t)\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\cos d(t)\, d'(t)\right)^2\right] = \underline{\frac{1}{8}mL^2\left(d'(t)\right)^2} \,//$$

b) Usando el método de energía, escribe la ecuación de movimiento para $\delta(t)$. Repite el problema usando las leyes de Newton y compara.

Por energía, se considera que la escalera tiene movimiento rotacional y movimiento traslacional, por ello se tiene

$$T = T_{traslacional} + T_{rotacional} = \frac{1}{8} mL^2 (d'(t))^2 + T_{rotacional}$$

$$T_{rotacional} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(Considerando que rota a la mitad)} \Rightarrow I = \frac{1}{12} mL^2$$

$$= \frac{1}{24} mL^2 (d'(t))$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{8} mL^2 (d'(t))^2 + \frac{1}{24} mL^2 (d'(t)) = \frac{1}{6} mL^2 (d'(t))^2$$

$$V = mg\frac{L}{2} \cos d(t)$$

Definiendo $d_0 \equiv d(0)$

$E = T + V = \text{constante}$ y usando conservación de la energía $E_i = E_f$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} mL^2 (d'(t))^2 + mg\frac{L}{2} \cos d = mg\frac{L}{2} \cos d_0 \quad \text{(Al inicio no tiene energía cinética)}$$

$$\frac{1}{6} L^2 (d'(t))^2 + \frac{gL}{2} \cos d = \frac{gL}{2} \cos d_0$$

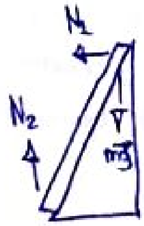
Derivando

$$\frac{1}{3} L^2 d''(t) - \frac{gL}{2} \operatorname{sen} d(t) = 0$$

Finalmente

$$d''(t) - \frac{3g}{2L} \operatorname{sen} d(t) = 0$$

Por leyes de Newton,



$$\sum_i \tau_{CM} = N_2 \frac{L}{2} \operatorname{sen}\alpha(t) - N_1 \frac{L}{2} \cos\alpha(t) \quad (1)$$

También

$$\sum_i \tau_{CM} = \frac{d}{dt} L_{CM} \quad (2)$$ donde por la geometría que se tiene y el punto donde rota la escalera

$$I_{CM} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$L_{CM} = I_{CM}\, \alpha'(t)$$

Entonces, $$N_2 \frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha(t) - N_1 \frac{L}{2}\cos\alpha(t) = \frac{1}{12} m L^2\, \alpha''(t) \qquad (3)$$

Luego por la segunda ley de Newton

$$\sum_i F_x = N_1 = m\ddot{x}$$

$$\sum_i F_y = N_2 = m\ddot{y} + mg$$

Sustituyendo N_1 y N_2 en (3) se tiene

$$(mg + m\ddot{y}) \frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha(t) - m\ddot{x}\frac{L}{2}\cos\alpha(t) = \frac{1}{12} m L^2\, \alpha''(t) \qquad (4)$$

donde

$$x = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha(t)\,\alpha'(t) + \frac{L}{2}\cos\alpha(t)\,\alpha''(t)$$

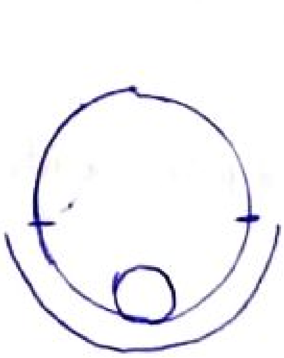
$$y = \frac{L}{2}\cos\alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{L}{2}\cancel{\cos}\alpha(t)\,\alpha'(t) - \frac{L}{2}\operatorname{sen}\alpha(t)\,\alpha''(t)$$

se sustituye en (4) y después de realizar el álgebra se llega a la expresión

$$\alpha''(t) - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\alpha(t) = 0$$

Misma que se obtuvo en el método por energía.

3. Un tubo sólido pequeño de radio r se encuentra dentro de un tubo hueco más grande de radio R. Encuentra el periodo de las oscilaciones del tubo pequeño moviéndose dentro del grande alrededor de su punto de equilibrio.



Como el tubo pequeño rota y se desplaza tendrá un momento angular y uno lineal, así como una energía cinética lineal y energía cinética angular. La energía potencial depende del arco que recorre es decir

$$(R-r)s^2 \quad \text{(Arco)}$$

$$V = \frac{mg}{2}(R-r)s^2$$

De ahí se deduce que $v = (R-r)s'(t)$

y por definición $v = r\omega$

$$r\omega = (R-r)s'(t) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{R-r}{r}s'(t)$$

$$T_{lineal} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R-r)^2(s')^2$$

$$T_{angular} = I\omega^2 = \frac{I}{2}\left(\frac{R-r}{r}s'(t)\right)^2 = \frac{1}{4}m(R-r)^2(s'(t))^2$$

$$T = T_{lineal} + T_{angular} = \frac{3}{4}m(R-r)^2(s'(t))^2$$

Igualando por conservación de la energía $E_f = E_i$

$$K_{inicial} + U_{inicial} = K_{final} + U_{final}$$

$$\cancel{T_i} + V_i = T_f + \cancel{V_f}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}g}{2}(R-r)s^2 = \frac{3}{4}(R-r)^2(s'(t))^2\cancel{m}$$

$$g(R-r)s^2 = \frac{3}{2}(R-r)^2(s'(t))^2$$

donde $s'(t) = \bar{\omega}s$, donde $\bar{\omega}$ es la velocidad angular del tubo pequeño

$$g(R-r)s^2 = \frac{3}{2}(R-r)^2(\bar{\omega})^2s^2$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \qquad \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$