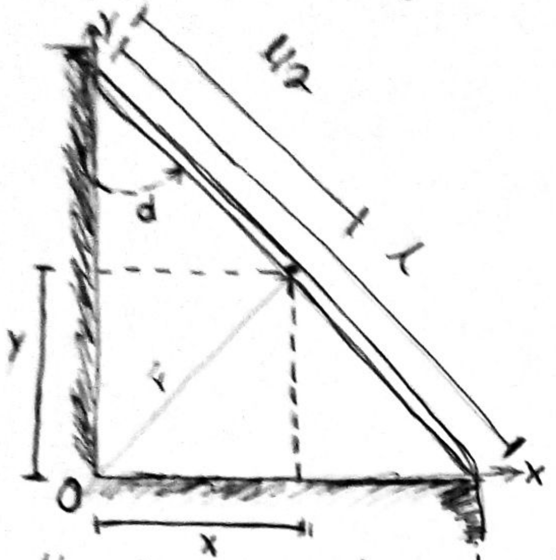
2) Una escalera de longitud l y de masa m, descansa sobre una pared con un angulo α con respecto a la vertical. No hay fricción entre la pared o el piso y la escalera.

a) Escribe la energía cinética y potencial de la escalera con respecto a $\alpha(t)$.

b) Usando el método de la energía, escribe la ecuación de movimiento para $\alpha(t)$. Repite el cálculo usando los principios y compara.

c) Encuentra el angulo donde la escalera pierde contacto con la pared.



a) Sol: Suponemos que la escalera es homogenea y decimos que su centro de masa esta en $\frac{l}{2}$, establecemos el cero de energía potencial en la union (de la escalera) de la pared y el piso. Así determinamos un vector posición y encontramos sus componentes;

$$x = \frac{l}{2}\,\text{sen}(\alpha)$$
$$y = \frac{l}{2}\cos(\alpha)$$

Nesecitamos encontrar la velocidad del centro de masa debido a que la energía cinética se establece como; $T_{cm} + T_L = T_T$, donde $T_{cm} \equiv$ energía lineal del centro de masa y $T_L \equiv$ es la energía debida al movimiento angular de la escalera.

$\Rightarrow T_{cm} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ y sabemos que; $\dot{x} = \frac{l}{2}\cos(\alpha)\dot{\alpha}$

y $\dot{y} = -\frac{l}{2}\text{sen}(\alpha)\dot{\alpha}$ sustituyendo $\dot{x}$ y $\dot{y}$; $(\theta \equiv \alpha)$

$\Rightarrow T_{cm} = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2$, tambien consideramos la energía rotacional y esta esta dada por; $T_L = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ y tomamos como el momento de inercia a

$I = \frac{1}{12}ML^2$, sustituyendo: $T_L = \frac{1}{24}ML^2\dot{\theta}^2$

sumando ambas expreciones para calcular T_T;

$$\underline{T_T} = T_{cm} + T_L = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)ml^2\dot{\theta}^2 = \underline{\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2},$$

Ahora usamos a θ_0 que es ángulo inicial y a θ el angulo donde finalicamos la observación pero no el movimiento.

$$\Rightarrow \underline{\Delta U} = mg\frac{l}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Ambas expreciones estan en funcion del angulo que a su vez es funcion del tiempo.

b) Para encontrar la ecuación de movimiento con energías (principio de conservación de la energía) cinética y potencial seguimos los siguientes pasos:

Por conservación de la energía;

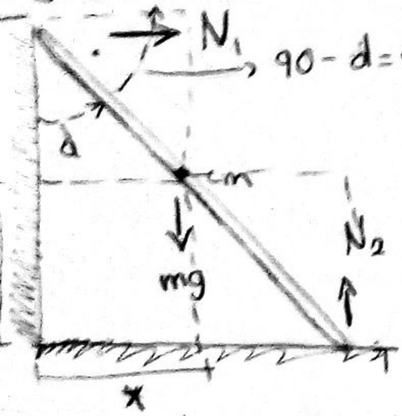
$$\frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta = mg\frac{L}{2}\cos\theta_0$$

$\Rightarrow \frac{1}{6}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$ derivando la expreción con respecto del tiempo,

$\Rightarrow 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{L}\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$ así la ecuación de movimiento está dada por $\underline{\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0}$ //

Sí utilizamos el análisis por las leyes de newton:



$90 - d = \phi$ ① $\Rightarrow \sum \tau = N_2\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - N_1\frac{L}{2}\cos\theta \quad (\theta \equiv d)$

$$= \frac{dL_o}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta}$$

sabemos que $I = \frac{1}{12}mL^2 \Rightarrow I\ddot{\theta} = \frac{m}{12}L^2\ddot{\theta}$

Podemos encontrar N_1 y N_2 usando la segunda ley de Newton; eje x: $N_1 = m\ddot{x}$

eje y: $N_2 = m\ddot{y} + mg = m(\ddot{y} + g)$

y sabemos que $\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}\cos(\theta)\dot{\theta}\right) = \frac{L}{2}\cos(\theta)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta}^2$

y $\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{2}\operatorname{sen}(\theta)\dot{\theta}\right) = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}(\theta)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos(\theta)\dot{\theta}^2$

sustituyendo en las expreciones para N_1 y N_2,

$$N_1 = m\left(\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}^2\right)$$

$$N_2 = m\left(g - \frac{L}{2}(\operatorname{sen}\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)\right)$$

sustituyendo en ①

$$\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\, m\left(g - \frac{L}{2}(\operatorname{sen}\theta\ddot{\theta} + \cancel{\cos\theta\dot{\theta}^2})\right) - m\frac{L}{2}\cos\theta\left(\frac{L}{2}(\cos\theta\ddot{\theta} - \cancel{\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}^2}\right) = \frac{m}{12}L^2\ddot{\theta},$$

$$\Rightarrow mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{L^2}{4}m\operatorname{sen}^2\theta\ddot{\theta} - m\frac{L^2}{4}\cos^2\theta\ddot{\theta} = \frac{m}{12}L^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{L^2}{4}\cancel{m}\ddot{\theta} = \frac{\cancel{m}}{12}L^2\ddot{\theta} \Rightarrow g\operatorname{sen}\theta - \frac{L}{2}\ddot{\theta} = \frac{1}{6}L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{\theta} - \frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta = 0} \;//$$

c) Para encontrar el ángulo donde la escalera se separa de la pared; cuando la pared deja de ejercer una fuerza (N_1) entonces debemos concidelar solo la componente x sobre el centro de masa;

$x:\; N_1 = m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$ y sabemos anteriomente cuanto vale $\ddot{x}$;

$$\ddot{x} = \frac{l}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 = 0$$

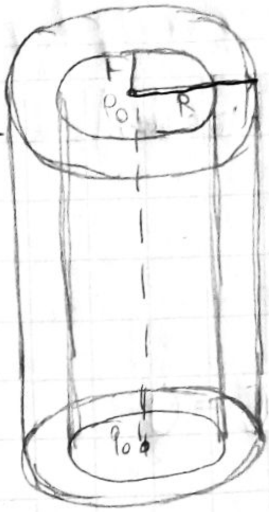
y tambien ya conosemos $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{3g}{2l}\,\text{sen}\theta\cos\theta - \frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\,\text{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{2} = \cos\theta_0 - \cos\theta \Rightarrow \frac{3}{2}\cos\theta = \cos\theta_0$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right)$$

$L = mrV$



(3).- $P_0 \rightarrow$ punto de equilibrio
$r \rightarrow$ radio del cilindro pequeño
$R \rightarrow$ radio del cilindro grande

donde el cilindro pequeño tiene una densidad $\delta = \frac{m_1}{4/3 \pi r^3} \rightarrow \delta = \frac{m}{V} \rightarrow \delta V = m$

Primeramente, la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\pi / \tau \leftarrow \text{en movimiento circular}$$

$\Rightarrow \dot{s}$ o también $\omega = \frac{v}{r} \rightarrow V = \omega \times r$ (forma vectorial)
$= \omega e$

Siendo un sistema ambos cilindros, tenemos que el centro de masa es:

$$r_{cm} = \frac{\int r\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int r\, dm$$ considerándolo el c.m. para el cilindro grande:

$$r_{cm} = \frac{\rho_2 \int r\, dV}{\rho_1 \int dV} \Rightarrow \text{siendo } \rho_2 = \frac{m_t}{\pi (R-r)^2}$$

$$r_{cm} = \frac{m/\pi(R-r) \cdot V}{m/\pi(R) \cdot V} = \frac{1/(R-r)}{1/r} = \frac{r}{R-r}$$

De modo que: $\omega = \frac{\dot{s}}{r_{cm}} = \frac{\dot{s}}{r/R-r} = \frac{(R-r)\cdot \dot{s}}{r}$

Usando: $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ (dado que es un movimiento circular).

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{(R-r)\dot{s}}{r} \; ; \quad \tau = \frac{2\pi r}{\dot{s}(R-r)}$$

si $R >> r$: $\lim_{R \to \infty} \frac{2\pi r}{\dot{s}(R-r)} = 0$ entonces $\tau = 0$