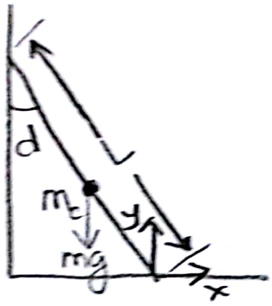
Ejercicio 2



$$x_c = \frac{L}{2} \operatorname{sen} d$$

$$y_c = \frac{L}{2} \cos d$$

a) Energía cinética $= K_{traslación} + K_{rotación}$

$$K = \frac{1}{2} m_c (\vec{v_c})^2 + \frac{1}{2} I (\vec{\omega})^2$$

$$= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_c L^2\right) \dot{d}^2$$

$$= \frac{1}{8} m_c L^2 \dot{d}^2 + \frac{1}{24} m_c L^2 \dot{d}^2$$

$$= \frac{1}{6} m_c L^2 \dot{d}^2$$

Energía potencial

$$U = m_c g y_c = mg \frac{L}{2} \cos d$$

b) $d(t) = ?$

Scanned by CamScanner

b) $d(t) = ?$

La energía mecánica total es $E = k + U$

y $E_i = E_f$.

Al principio la escalera está en reposo

$$\frac{m_c g L}{2} = \frac{m_c L^2}{6}\dot{d}^2 + \frac{m_c L}{2}\cos(d)$$

$$\dot{d}^2 = 3\frac{g}{L}(1-\cos(d)) = 6\frac{g}{L}\mathrm{sen}^2\left(\frac{d}{2}\right)$$

De aquí hallamos la velocidad angular

$$\dot{d}^2 = \omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{d_0}^{d}\frac{dd}{\mathrm{Sen}(d/2)} = \sqrt{6\frac{g}{L}}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\mathrm{sen}^2\left(\frac{d}{2}\right)} = \sqrt{6\frac{g}{L}}\,t$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}^2\left(\frac{d}{2}\right) = -\sqrt{\frac{L}{6g}}\,\frac{1}{t} \qquad \therefore d = 2\,\mathrm{arcsen}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{L}{6g}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

3) Debido a nuestro problema en particular, ya que se trata de dos cilindros, las coordenadas que utilizaremos son las cilindricas pero ya que en el problema no habra movimiento en el eje z, las coordenadas se reduciran a las polares

Primeramente necesitamos obtener la velocidad en las coordenadas polares

Para obtener la velocidad hay que derivar el vector de posición respecto del tiempo.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\vec{U}}_\rho$$

Para encontrar $\dot{\vec{U}}_\rho$ usamos la expresión en cartesianas del vector.

$$\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\operatorname{Sen}\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{Cos}\theta\,\hat{\jmath})$$

El vector entre parentesis es $\vec{U}_\theta$. Por tanto

$$\dot{\vec{U}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{U}_\theta$$

y la velocidad se escribe

$$\vec{V} = \underbrace{\dot{\rho}\,\vec{U}_\rho}_{\text{Vel. radial}} + \underbrace{\rho\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta}_{\text{Vel. angular}}$$

En nuestro problema $\dot{\rho} = 0$, $\theta = S$

$$\vec{V} = \rho\dot{S}$$

La distancia ρ esta en terminos de r y R

$$\rho = (R - r)$$

Asi entonces $\vec{V} = (R-r)\dot{S}$

Y como sabemos $\omega = \frac{V}{r}$

Lo que entonces la velocidad angular entre los dos cilindros nos queda

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{(R-r)\dot{S}}{r}$$

En nuestro problema tendremos tanto energia cinetica angular y lineal

$$E_{K,ang} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{donde } I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\Rightarrow E_{K,ang} = \frac{1}{4} m \cancel{r^2} \frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}} \dot{S}^2 = \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{S}^2$$

Para la energia cinetica lineal

$$E_{K,lin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{pero } v = (R-r)\dot{S}$$

$$= \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{S}^2$$

y la energia total sera la suma de ambas

$$E_{K,Tot} = \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{S}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{S}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{S}^2$$

Para la energia potencial tenemos

$$E_U = mgh$$

Pero necesitamos obtener h primero. Y para calcularla traslademonos al interior del sistema de los dos tubos e imaginemonos un triangulo del cual sacaremos la altura.