Cálculos Analíticos

2- Una escalera de longitud L descansa sobre una pared con un ángulo d respecto a la vertical. No hay fricción entre la pared o el piso y la escalera.

a) Escribe la energía cinética y potencial de la escalera como función de $d(t)$

Se sabe que la escalera tiene una longitud L, una masa m y que el ángulo d es función del tiempo, por lo que $d = d(t)$.

Se puede considerar a la escalera como una varilla uniforme con un centro de masa ubicado en $\frac{L}{2}$. El siguiente diagrama muestra la geometría del problema

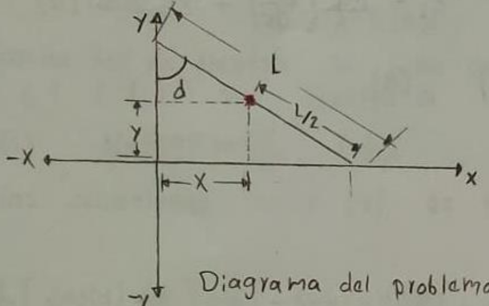


Diagrama del problema

La posición del centro de masa como función de $d(t)$ está dada por las siguientes ecuaciones

$$x = \frac{L}{2}\,\text{sen}(d(t)) \quad (1)$$
$$y = \frac{L}{2}\cos(d(t)) \quad (2)$$

El vector de posición es

$$\vec{r}(d(t)) = \frac{L}{2}\left(\text{sen}(d)\,\hat{\imath} + \cos(d)\,\hat{\jmath}\right) \quad (3)$$

Derivando (1) y (2) con respecto de t se obtiene la velocidad del centro de masa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left(\text{sen}(d(t))\right) = \frac{L}{2}\cos(d(t))\frac{d\,d(t)}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{L}{2}\cos(d)\frac{dd}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left(\cos(d(t))\right) = -\frac{L}{2}\,\text{sen}(d(t))\frac{d\,d(t)}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{L}{2}\,\text{sen}(d)\frac{dd}{dt} \quad (5)$$

El vector de velocidad es

$$\vec{v}(d) = \frac{L}{2}\left(\cos(d)\frac{dd}{dt}\hat{\imath} - \text{sen}(d)\frac{dd}{dt}\hat{\jmath}\right) \quad (6)$$

La energía cinética de traslación es

$$E_{TK} = \frac{1}{2}mv^2$$

y $$v^2 = |\vec{v}|^2 = \frac{L^2}{4}\cos^2(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{4}\text{sen}^2(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2\left[\cos^2(d) + \text{sen}^2(d)\right] = \frac{L^2}{4}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 \quad (7)$$

Por tanto, la energía cinética total será la suma de la energía cinética rotacional del centro de masa más la energía cinética de translación del centro de masa

$$E_T = E_{RK} + E_{TK} = \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{8}m\left(\frac{dd}{dt}\right)^2$$

$$\therefore\ E_T = \frac{mL^2}{6}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 \quad (7)$$

La energía potencial será

$$E_U = mgy = mg\left(\frac{L}{2}\cos(d(t))\right) = \frac{Lmg}{2}\cos(d(t)) \quad (8)$$

6) Usando el método de la energía, escribe la ecuación de movimiento para $d(t)$. Repite el cálculo usando las leyes de Newton y compara

Por el principio de conservación de la energía se sabe que

$E_1 = E_2 = cte$

Entonces para un tiempo t_0 inicial se tiene un ángulo d_0 incial y una energía cinética igual a cero ya que parte del reposo.

Por tanto, de las ecuaciones (7) y (8) se tiene que

$$E_1 = \frac{mL^2}{6}\cancel{\left(\frac{dd_0}{dt}\right)}^{2=0} + \frac{mLg}{2}\cos(d_0) \qquad y \qquad E_2 = \frac{mL^2}{6}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \frac{mLg}{2}\cos(d)$$

$$y \qquad \frac{mLg}{2}\cos(d_0) = \frac{mL^2}{6}\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \frac{mLg}{2}\cos(d) \qquad (9)$$

Despejando a $\frac{dd}{dt}$ de (9) se tiene

$$\frac{dd}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos(d_0) - \cos(d)\right)} \qquad (10)$$

Integrando la ecuación (10) se tiene

$$\sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{\sqrt{\cos(d_0) - \cos(d)}} = \int_{t_0}^{t} dt = t \qquad con \quad t_0 = 0 \qquad (11)$$

Sabiendo que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$ y que $\cos^2(\theta) = 1 - sen^2(\theta)$

entonces $\cos(d_0) = \cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - sen^2\left(\frac{d_0}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - \left[1 - \cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right)\right] = 2\cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - 1$

y $\cos(d) = \cos^2\left(\frac{d}{2}\right) - sen^2\left(\frac{d}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{d}{2}\right) - \left[1 - \cos^2\left(\frac{d}{2}\right)\right] = 2\cos^2\left(\frac{d}{2}\right) - 1$

$\therefore \cos(d_0) - \cos(d) = 2\cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - 1 - \left(2\cos^2\left(\frac{d}{2}\right) - 1\right) = 2\left(\cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{d}{2}\right)\right)$

y la integral (11) se puede escribir como

$$\sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{d}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{L}{6g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{d_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{d}{2}\right)}}$$

Si $\cos\left(\frac{d_0}{2}\right) = K$ entonces se tiene

$$\sqrt{\frac{L}{6g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{K\sqrt{1 - \frac{\cos^2(d/2)}{K^2}}}$$

Haciendo un cambio de variable de $sen\,\varphi = \frac{\cos(d/2)}{K}$ se tiene

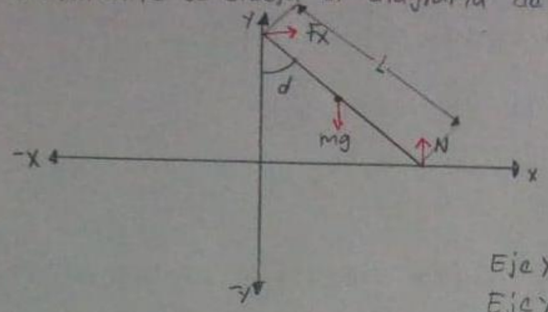
$$\sqrt{\frac{L}{6g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{K\sqrt{1 - sen^2\varphi}} = \sqrt{\frac{L}{6g}}\int_{d_0}^{d}\frac{dd}{K\cos\varphi}$$

por otro lado

$K sen\,\varphi = \cos(d/2) \Rightarrow \frac{d}{2} = \cos^{-1}(K sen\,\varphi)$ y por tanto $\frac{dd}{2} = \frac{-K\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 sen^2\varphi}}$

Ahora usando las leyes de Newton

Primeramente se dibuja el diagrama de las fuerzas



Por el enunciado del problema se sabe que no hay fricción entre la pared o el piso y la escalera.

En el equilibrio la suma de las fuerzas en el eje X y Y es igual a cero

Eje X : $F_x = 0$ (14)

Eje Y : $N - mg = 0$ (15)

Por la segunda ley de Newton se sabe que $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ por lo que (14) y (15) son iguales a

$F_x = m\frac{d^2X}{dt^2}$ (16) $\qquad N - mg = m\frac{d^2Y}{dt^2}$ (17)

Derivando las ecuaciones (4) y (5) se puede conocer $\frac{d^2X}{dt^2}$ y $\frac{d^2Y}{dt^2}$ en función de $\frac{dd}{dt}$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left[\cos(d)\frac{dd}{dt}\right] = \frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \cos(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right] \qquad (18)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left[\operatorname{sen}(d)\frac{dd}{dt}\right] = -\frac{L}{2}\left[\cos(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right] \qquad (19)$$

Sustituyendo (18) y (19) en (16) y (17) se tiene que

$$F_x = m\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \cos(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right] \qquad (20)$$

$$N = mg - \frac{Lm}{2}\left[\cos(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right] \qquad (21)$$

Lo anterior describe el movimiento de traslación del centro de masa.

El movimiento de rotación del centro de masa está dado por

$$I_{cm}\frac{d^2d}{dt^2} = N\frac{L}{2}\operatorname{sen}d - F_x\frac{L}{2}\cos d \qquad (22) \qquad \text{con } I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$$

Sustituyendo los valores de N y F_x en (22) se tiene que

$$\frac{1}{12}mL^2\frac{d^2d}{dt^2} = \left(mg - \frac{Lm}{2}\left[\cos(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right]\right)\frac{L}{2}\operatorname{sen}d - \left(m\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 + \cos(d)\frac{d^2d}{dt^2}\right]\right)\frac{L}{2}\cos d$$

$$= \frac{L}{2}mg\operatorname{sen}d - \frac{Lm}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}(d)\cos(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2 - \frac{Lm}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}^2(d)\frac{d^2d}{dt^2} + \frac{mL}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}(d)\cos(d)\left(\frac{dd}{dt}\right)^2$$

$$- \frac{mL}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\cos^2(d)\frac{d^2d}{dt^2}$$

$$= \frac{L}{2}mg\operatorname{sen}(d) - \frac{mL^2}{4}\left(\operatorname{sen}^2(d) + \cos^2(d)\right)\frac{d^2d}{dt^2} = \frac{Lmg}{2}\operatorname{sen}(d) - \frac{mL^2}{4}\frac{d^2d}{dt^2}$$

$$\frac{1}{12}mL^2\frac{d^2d}{dt^2} + \frac{mL^2}{4}\frac{d^2d}{dt^2} = \frac{L}{2}mg\operatorname{sen}(d)$$

$$\frac{d^2d}{dt^2}\left(\frac{mL^2}{3}\right) = \frac{L}{2}mg\operatorname{sen}(d) \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{d^2d}{dt^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}(d) \qquad (23)$$

Por tanto la integral queda como

$$\sqrt{\frac{L}{6g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{-2K\cos\varphi\, d\varphi}{K\cos\varphi\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad K=\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (12)$$

Desarrollando en serie el denominador de la integral

$$(1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}K^2\operatorname{sen}^2\varphi+\frac{3}{8}K^4\operatorname{sen}^4\varphi+\dots$$

con

$$\sqrt{\frac{2L}{3g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$ la cual es una integral elíptica completa de primera especie

cuya solución es

$$\sqrt{\frac{2L}{3g}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}K^2\operatorname{sen}^2\varphi+\frac{3}{8}K^4\operatorname{sen}^4\varphi+\dots\right)d\varphi = \sqrt{\frac{2L}{3g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}K^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{8}K^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\dots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2L}{3g}}\,\frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2K^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2K^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2K^6+\dots\right)$$

Por tanto $$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2L}{3g}}\left(1+\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\cos^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{225}{2304}\cos^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\dots\right) \qquad (13)$$

El método de la energía es mucho más corto y directo que el método de las leyes de Newton. Además con el método de la energía se obtuvo una ecuación diferencial de primer orden y con el método de Newton se obtuvo una de segundo orden.

Muestra que la escalera pierde contacto con la pared al caer cuando $3\cos(\alpha) = 2\cos(\alpha_0)$, donde α_0 es el ángulo inicial entre la escalera y la pared en reposo.

Si $3\cos(\alpha) = 2\cos(\alpha_0)$ entonces de la ecuación (10) se tiene que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha))} = \sqrt{\frac{g}{L}(3\cos(\alpha_0) - 3\cos(\alpha))} = \sqrt{\frac{g}{L}(\cos(\alpha_0))}$$

o bien $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\cos(\alpha_0)$ (24)

Al sustituir (24) en la ecuación (20) se tiene

$$F_x = m\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \cos(\alpha)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$
$$= m\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(\alpha)\frac{g}{L}\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

y de la ecuación (23) se sabe que $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}(\alpha)$

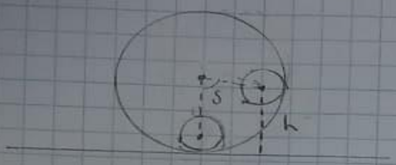
por tanto

$$F_x = m\frac{L}{2}\left[-\operatorname{sen}(\alpha)\frac{g}{L}\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}(\alpha)\right]$$

Pero como $3\cos(\alpha) = 2\cos(\alpha_0)$ se tiene que F_x es

$$F_x = m\frac{L}{2}\left[-\frac{g}{L}\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha_0) + \frac{g}{L}\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha_0)\right] = 0 \qquad (25)$$

Debido a que la fuerza normal en la dirección X es igual a cero eso implica que la escalera no ejerce ninguna fuerza sobre la pared y por tanto se concluye que la escalera pierde contacto con la pared cuando $3\cos(\alpha) = 2\cos(\alpha_0)$



UN TUBO SOLIDO PEQUEÑO DE RADIO r SE ENCUENTRA DENTRO DE UN TUBO HUECO MAS GRANDE DE RADIO R. ENCUENTRA EL PEREODO DE LAS OSCILACIONES DEL TUBO PEQUEÑO MOVIENDOSE DENTRO DEL GRANDE ALREDEDOR DE SU PUNTO DE EQUILIBRIO.

EN θ MAXIMA TENEMOS QUE:

$\ddot{x} = x$, $E_K = 0$, $E_p = mgh$ (PUNTO MAXIMO)

$h = R - r(1 - \cos\theta)$ PARA ANGULOS PEQUEÑOS $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$\Rightarrow E_p = W(R-r)\frac{\theta^2}{2}$ QUE ES LA ENERGIA TOTAL EN ESE PUNTO DONDE W ES EL PESO DEL CILINDRO

AHORA CALCULAMOS LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA (cm).

$\dot{x}_{cm} = (R-r)\dot{\theta}$

$$\boxed{\omega = \frac{\dot{x}_{cm}}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\theta}}$$

POR LA ENERGIA CINETICA TENEMOS QUE: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2$

- EN EL PUNTO MAS BAJO:

$E_p = 0$ $\qquad E_c =$ ENERGIA TOTAL

POR CONSERVACION DE LA ENERGIA

$E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2}$

$\Rightarrow 0 + W(R-r)\frac{\theta^2}{r} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + 0$

COMO: $W = mg$
$\dot{\theta} = \omega\theta$

$\Rightarrow mg(R-r)\frac{\theta^2}{2} = \frac{3}{4}m(R-r)^2(\omega\theta)^2$

$\Rightarrow g = \frac{3}{2}(R-r)(\omega^2)$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}$

PARA CALCULAR EL PERIODO TENEMOS QUE

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{R-r}{g}\right)}}$$